数学辞海

MATHEMATICS DICTIONARY

第四卷

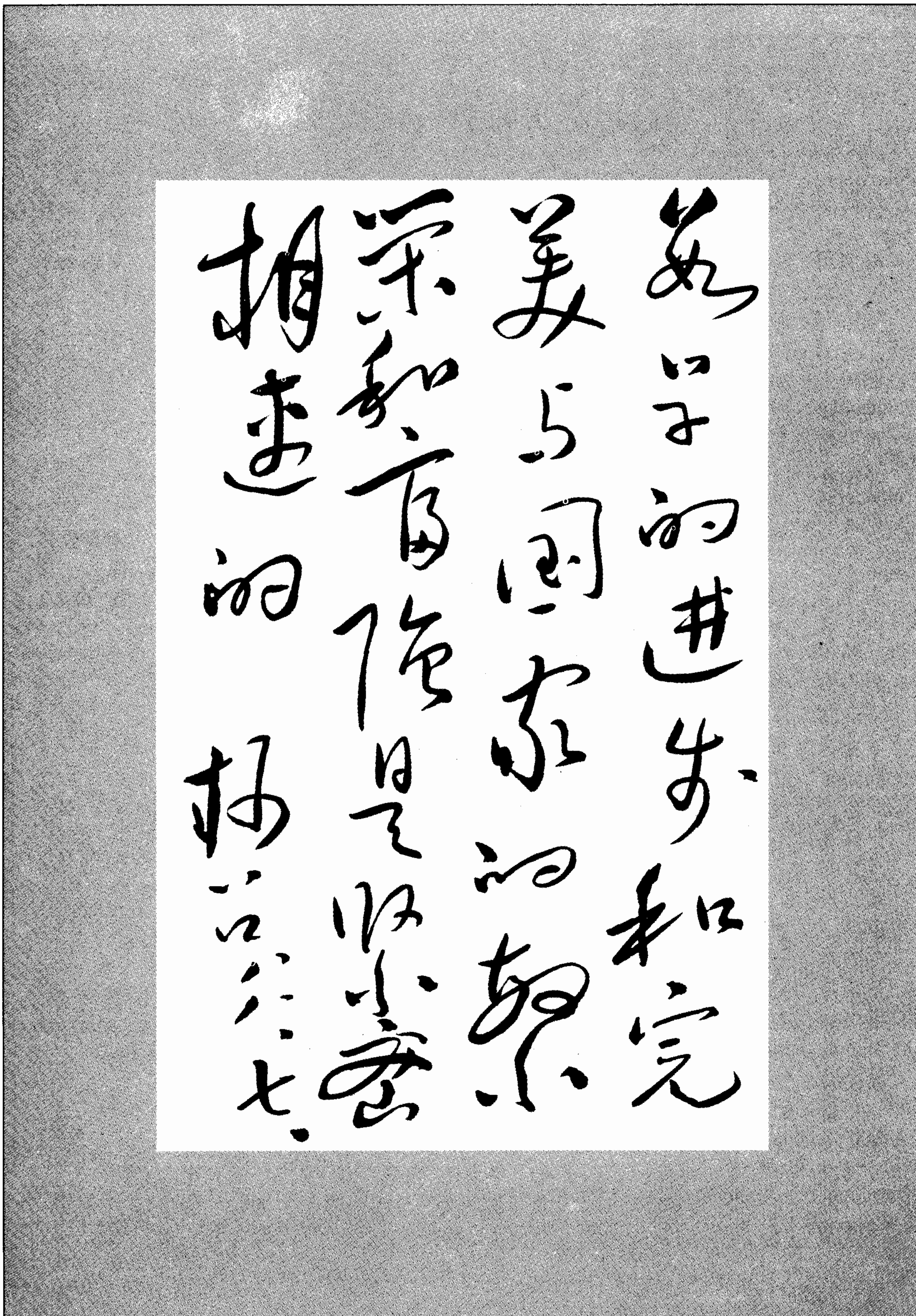
山西教育出版社
东南大学出版社
中国科学技术出版社

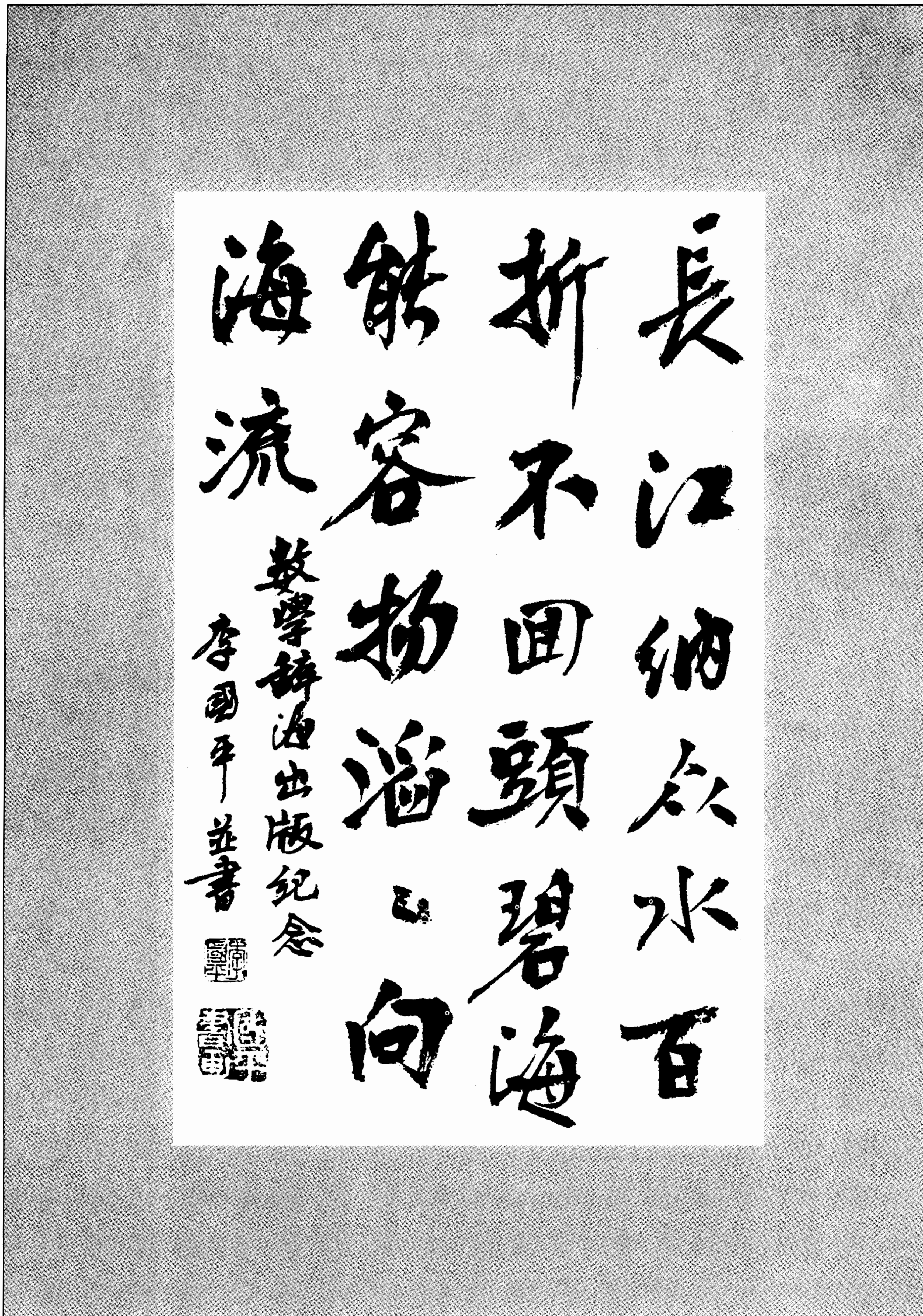
山西省人民政府资助出版

如果你有数学問題，
而不好意思發問，
然可从本書獲得解答。
一九八八年八月書祝
数学辭海成功
陳省身

学习、研究、运用、发展数学，让中国数学赶上国际先进水平，促进社会主义現代化建设

吴大任


数学的进步和完
美与国家的繁
荣和富强是紧密
相连的
杨 一九八七


長江納众水
百折不回頭
碧海能容物
滔滔向海流
數學辭海出版紀念
李國平并書

《数学辞海》总编辑委员会

《数学辞海》第四卷编辑委员会

《数学辞海》第四卷各分支学科编辑委员会

序

当我们向着日益临近的21世纪走去的时候，一部巨著——《数学辞海》将要面世了。这是我国200余所高等院校、科研机构，数以千计的数学家、数学工作者共同劳动的结晶，是一件影响深远的大事。

还是在本世纪同上一世纪交接的1900年，希尔伯特就以23个数学问题作为送旧迎新的礼物，高瞻远瞩地指引着20世纪数学发展的若干重要进程。如今，20世纪的帷幕行将落下，我们惊喜地看到，在这百年间，数学已经发生了多么巨大的变化！人们对数学的认识更深刻了，数学的分支更多了，数学的广度和深度，都远远超出了本世纪初的预料。异军突起的新科学和新技术，诸如计算机科学、航天技术、生命工程、数字通信以及新能源的开发、新材料的应用等，无不需要数学，社会科学和人文科学的经济、教育、语言、考古等领域，也开始与数学结下不解之缘。所有这些学科在向数学索取的同时，也都在某一方面推动和改变着数学。数学已经发展成为内涵广泛的数学科学。数学是大自然的语言，又是人类社会生活中各种关系的高度概括。数学在现实世界中获取模型，扩大了自己的外延，同时展现了新的内涵、新的抽象。如果说古希腊和古代中国的数学只是涓涓细流，那么，今天之数学已经汇成了波流浸灌的长江大河。

一个人可以学贯中西，但无法懂得现代数学的方方面面，而社会变革的进程和新技术的浪潮却迫使人们学习和应用更多的数学。解决这个矛盾的办法之一，自然是编纂一部大型的数学工具书。《数学辞海》正是在这样的时代需求背景之下应运而生的。有了这种巨大的推动力量，它才能克服种种艰难曲折，从第一页稿纸，发展成为我们所见到的这部别具一格的鸿篇巨制。

为什么这本书能使作者们激动，愿意竭诚为之构筑，又能吸引读者，使之企足而待呢？这是由于数学自身的地位和价值，它在实践中的巨大作用和自身的美。

数学首先是人们生活和生产的工具。马克思非常赞同康德的这样一句话：“一门科学，只有当它成功地应用数学时，才算达到了完善的地步。”事实上，数学被使用的程度，往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。很难设想，在一个低技术的国家，会产生高深的数学，而高技术的社会形态，必有与之相适应的数学水平。毫无疑问，在科学技术飞速发展的当今世界，对数学的需求将与日俱增。

其次，数学又是一种文化形态。古往今来，人们在数学这块沃土上耕耘，收获了许多硕果。这些美好的硕果，本身就是一首首动人的诗篇，闪耀着智慧的光芒。一般人都会欣赏艺术，然而，当一个人只要具有基础的数学知识，同样可以对一道经典的数学名题和某个优美的解法叹为观止。人们还概括了大量实际模型的抽象数学，通过形式推演，以得出

系统的理论，再应用到更广泛的总体上去。数学的这种以简驭繁的本领决定于它的高度概括性。正是由于概括，数学形成了包含各个学科的优美结构。数学的发展推动了自然结构观的发展，它有力地带动了其他学科，大大加速了人类文明史的进程。

数学的作用，还在于它有着独特的培育人的功能。数学是每个人必须学习的基础学科。从小学到中学，数学的学时最多，除了因为数学是一切科学的基础和工具之外，更因为数学有着独特的思维教育和智力开发的作用。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新的特征，集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。所以，学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练，被称为“思想的体操”。

为了全面地反映古今中外的数学成果、体现数学的多种功能，本书既兼顾传统数学和现代数学，又兼顾抽象的基础数学和具体的应用数学。考虑到广大数学教育工作者的需求，本书还将初等数学和高等数学相对地进行了划分，并按习惯将某些分支学科集中列卷，此外还编纂了包含数学史与数学教育等分支学科的专卷，也系统地介绍了中国的古算。这样编纂的《数学辞海》将会充分地显示数学的工具意义、文化意义和教育意义。愿这部国人自编的《数学辞海》既能为国家经济建设服务，又能在民族文化建设中起到应有的作用。

《数学辞海》是改革开放的产物，又将为改革开放服务。人们或许没有想到，这部巨著竟出自民办的编写组织。编纂者来自大江南北、长城内外、海峡两岸，在历时 10 余年间，数百所大专院校、科研机构的千余名专家学者日夜辛劳、自愿奉献，在《数学辞海》中编织着自己的理想和愿望。社会各界积极赞助，有识之士慷慨捐赠，海外同胞亦纷纷来电来函表示支持，用他们的心意渲染着文化建设的宏图。在这个民办写作团体中，人们互相信任、互相支持、互相勉励，充满了成就事业的认同感、紧迫感。这一写作经验也清楚地说明：在共同的愿望下，民办科研也是一条坦途。这是《数学辞海》编写过程中给我们的一个十分有益的启示。

像一切事物一样，《数学辞海》还不会达到绝对完善的境界。相反，这部反映浩如烟海的数学知识，动员了如此巨大力量而编纂的大型著作，首次面世时，一定会有许多不足之处，例如整体结构、条目收集、词义诠释、词类归属等，都还会有需要进一步推敲、商榷的地方。数学是极为严谨的科学，《数学辞海》必将在众多专家的严谨尺度之下，逐版改进。我们今天为之高兴的是，将来可能成为传世之作的《数学辞海》已有了良好的雏形，我们准备将它作为迎接新世纪的礼物，奉献给关心它、需要它的广大读者。

程民德

1998 年 6 月

凡　　例

一、编　排

1. 全书包括数学科学的100余个分支学科或专题项目，按照从初等数学到高等数学，从古典数学到现代数学，从理论数学到应用数学的原则，将整个数学科学划分为6卷编辑出版（参见《数学辞海》六卷本内容划分方案）。

2. 各卷正文均按数学知识的结构体系编排，同一分支学科（或同一专题项目）的条目相对集中，一般按知识本身的结构、层次、逻辑等关系确定其先后顺序，而数学史部分，如数学家、数学名著、数学期刊、数学团体等，则分别按其出生、出版、创刊、成立的年代先后顺序编排。

3. 各卷目录标题分为三级：一级标题为一个分支学科或一个知识门类。一级标题之下，则按知识构成设若干个二级标题。例如，第一卷中的“数学分析”为一级标题，下设六个二级标题——“实数理论”、“变量与函数”、“极限理论”、“微分学”、“积分学”和“无穷级数”；又如，第六卷中的“中国数学史”为一级标题，下设四个二级标题——“中国古代数学史”、“中国古代数学著作”、“中国古算名词术语”和“中国数学家”。三级标题为具体条目名称。

4. 同一卷中不同分支学科之间的内容有重复时，其知识主题一般地只在一处设条目；不同卷中的学科内容有重复时，其知识主题在各相关部分均设条目，但在释文内容上各有侧重。

二、条　目

1. 条目的标题一般为一个词，如“圆”、“群”、“环”、“函数”、“矩阵”、“向量”、“方程”等，也有的是一个词组，如“勾股定理”、“常微分方程的通解”、“哥德巴赫猜想”、“希尔伯特第6问题”等。

2. 条目设立的条件：1）独立的知识主题或已形成的固定概念；2）能够应用准确的、人们习惯和易于理解的词标引；3）便于读者快速查阅。

3. 条目的分类：条目按其释文的长短分为五类：特长条目（3000字左右）、长条目（1000—3000字）、中条目（300—1000字）、短条目（300字以内）和参见条目。

4. 本书所收的数学名词术语，力求与“全国自然科学名词审定委员会”公布的《数学名词》（科学出版社，1993）保持一致。外国人名的中文译名，力求与《中国大百科全书·数学卷》和梁宗巨主编的《数学家传略词典》（山东教育出版社，1989）中的译名保持一致。未出现在上述著作中的外国人名的中文译名，则采用数学界的约定译名或用习惯译法译出的译名。

三、释　文

1. 本书条目的释文，以文字叙述为主，并采用规范化的现代汉语，力求科学、准确、简明、通俗，杜绝教材式语言和口语，释文开头不再重复条目的标题。

2. 释文开头一般要求破题，然后给出严格的数学定义，并尽量阐明该条目内容的历史沿革及其在本分支学科或知识门类中的地位、作用、发展趋势等，以增强释文的科学性和可读性。

3. 一词多义的释文，用①…②…③…分项叙述，某个条目的释文需由其他条目释文补充说明的，采

用“参见”的方式，被参见的条目标题需加引号，条目标题前加“参见”字样，并置于圆括号之内。

4. 对常见的异名同义词，只给出一种条目标题的释文，其余异名条目亦列入正文，但不再写释文，给出释文的条目标题加引号，条目标题前加“即”字样。例如：矢量(vector)即“向量”；全纯函数(holomorphic function)即“解析函数”；正则函数(regular function)即“解析函数”。

5. 每一个条目标题后，一般在圆括号内标注有对应的英文。凡外国人名(日本人除外)在条目的释文中第一次出现时，在其中文译名后的圆括号内标注有相应的外文原名的姓和名的首字母，并用逗号隔开。例如，欧几里得(Euclid)、牛顿(Newton，I.)、高斯(Gauss，C. F.)。同一外国人名在条目的释文中第二次出现时，不再标注外文。在日本人名、中国人名、中国古代数学史、中国古代数学著作、中国古算名词术语等条目标题后，一般在圆括号内标注汉语拼音。

6. 如果条目乙的基本定义已经完全包括在条目甲的释文之中，那么条目乙只作为“参见条目”保留，所参见的条目标题需加引号，并在条目标题前加“见”字样，而释文不再重复。例如，在条目“线性变换”的释文中，已给出“单位变换”、“恒等变换”和“零变换”的定义，则上述三个条目就作为“参见条目”予以保留，并分别表示为：单位变换(unit transformation)见“线性变换”；恒等变换(identity transformation)见“线性变换”；零变换(null transformation)见“线性变换”。

四、索　引

1. 本书每一卷正文之后，均附有三种索引，即条目笔画索引、条目音序索引和条目西文索引。索引中条目标题后面的数字，表示该条目在正文中的页码。

2. 在条目笔画索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按 一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇀(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，㇏(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩“亅”外)归为 乛(折)。第一字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 在条目音序索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

4. 在条目笔画索引和条目音序索引中，凡第一字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在两种索引的最后。西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画或音序排列。

5. 在条目西文索引中，按条目标题的起首西文字母顺序排列；条目标题的西文缩写，按一个词排列。凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。没有西文译名的条目，未收进条目西文索引。

6. 在各卷索引之后，还附有本卷涉及到的中外人名译名对照表，以供读者查阅。

目 录

《数学辞海》六卷本内容划分方案

第一卷

数学
算术
初等代数
平面几何
平面三角
立体几何
球面几何
平面解析几何
空间解析几何
初等数论
高等代数
高等几何
数学分析
集合论
形式逻辑
布尔代数
概率论与统计学初步
数学符号表

第二卷

数学
组合学
线性与多重线性代数
群及其推广
李群与李代数
环与代数
模与同调代数
序与格
范畴论与代数 K 理论
域论与伽罗瓦理论
数论
代数几何
微分几何学
凸集几何与距离几何
一般拓扑学
代数拓扑学与流形拓扑学
奇点理论与突变理论
数学符号表

第三卷

数学
实变函数论
复变函数论
多复变函数论
测度论
泛函分析
变分法
函数逼近论
调和分析
流形上的分析
位势论
凸分析
非标准分析
小波分析
分形几何
常微分方程
偏微分方程
积分方程
动力系统
特殊函数
数学符号表

第四卷

数学
数学基础
数理逻辑
计算数学
概率论
随机过程
统计学
经济数学
生物数学
数学物理与理论物理
模糊数学
数学符号表

第五卷

数学
运筹学
系统理论
控制理论
通信与信息理论
画法几何与工程图学
计算机科学
数理语言学
力学
天文学
测绘学
数学符号表

第六卷

数学
中国数学史
外国数学史
数学符号史
数学团体与研究机构
数学竞赛与数学奖
数学期刊
数学教育
数学哲学
数学名题与猜想
珠算
数学发展史年表

第四卷条目目录

说明：该目录由本卷所属各分支学科或专题项目的全部条目（包括给出释文的条目及其参见条目）组成，按知识结构顺序编排，即按条目在正文中出现的先后顺序排列.

数学基础

几何基础

精确性经典数学基础

非精确性经典数学基础

数　理　逻　辑

数理逻辑基础

公理集合论

第四卷条目目录

模 型 论

证　明　论

递 归 论

非经典逻辑

计 算 数 学

误 差 理 论

数 值 逼 近

计 算 几 何

高次代数方程求根

非线性方程数值解法

多元非线性方程组数值解法

线性方程组数值解法

代数特征值问题数值解法

常微分方程数值解法

偏微分方程数值解法

蒙特卡罗法

科学计算与并行算法

概　率　论

概率论的基本概念

随机变量及其分布函数

随机变量的数字特征

特征函数与概率不等式

特殊的分布与概率纸

随机变量列的极限定理

大 数 律

随 机 过 程

通 论

平 稳 过 程

马尔可夫过程

随机点过程与分支过程

鞅论与随机分析

统　计　学

统计基础

参 数 统 计 推 断

非参数统计推断

序 贯 分 析

线 性 模 型

试验设计

统计质量管理

抽样技术

多元统计分析

时间序列分析

可靠性统计

计量教育心理学

经济数学

数理经济学

经济计量学

投入产出分析

经济预测

金融数学

生物数学

数学生态学

系统生态学

生物动力学系统分析

生物统计学

人口统计学

医 学 统 计

行为统计

群体遗传学

数量遗传学

数量分类学

生物控制论

体育运动数学

数学物理与理论物理

数 学 物 理

规 范 场 论

孤立子理论

量子力学

量子光学

热力学与统计物理

分析力学

电动力学

模　糊　数　学

模糊集合论

模糊关系与模糊优化

模　糊　结　构

模糊系统与模糊控制

数　　学

数学(mathematics)　数学一词来自希腊文 $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\chi\eta'$，其字根 $\mu\alpha'\theta\eta\mu\alpha$ 意义为知识、科学，它非常恰当地反映这个领域的广泛性与普遍性.从历史上看，数学常常用其某个侧面来表示：中国古代用算学来强调其计算技术方面，而西方多用几何学一词代表数学，以显示欧几里得(Euclid)的《几何原本》传统，而实际上，其中也包括数论和量论的内容.随着时间的流逝，数学的内容不断地扩大，在17—18世纪直至19世纪，被包括在数学领域内的许多学科和分支已经独立出去，而在各学科的边界又不断创造和衍生出一系列新的学科，这些新学科现在已融合而成面向21世纪的庞大的数学科学领域，它是一个具有内在统一性的科学技术群.以下从四个方面进行论述：

1.数学的对象和特点.数学中最原始的对象是数与形.自然数已经是相当抽象的概念，它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土中抽象出数1来，而且还要由数1得出更一般数的概念.有了自然数的概念还会遇到基数和序数的矛盾.至于记数法和位值制都是中国对人类文明的伟大创造，这种伟大创造绝不仅仅是对自然界的认识和对哲学思辨的产物，它真正体现数学的成就.数学另一个原始对象是形，它更为直观，甚至长期以来人们也把它当成自然科学的对象，尽管柏拉图(Plato)早就说过，三角形属于理念的世界.当然现在数学的空间远远超出现实的空间，数学中的"形"也不限于人们感官能摸得着、看得见的东西，它是更抽象的概念，如高维空间、无穷集合、群、拓扑等是任何其他学科都不研究的对象.数学作为一门模式科学，应该归入更广泛的符号和形式科学类.这一类似乎应该介于哲学类与具体科学，即自然科学与社会科学之间.它的姊妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成型的一般系统学.有意思的是，有些数学家也认为"数学是一种语言"、"数学可还原为逻辑"、"数学是一种普遍方法"等，这些说法尽管有些偏颇，但毕竟触到数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系.数学的本质特征是：

1)数学是一种普遍语言.这种观点可以追溯到莱布尼茨(Leibniz，G.W.)，他首先提出科学与哲学的两大目标，其中第一个就是找出一种普遍文字，首先是一种符号及变元表示的符号语言.正如吉布斯(Gibbs，J.W.)所说的"数学是一种语言".吉布斯不仅是19世纪最伟大的统计热力学大师之一，而且也是向量分析的开创者及传播者.在19世纪90年代，英国著名的杂志《自然》上掀起的一场大辩论中，向量最终取代四元数而成为物理学普遍使用的概念.19世纪和20世纪之交，向量分析成为数学、物理学的有效工具，更确切地说，成为描述各种现象的语言.数学概念的产生及其符号化反映了数学的进步，算术运算的符号化及向符号代数过渡，几何学的代数化，微分、积分运算的符号化，函数的符号及行列式、矩阵、向量、张量等概念的符号化，复数的表示，算子演算以及符号逻辑等都是数学的重要进展.在这个意义下数学对象是一个符号集合.单纯的符号集合，正如裸的集合一样，没有结构，没有什么可说的，没有什么意思，而只有它具有形式结构(语法学)，有一定的解释(模型——语义学)，有一定变换、生成、操作、运用方式(语用学)，它才能变得丰富多彩起来.数学作为一种普遍语言有自己的特点，比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性，而比起通常语言来有外延的确定性.数学不仅是一种语言，它还是一种精密语言.正因为如此，它常被称为精密科学.数学之所以精密，不单是因为其数量表示，还在于它越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念，如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等.对于许多直观概念，也只有在数学上才能得到很好处理，如连续性、对称性、随机性乃至信息控制、策略、对策、决策等.数学还明确了一些对立的范畴，如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等.还有重要的元概念：如结构、构造、存在、模型、等价等.这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中，使论述确切及精密.许多常用概念也只有在数学上得到澄清才算有深刻的认识.

2)数学是一种普遍方法.从古到今，对许多问题求出解答的过程中，人们或多或少产生一种方法的意识.而这种方法概念，又以数学中的算法概念为摹本.在这个意义下，数学充分显示其作为操作技术的特性.虽然精确的算法概念一直到20世纪30年代才有确切定义，但模糊的概念很早就有，而且也是数学追寻的主要目标之一.中国的数值运算及方程求解、欧几里得辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法，都使人认识到算法是一种有限的指令，可以机械地运行，从而对一类问题得出确定的解答.许多几何作图问题以及求积问题也要求发现广义的"算法"来求解问题.笛卡儿(Descartes，R.)把算法推向普遍方法论的高度，他十分明确地考虑造出普遍方法

来解决科学问题，特别是数学问题，对此他称为普遍数学．正是这种对方法的普遍考虑使他发明代数方法研究几何问题，从而创立解析几何学．波利亚(Polya,G.)把笛卡儿的方案总结如下：

任意问题

$\xrightarrow{①}$数学问题

$\xrightarrow{②}$代数问题

$\xrightarrow{③}$解方程组 $\begin{cases} P_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0, \\ P_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{④}$解方程 $P(x)=0$，

其中第③，④步无非是数学，第②步并没有一般方法，第①步则困难更大．莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他第二大目标．笛卡儿在几何方面实现这个目标，而莱布尼茨则在逻辑上制定一个方案．数学作为一种普遍方法，总是不断跨越已有的领域，深入到未知的世界中去，并且不断创造新的数学对象．17—18世纪，无穷及无穷小进入数学，把代数运算规则向无穷领域推广，这就导致数学分析的形式，并且构成方法上的大飞跃．19世纪由实分析向复分析过渡，再次加大分析方法的威力．

3）数学是一种普遍思想原则．数学发展过程中由于不断一般化、不断抽象化造成自己的普遍思想原则．对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一是1918年诺特(Noether,(A.)E.)首先提出的，而群论方法在量子力学、原子-分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性也是外尔(Weyl,C.H.H.)首先得出的．群论方法至今仍广泛应用在科学的各方面，而不仅仅是上述领域及固体物理．数学中另一个重要原则是极值原则或变分原理，最早除了哲学的思辨之外，首先提出的是费马(Fermat,P.de)，这些原则也是其后许多物理理论的基础，如哈密顿原理．

4）数学是一种理性思维框架．20世纪之前，科学的支柱主要是理论和实验（包括观察和测量），数学和计算包括在理论当中．实际上，17世纪的科学革命推动近代科学的产生，完全依赖于理性与经验的结合．它们的哲学根源是笛卡儿的唯理主义与培根(Bacon,R.)的经验主义，他们也是近代哲学之父．确切地讲，笛卡儿把认识论置于本体论之上，把哲学从神学的奴仆地位解放出来，成功地实行思想的解放，直接推动近代科学的产生，其中，理论概念、数学工具与观察实验结合在一起是牛顿(Newton,I.)科学革命的催生婆．牛顿成就其伟业不仅在于他提出正确的理论概念（特别是力），而且在于他提供了数学工具（微积分）及分析框架，尽管当时还是用欧几里得的几何系统．其后科学的重大进步，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环．第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步使得科学计算与理论和实验鼎足而三，并列为科学的三大支柱．近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论形成的始作俑者．这特别表现在1974年，纤维丛理论成为规范场理论的标准表述．其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成新兴理论框架，实际上数学已成为科学发展第四根支柱．对于生命科学、心理科学、社会科学，这种现象早已不是新事物．数理经济学以及对策论是这方面的最典型的例子．

2．数学的分科及其主要问题．数学不是一般意义上的自然科学或社会科学，它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中．从古到今，数学中所包含的对象、学科及分支变化多端．中世纪除了算术及几何学之外，天文学及乐理也是数学的分支．到17世纪，木工、石工、建筑、火器、占星术等都是数学的内容．从那时起，静力学、动力学、光学、地图绘制法等仍然被看成大数学的一部分，尽管它们早已成为独立学科．数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征了．除此之外，许多基础的数学学科，它们的内容也有很大的改变，甚至于面目全非了．经典代数学主要研究代数方程的求解，而经过几次变化，现代代数学主要研究代数结构．这样一来，数学的统一尽管多次被提起，但是总难以概括全部数学．因此，时至今日，数学仍然是具有多样性对象也具有多种目标的学科，尽管它们之间有着千丝万缕的联系．人们把数学归结为相互关联的六大范畴，其中前三个可以说是数学的技术方面，后三个可以说是数学的理论方面．

1）操作技术．大部分最早的数学问题属于解决“如何”的技术问题．最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面，后来逐步形成特殊的及一般的数学问题．在解决这些问题的过程中，形成了算法以及操作步骤的概念．在计算过程中，形成了算术，特别是解数值代数方程的算法．到近代，这推动符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算法以及代数综合方法的代数方法，从而形成无穷小演算及解析几何学．其后各个数学分支也提出相应的算法问题，例如拓扑学中计算同调群、同伦群等．从这个意义上讲，数学在本来意义上是一种计算技术，或更广一点讲是操作技术．而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤，以求得问题的解决．应该说，这是一种富有创造性的研究工作．以计算为例，就是由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件，它一直是数学研究的重要内容．除计算之外，还有测量、绘图、统计、运筹等操作，以及相应的和衍生的各种问题．例如古典几何有许多几何作图问题，特别是用圆规、直尺的几何三大问题，

以及更一般的作图方法.为了解决这些问题,还要发明许多技术,如各种投影技术,它们至少在过去都属于大数学范围之内.在数学分析的范围内,级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

2)技术理论.对数学操作的对象,应该有些认识,其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题、无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题,特别是方法的评价问题等.这样就形成与操作技术有关但又高一层次的学科,如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图逼近理论、可解性及稳定性理论等.

3)操作对象理论.它的目标不是指向对象本身,而是指向技术,指向求解的方法.例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等.它们涉及的不是单个方程,而是一类的对象,因此首要问题是分类问题.然后再对每一类研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等,微分方程的定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决"如何"的技术问题,而以下三大范畴才是解决"什么"的理论问题.

4)对象理论.理论是对确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究.典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等.以数论为例,重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等.按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等.按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等,也包括数论中的丢番图方程理论.函数论与算子论一开始也是表示问题,特别是无穷级数及无穷乘积表示,然后是积分表示等,其次涉及值分布等可以说是计数问题,另外还有刻画及分类问题.几何图形有许多性质与关系方面的问题,如度量性质以及相交、属于等关系,也有刻画及分类问题.

5)结构理论.结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟,这样划分是因为结构理论必须建立在集合的基础之上.按照布尔巴基学派的观点,原始的结构可以划为三大类,研究它们各自的结构就形成结构数学的主要分支:① 代数结构:主要是群、环、域、模,它们分别构成群论、环论、域论、模论;② 序结构:主要是格,它们构成格论;③ 拓扑结构:主要是拓扑空间,它们构成一般拓扑学的研究对象.这些抽象的研究对象有两个来源:一是从过去研究的具体对象抽象化,特别是公理化而成,如群、域以及拓扑空间这些抽象结构衍生出来.新结构的产生有如下的几种途径:① 增减公理;② 复合结构;③ 多重结构;④ 混合结构.研究这些抽象对象的目标是搞清楚它们的结构并加以分类.所谓结构,就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系.结构数学的主要问题大致可分为互相关联的四类问题:① 刻画问题;② 分类问题;③ 结构问题;④ 实现问题.

6)元理论.元数学理论是对数学本身进行反思的产物,长期属于哲学的范畴.它讨论数学概念、数学理论的合理性以及数学方法的合法性问题.19世纪末之前,对于数是什么以及非欧几何问题,特别是数学分析的严格性的争论均属于这个范畴.19世纪末,集合论的建立,现代公理方法的提出,符号逻辑的形成,以及关于数学基础问题的论战,最终导致作为一门数学分支的数理逻辑的形成.由于哥德尔(Gödel,K.)的工作,数理逻辑成为包括模型论、公理集合论、递归论和证明论(原始的和狭义的元数学)四大分支的数学领域,其后分别形成构造性数学和计算复杂性理论等新兴学科.除了以集合论为基础的现代数学之外,范畴论也成为一门元理论,在数学中有着有效的应用.

3.数学的发展和演化.数学的内容及范围随时间不同而不同,因此有言:"数学无非就是它的历史."数学史大致可如下分期:前史时期;古代及中世纪时期(从公元前4世纪到16世纪末);近代前期(17—18世纪);近代后期(19世纪);现代时期(20世纪).每一个时期的特点简要分析如下:

1)前史时期.前史时期的数学主要是民族数学或文化数学,在各种文化的发展过程中,各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术,包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等,基本上属于实用技术.这些知识是零散的,而且反映出较大的文化差异.另外,也出现了神秘的占星术、数秘术、占卜术等,其中有个别涉及数学的内容,如二进制等.各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽.

2)古代及中世纪时期.数学经过长时期的发展之后,正式成为一门学科,其主要标志是:① 建立数的表示及计算方法;② 对于一些问题有较系统的方法.这使数学技术部分初步形成.而欧几里得《几何原本》的问世,则使理论数学有了一个原型.各国数学发展状况有所不同,古代数学的主要领域是算术与几何,希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题.这些问题对以后的数学发展有很大的影响,但不一定很重要,比较重要的数学是计算,特别是解方程.中国、印度、阿拉伯的数学,偏重于计算及实际问题的解决.

3)近代前期.近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学.它一下子使建立在几何及算术上的算法登上了一个新台阶,不仅使它的应用范围大大扩大,成为发展科学技术的有力工具,而且也向理论提出一系列问题.这就导致

19 世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生，出现数学多样化和理论化的时代. 17 世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立，虽然大大扩大了数学技术库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态. 数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题. 微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算. 接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效.

4）近代后期. 19 世纪数学是近代数学的成熟时期，也是数学真正作为自为的理论科学产生的时期，但是伴随操作理论（如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论）、操作对象理论（如代数方程理论、常微分方程理论），数学技术本身也大有提高，特别是傅里叶展开、积分变换，尤其是复分析的建立. 19 世纪的数学可以说是数学对象化与多样化时期，一方面把数学由主要是操作技术转变为理论的时期，另一方面也为 20 世纪现代数学奠定了基础. 这样，数学对象理论真正形成，数学成为一种自为的科学而不再仅是自然科学或技术的语言和工具了.

5）现代时期. 20 世纪的数学是从 19 世纪数学多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论. 一方面集合论之上产生了结构数学的庞大领域，另一方面集合论的基础问题产生了元数学. 数学新对象的形成，产生结构的多样性，导致理论的多样性，并且 19 世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展，加上新的应用数学、计算数学等领域，数学日趋专门化、多样化. 但意想不到的是，从 20 世纪 70 年代起，各个领域之间新关系不断发现，新一轮的统一性正在形成之中. 当代数学前沿的大多数学科是 20 世纪上半叶形成的，其中主要是抽象代数学（包括群论、环及代数理论、域论、格论、整体李群理论、代数群论、同调代数以及各种衍生结构）、一般拓扑学、测度和积分理论、泛函分析（包括线性拓扑空间理论、算子代数理论等）、组合及代数拓扑学、整体微分几何、多复变函数论、动力系统理论、随机过程理论等. 对于 19 世纪开创的新领域——代数数论、代数几何学、黎曼几何学和局部李群理论，也在结构数学的框架中获得重大突破，成为当代数学的前沿.

20 世纪后期形成的一些领域，如微分拓扑学、大范围分析、K 理论、非交换几何等，也可在其中看到其萌芽. 除了纯粹数学领域的扩大与深化之外，20 世纪的应用数学和计算数学的面貌也发生了根本的改变. 一方面数学应用的范围已从 20 世纪之前的经典力学、天文学与测地学以及数学物理等领域扩展到几乎所有自然科学、工程技术、社会科学、人文科学的分支，并越来越起着举足轻重的作用；另一方面，一批新的应用数学领域产生出来，成为具有相对独立的分支，构成大数学科学的组成部分. 它们一方面与实际问题有密切的关系，另一方面它们也形成独立的数学研究方向，其中最典型的是 19 世纪末 20 世纪初形成的数理统计，它们同应用概率一起在近半个世纪已经成为与经典数学平起平坐的学科领域. 另外一个数学领域——组合数学几乎与数学的历史一样悠久，但只是近半个多世纪才逐步成熟及独立. 第二次世界大战之后，一些新的应用数学领域独立出来，特别是运筹学诸分支，后来纳入管理科学的学科群中. 与工程技术密切相关的系统科学、控制理论与自动化科学、信息科学也得到空前的发展.

20 世纪科学技术史中头等重要的事件是电子计算机的诞生. 它对整个社会的冲击是怎么估计也不过分的. 从计算机的设计制造到大规模应用，处处离不开数学，同时也开辟了新的数学领域. 它们可以归纳成两大部分：一是计算机科学，它指未来计算机的发展；一是计算数学，它指计算机在科学计算和工程技术中的大规模计算. 计算机的不断普及和改进对数学也造成不可忽视的影响. 它给数学家提出一系列算法问题，并形成一套行之有效的算法，如单纯形方法及其种种改进，有限元方法及其衍生算法等，对算法的分析，如收敛速度、误差传播及稳定性等问题形成数值分析分支. 近年来，计算机由数值运算过渡到符号运算，形成计算机代数重要分支，特别是吴文俊的机械化数学纲领在机器证明方面是一大突破.

4. 数学的社会功能. 数学是最古老的科学部门，它的诞生和发展反映人类文明的进步. 数学从一开始就与社会实践活动密切相关，从计数、土地丈量、器物制造、产品分配，一直到商业贸易、宗教活动等都向数学提出问题，并要求逐步解决和方法逐渐进步，最后形成相对定型的数学方法和学科. 从此，各种社会活动与数学的应用密不可分. 随着社会的进步，特别是近代科学技术的进步和新兴产业日新月异，数学也越来越成为科学技术发展的基础. 从 17 世纪到 19 世纪，数学与力学、天文学、物理学、大地测量学、航海术就密不可分，互相促进地平行发展着. 对于机械工程、建筑工程设计、电机工程等技术领域的发展，数学也起着决定性的作用. 20 世纪数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位. 数学物理、数学化学、生物数学、数理经济学、数理地质学、数理语言学、数值天气预报、数学考古等一系列边缘学科的出现，表明数学的应用已突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 随着科学数值化趋势的增长，数学在提高全民素质，培养适应现代化需

要的各级人才方面还具有特殊的教育功能.数学科学,已成为推进人类文明的不可缺少的重要因素,数学正越来越直接地为人类生活与物质生产做出更大的贡献.数学应用具有以下特点：

1）纯粹数学几乎所有的分支都获得应用.在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学分支离实际应用似乎还很遥远,而今拓扑学(特别是扭结理论)已成为生物学中了解 *DNA* 结构的有效工具.在物理学中,拓扑不变量正在成为物理的量,正如一些群的不变量是物理的量一样.数论也曾被认为是最纯粹、最缺乏应用的数学分支,但如今数论方法在计算机科学、密码技术、卫星信号传输、p 进量子场论等许多方面发挥着重要的有时甚至是关键的作用,并通过与数值分析相结合开辟着更广的应用途径.事实上,仅就在理论物理中的应用而言,涉及的数学除了经典的分支与方法(如数学物理方程、傅氏分析、无穷维空间论、群论、概率统计等),还包括了微分拓扑、微分几何、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学、非线性数学、计算数学等,几乎覆盖了核心数学的整个领域.

2）几乎所有的科技领域都在应用数学,并越来越多地应用更高深的数学.数学在力学、物理学中的应用是经受了历史考验的,而当今数学的应用则早已突破这一传统的范围,正在向包括从粒子物理到生命科学,从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军.除了自然科学,经济学及过去认为不适用数学的社会学、历史学等社会科学领域,数学方法也都在崭露头角.随机分析应用于金融决策而引起的经济学理论的进展,提供了特别令人鼓舞的例证.与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成交叉学科.与数学有关的词大量出现在各门学科之前后,如“数学的”、“数理的”、“计量的”、“统计的”、“计算的”以及“……数学”、“……统计学”等.学科成熟的社会标志是学会、协会的建立,期刊与连续出版物的问世,以及课程的设置,专业会议的召开等.例如,《数学化学杂志》于20世纪80年代创刊,《数理经济学杂志》于20世纪70年代创刊,生物数学的期刊出现更早.次一级的学科如“数学分类学”的著作早在20世纪80年代就问世了.值得注意的是纯粹数学中的一些前沿与其他科学的许多前沿领域的快速结合,这反映了科技领域中数学渗透的空前深度.可以这样说,没有这些前沿数学就没有当代理论物理学的一些前沿领域,如超弦理论、超引力理论等.事实上,仅仅像弦理论这样的物理学热门分支所用到的数学,就涉及微分拓扑学、代数几何学、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等.凝聚态物理中分类晶体结构中的“缺陷”以及液晶理论,都用到某些齐性空间中同伦群的计算,而这即使对代数拓扑学家来说也是极难的问题.数理经济学中一般均衡理论的建立、发展,也用到了微分拓扑学的基本定理与彻底的公理化方法.经济学家德布鲁因(de,Bruijn,N.G.)这方面的工作获得了诺贝尔奖.

3）数学在生产技术中的应用变得日趋直接.以往数学工具直接用于生产技术的例子虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的.常常是先应用于其他科学,再由这些科学提供技术进步的基础.近半个世纪来,数学科学与生产技术的相互作用方式正在悄悄地改变,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益.例如,以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;以调和分析为基础发展起来的小波分析直接应用于通信与石油勘探等广泛的技术领域,这在20年前是不能想象的;现代医学扫描技术(*CT* 扫描、核磁共振成像等)主要也是建立在拉东积分理论的基础之上,这方面的例子举不胜举.此外,现代大规模生产的管理决策、产品质量控制也密切依赖于数学中的线性规划算法(单纯形法与新兴的内点法)及统计方法.近年来,以数学建模为核心的工业数学成为一个蓬勃发展的应用数学领域也绝不是偶然的,产业部门的工程技术人员与数学工作者携手合作,解决影响甚至决定生产过程的形形色色的数学问题,反之,许多挑战性问题也刺激纯数学的发展.

4）数学在学科发展中的份额及力度越来越大.一些著名的数学家认为,数学是一种关键的、普遍适用的、赋予人以能力的技术.从某种意义上来讲,“高技术本质上是一种数学技术”.对此,一般人还只在科学计算的层面来理解.而实际上,数学方法是不同于理论方法及计算方法的第四个普遍适用的方法和技术.这种情况从20世纪70年代以来已初露端倪,在21世纪将成为科学研究的重要组成部分,而且也许是最富创造性的部分,这特别表现在形成概念及理论框架方面.实际上,当前的动力系统的研究(分叉、吸引子)、孤立子、混沌等已成为许多领域的通用语言及工具,而更艰深的数学将在未来更为普及.

执　笔　胡作玄
审　阅　吴文俊　程民德　徐利治

应用数学(applied mathematics)　应用性较强的诸数学学科或分支的统称.也有一种理解为,泛指一切数学理论和方法中应用性较强的部分.这里的“应用”是指用于解决数学以外的生产实践、科学技术以及各种社会活动中的理论或实际问题.从人类

社会发展史上看，数学本来起源于实际应用的需要，应用一直是数学的发展动力之一，一种数学理论和一门数学学科的生命力的强弱，很大程度上依赖于它有无应用. 因此，从这个意义上讲，整个数学都是有用的. 事实上，古老的算术与平面几何等不但起源于实际应用，在现代社会活动中也是不可一时或缺的. 许多昔日认为毫无实际意义的数学理论，如数论、拓扑、凸分析以至非标准分析，都在生产和科技发展中找到它们的应用. 因此不能简单地以“有用”或“无用”来区分应用数学的学科. 像微积分在天文、物理及许多科技领域都有广泛的应用，理论力学就完全是应用微积分解决经典力学问题的学科. 但从整个学科看，应用只是它的一部分，以微积分为其主体的数学分析是分析数学的基础，所以它还是应该属于纯数学.

在古代，数学本无“应用”和“纯粹”之分，“应用数学”一词大约出现于 17 世纪前后，高等数学方才萌芽，数学的抽象层次提高，理论和应用开始明显分离的时期，从此人们用它专指数学的某些部分，以至某些独立的数学学科. 所以，应用数学学科一般都是在近代或现代发展起来的，其特点是，它们的内容都是围绕着解决某一类实际问题，因此首先要有从实际问题中抽象出相应的数学模型，使其具有应用数学理论和方法的基础；其次，所提出的解决问题的方法是可行的，而不是只从理论上证明问题解的存在. 例如，牛顿(Newton,I)提出地球绕日运动的模型，是用微积分方法解决天文学问题的开端；阿罗(Arrow,K,J.)与曾获诺贝尔经济奖的德布罗(Debreu,G.)给出的一般经济均衡模型，使得经济学问题中可以使用的数学方法不止微分法，而涉及更多的数学领域，这才形成数理经济学学科. 当然，应用数学学科也并非从各数学分支抽取一些有用的方法简单堆砌而成，而有其自身的系统理论，模型和方法都有其理论依据，否则也不成其为独立的学科.

应用数学一方面应用于各类实际问题，另一方面，它也是纯数学的应用，纯数学是它的理论基础. 像数理统计是从已知的关于有限的样本的信息出发，去研究无限整体的统计规律，它给出由样本估计整体的统计量的统计方法，同时对这些方法的可靠性、优劣标准等有系统的论证. 这些方法和论证主要以概率论作为理论基础和根据，又如微分和凸分析主要研究极值问题的思想和准则，而运筹学则着重研究最优化问题的种种解法. 从研究对象上看，应用数学也不都是直接研究实际问题，它的对象主要是数学模型，用的还是抽象的数学方法，提供的是解决问题的思维准则. 这些都与纯数学相近，而与工程技术或技术学科不同. 然而，纯数学所追求的，有时可以只是理论上的完善和方法上的优美，一般并不是针对某一类实际问题，例如，数论中对哥德巴赫问题的研究就是如此. 应用数学追求的目标一般则是解决模型所提出的问题，而模型是有实际意义的. 因此应用数学与纯数学在其研究的目的性方面大不相同，这是二者的最大区别.

应用数学所包含的学科难以胜数，其领域随着时代的发展正日渐扩大. 有人甚至将理论力学、天文学和测绘学等与数学关系密切的学科也归入其中. 各种各样的计算方法，显然也与数学的应用有密不可分的关系. 特别是近年来，随着电子计算机技术的快速发展，与之相应的各种计算方法变得名目繁多，有了长足的进步，由于其专用于计算的共同特点，而不能继续附属于各数学学科，而属于新兴的计算数学. 在应用数学中，较早形成学科的，有基于分析和微分方程方法研究现代物理问题的数学物理，和运用概率统计方法探讨随机现象的数理统计、生物数学等. 其后的发展，这些学科内容更加丰富，还生成了许许多多的新学科，诸如综合运用概率统计及其他数学方法，总称运筹学的数学规划，排队论等，20 世纪中期以后发展起来的控制论、信息论、系统论、模糊数学、突变理论、小波分析、混沌理论、分形几何以及组合学方面的学科也都整体或部分地属于应用数学. 近年来，数学的应用更深入到社会和人文科学领域，数理经济学、金融数学等名称冠以“数学”或“数理”的新学科如雨后春笋般涌现，无不显示出应用数学发展的旺盛活力.

目前人类已进入科技和生产高速发展的时期，它一方面使应用数学大有用武之地，同时又对数学，主要是应用数学提出了大量的需求. 人类无论在对揭示生命起源等微观世界的研究，或是在对展现宇宙奥秘的宏观世界的探索中，都需要数学的帮助. 因此应用数学的未来发展前景是十分美好的.

撰　搞　常心怡　　**审　阅**　萧树铁

数 学 基 础

数学基础(foundation of mathematics) 研究整个数学的理论基础及其相关问题的一个专门学科.对于数学基础的关注和研究,可追溯至古代.但在较长的历史阶段中,只限于对单科数学分支基础的讨论.至于作为整个数学理论基础的探索,尤其是“数学基础”作为一门专门学科的形成和诞生,乃是20世纪初的事.当时也是由于多种因素和研究活动的汇合,尤其是在作为整个经典数学之理论基础的集合论中出现悖论之后,才把数学基础问题的研究推向高潮,并进一步促进了数学哲学的发展,直至最终成为20世纪数学领域中深入的研究活动之一.

关于几何基础的研究.欧几里得(Euclid)的《几何原本》一直被公认为是最早用严格的逻辑结构建立学科体系的典范.但其不足之处也一直为历代学者所关心.直到19世纪末,德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)才第一次给出了一个完备的欧几里得几何公理系统,这就是希尔伯特《几何基础》一书的核心内容.关于欧几里得几何基础研究的另一个重要线索,来自关于第五公设问题的探讨,长达两千年之久对第五公设的所有试证全告失败,由此导致非欧几何的建立和引起人们对于几何公理系统相容性问题的注意.后来知道:只要假定实数系统是相容的,那么欧几里得几何公理系统和罗巴切夫斯基几何公理系统都是相容的.而实数系统究竟相容与否,最终还是要归结到作为整个经典数学理论基础的集合论系统相容与否.

在其他方面,也有类似的涉及数学基础的问题.公元前5世纪,毕达哥拉斯学派的古希腊数学家希帕索斯(Hippasus,(M))发现了等腰直角三角形的直角边与斜边不可通约,由于当时人们对于无理数的概念还一无所知,因而上述发现致使人们惊奇不安,数学史上称为第一次数学危机.数学史上又把18世纪微积分诞生以后在数学界产生的混乱局面称为第二次数学危机.在17世纪和整个18世纪,一方面微积分的理论和应用得到了广泛而迅速的发展,另一方面整个微积分却又是建立在含混不清的无穷小概念上,以致遭到各方面的非难和攻击.其中最为著名而激烈的攻击来自贝克莱(Berkley,G.)大主教,有所谓贝克莱悖论等.这就不能不迫使数学家们认真投入到如何为微积分奠定理论基础的工作中去.首先是法国数学家、力学家柯西(Cauchy,A.-L.)系统地发展了极限论,德国数学家戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)在实数论基础上证明了极限论的基本定理,德国数学家康托尔(Cantor,G.(F. P.))和德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))避开了实无限小和实无限大的概念,发展了ε-δ方法和精化了极限论,从而避开了贝克莱悖论并给出解释方法.当时普遍认为极限论作为严格的分析基础的建立,数学的第一和第二次危机已获解决.但在实际上,建立极限论是以实数理论为基础的,而要建立严格的实数理论,又必须以集合论为基础,亦即最终还是归结到作为整个经典数学理论基础的集合论是否相容的问题.

19世纪,数学的各个分支都得到了迅速的发展,亟待建立一种能以统括各个数学分支的理论基础.这时康托尔系统地总结了长期以来数学的认识与实践,缔造了一门崭新的数学学科,即集合论.由于集合论的思想方法渗透到各个数学分支,同时从集合论的基本概念和思想规定出发,能导出整个经典数学,因此,大家公认集合论可以作为整个经典数学诸分支学科的共同的理论基础.但在集合论中却又偏偏出现了悖论,特别是那个十分基本而又直接涉及逻辑理论本身的罗素悖论的出现,惊动了整个西方数学界、逻辑学界和哲学界,人们恰当地将集合论悖论的出现所造成的困难局面,称之为第三次数学危机,而且在实质上是第一、第二次数学危机的进一步深化和发展,因为涉及的范围更大,涉及的问题更深.

正是在这样的历史背景下,“数学基础论”这一数学分科在20世纪初诞生了,摆在从事数学基础问题研究的数学家面前的首要任务,就是如何为数学的有效性重新建立可靠的依据.由于在这一工作中所持的基本观点不同,以致在数学基础的研究中形成了诸如逻辑主义派、直觉主义派、形式主义派等不同的流派.另一方面,在如何避免悖论的研究中,直接导致了作为排除悖论的重要方案之一的近代公理集合论的发展,在近代公理集合论中,能对历史上已经出现之逻辑数学悖论一一给出解释方法,即保证这些悖论不在近代公理集合论中出现,同时迄今也未发现有新的悖论在系统内出现,但却未能从理论上证明近代公理集合论在今后的展开中永远不会出现矛盾.因而近代公理集合论相对于康托尔的古典集合论而言,为整个经典数学提供了一个相对牢固的理论基础.还应指出,近代公理集合论是立足于修改康托尔的概括原则而去实现避免悖论出现的.

能否在集合论公理中保留概括原则而避免悖论?20世纪30年代,波茨娃尔(Бочевар,B.)曾考虑不修改概括原则,而立足于发展多值逻辑去避免悖

论的出现，但却始终未能达到这一目标.

20世纪60年代，美国控制论专家扎德(Zadeh，L.A.)明确提出要用数学的手段和方法去处理那些为经典数学所拒绝研究的模糊现象，并由此创立了模糊数学.这标志着数学的发展已进入数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充时代.20世纪后期，模糊数学发展迅速，应用范围极为广阔.但在另一方面，模糊数学也同样面临着一个如何奠定其理论基础的问题.解决这一奠基问题的方案有如下三种：其一是将模糊数学直接或间接地奠基于近代公理集合论，但这样发展起来的模糊数学只能成为经典数学的分支，而不能在更高的形式下包括经典数学；其二是为模糊数学建立它所特有的公理集合论系统；其三是拓宽精确性经典数学的逻辑基础和集合论基础，在数学基础理论意义下解决模糊谓词的造集问题，以求能为精确性经典数学和未来的不确定性数学(应在内容和方法上有别于扎德的模糊数学)提供一个共同的理论基础.

最后还应特别提到与数学基础论的发展有密切关系的另一个研究领域，这就是作为数学与哲学之间的边缘学科的数学哲学.数学哲学与哲学密切相关，但又与数学发展中的那些具有最普遍意义的课题有密切关系.当然，对于数学哲学的研究，无论是东方或西方，均可追溯到古代，但在很长的历史阶段中，数学哲学又只是作为自然哲学的一部分而未能形成独立的学科.直到19世纪末和20世纪初，由于数学基础论的诞生和发展，由于迫切需要深入研究数学领域中的那些带有极端普遍和根本性的问题，才促使数学哲学的研究日趋专门化，而最终形成独立的学科.特别是现代数学的蓬勃发展，又提出了一系列深刻的数学哲学问题，致使数学哲学这一学科进一步趋向全面繁荣的阶段.所以，数学哲学既是一个古老的研究领域，又是一门年轻的新兴学科.这一学科的研究价值和在数学发展中的作用日益明显，特别是关于数学认识论、数学方法论，以及数学发展规律的研究，有许多深刻的课题有待于人们去深入探索.数学哲学的研究包括数学本体论、数学认识论、数学方法论、数学发展的外在因素、数学发展规律以及数学哲学家的不同流派和观点等方面.数学哲学的研究将对数学工作者的世界观、思想方法、研究兴趣和研究力量的分布，甚至数学研究的基本趋势，都会产生重大影响.

几 何 基 础

几何基础(foundation of geometry)　数学基础的一个分支学科.是给出几何学的根据以及研究按严格的逻辑演绎体系来陈述几何学内容的学科.古希腊哲学家、科学家亚里士多德(Aristotle)总结了古代积累起来的逻辑知识，并以数学及其他演绎科学为实例，把完全三段论作为无条件承认的前提或公理，并由此推出其他三段论，因而成为历史上第一个正式给出公理系统的学者.欧几里得(Euclid)将逻辑的公理演绎方法应用于几何学，完成了《几何原本》的著述.这本书不仅在内容上集前人之大成，而且用严格的逻辑演绎系统地进行了陈述，并首次提出了几何根据的问题，因而不仅由此湮没了过去的其他几何著作，而且也由此使得他的事业受到人们的崇高评价.

《几何原本》几乎是两千多年间一直被公认为用严格的逻辑结构来建立学科体系的典范.但其不足之处，也早为古代学者所觉察.例如，有些定义是多余的，而有些定义的写法却运用了一些本身就应该定义的概念，特别地，在一些定理的证明中还依靠那些未经列入公设和公理中的直观图形.正如后来英国数理逻辑学家罗素(Russell，B.A.W.)所指出的那样："他的定义并不总是下了定义的，他的公理并不总是不可证明的，他的证明需要许多他还没有完全意识到的公理."因而，古代学者就已开始着手改善《几何原本》中所陈述的那个欧氏几何公理系统.古希腊数学家、力学家阿基米德(Archimedes)就曾为了严格陈述关于长度、面积和体积的测量理论而扩充过欧几里得的公设表.人所共知的阿基米德公设便是其中一例.因而可以说，自从阿基米德以后，人们就一直在努力完善《几何原本》的陈述.但要想完全免除种种不足之处，决非轻而易举之事.直到19世纪末期，人们才第一次给出了一个完备的公理系统.从这个公理系统出发，能够不依靠任何空间观念的直观而推出欧氏几何的所有定理.这一公理系统的构造成功应归功于德国数学家希尔伯特(Hilbert，D.).他的这个欧几里得几何公理系统于1899年首次发表，并由此而激起了人们对欧几里得几何基础的广泛关注.他的《几何基础》不仅解决了如何用公理化方法研究几何学的基础问题，还把公理化方法推向了完善化阶段，以致使该书成为近代公理化思想方法的代表作.而公理化方法又有力地推动着数学基础的研究与探索.

关于欧几里得几何基础问题的另一个重要研究内容是关于第五公设问题的探讨，并由此导致了非欧几何的诞生，从而使得几何基础的研究突破了欧几里得几何基础的研究框架，并获得了崭新的内容和发展.例如，《几何原本》中的第五公设指："若两直线与第三条直线相交，其一侧的两个内角之和小于两直角时，则把这两条直线向着该侧充分地延长后一定相交."由于无论在内容上或文字叙述上，第五公设显得比任何其他公设、公理都复杂和累赘，又不

如其他公设、公理那样自明，因而古代学者就怀疑第五公设是多余的，以及它能不能从其他公设和公理中被推演出来?这就是所谓第五公设问题. 更有甚者认为，第五公设被列为公设乃是《几何原本》中的那些逻辑缺点中的一个重要"缺点"，因而几乎在欧几里得以后的两千多年时间里，难以发现一个没有试证过第五公设的大数学家，但是对第五公设的所有试证都失败了. 在所有这些失败的"证明"中，惟一引出的正面结果是一串与第五公设等价的命题的发现，普莱费尔公理便是其中之一.

19 世纪的俄国年轻数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский, Н. И.)产生了与前人完全不同的信念：他认为第五公设不能从其余的几何公理中推演出来，欧氏几何不是惟一的真实. 于是罗巴切夫斯基在欧氏几何公理系统中剔除第五公设，却同时加进一个相反于第五公设的公理："过平面上一已知直线外的一点，至少可以引两条直线与该已知直线不相交."人们称之为"罗氏公设". 因此构造出一个新的几何系统，称为罗巴切夫斯基几何系统. 但在这种新几何的公理系统中却包含着一条为常识所不容的罗氏公设，从而大大刺激了人们对公理系统无矛盾性证明的兴趣. 直到 19 世纪末叶，法国数学家庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)率先在欧氏几何系统中构造了一个罗氏几何模型，就是在欧氏几何系统中选取三类几何对象，分别称为罗氏平面、罗氏直线、罗氏点，亦即分别作为罗氏几何元素"平面、直线、点"的解释，然后再去验证所选的这些几何对象之间的关系能以满足罗氏几何系统的每一条公理的要求. 这样一来，如果罗氏几何系统中能出现正、反两个命题的话，那么只要按照罗氏几何元素与所选几何对象之间的对应关系进行翻译，立即成为欧氏几何系统中所相应的正、反两个命题. 但这就与原设欧氏几何系统相容之事矛盾了. 因而庞加莱模型构造的成功，表明只要假定欧氏几何系统相容，则罗氏几何系统就一定是无矛盾的. 然而人们不禁又要问，欧氏几何系统会不会出现矛盾? 对此人们受到法国数学家笛卡儿(Descartes, R.)所创建之解析几何的启发，终于在实数系统中构造了一个欧氏几何系统的模型. 这样，只要假定实数系统是无矛盾的，则欧氏几何与罗氏几何都是相容的. 并由此可以进一步得出结论：第五公设是不可能从其他公设、公理中作为定理而被证明，否则罗氏几何系统中将有第五公设与罗氏公设并存而成为矛盾系统了. 因而相对于实数系统为相容系统而言，第五公设问题已获得了明确的答案. 但实数系统究竟相容与否，最终又要归结到作为整个经典数学之理论基础的集合论的相容性问题. 还应指出，当时年仅 21 岁的匈牙利数学家波尔约(Bolyai, J)和德国数学家高斯(Gauss, G. F.)也不约而同地发现了新几何的存在.

公设(postulate)　几何学的基本概念之一. 指《几何原本》(参见第一卷《平面几何》同名条)中的一组公理.《几何原本》第 1 卷开端有 23 个定义，在这些定义以后引进公设和公理，诸如：

公设：从一点到另一点必可引直线……

公理：等于同一个量的两个量必相等.

在历史上，人们曾提出区分公设与公理的原则，例如一种原则认为：公理是算术与几何所公用的，公设则仅为几何学所用. 又有一种原则认为：公理本身是十分自明的，公设却没有公理那样自明，但也是不加证明就承认的. 现代公理论者则已概用公理一词取代公设而不加区分. 实际上，在《几何原本》中并没有说明公设与公理如何区分，而且有些公理的归属也不明确. 例如，有些版本就将第五公设(参见"第五公设问题")列入公理之中，故第五公设也有第 11 公理之称，还有将第五公设列为第 13 公理的版本.

《几何原本》中的定义、公设、公理，都是严格地论证每一定理所必不可少的根据. 欧几里得(Euclid)是第一个提出几何根据问题的人，由此他的事业受到人们的崇高评价.

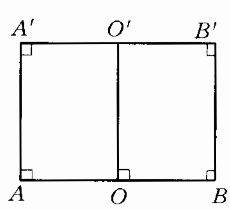
第五公设问题(the problem of fifth postulate)　由关于欧氏几何中第五公设的争议而形成的一个问题. 1883 年到 1889 年，《几何原本》的版本是经过科学地整理而翻印的，从而被公认为标准版本. 此版本的第一卷开端有 23 个定义，然后引进公设和公理. 其中第五公设的内容是：若两直线与第三条直线相交，其一侧的两个内角之和小于两直角时，则把这两条直线向着该侧充分地延长后一定相交. 第五公设的陈述和内容与其他公设或公理相比较，显得复杂和累赘，显然没有其他公设、公理那样自明. 所以古代学者们早就怀疑，第五公设能否从其他公设、公理中推导出来? 这就是所谓第五公设问题.

古代学者还进一步认为，欧几里得(Euclid)之所以把第五公设当做公设，乃是因为他未能给出这一命题的证明，从而也将这一点视为《几何原本》体系中的一个重要缺点. 继而学者们付出了巨大的精力去证明第五公设. 几乎可以说在欧几里得以后的两千多年时间里，难以发现一个没有试证过第五公设的数学家. 但是，所有试证第五公设的努力都失败了，在所有这些失败的证明中，或是最终发现某些证明步骤有误，或是发现在证明过程中暗自使用了与第五公设等价的命题. 例如，"三角形三内角之和等于 π"就是人们最熟知的与第五公设等价的命题之一. 但是，在假定实数系统 R 无矛盾的前提下却可以明确回答这个问题. 庞加莱模型和笛卡儿模型的构造成功表明了，在实数系统 R 无矛盾的前提下，欧几里得与罗巴切夫斯基几何公理系统都是无矛盾

的(参见“庞加莱模型”、“笛卡儿模型”). 因此,可以断言欧氏平行公理不可能在绝对几何公理系统中被推演出来. 否则,若设欧氏平行公理是绝对几何系统中的一个命题的话,那么欧氏平行公理与罗氏公设这样两个互相矛盾的论断就要在罗巴切夫斯基几何公理系统中并存,从而罗氏几何公理系统就成为一个不相容的系统. 同理可知,由欧几里得几何公理系统的相容性可以证明罗氏公设也不是绝对几何公理系统中的命题.

普莱费尔公理(Playfair axiom) 一条等价于第五公设的著名公理. 英国数学家、物理学家普莱费尔(Playfair,J.)在他所校订的《几何原本》(1795 年在爱丁堡出版)中采用了一条很好的等价于第五公设的公理:“过平面上已知直线外的一点,至多只能作一直线与该已知直线平行.”这一公理的陈述比第五公设陈述简明多了,从而受到欢迎,直到被采用在现今的教科书中,并被称为普莱费尔公理. 但应指出,该公理实际上并不是普莱费尔最先给出的,人们可在古希腊哲学家、数学家普罗克洛斯(Proclus)的著作《欧几里得第一卷注释》中找到这一公理的陈述.

萨凯里四角形(Saccheri quadrangle) 历史上用以研究第五公设问题的四边形. 意大利数学家萨凯里(Saccheri,G.)对平行公理问题作了有价值的工作. 如图所示,萨凯里假定在四角形 $AA'B'B$ 中,$AA'=BB'$,且夹着 AB 边的两个内角都是直角,即 $\angle A=\angle B=\pi/2$,人们称该四角形为萨凯里四角形. 易见 $\angle A'=\angle B'$,并称之为萨凯里角,记为 $S_a^{\angle}$. 对于 $S_a^{\angle}$,要么 $S_a^{\angle}>\pi/2$,要么 $S_a^{\angle}=\pi/2$,要么 $S_a^{\angle}<\pi/2$. 并且不难证明:



1. $S_a^{\angle}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

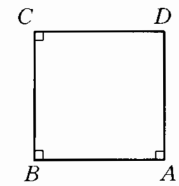
2. $S_a^{\angle}=\dfrac{\pi}{2}$.

当且仅当第五公设成立.

萨凯里曾想不以第五公设为基础而否定 $S_a^{\angle}<\pi/2$,从而完成第五公设的证明. 但实际上这是不可能的. 在这里仍然只是引出了一个第五公设的等价命题 $S_a^{\angle}=\pi/2$.

萨凯里角(Saccheri angle) 见“萨凯里四角形”.

朗伯四角形(Lambert quadrangle) 历史上用以研究第五公设问题的四边形. 德国数学家朗伯(Lambert,J. H.)在 1766 年发表的《平行线》中,有类似于意大利数学家萨凯里(Saccheri,G.)的研究. 朗伯从讨论四角形 $ABCD$ 出发(如图),在这个四角形中,有三个内角被假定为直角,即



$$\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{2}.$$

人们把这个四角形称为朗伯四角形,而把那个没有假定为直角的内角称为朗伯角,并记为 $L_a^{\angle}$,即 $\angle D=L_a^{\angle}$. 对于 $L_a^{\angle}$,有且仅有

$$L_a^{\angle}>\frac{\pi}{2},\ L_a^{\angle}=\frac{\pi}{2},\ L_a^{\angle}<\frac{\pi}{2}$$

三种情形. 而“$L_a^{\angle}=\pi/2$”等价于第五公设,并且若设 $L_a^{\angle}>\pi/2$,则立即导致矛盾. 从而,朗伯也只要不以第五公设为基础而能否定 $L_a^{\angle}<\pi/2$,就能完成第五公设的证明. 这样,朗伯从假定 $L_a^{\angle}<\pi/2$ 出发,希望在不以第五公设为基础的前提下导致矛盾,从而达到否定 $L_a^{\angle}<\pi/2$ 之目的. 然而在这个前提下,不论如何深入地进行推导和演绎,始终未能引出两个在逻辑上互相排斥的命题.

应当指出,在当时,朗伯的几何观点是最先进的,工作也推进得最远,他不仅从来没有声称过自己已经证明了第五公设,而且“他认识到,任何一组假设如果不导致矛盾的话,一定能提供一种可能的几何,这种几何是一种真的逻辑结构,虽然它或许对真实的图形作用很少,后者或可提示一种特别的几何,但不能限制逻辑上可能发展千差万别的几何.”在这里,$L_a^{\angle}=\pi/2$ 也仅仅是第五公设的一个等价命题.

朗伯角(Lambert angle) 见“朗伯四角形”.

勒让德锐角命题(Legendre acute angle proposition) 历史上研究第五公设问题形成的一个命题. 法国数学家勒让德(Legendre,A.-M.)在 1794 年出版的《几何原理》一书,曾被世界各国采用为初等几何教科书. 他在该书的初版和许多再版本中都试图证明第五公设,最后归结为只要能不以第五公设为基础而获证“至少存在一个三角形,其内角和为 180°”,那么证明第五公设的难题便可解决. 从而人们就致力于证明存在一个三角形,其内角和为 180°,当然还要不以第五公设为基础. 然而种种努力依然未能成功. 经过仔细分析,在这种失败的“证明”中,依然是凭借于图形的直观而默认了一个假定:“至少存在一个锐角,从它的某一边上的任意点作垂线,必与另一边有交点.”实际上,这一被默认的假定仍然是第五公设的一个等价命题,其后被称为“锐角命题”.

希尔伯特几何系统公理(Hilbert geometric axioms table) 一种重要的几何公理系统. 指德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)提出的欧几里得几何的公理系统. 它包括三个基本元素、三个基本关系和五组(共 20 条)公理,其基本结构如下表所示:

希尔伯特-欧几里得几何系统公理表

- 基本概念
  - 基本元素(点、直线、平面)
  - 基本关系
    - 结合关系
    - 顺序关系
    - 合同关系
- 公理
  - 结合公理(Ⅰ$_1$—Ⅰ$_8$)
  - 顺序公理(Ⅱ$_1$—Ⅱ$_4$)
  - 合同公理(Ⅲ$_1$—Ⅲ$_5$)
  - 连续公理(Ⅳ$_1$—Ⅳ$_2$)
  - 平行公理(Ⅴ$_1$)

结合公理(axioms of association)　基本的几何公理之一.指希尔伯特-欧几里得几何系统公理表中的第一组公理.它包含 8 条结合公理:

Ⅰ$_1$.对于任意两个不同的点 A 和 B,至少有一直线 a 连结 A 和 B.

Ⅰ$_2$.对于任意两个不同的点 A 和 B,至多有一直线 a 连结 A 和 B.

Ⅰ$_3$.任一直线上至少存在着两个点,又至少存在着不在同一条直线上的三个点.

Ⅰ$_4$.任给不在同一条直线上的三个点 A,B,C,至少存在一个平面通过 A,B,C.又任一平面上至少有一个点.

Ⅰ$_5$.任给不在同一条直线上的三个点 A,B,C,至多存在一个平面通过 A,B,C.

Ⅰ$_6$.如果一条直线上的两个点落在同一个平面上,则该直线上的任何一点都落在该平面上.

Ⅰ$_7$.如果两个平面有一个公共点,则它们至少还有另一个公共点.

Ⅰ$_8$.至少存在着四个点,它们不在同一个平面上.

应当指出,在上述 8 条结合公理中,仅有少数几条出现在《几何原本》中,大部分是德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)补入的.因为欧几里得(Euclid)和历史上不少几何学家在自己的论证中持有空间直觉观念,例如,他们总是直觉地认为直线上必有无穷多个点,而且既不将此列为公理,又在论证中无条件地承认并使用它.在这个系统里,它可作为一条定理证明之,由于公理应尽可能少,故也不必将此列为公理.

顺序公理(axioms of order)　基本的几何公理之一.指希尔伯特-欧几里得几何系统公理表中的第二组公理.它包含 4 条顺序公理:

Ⅱ$_1$.若 A,B,C 是直线 a 的三个不同的点,并且 B 在 A 与 C 之间,则 B 也在 C 与 A 之间.

Ⅱ$_2$.任给两点 A 和 C,则过 A 和 C 的直线上至少还存在着一点 B,使得 C 在 A 和 B 之间.

Ⅱ$_3$.直线上任意三点,至多只有一点在其余两点之间.

Ⅱ$_4$.德国数学家帕施(Pasch)公理:任给不在同一条直线上的三个点 A,B,C,又直线 a 落在过 A,B,C 的平面 α 上,并且 a 不通过 A,B,C 中任一点,则当 a 通过线段 AB 内部的点时,则 a 或者还通过线段 AC 内部的点,或者还通过线段 BC 内部的点.

合同公理(axioms of congruence)　基本的几何公理之一.指希尔伯特-欧几里得几何系统公理表中的第三组公理.它包含 5 条合同公理:

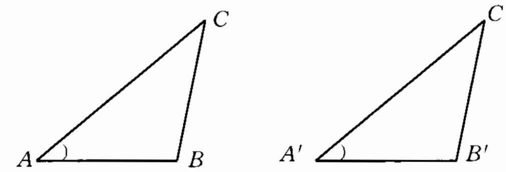
Ⅲ$_1$.设 A,B 为直线 a 上的两个点,又 A'是直线 a'(也允许 a 与 a'为同一条直线)上的点,则在 a'上点 A'的某一侧,有且仅有一点 B',使得线段 AB 与线段 $A'B'$合同(或说 AB 等于 $A'B'$),记为 $AB\equiv A'B'$.对于每个线段 AB 都有合同关系 $AB\equiv BA$.

Ⅲ$_2$.如果线段 $A'B'$和 $A''B''$均合同于线段 AB,则 $A'B'$合同于 $A''B''$.

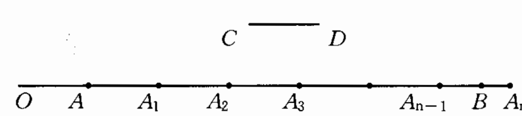
Ⅲ$_3$.如果 AB 和 BC 是直线 a 上的两个线段,且无公共的内部的点,又 $A'B'$和 $B'C'$为同一条或另一条直线 a'上的两个线段,它们也没有公共的内部的点.如果此时 $AB\equiv A'B'$且 $BC\equiv B'C'$,则有 $AC\equiv A'C'$.

Ⅲ$_4$.设$\angle(h,k)$在平面 α 上,又在同一个或另一个平面 α'上给定一直线 a'及其确定的一侧,h'是由 a'上 一点 O'出发沿着 a'的半直线,那么在 a'上由 O'出发有且仅有一射线 k',使$\angle(h,k)$合同于$\angle(h',k')$,同时$\angle(h',k')$内部的点都在 a'原先确定的一侧.如果$\angle(h,k)$合同于$\angle(h',k')$,则记为$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$.又$\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$,$\angle(h,k)\equiv\angle(k,h)$.

Ⅲ$_5$.设 A,B,C 为不共线的三个点,而 A',B',C'亦不在一条直线上.如果 $AB\equiv A'B'$,$AC\equiv A'C'$,并且$\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$,则如图所示,必有$\angle ABC\equiv\angle A'B'C'$,并且$\angle ACB\equiv\angle A'C'B'$.



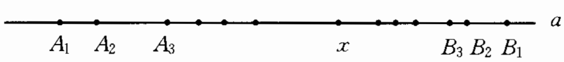
连续公理(axioms of continuity)　基本的几何公理之一.指希尔伯特-欧几里得几何系统公理表中的第四组公理.它包含 2 条连续公理:



Ⅳ$_1$.(阿基米德公理)设 AB 和 CD 是任意两条线段,则在直线 AB 上存在着有限多个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,使得 A_1 在 A 和 A_2 之间,A_2 在 A_1 和 A_3 之间等,并且线段 $AA_1,A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$ 都合同于线

段 CD，而 B 在 A 和 A_n 之间，如上图所示.

Ⅳ$_2$.（康托尔公理）设在任意直线 a 上给了线段的无穷序列 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$，其中每个后面的都在前面一个的内部；又设不存在这样的线段，它能在所有这些线段的内部. 那么在直线 a 上，有且仅有一个点 x，它落在所有这些线段 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$ 的内部. 如下图所示.



应当指出，在德国数学家希尔伯特（Hilbert, D.）的经典叙述中，连续公理是由上述阿基米德公理和另一条称为完备公理的两条公理组成的，而没有上述康托尔公理. 这里已对希尔伯特的经典叙述做了改动，亦即把完备公理改成为上述康托尔公理. 当然，可以严格证明经过改动后的公理系统与原来的公理系统是等价的. 所以从本质上说，并没有作什么改动.

为便于叙述完备公理，现将经过改动后的希尔伯特-欧几里得几何公理系统记为 EH，而将在 EH 中去掉上述康托尔公理后所构成的几何公理系统记为 EH^{-C}. 那么可将希尔伯特经典叙述中的完备公理陈述如下：

对于由被称为点、直线、平面等几何元素组成的系统 Σ 而言，在保有 EH^{-C} 的所有公理的情况下，不再允许 Σ 有任何新的扩充. 即不可能再在 Σ 中引入新的点、直线、平面等几何元素而构成一个扩张了的系统 Σ'，并且在 Σ' 上保持 EH^{-C} 的所有公理.

平行公理（axiom of parallels） 基本的几何公理之一. 指希尔伯特-欧几里得几何系统公理表中的第五组公理. 其中只含 1 条平行公理：

Ⅴ$_1$. 过平面上任一已知直线外的任一点，至多只能引一条直线与该已知直线平行.

注意在欧几里得几何意义下，同一平面上没有公共点的两条直线称为平行的. 这里对上述平行公理所采用的叙述方式称为普莱费尔公理，也是《几何原本》中之第五公设的等价命题之一（参见“普莱费尔公理”）.

绝对几何公理系统（absolute geometric axiom system） 一种重要的几何公理系统. 指在希尔伯特-欧几里得几何系统公理表中去掉平行公理后，所构成的几何公理系统. 因此，绝对几何公理系统是由三个基本元素（点、直线、平面）、三个基本关系（结合、顺序、合同）和四组公理（共 19 条）构成. 这四组公理包括：第一组 8 条结合公理（参见“结合公理”），第二组 4 条顺序公理（参见“顺序公理”），第三组 5 条合同公理（参见“合同公理”），第四组 2 条连续公理（参见“连续公理”）.

罗巴切夫斯基公设（Lobatchevsky's postulate） 简称罗氏公设. 罗氏几何术语. 指罗巴切夫斯基平行公理. 即过平面上任一已知直线外的任一点，至少能引两条直线与该已知直线不相交. 可知，罗巴切夫斯基平行公理（记为 $\widetilde{\text{V}}$）正好与欧几里得平行公理（记为 Ⅴ）相反.

罗巴切夫斯基几何公理表（Lobatchevskian geometric axioms table） 用罗氏公设取代欧几里得几何系统中的第五公设所形成的几何系统的公理表. 俄国数学家罗巴切夫斯基（Лобачевский, Н. И.）在欧几里得几何系统中把第五公设予以剔除，同时又引进一个与第五公设正好相反的公理，人们称之为“罗氏公设”，它的表述为“过平面上一已知直线外的一点，至少可以引两条直线与该已知直线不相交.”因此，罗巴切夫斯基就构造了一个新的几何系统，它与欧几里得几何系统相并列. 这两个几何系统的相异之处仅在于一个承认第五公设而不承认罗氏公设，另一个则承认罗氏公设而不承认第五公设. 除此而外的其余公设、公理、定义及基本概念均相同. 人们把这两个几何系统中的相同的部分（即一切相同的公设、公理、定义及基本概念）所构成的几何系统称为绝对几何. 故欧氏几何由绝对几何外加第五公设构成，而罗氏几何由绝对几何外加罗氏公设构成. 因此，罗氏几何之基本结构可列表如下：

- 基本概念
  - 基本元素（点、直线、平面）
  - 基本关系
    - 结合关系
    - 顺序关系
    - 合同关系
- 公理
  - 结合公理（Ⅰ$_1$—Ⅰ$_8$）
  - 顺序公理（Ⅱ$_1$—Ⅱ$_4$）
  - 合同公理（Ⅲ$_1$—Ⅲ$_5$）
  - 连续公理（Ⅳ$_1$—Ⅳ$_2$）
  - 罗氏公设（$\widetilde{\text{V}}$）

数学系统的公理化方法（the axiomatization method of mathematics system） 一种表述、总结和创建科学理论的重要方法. 指使某个数学分支成为演绎系统的一种方法. 是人们选取少数不加定义的原始概念（基本概念）和无条件承认的相互制约的规定（公理）作为出发点，再以严格的逻辑推演，使某一数学分支成为演绎系统的方法.

公理化方法的历史发展，大致可以划分为公理化方法的产生、完善和形式化三个阶段. 其中第一阶段指由古希腊哲学家、科学家亚里士多德（Aristotle）的完全三段论到欧几里得（Euclid）《几何原本》的问世. 亚里士多德是历史上第一个正式给出公理系统的学者，他总结了古代积累起来的逻辑知识，并以数学及其他演绎的学科为实例，把完全三段

论作为无条件承认的前提或公理，然后从此前提出发推出其他三段论.欧几里得在其影响之下，将逻辑的公理演绎法应用于几何学，完成了《几何原本》的著述，这是公理化方法的一个雏形，但很不完善.公理化方法历史发展之第二阶段是指非欧几何的诞生到德国数学家希尔伯特(Hilbert，D.)《几何基础》的问世.由于希尔伯特在其巨著《几何基础》一书中，彻底消除了欧几里得《几何原本》中的种种不足之处，并由此解决了如何用公理化方法研究几何学的基础问题，成为近代公理化思想方法的代表作.公理方法历史发展的第三阶段是指集合论悖论出现之后，希尔伯特在其形式化研究方法中，公理化方法出现的一个新阶段.欧几里得在《几何原本》中所表述的公理体系，直接反映数学实体的性质，故称实体公理化.而希尔伯特在《几何基础》中所表述的公理系统，尽管使用了众所周知的那些术语，但它们只是用来表示对象之间某种关系的文字或记号，人们可以赋予它各种各样的具体解释，故曰形式公理化.后来希尔伯特又在处理数学基础问题时，沿着证明论的展开用形式化研究方法，对形式公理化方法更进一步符号化和纯粹形式化，因而人们又称之为公理化方法的形式化阶段.

公理化方法的第一步是积累大量的资料、数据和经验.为了使这些资料和经验系统化，然后上升为理论，就要对资料和经验进行分析与归纳，使之上升为少数原始概念和不加证明的相互关系，从而形成公理系统.公理化方法的第二步是从这少数基本概念和公理出发，经过综合与演绎，使之展开成一个学科的理论系统.所以公理化方法的第一步是由现象到本质、从具体到抽象的过程.而第二步则是成长、发展和形成系统的过程.

公理化方法的意义和作用，在于它是表述与总结科学理论的一种重要方法，又在于它是推动和创建新理论的一种重要方法.第一个作用是明显的，第二个作用可以非欧几何的诞生为例，因为若没有公理化方法应用于几何学，也就没有所谓第五公设问题，而罗巴切夫斯基几何的诞生却直接起源于第五公设问题的研究.又如，在代数方面，公理化方法在群论、域论、赋值论、理想论和超复系理论等分支中导致了一系列新概念的形成，建立了许多新的联系，获得了一系列影响深远的结果.在现代数理逻辑中，公理化方法也成为最流行的方法，同时还渗透到其他自然科学领域.

在强调了公理化方法的意义和作用后却应指出：公理化方法若不与实验方法相结合，则可能导致玄乎其玄而陷入错误之途；又，公理化方法若不与认识论科学方法相结合，则也许不会更好地发现问题.此外，还应扫除那种惟有公理化的数学系统才是完美的唯公理主义观点，因为这种观点对于一些新兴学科的诞生，对于那些与生产实际关系密切的学科的发展，将在实际上形成一种障碍.

公理系统的相容性(consistency of axiom system)　公理系统应当满足的性质之一.即对于任何一个公理系统的基本要求之一就是公理的选取不能自相矛盾，这就是相容性.公理系统应当满足的性质之一.从认识论的角度来看，人们首先主张对任何公理系统的原始概念和公理的选取必须客观地反映现实对象的本质和关系，就是说，应该有它真实的直观背景，而不是凭空臆造.其次，从逻辑的角度来看，则不能认为一些概念和公理的任意罗列就能构成一个合理的公理系统.一个有意义的公理系统应当满足如下三个条件：

1.相容性：也称无矛盾性.即指公理的选取不允许既能证某个命题成立，又能证该命题的否定成立.

2.独立性：即在所选取的公理表中，不允许有一条公理能用其他公理把它推导出来.

3.完备性：即要求能确保从公理系统推出所研究的数学分支的全部命题，也就是必要的公理不能少.

至少从理论上讲，对于公理系统的如上要求应该算是正当和自然的.至于某个所论之公理系统是否满足或是否验证满足上述要求，甚至能否在理论上证明满足上述要求的公理系统存在等都是另外一回事.

公理系统的独立性(independence of axiom system)　见“公理系统的相容性”.

公理系统的完备性(completeness of axiom system)　见“公理系统的相容性”.

相对相容(relative consistency)　几何基础的基本概念之一.一个系统的相容性必须依靠另一个系统的相容性才能证明时，这就是相对相容.如果在理论上证明了某个公理系统决不会引出在逻辑上互相排斥的命题，则表示已经给出了该公理系统的相容性证明.相容性就是无矛盾性.所谓公理系统的相对相容性证明，就是把一个公理系统的相容性证明转化为另一个看上去比较可靠的公理系统的相容性，或者说依靠某一个公理系统的无矛盾性来保证另一个公理系统的无矛盾性.反之，如果不依靠任何别的公理系统的相容性而直接从理论上证明一个公理系统的相容性，就称其为公理系统的直接相容性证明.

直接相容(direct consistency)　见“相对相容”.

公理系统的模型(the model of axiom system)　几何基础的基本内容之一.指公理系统的一种具体描述.人们通常把建立一个公理系统之前的背景和

建成之后的某种具体解释看成是该系统的一个模型．若设 Σ 表示某一给定的公理系统，现选定一组客观对象分别作为 Σ 中各个基本概念的具体解释，如果这些客观对象之间的关系经过验证知其已满足 Σ 中诸公理的要求，人们就说已经给出公理系统的一个模型．例如，人们从希尔伯特几何系统公理表中删去有关空间陈述的 5 条结合公理 I_4-I_8，从而构成欧氏平面几何公理系统，记为 Σ^*，又设 σ 为罗巴切夫斯基空间中任给的一个极限球面，现选取极限球面 σ 上的点和极限圆作为一组客观对象，分别作为 Σ^* 中平面 α 上的点和直线（即 Σ^* 中之基本概念）的具体解释，这些极限圆可由过 σ 之任意轴线的任意平面交截 σ 而得到，因此即可逐一验证这里所选之客观对象之间的关系能满足 Σ^* 中每一条公理的要求．例如，设 A 和 B 为 σ 上任二点，而 a，b 为过 A，B 之轴线，故 a 与 b 惟一地决定着一个平面 α，因此 α 与 σ 惟一地交截出一个通过 A 与 B 的极限圆 S．这表明能够满足 Σ^* 中结合公理 I_1 与 I_2．亦即人们有：

I_1^*．对于 σ 上任意两个不同的点 A 和 B，至少有一个极限圆 S 连结 A 和 B．

I_2^*．对于 σ 上任意两个不同的点 A 和 B，至多有一个极限圆 S 连结 A 和 B．

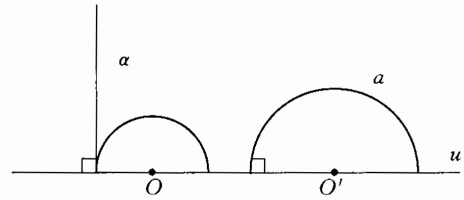
又如，人们设 σ 上的极限圆 u 为过 σ 轴线之平面 α 与 σ 交截而得，点 A 为 σ 上位于 u 之外的一点．过 A 引 σ 的轴线 a，因 a 与 α 互相平行，今在 σ 上过 A 引任意的极限圆 S，显然与 σ 交截出 S 之平面 β 过轴线 a，而极限圆 S 与 u 不相交的充分必要条件是平面 β 与 α 没有公共点．而过 a 又与 α 不相交的平面是惟一的，这表明在 σ 上过 A 点至多只能引一个极限圆不与 u 相交．即所选客观对象能满足 Σ^* 中之欧氏平行公理．即有：

V^*．过 σ 上极限圆 u 外一点 A 至多只能引一个极限圆与 u 没有公共点．

总之，人们所选的客观对象之间的关系对于 Σ^* 中的每一条公理都能被验证是满足的．因此，人们在罗氏空间的极限球面上构造了一个欧氏平面几何公理系统的模型．

庞加莱模型（Poincaré's model）　一种罗氏几何模型．第一个在欧几里得几何系统中构造出罗巴切夫斯基几何公理系统模型的是法国数学家庞加莱（Poincaré，(J.-)H.），由于该模型与非欧几何的相容性问题以及如何解决第五公设问题等直接相关，从而以庞加莱模型称之．将罗巴切夫斯基几何公理表中有关空间陈述之 5 条结合公理 $\mathrm{I}_4-\mathrm{I}_8$ 去掉，构成一个罗巴切夫斯基平面几何公理系统，记为 Σ^0．现要在欧氏平面上构造出 Σ^0 的模型．

任取欧氏空间的一个平面 α，如图所示，在 α 上水平地作一直线 u，u 将 α 分为上、下两个半平面，人们把全开的上半平面 $\mathfrak{C}$（即上半平面去掉 u 上的点）

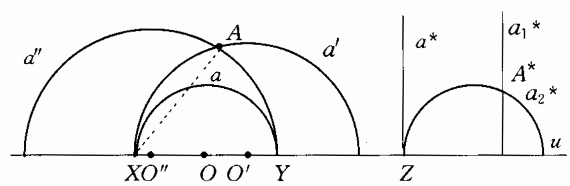


称为 L 平面，又把 $\mathfrak{C}$ 上的点称为 L 点，再把垂直于 u 而位于 $\mathfrak{C}$ 上的半直线，以及圆心在 u 上而圆周与 u 垂直且位于 $\mathfrak{C}$ 上的半圆周统称为 L 直线．实际上，这里也可将垂直于 u 而位于 $\mathfrak{C}$ 上的半直线视为半径无限大而圆周垂直于 u 的半圆周．人们把 L 平面上的 L 点和 L 直线作为所选取的一组客观对象．可以逐条验证所选对象之间的关系得以满足 Σ^0 系统诸公理．例如，由于在欧氏意义下，过 $\mathfrak{C}$ 上任何两点 A 和 B 能且只能作一个半圆周，使其圆心在 u 上，并且圆周与 u 成直角，这就验证了 Σ^0 中之结合公理 I_1 与 I_2 是成立的，亦即所选对象满足下述公理之要求：

I_1^0．在 L 平面上任给二不同的 L 点 A 和 B，则至少有一条 L 直线 a 连结 A 和 B．

I_2^0．在 L 平面上任给二不同的 L 点 A 和 B，至多有一条 L 直线 a 连结 A 和 B．

设 a 表示 $\mathfrak{C}$ 上任一半径有限长的 L 直线，其圆心为 u 上点 O 且与 u 正交于 X 和 Y 两点，A 为 $\mathfrak{C}$ 上不在 a 上的一个 L 点．如图所示：



在欧氏意义下连结 A 与 X，并作线段 AX 之中垂线交 u 于点 O'，再以 O' 为中心，以 $O'A=O'X$ 为半径作圆 a'，与 a 所在圆周 a 相切于点 X．在欧氏意义下 X 是 a 和 a' 之惟一的公共点，在 $\mathfrak{C}$ 上的 a' 为 L 平面上过 L 点 A 的一条 L 直线，可断言 L 直线 a 与 a' 在 L 平面上没有公共点．此处应注意 X 在 u 上而不为 $\mathfrak{C}$ 上的 L 点．完全类似地，过 L 点 A 且与 u 正交于 Y 的 L 直线 a'' 在 $\mathfrak{C}$ 上也与 a 没有公共点．这表明过 A 至少存在两条 L 直线 a' 和 a'' 在 $\mathfrak{C}$ 上与 a 不相交．另一方面，若当 L 直线 a^* 之半径无限长且与 u 正交于 Z 时，而 A^* 为 $\mathfrak{C}$ 上不属于 a^* 的一点，则亦如图所示，在 $\mathfrak{C}$ 上也至少存在着两条 L 直线 a_1^* 和 a_2^*，它们过 A^* 而在 $\mathfrak{C}$ 上与 a^* 不相交．所以不论在哪种情况下，都能验证所选对象满足罗氏公设．亦即有：

$\widetilde{V}^0$. 过 L 平面 $\mathfrak{C}$ 上任一已知 L 直线外的任一 L 点，至少能引两条 L 直线与该已知 L 直线在 L 平面上没有公共点.

因此，就在欧氏平面上构造了一个罗氏平面几何公理系统的模型，称为庞加莱模型. 当然，还应指出的是，对于 Σ^0 的各条公理的验证，有的是相当复杂的，并非都像如上举例的几条那么轻而易举. 特别是对于 Σ^0 中诸合同公理的验证，还要涉及解析函数论中的反形变换概念及保角变换理论等. 但不论如何，均能一一验证是无疑的.

笛卡儿模型(Cartesian model)　一种欧氏几何模型. 全体实数的集合仅作为集合来看，其元素间不存在什么确定的关系，但在它的元素之间规定了各种运算关系及顺序关系后，实数集的数与数之间就有了种种关系而互相制约，或说有了某种数学结构了. 人们把具有数学结构的实数集称为实数系统，记为 R. 现在 R 上构造欧几里得平面几何公理系统 Σ^* 的模型. 把实数对集合 $D=\{(x,y)\mid x\in R\&y\in R\}$称为 E 平面，又把 D 中每一元素，即任一实数对 (x,y)称为 E 平面上的 E 点，再把 R 中三个实数 u，v，w(u 与 v 不同时为 0)的连比 $u:v:w$ 称为 E 平面上的 E 直线. 连比 $u:v:w$ 是指满足如下条件的三元实数组$(u:v:w)$，这个条件是对任何不为 0 的实数 λ 而言，$u:v:w$ 与 $\lambda u:\lambda v:\lambda w$ 被视为相同的. 于是两条 E 直线 $a:b:c$ 与 $e:f:g$ 相同的充分必要条件是

$$\frac{a}{e}=\frac{b}{f}=\frac{c}{g}.$$

因此，让选取如上用实数定义之 E 平面上的 E 点和 E 直线为一组客观对象，而对于所选 E 点(x,y)和 E 直线 $u:v:w$ 之间的基本关系可定义如下：若(x,y)与 $u:v:w$ 能满足等式 $ux+vy+w=0$，就说 E 点(x,y)落在 E 直线 $u:v:w$ 上，或说 $u:v:w$ 通过(x,y). 这样，对于所选之客观对象之间的关系即可一一验证满足 Σ^* 系统中的每一条公理. 因此，就在实数系统 R 上构造了一个欧几里得平面几何公理系统 Σ^* 的模型，正因为在构造这个模型中所利用的关系都出现在笛卡儿直角坐标系统的解析几何里，因而将该模型称为笛卡儿模型.

罗巴切夫斯基几何公理系统的相容性(the consistency of Lobatchevskian geometric axiom system)　罗巴切夫斯基几何公理系统的重要性质. 它是关于罗巴切夫斯基几何公理系统是否会出现矛盾的讨论和探索. 由于罗巴切夫斯基几何公理表中包含着一条与常识相悖的罗氏公设，从而激起了人们对于该公理系统无矛盾性证明的兴趣. 但这不是一件轻而易举的事情. 俄国数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский，Н. И.)曾为此而希望用解析方法实现这一目的，但实践证明他的计划难以取得成功. 直到 19 世纪末叶，人们头脑中才出现这样一个信念：既然大家对欧几里得几何公理系统没有疑虑，那么能否在假定欧几里得几何公理系统无矛盾的前提下，相对地解决罗巴切夫斯基几何公理系统的相容性呢？法国数学家、物理学家庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)借助于在欧氏几何系统中构造罗氏几何公理系统之模型(参见“庞加莱模型”)的办法实现了这一设想. 庞加莱首先选取欧氏几何系统中的一些几何元素作为客观对象，并以此作为罗氏几何系统中之基本概念的解释，然后再对所选客观对象之间的关系进一步验证它们能满足罗氏几何系统之每一条公理，从而在欧氏系统中构造了罗氏几何公理系统的模型. 该模型构造的成功表明了这样的事实：只要假定欧几里得几何公理系统是无矛盾的，那么罗巴切夫斯基几何公理系统就一定是相容的.

欧几里得几何公理系统的相容性(the consistency of Euclidean geometric system)　欧几里得几何公理系统的重要性质. 它是关于欧几里得几何公理系统是否相容的讨论与探索. 虽说普遍认为欧几里得几何公理系统的相容性是比较信得过的，并对庞加莱模型(即在欧氏几何系统中构造的罗氏几何公理系统的模型)表示出很大兴趣，因为它表征了罗巴切夫斯基几何公理系统的无矛盾性可由欧几里得几何系统的相容性来保证. 但也正由此而引起了人们对欧氏几何公理系统之相容性产生怀疑. 因为竟然能由之而保证一个包含着相悖于常识之罗氏公设的系统具有相容性. 从而促使人们考虑不依靠直觉而在道理上弄明白欧几里得几何公理系统为什么相容. 对此，人们受到法国数学家笛卡儿(Descartes，R.)所创立之解析几何的启发，在实数系统中构造了一个欧几里得几何公理系统的模型(参见“笛卡儿模型”). 因此，只要假定实数系统 $\boldsymbol{R}$ 无矛盾，欧几里得几何公理系统就一定相容. 所以庞加莱模型与笛卡儿模型的构造成功表明：只要实数系统 $\boldsymbol{R}$ 相容，则欧氏几何公理系统与罗氏几何公理系统均为无矛盾系统.

几何公理系统模型的同构(isomorphism of geometric axiom system model)　几何基础的基本概念之一. 指对同一几何系统不同模型之间的某种关系的描述. 设 AX 表示由若干个公理所组成的一个公理系统，而 AX 在两个不同的对象系统 Σ^A 和 Σ^B 上分别构造了两个模型 M_A 和 M_B(参见“公理系统的模型”)，如果 M_A 和 M_B 的对象之间能够建立这样的一一对应，使得对应元素之间有完全相同的相互关系，则称模型 M_A 和 M_B 是同构的. 若以几何公理系统之模型对同构概念解释时，就是当某一个几何公理系统之两个不同模型的同名基本对象(如点、

直线、平面)之间所构成的一一对应,能够使得在一个模型中由某些基本关系(如连结、在中间、合同等)联系起来的任何一些对象,在另一个模型中必有由相同的关系联系起来的一些对象与之对应.

但应注意,并非同一几何系统的任何两个模型都同构(参见"几何公理系统的完备性").

几何公理系统的完备性(the completeness of geometric axiom system) 几何公理系统的重要性质.完备性是人们对任何一个公理系统的基本要求之一,而一个几何公理系统的任何两个模型都是同构的(参见"几何公理系统模型的同构"),那么它就满足了完备性要求或称该几何公理系统具有完备性.

先举一例说明一个几何公理系统的两个不同的模型可以是同构的.首先,人们不难在等距面上构造罗巴切夫斯基平面几何公理系统 Σ^0 的模型;设 σ 为罗氏空间中任给一个等距面,而 u 为 σ 的底,选定 σ 上的点和等距线作为客观对象,不难验证所选客观对象之间的关系能满足 Σ^0 系统中每一条公理的要求,从而就在 σ 上构造了一个罗巴切夫斯基平面几何公理系统的模型.现在选取任意两个具有公共底平面 u 的等距面 σ_1 和 σ_2,然后在 σ_1 和 σ_2 上分别构造罗巴切夫斯基平面几何公理系统 Σ^0的两个模型 M_1 和 M_2.现规定,如果 σ_1 和 σ_2 上的点位于同一条垂直于底平面 u 的直线上,则算是互相对应的,如果 σ_1 和 σ_2 上等距线位于同一个垂直于 u 的平面上,则说这两条等距线是互相对应的,则在此对应原则下,Σ^0 的两个不同模型 M_1 与 M_2 是同构的.

再举例说明一个公理系统的两个不同模型可以不是同构的.取希尔伯特-欧几里得几何公理表中前三条结合公理 I_1—I_3 组成一个独立的几何公理系统(参见"结合公理")E^A,然后在欧氏空间中任取一个三角形,把该三角形的顶点称为点,把该三角形的边称为直线,因此有了一个共有 6 个对象(三个点和三条直线)组成的对象系统,记为 σ_A.不难验证 σ_A 的几何元素(即所选之客观对象)间的关系能满足 E^A 之每一条公理的要求,因而在 σ_A 上构造了一个 E^A 的模型 M_A.现再在欧氏空间中任取一个四面体,将该四面体之顶点称为点,四面体的棱称为直线,四面体的面称为平面,因此又有了一个计有 14 个对象构成的对象系统,记为 σ_B,容易验证 σ_B 的几何元素(即所选客观对象)之间的关系同样满足 E^A 的每一条公理的要求,因而人们又在 σ_B 上构造了 E^A 的另一个模型 M_B.但在 M_A 与 M_B 之间不存在一一对应关系,所以 M_A 与 M_B 不是同构的.

完备的公理系统要求它的所有不同模型都是互相同构的.可以严格证明,欧几里得几何公理系统和罗巴切夫斯基几何公理系统都是完备的公理系统.

精确性经典数学基础

精确性经典数学基础(the foundation of accurately classical mathematics) 数学基础的一个分支学科.指奠定整个精确性经典数学的理论基础及相关问题的专门学科.19 世纪,随着工业科学和自然科学的蓬勃发展,推动了数学各个分支的迅速发展,特别是变量数学的迅速发展,促使人们迫切要求去建立一种能够统括各个数学分支的理论基础.由于意大利科学家伽利略(Galilei,G.)在 17 世纪发现了"自然数全体"与"平方数全体"能建立一一对应,从而推翻了自古以来的"全体大于部分"这一公理.因为有穷集合决不会出现自身与其真子集一一对应的情况,以至于大大刺激了人们对于无穷集合的研究.看来"全体大于部分"这一思想规定是从有限性事物中抽象出来的,因而德国数学家戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)就用能否与自身之真子集建立一一对应来划分有限集合与无限集合.但不论如何,19 世纪以前,人们对于无限集合的研究和认识还是零碎不全的.正是在这样的历史背景下,德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))系统地总结了长期以来的数学认识与实践,缔造了一门崭新的数学学科——集合论.人们认为,集合论可以作为整个经典数学诸分支的共同的理论基础.有关非欧几何的相容性问题,最终要归结到集合论的相容性问题.集合论的思想方法渗透到数学的各个分支,而且任何数学概念均可从集合论的基本概念出发来定义,任何数学定理均可从集合论的思想规定出发推导出来.例如,集合论的思想方法渗透到近世代数学的研究领域是人所共知的;若没有集合论,显然不会有近代测度论;抽象空间理论的研究在近代数学的发展中占有重要地位,其中几何概念与分析方法融化在一起,各种抽象空间无非是各种具有特殊结构的无限集等.所以,康托尔创建集合论(通常称为古典集合论)的不朽功绩之一,就是为整个经典数学提供了一个理论基础.另一方面,数学的研究对象是在不断地扩充中丰富起来的.例如,微积分的建立完成了数学研究对象由常量到变量的再扩充;概率论的诞生完成了数学研究对象由确定性到随机性的再扩充.而康托尔创建古典集合论的不朽功绩之二,便是由此完成了数学研究对象由有限、潜无限到实无限的再扩充.所以,德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)说:"从有限推进到无限是康托尔的不朽功绩."

康托尔创建古典集合论的一个最重要的思想方法是用以造集的概括原则,即任给谓词 P,就能构造一集,它恰由满足谓词 P 的对象构成.但应指出,概

括原则中用以造集的那个谓词必须是精确性一元谓词，任何非精确谓词或模糊谓词都不是概括原则意义下用以造集的谓词．其次，在概括原则之下用以造集的精确性一元谓词是完全任意的，而且对象域也没有任何限制．

然而不能令人满意的是：康托尔所创建的古典集合论中出现了悖论．当然，人们对于那些古昔相传的悖论是不以为然的，认为这不过是人为构造之事．但对集合论中所出现的布拉利·福尔蒂悖论、康托尔悖论等，却不能不引起逻辑学家和数学家的重视，但又认为这仍然是一些技巧性问题，稍加处理就会解决问题的．然而在 1902 年，罗素悖论出现后，由于该悖论是因此基本，只要用逻辑术语去替代集合论术语，罗素悖论就要直接涉及逻辑理论本身，因而直接冲击了以严谨素称的数学与逻辑两门学科，甚至动摇了用集合论为数学奠基的信心，因为数学不能奠定在自相矛盾的理论基础上．这就大大加深了人们的危机感，并将由此而引起的困难局面恰当地称为数学的第三次危机．如所知，人们把公元前 5 世纪关于无理数之发现过程所造成的惊奇不安局面称为第一次数学危机，又把 18 世纪微积分诞生以来所出现的混乱局面称为第二次数学危机，原认为作为严格的分析基础之极限论的建立，便可解除数学的第一、二次危机，但极限论是以实数理论为基础的，而严格的实数理论的建立又必须以集合论为基础，不料，集合论又出现了上述一系列悖论，所以数学的第三次危机实际上是前两次危机的深化和发展，所涉及之问题更广更深．

另一方面，非欧几何的诞生，直接否定了长期占统治地位之“数学真理是绝对真理”的观点．例如，在康德(Kant，I.)过去就把欧氏几何视为关于空间的绝对真理，即所谓先验的综合判断．而现在，平行公理完全相背的两种几何竟然都是相对相容的．然而不论如何，数学是演绎推理性质的学科，所以从形式上看，数学命题的真理性还可建立在公理的真理性与逻辑规则的有效性之上．因而即使上述“数学真理是绝对真理”这一观念受到冲击之后，数学家还可用逻辑推理的严格性作为精神支柱，但在集合论中出现悖论之后，致使这一精神支柱也动摇了．正因为数学面临着这样的危机，才促使数学家们去探索数学推理在什么情况下有效，在怎样的情况下失灵．于是，在 20 世纪初，“数学基础论”这一数学分科诞生了．摆在数学家面前的首要任务，就是如何为数学的有效性重建可靠的依据．由于在这一工作中所持之基本观点不同，以至于在数学基础的研究中形成了不同的流派；有所谓以英国数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)为代表的逻辑主义派，以荷兰数学家布劳威尔(Brouwer，L. E. J.)为代表的直觉主义派，还有以德国数学家希尔伯特(Hilbert，D.)为代表的形式主义派．习惯上说成是数理逻辑三大派．其实，如是之说不恰当，还有一定的历史误解．首先是这些流派都因数学基础之研究而产生，多数不同见解都针对数学基础问题而提出和形成．其次，现代形式主义派的数学观和希尔伯特的数学观并不一致，理应区分希尔伯特主义派和形式主义派，更应将这些流派称为数学基础诸流派．

自从集合论出现悖论以后，曾有一种意见是抛弃集合论，设法建立别的理论而作为数学的理论基础，但又发现这实在难以实现．因而又回过头来立足于改造集合论．此外，大家公认罗素对避免悖论的研究很有贡献，几乎可以说，现有的一些解决悖论的方法，无不渊源于罗素早年所提出的几个可能解决悖论的方向．例如，德国数学学策梅洛(Zermelo，E. F. F.)等人所发展起来的近代公理集合论，就是罗素当年提出之量性限制论(即外延理论)这一思想的阐发．另外，罗素当年所提出之曲折理论(即内涵理论)，却在美国数学家奎因(Quine，W. V. O.)等人的工作中得到展开．但罗素本人却又另找出路，即引进他的“恶性循环原则”而发展了他的分支类型论．

对于种种避免悖论而为精确性经典数学建立牢固理论基础的种种方案而言，尚应指出如下几点：

1．现有的几种取得一定成效的避免悖论的方案都立足于修改概括原则，即限制其造集的任意性．但仍然不能令人满意的原因此一是在取得一定成效的同时，损失了许多合理的数学内容．因而，如何给出一种修改概括原则的方案，以能使之既能避免悖论，又能全面保留合理的数学内容，这已成为一个遗留问题．但这一遗留问题的解决，在经典数学范围内几乎不能实现．不能令人满意的原因此二是所谓成效，仅在于能在系统内避免历史上几经出现之种种悖论，迄今也未发现系统内有新的悖论出现，但却未能在理论上证明，在此方案下所构造系统的展开永远不会出现悖论．

2．近代公理集合论的发展是解决悖论的方案之一，它既能避免悖论，又能全面保留合理的数学内容，从而为精确性经典数学提供了一个相对牢固的理论基础，但它不涉及数学研究对象的再扩充．较为著名的近代公理集合论有两种，即所谓 ZFC 系统和 BG 系统，这两种公理集合论系统对客观世界的描述能力本质上等效，又各有优缺点，但由于 ZFC 系统显得较为直观自然，因而被普遍采用．

3．20 世纪 30 年代，波茨娃尔(Бочевар，B.)曾想在集合论中保留概括原则，立足于放弃配套于集合论的二值逻辑，代之以发展多值逻辑而开辟避免悖论的另一途径．但在 1954 年，莫绍揆证明了波兰数学家、逻辑学家武卡谢维奇(Łukaszewicz，J.)有穷

值逻辑系统配上概括原则必定产生悖论.但无穷值逻辑系统配上概括原则却还无法结论是否必定出现悖论.20世纪60年代,曾有张辰中、挪威数学家斯科朗(Skolem,A.T.)等对此继续研究,获得了一系列有意义的结果.直到1985年,中国数理逻辑工作者证明了下述事实:如果在集合论系统中保留概括原则,又要内涵较为丰富而能发展数学,则无论配套以二值逻辑、有穷值逻辑或无穷值逻辑,都必定出现悖论.因而由此表明,波茨娃尔的方案在精确性经典数学范围内不能实现.

古典集合论(classical set theory) 集合论的基础学科.指由德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))创立的用素朴描述方式陈述"集合"的学科.关于集合论在康托尔之前的先驱发展,应当特别提到捷克哲学家、数学家波尔查诺(Bolzano,B.),在他的《无穷的悖论》一书中表现出他是第一个朝着建立集合的明确理论方向采取了积极步骤的人,在该书中他不仅维护了实在无穷集合的存在,并且强调了后来被称之为二集合元素间的一一对应关系.直到他死后三年,即1851年,该书才出版.然而,总的来说,在19世纪康托尔以前,对于无限集的认识和研究,还是滞留于零碎不全的状态.19世纪,由于工业科学和自然科学的发展,大大推动了微积分理论与应用的研究,当时的微积分迫切要求奠定其理论基础,而当时的抽象代数实际上已在研究群、环、域等具有特殊结构的无穷集,并且几何学亦已走向开辟点集拓扑的新领域,所以就整个经典数学而言,迫切要求建立一个能统括各个数学分支,并能建树其上的理论基础.正是在这样一个历史背景下,康托尔系统地总结了长期以来数学的认识与实践,缔造了一门崭新的数学学科,即集合论.区别于集合论的近代和现代的发展,通常把康托尔当时所创立并发展起来的集合论称为古典集合论.又由于康托尔仅以素朴的形式陈述他的理论,既不明确其原始概念,也未明文罗列其公理,故又通常被称之谓素朴集合论.古典集合论的创立,其最重要的历史性意义有两点:其一是实现了数学研究对象从有限与潜无限到实无限的再扩充,这就是德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)所说的:"从有限推进到无限,乃是康托尔的不朽功绩."其二是为整个经典数学的各个分支提供了一个共同的理论基础.

虽然古典集合论的创始者康托尔仅以素朴的形式陈述他的理论,既没有明确原始概念,也没有罗列其不证自明的思想规定,但只要对古典集合论的内容加以概括总结即可看出,康托尔当时的几个主要基本原则或思想方法不外乎是:概括原则、外延原则、一一对应原则、延伸原则、穷竭原则和对角线方法.并且,其中概括原则与外延原则用于造集并确定集与集的相等,一一对应原则与对角线方法用于引出基数概念和确定更大基数的存在,延伸原则与穷竭原则用于描叙良序集的生成和确立实无限研究对象的存在.

集合(set) 集合论的基本概念.集合论的创始人德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))曾对集合的概念作过这样的描叙:"把一些明确的(确定的)、彼此有区别的、具体的或想象中抽象的东西看做一个整体,便称为集合."对此,俄国数学家卢津(Лузин,H.H.)曾加以说明:"我们想象有一个透明而不可穿过的囊膜,就像一只严密封闭的袋子.假设在这个囊膜中包含了一个给定的集合 M 的所有元素,而且在这囊膜中,除了这些元素以外,再没有任何别的东西……这个包含了所有元素(而且除了它们以外,没有任何别的东西)的透明囊膜,也足以用来很好地表示将诸元素 e 汇集在一起的那个作用.由于这汇集作用的结果才产生了集合 M."根据康托尔对集合的描叙和卢津的说明,作为一个集合而言,它涉及的就不仅是构成集合的对象,而且还有使这些对象构成一个整体的那种汇集作用.康托尔曾认为这是给集合下了一个定义.其实不然,因为诸如整体、总体、总和、集合等都是等价概念.所以德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)指出:"康托尔在用莫明定义莫明."康托尔的这类说法,实际上只能当做一种说明,当做是对原始的、公认的思维过程的指证.将这种思维过程演绎为更原始的过程的努力,迄今没有实现.其实,对任何一个概念下定义,必须借助于比它更为基本的概念.因此,在各个历史发展的阶段中,总有一些概念只能相对地通过举例、解释和说明来对它进行描述.集合就是这样一个基本概念.所以近代的公理集合论者,都放弃了对集合下定义的想法,而把它作为基本概念引入.

造集谓词(the predicate of constructing set) 逻辑学与集合论的基本概念.它是用以构造集合的元素(个体)所应满足的一种性质.数理逻辑中的谓词是表示一个个体的性质或者两个以上个体之间关系的词.表示一个个体性质的词称为一元谓词.德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))当年建立古典集合论的一个重要思想方法,就是任给一个性质 P,就能把所有满足性质 P 且仅由具有性质 P 的对象汇集在一起而构成一个集合.通常称这种造集的原则为概括原则,而概括原则中所说的那个用以造集的性质 P 被称为造集谓词.

精确性一元谓词(monadic predicates of distinet) 逻辑学的一个概念.任给一个一元谓词或性质 P,若对任何对象 x 而言,总能明确判定它要么满足该性质 P,要么不满足该性质 P,亦即不存在不能明确判定其是否具有性质 P 的对象,则称该性质 P

为精确性一元谓词.反之,如果存在着不能明确判定其是否具有性质 P 的对象,或者说存在着部分地具有性质 P 而又部分地不具有性质 P 的对象,则称该性质 P 为非精确性一元谓词.例如,"自然数"是一个精确性一元谓词,而"美男子"是一个非精确性一元谓词,因为对一位男子来说,往往是部分地具有性质 P(美男子),或说他是否具有性质 P(美男子)是不能明确判定的.

非精确性一元谓词(monadic predicates of nondistinct) 见"精确性一元谓词".

概括原则(comprehension principle) 古典集合论的基本原则.指古典集合论中用以构造集合的一个重要规定或公理.其内容为无条件承认任给一个性质 P,人们就能把所有满足该性质 P 的对象,且仅由这些具有性质 P 的对象汇集在一起而构成一个集合.用符号来表示就是 $G=\{x|P(x)\}$,其中"|"左边的 x 表示集合 G 的任一元素,而"|"右边的 $P(x)$ 表示元素 x 具有性质 P,$\{\quad\}$ 表示把所有具有性质 P 的 x 汇集在一起而构成一集合.因此,概括原则的另一表达式为 $\forall x(x\in A\leftrightarrow P(x))$,亦即凡是集 A 之元素必具有性质 P,反之,凡具有性质 P 的对象必为集 A 之元素.所以,概括原则是一条集合存在性公理(公理模式).在德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))的早期工作中,概括原则只是隐蔽地被使用着,后来德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F.L.)G.)公开地采用这一公理模式.对于概括原则内容的理解和使用,还应特别指出如下几点:

1.概括原则中用以造集的那个性质 P 必须是精确性一元谓词,任何非精确性一元谓词都不是康托尔意义下用以造集的谓词,这个大前提无论是康托尔还是弗雷格都没有明文叙述,只是在使用概括原则时无形地贯彻.

2.在概括原则之下用以造集的精确性一元谓词是完全任意的,而且对象域也是没有任何限制的.

3.给定精确性一元谓词后,由概括原则所构造之集惟一确定,它恰由所有满足该谓词的对象组成.

悖论(paradoxes) 一种自相矛盾的命题.关于悖论的定义,当前流行的说法,有如"悖论是一种导致逻辑矛盾的命题.这种命题,如果承认它是真的,那么它又是假的;如果承认它是假的,那么它又是真的".或如"一个命题构成一个悖论,如果由它的真可以推出它的假,而由它的假又可以推出它的真".诸因此类的定义法,有它合理的一面,也有不够全面的地方.因为:

1.任何一个悖论在实质上都是相对于某个理论系统而言的.

2.并非每个悖论都要陈述为一个命题或某一语句的形式,有的悖论往往以一个推演过程来表现.

3.人们并不习惯于一定把每个悖论都化归为肯定与否定的等价式,也可用某个系统中并存的两个互相矛盾的命题来表述一个悖论.

德国学者弗伦克尔(Fraenkel,A.A.)曾对悖论给出了一个较为全面而合理的定义:"如果某一理论的公理和推理原则看上去是合理的,但在这个理论中却推出了两个互相矛盾的命题,或者证明了这样一个复合命题,它表现为两个互相矛盾的命题的等价式.那么人们就说该理论系统中出现了一个悖论."应该指出,在弗伦克尔的这一陈述中,不只是指明了任一悖论总相对于某一系统,同时还特别强调了该系统的公理和推理原则"看上去是合理的".因此,对那种把一些明显矛盾的命题凑合起来的不合理系统,是谈不上包含或不包含悖论的.

关于悖论的起源,可以追溯到古希腊和中国先秦哲学时代,但那时及其后的一个历史阶段,悖论往往泛指那些推理过程看上去是合理的,但推理的结果却又违背客观实际.例如,古希腊哲学家芝诺(Zeno,(E.))关于运动的四个悖论便是这一类悖论.如其中之第二个悖论称为阿基里斯悖论,讲的是希腊神行太保阿基里斯和乌龟赛跑,但跑得最快的阿基里斯永远追不上爬得最慢的乌龟.论述如下:设 A 跑的速度远比 B 快,但 B 比 A 先行一段距离,A 为了赶上 B,必须先到达 B 的起点 R_1,但当 A 到 R_1 点时,B 已前进到 R_2 点,又当 A 再到 R_2 点时,B 又已前进到 R_3 点,因此往复,以至无穷,A 便永远追不上 B 了.当然,今天以无穷级数理论已能对此做出解释,但在此以前的历史阶段中是难以对此推理与现实之矛盾做出完满解释的.被称之为悖论.

此外,还有另一种情况而被称为悖论的,那就是由于新观念的引入而矛盾于囿于历史局限的传统观念.例如,意大利科学家伽利略(Galilei,G.)对"平方数与自然数一一对应"的发现而矛盾于"全体大于部分"的传统原则,当时即被称为伽利略悖论.当然,后来人们已做出如下的解释;即"全体大于部分"这一直观原则是在有限数量的事物关系中的抽象出来的,因而不适用于无限性对象的情况.公元前 6 世纪,克里特哲学家伊壁门尼德斯(Epimenides)断言:"所有克里特人所说的每一句话都是假话".试问这句话是真还是假.若设其为真,则因这句话也出于克里特人之口,故按这句话的结论应导致其为假.但若设其为假,却并不能导致其为真.后来,到了公元前 4 世纪,欧布里德(Eubulides)提出撒谎者悖论:"我现在所说的是假话".这就构成了由其真而可导致其为假,并由其假而又可导致其为真了.后来,人们又构造了等价于欧布里德命题的永恒性撒谎者悖论:"在本页本行里所写的那句话是假话."由于上一行

里除了这句话本身之外，别无其他的话.故设该话为真，则要承认该话之结论，因而导致该话为假话.若设该话为假，则应肯定该话结论之反面为真，因而推出该话为真.因此，这是一个悖论.这样，悖论渐趋形成它的现代形式.波兰学者塔尔斯基(Tarski，A.)还对此永恒性撒谎者悖论进一步概括，并给出一个严格的表述形式如下：

1.按照“命题为真”的含义，有这样的原则：X 是真的，当且仅当 P.这里 P 是任意一个命题，而 X 是这一命题的名称.

2.考虑命题：“C 不是真的”.用符号 C 来表示该命题.于是应有：“C 不是真的”等同于 C.

3.由形式 1 知“C 不是真的”是真的，当且仅当 C 不是真的.

由形式 2 和 3 可知：C 是真的，当且仅当 C 不是真的.矛盾.

逻辑数学悖论(logic-mathematics paradox) 一种悖论命题.它是由逻辑或数学系统中的概念所构成的悖论，因此这类悖论总能用逻辑和数学符号来表达.例如康托尔悖论、罗素悖论、布拉利·福尔蒂悖论等都是逻辑数学悖论.

语义学悖论(semantic paradox) 一种悖论命题.它是由命名、真、假等概念构成.因此，如表明、刻画、真等语义项成为这类悖论不可少的组成部分.例如，强化了的扯谎者悖论、理发师悖论、格雷林悖论等都是语义学悖论.

第一次数学危机(first mathematical crisis) 数学史专门术语.指由于无理数的发现而形成的数学界的混乱局面.公元前 5 世纪，毕达哥拉斯学派的古希腊数学家希帕索斯(Hippasus，(M))发现了等腰直角三角形的直角边与斜边不可通约，从而导致了数学的第一次危机.由于当时人们还处在刚刚从自然数概念脱胎形成有理数概念的早期阶段，对于无理数的概念一无所知，因而普遍确信“一切量均可用有理数表示”.这在当时不仅成为希腊人的一种普遍信仰，且已成为毕氏学派的信条.因而上述希帕索斯的发现堪称“荒谬”，致使人们惊奇不安，并被视为一种悖论的出现.相传，毕氏学派因此而将希帕索斯投入海中处死.但他的这一发现却以顽强的生命力而被广为流传，迫使人们去认识和理解“自然数及其比不能包括一切几何量”.历史上把这事件称之为数学史上的第一次危机.

希帕索斯的发现，一方面促使人们进一步去认识和理解无理数，另一方面因为人们由此而感到直觉与经验未必靠得住，推理和证明才是可靠的.从而导致了公理几何学与古典逻辑的诞生.后来，毕氏学派又被迫正视希帕索斯这一发现所导致的悖论，并想通过单子的提出而去解决这一悖论.单子概念是一种如此之小的度量单位，以致其本身不可度量而又要保持为一种单位.这或许是企图通过“无限”来解决问题的最早努力.但这又引起古希腊哲学家芝诺(Zeno，(E.))的非难.芝诺认为一个单子要么是 0，要么不是 0.如果是 0，则无穷多个单子相加也产生不了长度；如果不是 0，则由无穷多个单子构成的有限长线段应该是无限长的.不论如何说都是矛盾的.因此，连同著名的芝诺悖论也被列为数学第一次危机的组成部分.

第二次数学危机(second mathematical crisis) 数学史专门术语.指由于无穷小概念的含混不清而在数学界出现的混乱局面.在 17 世纪和整个 18 世纪，由于微积分理论的产生及其在各个领域里的广泛应用，使得微积分理论得到了飞速发展.但在另一方面，当时的整个微积分理论却是建立在含混不清的无穷小概念上，因而没有一个牢固的基础，遭到了来自各方面的非难和攻击.其中贝克莱(Berkley，G.)大主教所作的攻击最为激烈.“贝克莱批判了英国数学家、物理学家牛顿(Newton，I.)的许多论点，例如，在《求曲边形的面积》一文中，牛顿说他避免了无穷小，他给 x 以增量，展开 $(x+0)^n$，减去 x^n，再除以 0，求出 x^n 的增量与 x 的增量之比，然后扔掉 0 的项，从而得到 x^n 的流数.贝克莱说牛顿首先给 x 以一个增量，然后让它是 0，这违背了背反律”.“至于导数被当做 y 与 x 消失了的增量之比，即 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 之比，贝克莱说它们既不是有限量，也不是无穷小量，但又不是无.这些变化率只不过是消失了的量的鬼魂.”贝克莱之激烈攻击微积分，主要是出于它极端恐惧于当时自然科学的发展所造成之信仰的日益增长的威胁.但也正由于当时的微积分理论没有一个牢固的基础，致使来自各方面的非难和攻击似乎言之有物.所以，“在整个 18 世纪，对于微分和积分运算的研究具有一种特殊的痛苦.因为，一方面是纯粹分析领域及其应用领域内的一个接一个的光辉发现，但与这些奇妙的发现相对照的却是由其基础的含糊性所导致的矛盾愈来愈尖锐”.这就不能不迫使数学家们认真对待这一切，借以解除数学的第二次危机，这就直接导致了微积分的柯西-外尔斯特拉斯时代.

贝克莱悖论(Berkley paradox) 一种悖论命题.指贝克莱(Berkley，G.)主教抨击微积分理论的相关论述.在微积分的牛顿-莱布尼茨时代，由于整个理论建立在含混不清的无穷小概念上，从而在实际上存在着亟待澄清的困难.人们便将微积分理论当时的这种难以自圆其说的矛盾称之曰贝克莱悖论(参见“数学的第二次危机”).

分析基础(foundation of analysis (limit theory)) 研究微积分理论基础的专门学科.面对数学

的第二次危机的出现，数学家们投入了为微积分奠定理论基础的工作. 首先是法国数学家、力学家柯西(Cauchy，A.-L.)，他详细而系统地建立和发展了极限论. 他把微积分理论建立在极限论的基上，按照变量、函数、变量的极限、无穷小量、无穷大量、函数的连续性概念、导数的定义等这样一个线索来展开微积分. 其中极限概念起着关键作用. 柯西首先给出了极限概念的数学定义，但还有许多不严格的地方. 后来，德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass，K. (T. W.))改进了柯西的工作，并用"$\varepsilon-\delta$"语言给出函数极限的定义，把极限理论建立在"$\varepsilon-\delta$"准则上，极限理论就精确化了. 在严格的极限理论中，极限是一种定义对象而不是相应结果的直接表现，于是过程与结果之间的联系被切断. 而作为单独从过程来考察的极限理论，就不再包含直接矛盾，完全避开了实体无限小和无限大概念的设想和使用. 亦即外尔斯特拉斯是用排除含混不清之无穷小量概念的办法来解决贝克莱悖论的. 而奠基于极限论之上展开的微积分就是今天的标准分析. 普遍认为，严格的分析基础(极限论)的建立，数学的第一和第二次危机已获解决. 但在事实上，极限论又要以实数理论为基础，而严格的实数理论又必须以集合论为基础，而集合论的发展，却又出现了一系列悖论，由此而构成了更大的危机.

第三次数学危机(third mathematical crisis) 数学史专门术语. 指集合论中出现罗素悖论之后在数学界所引起的震动与争论局面. 本来对于那些古昔相传的悖论而言，并未引起数学家和逻辑学家的多大重视，认为这都是人为地构造出来的话和事. 直到集合论中出现了布拉利·福尔蒂悖论和康托尔悖论之后才稍加注意. 但又认为这仅仅一些涉及集合论中的技巧问题，只要加以调整或修改，即可解决问题. 而且过去对于非欧几何、欧氏几何以及实数论等的相容性问题的考虑，虽说未能给出证明，但也尚未遇到出现矛盾的麻烦，故又普遍认为不会导致矛盾. 因而在 1900 年于巴黎召开的国际数学会议上，法国数学家庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)宣称："数学的严格性，看来可以说是实现了". 然而事隔不到两年，集合论中出现了罗素悖论，人们发现只要用逻辑术语来代替集合论术语，罗素悖论就要直接牵涉到逻辑理论本身，从而直接冲击了数学与逻辑这两门一向认为严谨的学科，并且直接动摇了数学家们企图通过集合论去为分析理论奠基的信心. 从而惊动了整个西方哲学界、逻辑学界和数学界，德国数学家戴德金(Dedekind，(J. W.)R.)和德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege，(F. L.)G.)都因自己的理论必须涉及集合概念而延搁了有关著作的出版. 今天，人们就将集合论中罗素悖论出现后所引起的困难局面称为数学的第三次危机. 在一定程度上讲，数学的第三次危机实际上是数学的第一、第二次危机的发展与深化，因此集合论悖论所涉及的问题更加深刻，涉及的范围更为广阔.

罗素悖论(Russell's paradox) 关于集合的一个著名悖论. 对于任一集合 x，它或者满足 $x\in x$，(例如一切集合所构成的集)，或者满足 $x\notin x$(例如自然数集)，二者必居其一. 现考虑"一切不属于它本身的集合的集 Σ"，亦即令 $\Sigma=\{x\mid x\notin x\}$. 则不论 $\Sigma\in\Sigma$ 或 $\Sigma\notin\Sigma$ 都将导致矛盾. 这就是英国数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)于 20 世纪初提出的悖论，通常称为罗素悖论. 顺便指出，德国数学家策梅洛(Zermelo，E. F. F.)也曾独立地发现了这个悖论，因而也有罗素-策梅洛悖论之称.

罗素悖论作为被包含在古典集合论里的一个悖论，不仅立即可化归为最基本的逻辑概念的形式，而且可用日常语言来表述它的基本原则. 罗素就于 1919 年将上述悖论改写如下：某理发师给自己作了一条约定："我给并且只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子". 那么他要不要给自己刮胡子呢？对于这个问题作肯定或否定的回答，都是违反上述约定的. 这就是著名的"理发师悖论"的大意.

罗素-策梅洛悖论(Rusell-Zermelo paradox) 见"罗素悖论".

康托尔悖论(Cantor's paradox) 关于集合的一个著名悖论. 在古典集合论中可证下述命题(康托尔定理)：任何集 M 的势 $\overline{\overline{M}}$ 小于其幂集 $P(M)$之势 $\overline{\overline{P(M)}}$. 然而由概括原则可构造一切集的集 E，亦即 $E=\{x\mid x$ 为一集$\}$. 于是由康托尔定理有 $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{P(E)}}$. 但是，设 $x\in P(E)$，则 x 为 E 的一个子集，故 x 为一集，按 E 的构造应有 $x\in E$，故 $P(E)\subseteq E$，因此，$\overline{\overline{P(E)}}\leqslant\overline{\overline{E}}$. 矛盾. 这就是康托尔悖论. 康托尔悖论是德国数学家康托尔(Cantor，G. (F. P.))于 1899 年发现的.

康托尔定理(Cantor's theorem) 见"康托尔悖论".

布拉利·福尔蒂悖论(Burali-Forti's paradox) 关于集合的一个悖论. 在古典集合论中可证如下诸命题：

1. 任一良序集 A 不能与 A 的任何截段 A_a 相似.

2. 凡由序数构成之集，按其大小为序排列时，必为一良序集.

3. 由一切小于序数 α 的序数所组成的良序集 W_α 的序数$\overline{W_\alpha}=\alpha$.

现将一切序数组成一集 Γ，即 $\Gamma=\{x\mid x$ 为一序数$\}$，于是由命题 2 知，Γ 可编成良序集. 故有一序数 γ，即 $\overline{\Gamma}=\gamma$. 按 Γ 的构造知，$\gamma\in\Gamma$. 用 Γ_γ 记 Γ 之元 γ

截 Γ 所获之截段，由命题 3 知，$\overline{\Gamma}_\gamma=\gamma$. 于是 $\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma}_\gamma$，这表明 Γ 与其截段 Γ_r 之序数相同，因而 Γ 与其截段 Γ_r 相似，与命题 1 矛盾. 这就是布拉利·福尔蒂悖论. 布拉利·福尔蒂悖论被发现于 1897 年，实际上，德国数学家康托尔(Cantor, G. (F. P.))早在其两年前就发现了这个悖论，只是没有公开，后由意大利学者布拉利·福尔蒂(Burali-Forti, C.)发现并公开之.

沈有鼎悖论(Shen Yuting's paradox)　沈有鼎于 1953 年提出的几个悖论. 即所谓无根据与有根据悖论、循环与非循环悖论以及 n 循环与非 n 循环悖论. 分述如下：

如果存在 $x_i(i=1,2,\cdots)$，使 $\cdots\in x_n\in x_{n-1}\cdots\in x_2\in x_1\in x$，则称集 x 为无根据集. 否则，称 x 为有根据集. 从而，任一集，要么是有根据集，要么是无根据集. 今按概括原则构造 $S=\{x|x$ 为有根据集$\}$. 试问 S 为哪一种集？设 S 为有根据集，则按 S 的构造知，$S\in S$. 于是若令 $x_i=S\ (i=1,2,\cdots)$，按定义可知 S 为无根据集. 再设 S 为无根据集，则存在 $x_i\ (i=1,2,\cdots)$，使 $\cdots\in x_n\in x_{n-1}\in\cdots\in x_2\in x_1\in S$，因 $x_1\in S$ 及 S 的构造知，x_1 为有根据集. 而上述各 $x_{i+1}\ (i=1,2,\cdots)$ 与 x_1 之关系又表明 x_1 为无根据集，于是，原设 S 为无根据集不得成立，即 S 为有根据集. 哪条路都走不通，称之为无根据和有根据悖论.

如果存在 $x_2,x_3,\cdots,x_n$(n 为不固定的任一正整数变量)，使 $x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in x_1$，则称集 x_1 为循环集. 否则称 x_1 为非循环集. 于是任一集要么是循环集，要么是非循环集. 现构造集 $S=\{x|x$ 为非循环集$\}$. 类似于上一段的推理表明，S 不是循环集，也不是非循环集. 称之为循环和非循环悖论.

如果存在某个固定的正整数 n，使 $x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in x_1$，则称集 x_1 是 n 循环集. 否则称 x_1 为非 n 循环集. 类似地讨论集 $S=\{x|x$ 为一非 n 循环集$\}$ 究竟为哪一种集？可得一悖论，称之为 n 循环与非 n 循环悖论.

实际上，罗素悖论之造集谓词 $x\notin x$ 便是非 1 循环造集谓词. 因而，上面三种悖论，无非是将非 1 循环分别扩张为非 n 循环、非循环和非无穷串(即有根据)，从而皆为罗素悖论之变形.

多值逻辑悖论(multivalued logical paradox)　一个逻辑悖论. 它是莫绍揆于 1954 年提出的一种多值逻辑悖论. 对多值逻辑的研究，开始于 20 世纪 20 年代的波兰数学家、逻辑学家武卡谢维奇(Łukaszewicz, J.)和波茨娃尔(Бочевар, B.)，逻辑学家们随后就建立了种种协调而完全的多值逻辑演算系统. 关于多值逻辑演算系统的特征、解释及其与二值逻辑的关系都进行了广泛而深入的研究. 其中关于多值逻辑系统与概括原则的相容性问题的研究也有一系列成果. 莫绍揆于 1954 年证明了武卡谢维奇有穷值逻辑系统 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 与概括原则是不相容的，亦即多值逻辑系统 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 配上概括原则后必定导致矛盾，通常称为多值逻辑悖论. 现规定蕴涵词→指的是满足下述推理规则的逻辑连结词：由 p 及 $p\to q$ 可得 q. 又 $(p\to)^n q$ 是一种简记，其递归定义为：$(p\to)^1 q$ 指 $p\to q$，$(p\to)^{n+1}q$ 指 $p\to(p\to)^n q$. 此外，规则 (A_n) 指：由 $(p\to)^{n+1}q$ 可得 $(p\to)^n q$. 如果承认概括原则，则可构造集合 $a_n=\{x|((x\in x)\to)^n p\}$，其中 p 为一命题词. 因此，莫绍揆依次证明了下述三个命题：

1. 如果一个系统中有 $p\to p$，(A_n) 和 a_n，则此系统一定包含悖论.

2. 在武卡谢维奇有穷值逻辑系统 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 中，规则 (A_n) 成立.

3. 在武卡谢维奇无穷值逻辑系统 $L_{\aleph_0}$ 中，对任何 n，规则 (A_n) 不成立.

由于在 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 系统中，$p\to q$ 的真值被定义为 $\min(1,1-p+q)$，于是 $p\to p=\min(1,1-p+p)=1$，故在 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 系统中 $p\to p$ 成立. 从而由命题 1 和 2 可知，$L_n(3\leqslant n<\omega)$ 与概括原则必定是不相容的. 因为由 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 再配以概括原则后，此系统将包含 $p\to p$，(A_n) 和 a_n，故由 1 知，此系统内必定包含悖论.

多值逻辑悖论表明，在经典数学范围内，如果在集合论中完全保持概括原则，而将配套的二值逻辑工具改为有穷值逻辑系统 $L_n(3\leqslant n<\omega)$，则依然要出现悖论. 上述结论有重要意义. 但又因上述定理 3 指出，对任何 n，规则 (A_n) 在无穷值逻辑系统 $L_{\aleph_0}$ 中不成立. 从而莫氏方法无法判定无穷值逻辑系统与概括原则是否相容.

无穷值逻辑悖论(infinite-valued logical paradox)　一个逻辑悖论. 它是肖奚安等于 1985 年提出的一种无穷值逻辑悖论. 关于无穷值逻辑系统与概括原则的相容性问题，在 20 世纪 60 年代初，挪威数学家斯科朗(Skolem, A. T.)、张辰中、芬斯特(Fensted)等作了进一步研究. 在一阶逻辑中，概括原则不是一条公理，而是公理模式

$\forall_{x_1},\forall_{x_2},\cdots,\forall_{x_n}\exists y\forall t\ (t\in y\leftrightarrow\varphi(t,x_1,x_2,\cdots,x_n))$，

因而是无穷多条公理. 通常把全体概括原则公式所构成的集记为 Σ_0. 另一方面，若对模式中之公式 φ 加以各种限制，就会形成各种不同的概括原则公式集，它们都是 Σ_0 的子集，分别记为 Σ_1,Σ_2 等. 张辰中和芬斯特分别证明了武卡谢维奇连续值逻辑系统 L(或带等号的 L_i)与上述 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 等之间的相容性. 而对 L(或 L_i)与 Σ_0 是否相容，则仍无结果. 但应指出，即使证明了 L 或 L_i 与 Σ_0 是相容的，也不表明再

在 Σ_0 之外配以其他集合论公理后仍能相容. 张辰中就曾证明在 Σ_2,Σ_3 之外,再加上外延公理后,则就不再与 L 系统相容. 但要发展整个经典数学,仅有 Σ_2,Σ_3 而无其他集合论公理配套是不能实现的. 要想由 L 或 L_i 并完全保持概括原则而去发展整个数学,必须证明:L 或 L_i 与一个包括 Σ_0 在内、并且内涵足够丰富的集合论系统互为相容. 能否实现这一目标? 1985 年,由朱梧槚、肖奚安合作完成的下述定理从反面做出了回答. 任一数学系统 $\mathfrak{C}$,如果满足下列条件:

1. 概括原则成立;
2. $p, p \rightarrow q \vdash q$;
3. $p \rightarrow p$;
4. 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是集,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

是集;

5. 自然数系统被包含在内;

则此数学系统 $\mathfrak{C}$ 必定包含悖论.

由于任一内涵足够丰富的数学系统总能满足上述定理中的条件 2,3,4,5. 因而上述结果表明:对于任何集合论系统,如果完全保持概括原则,仅仅改变与之配套的二值逻辑系统为多值(有穷或无穷值)逻辑系统,则依然要出现悖论. 为区别于多值逻辑悖论而称之为无穷值逻辑悖论.

悖论的统一模式(the unified schema of paradox) 用数学语言陈述的一个抽象悖论(或超级悖论). 令 F 是从集合 A 到 $B \subseteq P(A)$ 的双射(或满射),记 $M = \{a \in A \mid a \notin F(a)\}$,当认定 M 是 B 的元素时,则$\exists m \in A(M = F(m))$. 现在问 $m \in M$ 吗? 不管回答是或否,都将导致矛盾,这就是悖论. 当给映射 F,集合 A 和 B 适当的解释,就可得到所有已知的主要悖论(如罗素悖论、加强的说谎者悖论、里查德悖论、最大序数悖论、最大基数悖论、格雷林悖论等). 悖论的统一模式定理是中国学者蒋星耀于 2001 年 4 月发现的. 由于该模式是用数学语言陈述的,因此,将悖论的成因明白无误地揭示出来:即造成悖论的本质原因是将双射 F 下所构造的与 B 的每个元素都不同的反对角线集合 M,错误地认为是 B 的元素,这在自然语言或朴素集合论的环境中,在没有有效分析工具下,往往很难发现. 这就是悖论长期困扰数学界的原因. 悖论统一模式定理的内涵非常丰富,它还将英国逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)的恶性循环原则(参见"恶性循环原则")和波兰学者塔尔斯基(Tarski,A.)的关于真值的不可定义性定理作为它的推论得出,并且,只要给 F,A,B 以适当的解释,就可造出新的悖论.

不断延伸原理(principle of continual extension) 一种思想规定. 这种思想规定在德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))创建的古典集合论中就被不自觉地使用,20 世纪 50 年代,由徐利治予以精确叙述,并明确提出和使用. 其内容如下:设 $L(I,E)$是一个适用于 θ 的延伸规律,那么,只要当其产生的继元恒为 $L(I,E)$所适用,则 $L(I,E)$必可生成式地、依次相接地、恒可适用到 θ 的每一个继元之上. 某一延伸规律 $L(I,E)$,在不断延伸原理作用下形成的一种为 $L(I,E)$所适用的继元 θ 之逐步增长、前进或延伸的状况,称为延伸变程. 凡根据上述不断延伸原理,由某一延伸规律$L(I,E)$所构成的延伸变程记为

$$\overrightarrow{\mathrm{Proc}}\{\theta \mid L(I,E)\}.$$

相对穷竭原理(principle of relatively complete exhaustion) 一种思想规定. 这种思想规定在德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))创建的古典集合论中已被不自觉地使用. 20 世纪 50 年代,由徐利治予以精确叙述,并明确提出和使用. 其内容如下:设 $L(I,E)$是一个适用于 θ 的延伸规律,那么 $L(I,E)$必可适用到 θ 的所有一切能为 $L(I,E)$所适用的继元上. 从而即导出并穷尽了所有一切能为 $L(I,E)$所适用的继元,同时界定了一个无穷总体,记为

$$\overset{\longrightarrow\!\circ}{\mathrm{Proc}}\{\theta \mid L(I,E)\}.$$

潜无限(potential infinity) 一种无穷观. 在哲学上,有所谓消极无限与积极无限之分,哲学上的这两种不同的无限性概念在数学中的具体表现就是潜无限和实无限. 根据徐利治提出和刻画的"不断延伸原理"和"相对穷竭原理",可对潜无限和实无限的概念较为精确地描述如下:

潜无限:凡由不断延伸原理所确定的那种继元之不断地被导出的延伸性进程称为潜无限.

实无限:凡在不断延伸原理所确定的某一延伸性进程的基础上,通过相对穷竭原理的使用而界定之无穷总体称为实无限.

由于延伸不等于穷竭,潜无限就不等于实无限. 另外,延伸与穷竭可有其不同的内容和基础,因而也有不同内容、不同基础的潜无限和实无限. 如果单纯着眼于集合,则仅为其中之一种情形,此时潜无限便是元素增长之渐变性进程,实无限就是几经汇集成总体的无穷集合. 总体来说,潜无限即延伸性无限或不断扩展式的无限,而实无限则是穷竭性无限,是一个完成了的无穷过程.

无限的概念及其方法远在古希腊时代就已渗透进数学领域,并已开始了潜无限和实无限这两种无限观的萌芽. 但历史上第一次明确地只承认潜无限而反对实无限的是古希腊哲学家、科学家亚里士多德(Aristotle),略早于他而明确承认实无限的是古

希腊哲学家柏拉图(Plato).在柏拉图看来,理念是惟一真实的存在,人们对世界的认识也就是对理念世界的认识.而数学知识是属于这种纯理念的知识,从而在柏拉图那里,数学对象就获得了一种本体论上的实在性,从而那种不能通过经验方法直接证明而要通过思维才能把握的实无限就毋庸置疑地获得了它的合法地位.柏拉图的这种思想往往成为数学实无限论的主要依据.亚里士多德则与柏拉图相反,他对于感觉能力所不能及的抽象和外推是不喜欢的,从而就势必要对实无限采取排斥态度.他明确认为,无限只能是一种潜在的存在,而不能是一种实在的、独立的存在.亚里士多德的这种思想就是数学中之潜无限论者的基本观点.

实无限(actual infinity) 见“潜无限”.

抛球问题(the problem of toss a ball) 一种矛盾命题.指西方数理哲学界流传甚久而未解决的一个问题,即芝诺悖论的引申.由于近代极限论和无穷级数理论的诞生,人们可按收敛无穷级数得以求和的观点,对古代著名的芝诺悖论给出逻辑、数学的解释方法.并随之将芝诺悖论引申为下述抛球问题:设有甲、乙二人互相抛球,甲先用 1/2 分钟把球抛给乙,乙又用 1/4 分钟时间把球抛回甲手中,然后甲又用 1/8 分钟时间把球抛给乙……如此往复以至无穷.那么根据收敛无穷级数求和法则,可对甲、乙二人所费抛球时间求和,即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

试问:当抛球自开始进行到 1 分钟时,该球落在甲手中,还是落在乙的手中?这就是所谓抛球问题.对此,由于潜无限论者不承认任何无穷过程得以进行完毕,因而上述抛球将永远只能滞留于无限制的往复进程中,从而可以避而不答这个问题.但实无限论者却既不能回避问题,又无法回答这个问题.故亦有抛球悖论之称,并在西方数理哲学界流传一时,久久未决.

徐利治、朱梧槚等人于 1982 年利用奥斯道尔-高桥(Osdos-Takahashi)关于超幂 $^*R$ 这个实数的非标准模型,引进潜变段(即潜尾)存在公理,建立了非康托尔型自然数序列模型,进而利用这一非康托尔型自然数序列模型 $\widetilde{N}$ 的构造特征,对抛球问题给出了一种逻辑、数学的解释方法.亦即将抛球时间序列 $\{t_n\}$ 放到 $^*R$ 上来考察,于是可将 $\{t_n\}$ 与 $\{\langle n\rangle\}$ 对应起来,因而有 $t_n\leftrightarrow\langle n\rangle$,($\langle n\rangle\in\widetilde{N}$),记为

$$t_v=\sum_{k=1}^{v}\frac{1}{2^k}\quad(v\in\widetilde{N}).$$

今在 $\widetilde{N}$ 的潜变段中选取无穷多个偶的无限自然数与奇的无限自然数:

$$v_j=2\left[\frac{\omega}{3+\frac{1}{j}}\right],\quad \mu_j=2\left[\frac{\omega}{3+\frac{1}{j}}\right]+1,$$

此处 $j=1,2,\cdots$ 于是在这些时刻 t_{v_j} 和 t_{μ_j},可认为球仍将分别落到 A 处和 B 处.但因 ω 与 v_j,μ_j 等皆为无限自然数,故广义实数 t_v 的标准部分为

$$st(t_{v_j})=st(t_{\mu_j})=st(t_\omega)=1\quad(j=1,2,\cdots).$$

这表明抛球时间达到 1 分钟时,该球抵达甲手中和乙手中各有无穷多次(当然,球在甲、乙之间任一位置也有无穷多次).

如上解释的结论看似乎很怪,但只要想到时点如同非标准数轴上的实数点那样,它是具有内部结构的,那就不足为怪.实际上此处正是利用了非标准实数(如 t_{v_j} 与 t_{μ_k})的这种能够无限多地凝聚在标准实数(如 1)之无限小邻域的特点.

非直谓定义法(the method of impredicative definition) 一种下定义的方法.指被定义的对象被包括在借以定义它的各个对象之中的定义方法.亦即“借助于一个总体来定义一个概念,而这个概念本身又属于这一总体”.例如:自然数全体 N 中最小的那个自然数 0;一切序数组成的良序集 W 的序数 β;一切良序集所组成的良序集 θ;一切集合所组成的集合 E 等.庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)曾在 1905 年、1906 年和 1908 年多次指出,所有的悖论都与非直谓定义有关.

广义非直谓(generalized impredicative) 一种非直谓定义法.指既可用非直谓定义法定义,又可用直谓定义法重新定义的对象.亦即被定义对象并非只能借助于包括它的总体来加以定义者,称为广义非直谓的.例如,李家庄村年纪最大的人 H.这里定义 H 时借助于李家庄村所有的人所组成的总体 G,因而是用非直谓定义法定义 H 的.但也可不借助于 G 而用直谓定义法重新定义之.如“李大娘的老伴”、“王小二的祖父”等直谓地定义 H.

狭义非直谓(narrow impredicative) 一种非直谓定义法.指用非直谓定义法所定义的对象在下定义时非借助于总体不可,亦即被定义的对象只能借助于这一总体才能定义时,则称之谓狭义非直谓.例如,一切序数所组成的良序集 W 的序数 β.这是一种非直谓定义,狭义非直谓是广义非直谓的特殊情形.

等价式非直谓(equivalent impredicative) 一种非直谓定义法.凡是非直谓定义中的被定义对象仅借助于“总体本身就是什么”这样的等价式刻画来确定的,称为等价式非直谓.例如,一切良序集所组成的良序集 θ.这里被定义对象 θ 是通过“一切良序集所组成的总体本身就是这个良序集 θ”来刻画的.又如,一切集合所组成的集合 E.此处被定义对象 E

是通过"一切集合所组成的总体本身就是这个集合 E"来刻画的.如果把这种等价式的刻画算作一种自相的定义方式,当然也须纳入非借助于总体定义的情形中去,因此,等价式非直谓是狭义非直谓的特殊情形.

恶性循环原则(vicious circle principle) 分支类型论的思想原则之一.指英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)借以排除悖论而建立分支类型论所依据的一条原则.即没有一个整体能包含一个只能借助于这个整体来定义的元素.

"罗素对于悖论的研究很有贡献,这是许多数学家和逻辑学家所公认的……现有的一些解决悖论的方法,无不渊源于罗素早年提出的见解".罗素基于对非直谓定义法的分析,进一步明确了庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)关于悖论成因的想法,那就是所有这些悖论,都有这样一个关键性的对象,它借助于一个整体予以定义和刻画,但这一对象却又被包含在这一整体中.在这里出现了一种循环,而正是由于这种循环导致了悖论的出现.因而构成悖论的深刻原因与非直谓定义有关.诸如"一切集合的集合"、"一切序数所组成的良序集的序数"、"不可定义的序数中最小的一个"、"在用少于或等于 100 个英文字母所不能描述的自然数中最小的一个"等,都是直接使用非直谓定义法定义的对象,而且都导致了悖论的出现.正因为罗素明确了这些情况及其导致悖论的原因,为了排除悖论,罗素提出上述恶性循环原则,借以排斥非直谓定义法的使用.基于这一原则,罗素形成和发展了他的分支类型论.

类型混淆原则(type alias principle) 分支类型论的思想原则之一.指英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)为排除悖论,基于集合的观点所确立的一条原则.即任何一个集合绝不是它自身的一个元素.

若以记号 & 表示"并且",$\neg$表示"非",$\exists$表示"有",Godf p 表示"对象 p 只能借助总体 G 来定义",$p\in G$ 表示"对象 p 被包括在总体 G 中",$G\equiv p$ 表示"总体 G 就是对象 p".那么承认等价式非直谓定义法的使用是合理的,无非是指:

$$\exists_G\exists_p(\mathrm{Godf}\, p\&G\equiv p\&p\in G).$$

既然 $G\equiv p$,则在上式中 p 处代以 G 时,便有

$$\exists_G(\mathrm{Godf}\, G\&G\equiv G\&G\in G).$$

从而有$\exists_G(G\in G)$.显然,在概括原则之下所构造的集合也是一种总体或整体.因此,当限于集合的观点时,则 $G\in G$ 表示"一集合是它自身的一个元素".故立足于集合的观点,如果承认等价式非直谓定义法的使用是合法的,就必须承认本身分子集这一概念的合理性,但这却是导致悖论的深刻原因,因而要否认 $G\in G$ 的合理性,为之,人们确立类型混淆原则,借以排除悖论.

类型混淆原则当可简记为$\neg\exists_G(G\in G)$.如果承认类型混淆原则,就不能承认等价式非直谓定义法的使用是合理的,两者是不能并立的.

性质的分类原则(the classification principle of properties) 分支类型论的思想原则之一.指英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)在他的分支类型论中对于性质,都要按照它所属的对象的类型加以分类.具体地,属于 0 类的是那些论域中对象的名称,如 a;b;c;…;属于第 1 类的则是这些对象的性质,如 $f(a)$;$g(b)$;$h(a)$;…中的 f;g;h;…;属于第 2 类的则是那些性质的性质,如 $F(f)$;$G(f)$;$H(g)$;…中的 F,G,H,…;属于第 3 类的则是性质的性质的性质等.

罗素指出:对于上述性质的类的划分,必须遵循下述一条基本原则(性质的分类原则):每一谓词(性质)都必须从属于一个确定的类,而且每一类的性质,只有当其使用于直次于它的那个类的对象时才是有意义的.因此,$f(a)$,$F(g)$,…是有意义的,但 $F(a)$,$f(f)$,$a(b)$,…都是无意义的.

性质分类集合化原则(classification principle of properties with sets) 分支类型论的思想原则之一.指用集合论语言对分支类型论的性质分类原则的一种描述与刻画.即把英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)对于性质的分类思想移用于集合.因此,属于 0 类的是那些论域中的对象的名称,如 a,b,c,…;属于第 1 类的则是这些对象所组成的集合,即 $a\in f,b\in g,a\in h$,…中之 f,g,h,…;属于第 2 类的则是那些集合的集合,即 $f\in F,f\in G,g\in H$,…中之 F,G,H,…;属于第 3 类的则是集合的集合的集合等.

对于上述集合的分类,必须遵循下述一条基本原则,也即罗素关于性质分类的分类原则的集合化.故特记为分类原则($\in$):每一集合都必须从属于一个确定的类,而且每一类的集合只有当其使用直次于它的那个类的对象作为元素来构成时,才是有意义的.因此,$a\in f,g\in H$,…是有意义的,但 $a\in F,f\in g,a\in a$,…是无意义的.

既然在分类原则($\in$)之下,$S\in S,b\in C$ 等都是无意义的,因此,类型混淆原则必然被确立.亦即在分类原则($\in$)之下,任何集合 S 就绝不是它自身的一个元素.否则,若设 $S=\{a,b,c\}$,而又有 $S\equiv c$,则由 $c\in S\&S\equiv c$,而有 $S\in S$ 或 $c\in c$.但这却是违反分类原则($\in$)之无意义的结果.故由分类原则($\in$)可推出类型混淆原则.

性质的分级(hierarchy of properties) 分支类型论的思想原则之一.英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)认为,对于性质,除要做出类的

划分之外，还要按照性质的定义方法，把同一类中的性质做出级的划分. 亦即对于在分类原则之下的任何一类性质而言，那些在定义方法中尚未涉及"所有性质"这一概念的性质是第 1 级的，而在下定义时已经涉及"所有第 1 级性质"这一概念的那些性质是第 2 级的，进而那些在下定义时已涉及"所有第 n 级性质"这一概念的性质是第 $n+1$ 级的等. 并且，当不具体指明所考虑的级，则凡涉及什么"所有的性质"的表达式是无意义的. 例如，若把所有的序数算作是某一类中的第 1 级性质，那么一切序数所组成的良序集 W 的序数 β 这个性质就是第 2 级的性质了，又由于 β 这个属于第 2 级的性质是一个只能借助于"所有第 1 级性质(一切序数所组成的总体.)"来定义的性质，从而由恶性循环原则，β 一定不是第 1 级性质，或说 β 一定不能被包含在 W 之中.

应当指出，类中性质的级的划分是针对定义方法而论的，而遵循分类原则的性质类的划分却与定义方法无关.

分支类型论(branch type theory)　数学基础的基本理论之一. 指英国数理逻辑学家罗素(Russell, B. A. W.)为排除悖论建立起来的一种理论体系. 该理论体系的一个重要的思想原则就是恶性循环原则. 此外，在这一理论中对于所有的性质(谓词)，首先要按对象的性质、性质的性质、性质的性质的性质……并在分类原则的思想规定下加以分类，再按类中性质和定义方法加以分级，因此，每一性质都归属于一定的类和级. 由于级是在类中划分的，因此，罗素的这一理论就称为分支类型论.

由于分支类型论中保有恶性循环原则，而恶性循环原则与狭义非直谓定义法不能并立，因而那些与狭义非直谓定义法直接相关的悖论，如康托尔悖论、布拉利·福尔蒂悖论，甚或诸如里查德悖论等均不得在分支类型论中出现. 至于罗素悖论，则首先在恶性循环原则之下，狭义非直谓定义不合法，而等价式非直谓是狭义非直谓的一种，从而也不能使用. 等价式非直谓与类型混淆原则相对立，从而类型混淆原则成立. 因而具有性质 $x\notin x$ 的总体不是集，即任何集合均为非本身分子集，亦即具有性质 $x\notin x$. 于是有结论 $\Sigma=\{x\mid x\notin x\}$ 不是集合. 否则，若设 Σ 为一集，则由上所论而知 Σ 亦必具有 $x\notin x$. 因此由 Σ 的构造而知 $\Sigma\in\Sigma$，即 Σ 具有性质 $x\in x$，矛盾. 这说明反设 Σ 为集不真. 既然 Σ 不是集合，也就无所谓 Σ 为本身分子集还是非本身分子集了，故罗素悖论不能出现于分支类型论中.

简单类型论(simple type theory)　分支类型论的基础. 指在分支类型论中，废除性质的级的划分，而保留类的划分的一种理论. 非直谓定义法往往不仅在数学上，而且在日常生活中也是不可缺少的. 经过兰姆赛(Ramsey, F. P.)的研究知，逻辑数学悖论无不导源于"一切集的集是集"、"一切良序集的集是良序集"等违反类型混淆原则的概念，因而只要坚持类型混淆原则，便足以排除逻辑数学悖论. 类型混淆原则是集合化了的分类原则的直接推论. 从而只要承认英国数理逻辑学家罗素(Russell, B. A. W.)关于性质、性质的性质……的分类及其分类原则，并将其集合化，便可在类型混淆原则之下排斥等价式非直谓定义法的使用而避免逻辑数学悖论的出现. 至于那些语义学悖论的出现，既然不能在逻辑、数学的符号语言中表达，故从逻辑、数学的角度去建造数学理论时，即可不考虑语义学悖论而纳入语义学中去处理. 因此兰姆赛就在保留罗素对于性质的类的划分，而废除关于性质的级的划分的基础上建立了简单类型论. 在简单类型论中，只承认关于性质的分类原则而不承认恶性循环原则，因而只否定等价式非直谓定义法的使用，而保留了那些不涉及等价式非直谓的、一般意义下的狭义非直谓的合理因素的使用. 从而由兰姆赛建立的简单类型论为大多数数学家所欢迎.

简单类型论保留了罗素关于性质的分类及其分类原则，而集合化了的分类原则($\in$)又使得类型混淆原则必然成立，而类型混淆原则与等价式非直谓不能成立，从而那些与等价式非直谓直接相关的康托尔悖论、布拉利·福尔蒂悖论等首先不能在简单类型论中出现. 其次，在分类原则($\in$)之下，既然类型混淆原则必然成立，因而具有性质 $x\in x$ 的总体均不为集，即任何集都是非本身分子集，因而一切非本身分子集的总体 Σ 也不是集，否则，若设 Σ 为一集，则 Σ 也不例外地是一个非本身分子集，从而由 Σ 的构造而知 Σ 又是本身分子集了，矛盾. 这矛盾说明 Σ 不是集，因而不存在 Σ 为本身分子集还是非本身分子集的问题，故在简单类型论中不存在罗素悖论.

近代公理集合论(modern axiomatic set theory)　公理集合论的一个分支. 指 20 世纪初叶建立和发展起来的种种各有其自身公理体系的集合理论. 自从古典集合论出现悖论以后，数学家和逻辑学家就不能不认真对待. 对此，美国数学家、数学史家克莱因(Kline, M.)指出："数学家们首先是求助于把德国数学家康托尔(Cantor, G. (F. P.))以相当随便的方式阐述的，现在所谓的朴素集合论加以公理化，几何与代数的公理化曾解决了这些领域中的逻辑问题，似乎公理化也可能澄清集合论中的困难". 另外，英国数理逻辑学家罗素(Russell, B. A. W.)对悖论的研究卓有成效，当年曾提出了几种解决悖论的思想见解，其中之一导致了近代公理集合论的发展. 第一个担负起集合论公理化任务的是德国数学家策梅洛

(Zermelo, E. F. F.). 他在1908年建立了他的集合论公理体系，这就是今天被称之为ZFC的公理集合论系统. 此外，GB是另一个较为著名的公理集合论系统，该系统是由美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)首先建立，并经由德国学者贝尔奈斯(Bernays, P.)和美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)改进发展起来的. GB系统和ZFC系统的不同之处主要有：

1. ZFC系统的某些公理是公理模式，因而实际上是无穷多条公理；GB系统则是有穷多条公理.

2. GB系统区分"集合"和"类"，凡能作为其他集合或类的元素者是集合，凡不能作为其他类的元素的类是真类，GB系统中对类和集合使用两种变元；ZFC系统则没有这种区分.

此外，在ZFC系统与GB系统之间，若给出一定的对应关系，则可有下列结论：

1. 所有ZFC系统的定理都是GB系统的定理.

2. GB系统中所有不涉及类的关于集合的定理都是ZFC系统的定理.

3. ZFC系统与GB系统是互为相对相容的，即GB系统相容，当且仅当ZFC系统相容.

ZFC系统、GB系统以及其他种种近代公理集合论系统的建立和发展，都为整个经典数学提供了一个较为牢固的理论基础，亦即这些系统都在同等程度上避免了过去几经发现的悖论，而且迄今未发现有其他新的悖论出现. 但也都没有在理论上证明这些系统永远不可能出现悖论. 此外，还应指出：各种近代公理集合论的建立和发展，都不涉及数学研究对象的任何新扩充.

ZFC **公理集合论系统**(ZFC axiomatic set theory system)　一种近代公理集合论系统. 它是第一个公理集合论系统，由德国数学家策梅洛(Zermelo, E. F. F.)于1908年建立，后经德国学者弗伦克尔(Fraenkel, A. A.)和挪威数学家斯科朗(Skolem, A. T.)的改进逐步形成现行的ZFC系统. ZFC系统中有下列10条非逻辑的集合论公理：即外延公理、对偶公理、空集公理、子集公理、并集公理、幂集公理、无穷公理、选择公理、替换公理和正则公理. 应当指出，这些公理并不是全都彼此独立的，并且有些公理是公理模式，因而是无穷多条公理. 其中替换公理是由弗伦克尔和斯科朗提出来的，而正则公理是由美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)提出的，其作用是在系统中排除那些不正常的集，如本身分子集等，由此而有效地避免了悖论在ZFC系统中的出现. ZFC公理集合论系统与其他公理集合论系统相比较，显得较为自然、直观和使用方便，因而被普遍采用为经典数学的理论基础. ZFC系统中已经有效地排除了已被发现的悖论的出现，并且迄今未发现有新的悖论出现，但也没有从理论上直接证明永远不可能出现悖论.

外延公理(axiom of extensionality)　ZFC系统的集合论公理之一. 其内容指：如果两个集合有完全相同的元素，则它们相等. 其符号表达式为

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B.$$

对偶公理(axiom of pairing)　亦称无序对公理. ZFC系统的集合论公理之一. 其内容为：对任何 u 和 v，存在一个集合，它恰以 u 与 v 为其元素. 其符号表达式为

$$\exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x = u \text{ or } x = v).$$

无序对公理(axiom of unordered pair)　即"对偶公理".

空集公理(axiom of empty set)　ZFC系统的集合论公理之一. 其意是无条件承认存在着一个不包含任何元素的集合，即任何对象 x 都不是它的元素. 其符号表达式为

$$\exists \varnothing \forall x(x \notin \varphi).$$

子集公理(axiom of subset)　亦称划分公理、分出公理或分离公理. ZFC系统的集合论公理之一. 其意指：对每一个不包含 B 的公式______，则下式

$$\forall t_1 \cdots \forall t_k \forall c \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in C \,\&\, ______)$$

是公理. 亦即(对任何 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 和集 C)存在集合 B，其元素正好是 C 中所有满足______的那些 x. 于是，自然得出 B 是 C 之子集的结论，此乃子集公理之名的由来. 此外，集合 B 由 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 和 C 惟一确定，且可用抽象记号的变形 $B = \{x \in C \mid ______\}$ 给它命名.

幂集公理(axiom of power set)　ZFC系统的集合论公理之一. 其内容为：对于任何集合 A，存在一个集合 B，它的元素恰好是 A 的一切子集. 其符号表达式为

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)$$

这里的"$x \subseteq A$"可以改写为 $\in$ 的定义形式：

$$\forall t(t \in x \Rightarrow t \in A).$$

并集公理(axiom of unions)　ZFC系统的集合论公理之一. 其初级形式的内容指：对任何两个集合 A 和 B，存在一个集合 C，它的元素或者属于 A，或者属于 B，或者属于两者. 其符号表达式为

$$\forall_A \forall_B \exists C \forall x(x \in c \leftrightarrow x \in A \text{ or } x \in B).$$

进一步，在ZFC系统中，并集公理之高级形式：对任意集合 A，存在一个集合 B，其元素恰是 A 的元素的元素全体. 其符号表达式为

$$\forall_A \exists_B \forall x(x \in B \leftrightarrow \exists a(a \in A \,\&\, x \in a)).$$

无穷公理(axiom of infinity)　ZFC系统的集合论公理之一. 为了叙述无穷公理的内容. 先引进下述归纳集的定义：对任何集合 a，它的后继 a^+ 被定

义为 $a^{+}=a\cup\{a\}$. 如果集合 A 满足条件：

1. $\varnothing\in A$；

2. A 在后继下封闭，即 $\forall a(a\in A\Rightarrow a^{+}\in A)$；

则称 A 为一归纳集. 无穷公理的内容是：无条件地承认存在着一个归纳集. 因而在 ZFC 系统中，归纳集概念的意义是由无穷公理保证的. 无穷公理的符号表达式为

$$\exists A(\varnothing\in A \mathbin{\&} \forall a(a\in A\Rightarrow a^{+}\in A)).$$

选择公理(axiom of choice) ZFC 系统的集合论公理之一. 它有多种等价形式，其中之一可叙述为：令 $\mathscr{S}$ 是一非空集合，并且 $\mathscr{S}$ 的每个元素都是非空集合，又 $\mathscr{S}$ 的任何两个不同的元素互不相交. 那么存在集合 C，恰由 $\mathscr{S}$ 的每个元素中的一个元素组成. 其符号表达式为

$$\forall\mathscr{S}(\forall A(A\in\mathscr{S}\Rightarrow a\neq\phi) \mathbin{\&}$$
$$\forall A\forall B(A\in\mathscr{S} \mathbin{\&} B\in\mathscr{S} \mathbin{\&} A\neq B \Rightarrow A\cap B=\phi)$$
$$\Rightarrow\exists C\forall A(A\in\mathscr{S}\Rightarrow A\cap C=\{a\})).$$

德国数学家策梅洛(Zermelo, E. F. F.)是在证明良序定理时，首次明确地陈述和使用了选择公理，并由此进一步证得基数可比较性定理. 实际上，选择公理、良序定理和基数可比较定理都是互相等价的. 选择公理还有许多其他的等价形式，著名的有最大原理Ⅰ(Zorn 引理)和最大原理Ⅱ(Tukey 引理)等. 选择公理的可接受性曾经是数学家和逻辑学家长期争论不休的题材，这首先是由于它的纯粹存在的性质，直觉主义派是完全拒绝接受的. 也有许多数学家对使用选择公理证明的定理都加以特别标记. 其次，更难以接受并引起争论的是选择公理所蕴含的某些结果，如勒贝格不可测实数集和分球怪论等. 但在今天，由于选择公理在几乎所有的数学分支中都起到了不可缺少的作用，而已为绝大多数数学家所接受.

替换公理(axiom of replacement) ZFC 系统的集合论公理之一. 其内容指：对任何不包含 B 的公式 $\varphi(x,y)$，公式

$$\forall_A(\forall x\forall y_1\forall y_2(x\in A \mathbin{\&} \varphi(x,y_1) \mathbin{\&} \varphi(x,y_2)$$
$$\Rightarrow y_1=y_2)\Rightarrow\exists_B\forall y(y\in B$$
$$\leftrightarrow\exists x(x\in A \mathbin{\&} \varphi(x,y))))$$

是公理. 公式 $\varphi(x,y)$ 读为“x 提名 y”，则公理的前提指：A 的每一个元素至多提名一个对象. 而公理的结论是：所有被 A 元素提名的那些对象构成一集 B，亦即集合 B 恰由被 A 之元提名的对象组成.

正则公理(axiom of regularity) 亦称基础公理. ZFC 系统的集合论公理之一. 其内容指：每个非空集合 A 有元素 m，使得 $m\cap A=\varnothing$. 其符号表达式为

$$\forall A(A\neq\varnothing)\Rightarrow\exists m\quad(m\in A \mathbin{\&} m\cap A=\varnothing).$$

正则公理也有它的等价形式，例如，“任何非空集合都有 $\in$ 关系的最小元”和“不存在 $\in$ 关系的无穷串”. 均与正则公理等价. 正则公理的作用是在 ZFC 系统中排除悖论的出现.

GB 公理集合论系统(GB axiomatic set theory system) 一种近代公理集合论系统. 该系统是由美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)于 1920 年首先给出的，德国学者贝尔奈斯(Bernays, P.)于 1937 年以后的一系列重要论文中又进一步发展了这一系统，后经美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)改进和整理，并在其著作中采用. GB 系统中引入了类的概念，并从中区分了集合和真类，集合既可以集合为其元，也可作为其他类的元. 而真类只能以集合为其元，它自身却不能是任何类的元. GB 系统中的基本概念有：$Cla(\xi)$ 指 ξ 是类，$m(\xi)$ 指 ξ 是集合，$\xi\in\eta$ 指 ξ 属于 η，即 ξ 是 η 的元. 通常用 $X,Y,Z,\cdots$ 表示类，$x,y,z,\cdots$ 表示集合. GB 系统共有 5 组计 18 条公理. 第 1 组是 4 条基本公理，第 2 组是 8 条关于类的存在性公理，第 3 组是 4 条关于集合的存在公理，第 4 组是 1 条正规公理，第 5 组是 1 条选择公理.

GB 系统的优越之处，除了只有有限多条公理之外，还应指出，在 GB 系统中，任给一谓词 $\varphi(x)$，则无条件地决定一个类 C，使 $x\in C\leftrightarrow\varphi(x)$. 它相对地接近概括原则；与之相比，ZFC 划分公理要在已知集合中造集，此与概括原则相去甚远. 当然，GB 系统也有很不自然的地方，最主要的有“真类不是任何类的元”等. 但直观地看，无论真类 C 多么大，$\{C\}$ 及 $C\in\{C\}$ 应算是自然而合理的，而这在 GB 系统中是不允许出现的.

GB 系统是 ZFC 系统的一个非本质的扩张系统，就数学内容的丰富程度而言，两者基本上是差不多的. 甚至有人认为，GB 系统不过是用集合和类的术语重新叙述的 ZFC 系统. 事实上，GB 系统中不含类这个谓词的可证语句集与 ZFC 系统的可证语句集是重合的.

基本公理(basic axiom) GB 系统的集合论公理. 指 GB 系统中的第 1 组(即 A 组)公理. 共有 4 条：

1. 任一集合是类.

2. 作为某个类的元的类是集合.

3. 有相同元素的两个类是相等的，即外延公理.

4. 任给二集 x 和 y，则有一集恰以 x 和 y 为元.

这 4 条公理的符号表达式依次为：

$A1$ $\forall x\mathrm{Cla}(x)$.

$A2$ $\forall X\forall Y(X\in Y\rightarrow m(X))$.

$A3$ $\forall X\forall Y[\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\rightarrow X=Y]$.

$A4$ $\forall x\forall y\exists z\forall u[u\in z\leftrightarrow(u=x \vee u=y)]$.

GB 系统的 A 组公理(即基本公理)区分了类与集合，约定了两个类“相等”的含义. 基于基本公理，

可定义有序对$\langle x,y\rangle$、有序三元组$\langle x,y,z\rangle$等概念.

类的存在性公理(existence axiom of class) GB系统的集合论公理.指GB系统中的第2组(即B组)公理,共有8条.其符号表达式依次为:

B1 $\exists_A\forall x\forall y[\langle x,y\rangle\in A\leftrightarrow x\in y]$.

B2 $\forall_A\forall_B\exists_C\forall u[u\in C\leftrightarrow(u\in A\wedge u\in B)]$.

B3 $\forall_A\exists_B\forall u[u\in B\leftrightarrow\neg(u\in A)]$.

B4 $\forall_A\exists_B\forall x[x\in B\leftrightarrow\exists y(\langle\quad\rangle\in A)]$.

B5 $\forall_A\exists_B\forall x\forall y[\langle\quad\rangle\in B\leftrightarrow x\in A]$.

B6 $\forall_A\exists_B\forall x\forall y\ [\langle x,y\rangle\in B\leftrightarrow\langle y,x\rangle\in A]$.

B7 $\forall_A\exists_B\forall x\forall y\forall z[\langle x,y,z\rangle\in B\leftrightarrow\langle y,z,x\rangle\in A]$.

B8 $\forall_A\exists_B\forall x\forall y\forall z[\langle x,y,z\rangle\in B\leftrightarrow\langle x,z,y\rangle\in A]$.

其中B1指出了对应着集合之间之属于关系$\in$的有序对类(即二元关系)的存在性.B2指出任何两个类的交是类.B3指出了一个类的补类的存在性.B4是指任何有序对的类的定义域是类.B5指任一类可成为某二元关系的定义域,即成为某有序对的类的定义域.B6是说二元关系的逆关系仍为类.B7指出三元关系类进行轮换后仍是类.B8指出三元关系进行一种对换后仍是类.由于三个有序元组的任何置换均可由轮换和对换来生成,故由B7与B8即知三元关系的任何置换关系仍是类.因此,GB系统的这一组关于类的存在性公理,既指出了由哪些条件可以决定一个类,又指出了如何由已知类去构造新的类.

集合存在性公理(existence axiom of set) GB系统的集合论公理.指GB系统中的第3组(即C组)公理,共有4条:

1.无穷公理.即无条件承认有一非空集a,对于a的每一元x,必有a的元y,使得x为y的真子集.因此,a的元必有无穷多.

2.联集公理.即断言对任何集x,都存在着一集y,使得x的任何元的元都是y的元.

3.幂集公理.指对任何集x,都有集合y存在,使得x的任一子集都是y的元.

4.替换公理.指对任何集合x和任何单值的A,总有集合y存在,此y恰由x的元经由单值二元关系A所产生的集组成.

其符号表达式依次为:

C1 $\exists a\{\sim C_m(a)\wedge\forall x[x\in a\rightarrow\exists y(y\in a\wedge x\subset y)]\}$.

C2 $\forall x\exists y\forall u\forall v[u\in v\wedge v\in x\rightarrow u\in y]$.

C3 $\forall x\exists y\forall u[u\subseteq x\rightarrow u\in y]$.

C4 $\forall x\forall_A\{U_n(A)\rightarrow\exists y\ \ \forall u[u\in y\leftrightarrow\exists v(v\in x\wedge\langle u,v\rangle\in A)]\}$.

注意,由C1,C2,C3所决定的新集合并不惟一确定,又上述诸符号表达式中之C_m和U_n分别指空类和单值,亦即:

$C_m(X)\rightarrow\forall u\neg(u\in X)$,

$U_n(X)\leftrightarrow\forall u\forall v\forall w[\langle\quad\rangle\in X\wedge\langle\quad\rangle\in X\rightarrow v=w]$.

正规公理(axiom of normal) GB系统的集合论公理.指GB系统中的第4组(即D组)公理.指对任何非空类A,必有一元u,使得u与A没有公共元.其符号表达式为

D1 $\forall A[\neg Cm(A)\rightarrow\exists u(u\in A\wedge Cx(u,A))]$.

其中$Cx(u,A)$指u与A无公共元,即

$$Cx(X,Y)\leftrightarrow\forall u\neg(u\in X\wedge u\in Y).$$

上述正规公理实际上就是ZFC系统的正则公理.因而D1也表示GB系统中不存在$\in$关系的无穷串:

$$\cdots\in x_n\in\cdots\in x_3\in x_2\in x_1.$$

选择公理(axiom of choice) GB系统的集合论公理.指GB系统中的第5组(即E组)公理.指存在着单值的类A,对任何非空集合x,都有x的元y存在,使有$\langle y,x\rangle\in A$.其符号表达式为

E1 $\exists A\{Un(A)\wedge\forall x[\neg Cm(x)\rightarrow\exists y(y\in x\wedge\langle y,x\rangle\in A)]\}$.

因为单值关系就是函数,故上述E1中之A,实际上就是全选择函数.因而E1就是指无条件承认存在着这样的全选择函数A,它能从任何一个非空集合中惟一地选出一个元素来.

本原命题函词(primitive propositional function) GB系统中的一类合式公式.在GB系统中,本原命题函词指仅含变元、特殊类符号$A_1,A_2,\cdots,A_k$,属于符号$\in$、命题连结词并且其中的约束变元都是集合中变元的合式公式.例如,$\forall u(u\in X\rightarrow u\in A)$是本原命题函词;而当$\exists X$或$\forall Y$在合式公式中出现时,则就不是本原命题函词.又如,$\forall x(x\in A\rightarrow x\subseteq y)$也不是本原命题函词,因为其中出现了定义符号$\subseteq$.

显然,本原命题函词范围很窄,大量的谓词涉及定义符号,因而要对本原命题函词进行扩张.

正规概念(normal concept) GB系统中的一个基本概念.正规概念B指存在本原命题函词φ,使

$$B(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leftrightarrow\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

例如,因为:

1. $X\in Y\leftrightarrow X\in Y$.

2. $X=Y\leftrightarrow\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)$.

3. $m(X)\leftrightarrow\exists u(u=X)$.

所以,$\in,=,m$等概念都是正规概念,注意上述三个表达式的右边,或是本原命题函词,或是仅含正规概念的合式公式,因而得以化归为本原命题函词.

正规运算(normal operation) GB系统中的一种运算.正规运算U是指,存在一个本原命题函词φ,能使

$$Y\in U(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leftrightarrow\varphi(Y,X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

成立的运算.例如,因为:

1. $Y\in(-A)\leftrightarrow m(Y)\wedge\neg(X\in A)$.

2. $Y\in A\cap B\leftrightarrow Y\in A\wedge Y\in B$.

3. $Y\in D(A)\leftrightarrow m(Y)\wedge\exists y(\langle y,Y\rangle\in A)$.

所以，类的补运算一、交运算∩、定义域 D 等都是正规运算. 此外，应注意上述式子中右边出现 m 为正规概念，故可化归为本原命题函词.

正规命题函词(normal propositional function) GB 系统中的一个基本概念. 指仅含有正规概念、正规运算及正规约束变元的命题函词 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 亦即正规命题函词可含有定义符号，但却是一个能与本原命题函词等价的合式公式. 例如

$$\forall x(x\in A\leftrightarrow x\subseteq y),$$

$$\exists a(a\in X\to\neg(Cm(X))),$$

都是正规命题函词.

类的一般存在性定理(general existence theorem of class) GB 系统中的两条基本定理. 在 GB 系统中，可按命题函词的构造归纳地证明如下的两个关于类的一般存在性定理：

1. 若 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是除了 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之外的没有自由变元的本原命题函词，则存在一个类 A，使对所有的集合 $x_1,x_2\cdots,x_n$，有

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\in A\leftrightarrow\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

2. 若 φ 是正规命题函词，则

$$\forall X_1\cdots\forall X_k\exists A\forall x_1\cdots\forall x_n[\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\in A\leftrightarrow\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,X_1,X_2,\cdots,X_k)].$$

定理 2 在两个方面推广了定理 1，其一是 φ 中允许出现定义符号，其二是 φ 中除有构造类的集合变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之外，还可含有其他的自由的类变元. 但由于对 φ 的正规性要求，其中不能含被约束的类变元.

上述两条定理，实际上是康托尔概括原则的形式化. 但它只是承认任何正规函词(即谓词)可以构造类，而被构造出来的类不一定是集. 故此处并非全盘接受概括原则，但与 ZFC 系统的划分公理相比，显然更接近概括原则，也显得更自然.

数学基础诸流派(various schools of foundation of mathematics) 数学史专门术语. 指数学基础问题探索过程中形成的几个学派. 在数学的第三次危机中，数学家们根据自己在数学基础论的研究中所持不同观点而逐步形成不同的流派. 由于 19 世纪作为整个经典数学理论基础的古典集合论中悖论的发现，导致了数学的第三次危机，从而促使数学家们去探索数学推理在什么情况下有效，什么情况下无效，数学命题在怎样的情况下具有真理性，在怎样的情况下失灵. 于是 20 世纪初，数学基础论这一分科诞生了. 摆在从事数学基础问题研究的数学家面前的首要任务，就是如何为数学的有效性重新建立可靠的依据. 由于在这一工作中各人所持的基本观点不同，在数学基础论的研究中就形成了各个流派. 这也是形成数学基础诸流派的历史背景.

通常人们把数学基础诸流派说成是数理逻辑三大派，即逻辑主义派、直觉主义派和形式主义派. 但此说不甚恰当，首先因为这些流派是因研究数学基础而产生的，所提见解多数针对数学基础论中的问题，各派的形成和分歧，亦因数学基础问题而来，故称数学基础论上各流派更贴切. 其次，通常认为形式主义派的主要代表人物是德国数学家希尔伯特(Hilbert，D.)，其实这是一种历史的误解，形式主义派的主张和希尔伯特的数学观并不相同. 应按历史的本来面目明确划分希尔伯特主义派和形式主义派，因此也就不是什么三大派，而称诸流派更恰当. 总之，应将数理逻辑三大派改称为数学基础诸流派，才符合历史的真实情况.

数理逻辑三大派(three main schools of mathematical logic) 见“数学基础诸流派”.

逻辑主义派(logicism school) 数学基础中的学派之一. 逻辑主义派的主要宗旨是把数学化归为逻辑. 即逻辑主义者从逻辑的概念出发，经由明显的定义得出数学概念，而任何数学定理，均可从逻辑的命题出发，由纯逻辑的演绎推理得到. 总之，全部数学都可从基本的逻辑概念和逻辑规则推导出来. 因此，逻辑与数学也就不能区分了. 实际上，从某种意义上说，逻辑主义者在为整个经典数学寻找更为一般的基础，最终要把整个数学化归为逻辑.

逻辑主义思想原则的萌芽，亦即把逻辑看成先于一切科学的观点，可以追溯到德国数学家、哲学家莱布尼茨(Leibinz，G. W.)，但他本人并没有从事这方面的工作，他的这一想法，直到 19 世纪才在德国数学家戴德金(Dedekind，(J. W.)R.)、德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege，(F. L.)G.)、意大利数学家、逻辑学家佩亚诺(Peano，G.)等人的工作中得到初步发挥. 应该说，逻辑主义的观点在弗雷格的工作中就基本形成，这是因为弗雷格明确提出了数学可以化归为逻辑的想法，而且花费了近 20 年的时间在他的巨著《算术基础》和《算术基础原理》里把算术化归为逻辑. 另外，戴德金也是逻辑主义的创始人之一. 这是因为他在 1887 年发表的《数的性质与意义》一文中，就已明确提出了与英国数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)几乎完全相同的主张. 当然，弗雷格的工作没有超出算术的范围，戴德金对自己的主张也没有更多的展开，只有在罗素和英国逻辑学家、数学家怀特海(Whitehead，A. N.)那里，才把逻辑主义的主张详细加以发展，并且真正从相当少的公理和概念出发，导出了大部分数学. 所以，大家公认罗素是逻辑主义派的主要代表人物.

罗素在他的《数理哲学导论》一书中指出："数学是这样的一种研究，它可以按两个方向去进行. 一个比较熟悉的方向是建设性的，即不断增大理论的复杂性……另一个是不很熟悉的方向，这就是通过分析来达到越来越大的抽象性和逻辑简单性，这里所考虑的已不再是从怎样的假设出发可以定义或演绎出什么结果的问题，而是研究我们能否找到更为一般的思想原则，从这些思想和原则出发，能使现在作为出发点的东西得以被定义或演绎出来."这就是逻辑主义的根本宗旨以及实现这一宗旨的途径.

意大利数学家佩亚诺 1889 年运用公理化方法建立了一个关于自然数的公理系统，阐明了怎样从少数几个基本概念和几条公理出发推导出自然数的种种性质，并使得大量的算术命题能从中不断地演绎出来. 关于自然数的佩亚诺公理系统是由不经定义的集合、自然数、后继数与属于等概念加 5 条公理构成的. 这 5 条公理是：

1. 0 是一个自然数.

2. 每个自然数的后继数仍为自然数.

3. 0 不是任何其他自然数的后继数.

4. 如果两个自然数的后继数相等，则这两个自然数也相等.

5. 若 M 是由一些自然数所组成的集合，而 M 含有 0，且当 M 含有任一自然数 a 时，则 M 也一定含有 a 的后继数. 那么 M 就含有全部自然数.

从逻辑主义的形成和历史发展来看，逻辑主义的工作可以划分为数学理论的算术化和算术理论的逻辑化两个阶段.

19 世纪最后的 25 年，堪称为数学理论算术化的时期，许多出色的数学家都投入了这个工作. 1872 年，德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass，K. (T. W.))、戴德金和德国数学家康托尔(Cantor，G. (F. P.))等几乎同时完成了实数的定义. 但无论是康托尔的收敛有理数序列，还是康托尔的有理数分划，都表明了实数论被化归为有理数论，进而归约到整数直至自然数系统. 当然其中已借用了集合的概念. 从而，世所著称的、由几个原始概念和五条公理所构成的佩亚诺算术公理系统便成为这个数学理论算术化工作的终结. 人们从佩亚诺系统出发，借助集合论概念，便可建造算术、分析、几何直至整个数学大厦. 因而，这种数学理论的算术化使得许多数学家感到满意，甚至认为无需再前进了. 但对逻辑主义者来说，这只是实现逻辑主义宗旨的第一步，要把数学化归为逻辑，更重要的是所谓算术理论逻辑化. 弗雷格、怀特海和罗素曾为借助于纯逻辑概念去定义佩亚诺系统的几个原始概念、借助于纯逻辑而演绎地引出佩亚诺系统的五条公理等付出了巨大的劳动. 后来，罗素曾经认为这种算术理论逻辑化的工作已经完成，从而认为逻辑主义的宗旨已经实现. 罗素说："从逻辑中展开纯数学的工作，已经由怀特海和我在《数学原理》一书中详细地做出来了."但在实际上，因为他们在这一工作中还是借助了两条非逻辑公理，所以，罗素和怀特海并没有能在《数学原理》一书中实现逻辑主义的宗旨.

由于逻辑主义派的基本立场是确认全部数学的有效性，并认为能把全部数学化归为逻辑，这就势必要确认实无限观点下的无限集理论. 因此，就无穷观而言，逻辑主义派是实无限论者，亦即要确认实无限性研究对象在数学领域中的合理性. 普遍认为，"罗素及其追随者明显地承认无限性对象的存在性". 但由于罗素为排除集合论中的悖论而发展他的分支类型论，因而在罗素系统中的实无限性对象就在不同的类和级中表现为一定的层次结构.

没有无穷公理，自然数系统就无法构造，更谈不上全部数学了. 没有选择公理，则数学中的定理就要砍掉一大批. 罗素和怀特海在他们的工作中不得不事实上借助了这两条公理. "作为逻辑法则，只允许讨论可能性对象，而不允许在逻辑法则中做出某物是否存在的断言."但无穷公理和选择公理恰恰都是存在性公理，因此它们不是逻辑公理. 既然出手就借助了非逻辑公理，怎能说全部数学命题皆由逻辑规则和逻辑概念演绎推出呢?所以，弗雷格在晚年已倾向于放弃逻辑主义的立场. 德国学者弗伦克尔(Fraenkel，A. A.)指出："弗雷格和罗素的理论的严重的缺陷之一在于无穷公理之使用的令人头痛的状况."这些明摆的事实也曾迫使罗素和怀特海设法补救，他们把所有要用到这两条公理才能证明的命题一律改写为条件式命题，即不把这两条公理列入他们的系统. 但当某数学命题 P 必须借助无穷公理才能证明时，就将 P 陈述为"如果无穷公理真，则 P"等，因而这两条公理就变成诸如此类的每一定理的前提，而不再是特设的公理了. 然而，普遍认为这是一种牵强的做法，大多数数学家都认为罗素和怀特海并没有完全实现逻辑主义的宗旨.

罗素的方案和逻辑主义宗旨均以失败告终，其根本原因在于只看到并且过于夸张了数学与逻辑在演绎结构上的同一性，完全抹杀了数学与逻辑的差异. 但是，却不能由于逻辑主义的失败而认为逻辑主义者的工作毫无价值. 相反地，应该看到逻辑主义者的工作已对数学与逻辑的发展做出了重要贡献，对此可概述如下：

1. 罗素的分支类型论，特别是经过兰姆赛(Ramsey，F. P.)改进之后发展起来的简单类型论，对于集合论悖论的研究和排除有重要意义. 而且现有的一些解决悖论的方案，无不渊源于罗素早年提出的见解.

2. 逻辑主义者相当成功地把古典数学纳入了一个统一的公理系统，虽然这个系统不是纯逻辑的，但这一工作却成为公理化方法在近代发展中的一个重要起点.

3. 由于逻辑主义者的工作，基本上完成了从传统逻辑到数理逻辑的过渡和演变. 特别是弗雷格、美国哲学家、物理学家皮尔斯(Peirce，C. S.)、德国学者施罗德(Schröder，K. W. K. E.)等最早地引进了量词，并对量词的性质作了深刻的研究. 弗雷格还进一步给出了命题演算和谓词演算系统. 而罗素和怀特海合著的《数学原理》被誉为"总结过去数学基础的研究成果，并由它宣告数理逻辑已经充分成熟"的划时代的巨著. 特别是逻辑主义者的工作"代表了一个第一流的学术运动，是对人类思维力的美妙的巨大贡献".

直觉主义派(intuitionist school)　数学基础中的学派之一. 该学派的代表人物是荷兰数学家布劳威尔(Brouwer，L. E. J.). 直觉主义者的根本观点是关于数学概念和方法的可构造性，并且数学的理论基础不是集合论，而是自然数论. 直觉主义者指出：自然数来源于布劳威尔的"原始直觉"或"对象对偶直觉". 所谓对象对偶直觉，即人皆有之的一种能力：某一时刻集中注意某一对象，紧接着又集中注意于另一对象，这就形成了一个原始对象对偶，以(1，2)来表示它. 有了这个原始对象对偶，可根据构造性的要求重复一次而产生对象对偶(2，3)，再重复一次便是对象对偶(3，4)，依次递推下去. 任何一个自然数都能从这个原始的对象对偶直觉开始，用构造性方法产生出来. 直觉主义者认为，只有建立在这种原始直觉和可构造性之上的数学才是可信的. 这种原始直觉"对于思想来说是如此直接，其结果又是如此清楚，以致不再需要任何别的什么基础". 海丁(Heyting，A.)进而指出："数学开始于自然数及自然数相等概念形成之后."此外，直觉主义者认为，集合论悖论的出现不是一个偶然事件，它是整个数学感染疾病的一个征兆. 因此，悖论问题不可能通过对已有数学作某些技术的修改或限制而得以解决，必须依据可信性要求对已有的数学作全面审查，而且应该毫不犹豫地抛弃那些不符合可信性要求的数学概念和方法. 直觉主义的可信性就是必须都是构造性的. 而所谓构造性，即指能按固定方式经有限个步骤定义概念或实现某一方法. 构造性亦称能行性，构造性的方法亦称能行性的方法. 例如，求两个正整数 a 和 b 的最大公约数，可用欧几里得除法在有限步内实现. 这就是能行性或构造性方法. 所以直觉主义的一个著名口号是"存在必须可构造". 从直觉主义派的基本观点出发，直接决定了这一学派在数学工作中的主要宗旨之一是在无穷观的问题上彻底采纳潜无限而排斥实无限.

从直觉主义派的"存在必须可构造"这一前提出发，因为从生成的观点来看，任何一个无穷集合或实无限性对象都是不可构造的，所以势必导致彻底的潜无限观念，并且完全排斥实无限. 以最简单的实无限对象自然数集为例来讨论，因为任何有穷多个步骤都不能把所有的自然数构造出来，更谈不上汇成整体了，所以，按照能行性的要求必然否定自然数全体这个概念，而且即使先假设有那么一个全体自然数论域摆在那里的话，直觉主义者也不承认能把全体自然数逐一复查完毕，亦即不承认有走遍自然数论域的概念. 在他们看来，自然数只能永远处于不断地被构造的延伸状态中. 例如，德国数学家外尔(Weyl，C. H. H.)明确指出："布劳威尔使这一点明确了，就是没有任何证据能够证明所有自然数的整体的存在性……自然数，它能够通过不断地达到下一个数而超越任何一个已经达到的界线. 从而也就开辟了通向无限的可能性. 但它永远停留于创造(生成)的状态之中，而绝不是一个存在于自身之中之事物的封闭领域."可见，在无穷观的问题上，直觉主义派是十分彻底地采纳了潜无限论者的观点.

直觉主义派在数学工作中的宗旨之二是，否认传统逻辑的普遍性，并按照构造性的要求重建直觉主义逻辑规则. 直觉主义派否认传统逻辑的普遍有效性是出于存在必须可构造的考虑，并且在构造性观点下发展了自己的逻辑，它是和传统逻辑很不相同的一种逻辑. 一般地说，"这种不同之处主要表现在否定性质的推理上".

直觉主义派在数学工作中的主要宗指之三是，批判古典数学，拆除一切非构造性数学框架，重建直觉主义的构造性数学. 直觉主义完全否认古典数学中的种种非构造性证明，以直觉主义微积分为例，其根本问题在于如何在能行性意义下给出构造性的实数与构造性的连续统概念. 直到1919年，布劳威尔终于利用"展形"概念巧妙地建造了符合构造性要求的连续统概念. 而直觉主义的构造性连续统一旦建成，就完全改变了古典分析之实数论的面貌，直觉主义微积分就能在它基础上建造起来了.

大多数数学家认为，直觉主义派的形成也导源于数学基础问题的考虑，但直觉主义排除悖论的方案却限制过大，被抛弃的合理因素太多. 然而联系到计算机科学基础理论的发展，构造性观点和方法又有重要意义. 详言之，可作如下几点评述：

1. 直觉主义派强调能行性具有十分重大的现实意义，如所公认，计算机科学的发展离不开能行性.

2. 直觉主义数学对于非构造性数学和传统逻辑的完全排斥是不科学的，因为这种完全排斥无法解释后者在相当范围内的应用上的有效性. 因此，遭到

绝大多数数学家的反对.

3. 直觉主义派对实无限性概念的完全排斥也不符合科学认识论的原则. 因为“直觉主义……否定了关于无穷过程的大部分推理(不论是经典的或康托尔学派的)的有效性. 如果这一派得势的话,那么大部分数学领域内的研究活动就会遇到不可克服的困难. 幸好他们没有得势”.

4. 直觉主义因反对古典逻辑,从而需要把整个逻辑及数学全盘改造,连人们日常认为最简单、最明白无讹的部分也需重新审查,这显然是一件非常艰巨的工程. 又由于直觉主义逻辑强调能行性,反变得噜苏、不方便起来. 从而这个数学改造运动极慢,几乎可以肯定其难以成功.

希尔伯特主义派(Hilbertist school) 数学基础中的学派之一. 该学派的代表人物是德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.). 许多人认为希尔伯特是现代形式主义派的代表人物,其实这是一种误解. 希尔伯特的数学观和形式主义派的基本观点并不相同,查阅希尔伯特全集,没有发现他在什么地方发表过与形式主义派相同的主张,从历史上看,希尔伯特也没有在任何场合表示过他是形式主义者,连希尔伯特的学生贝尔奈斯也不同意把希尔伯特列为形式主义派的代表人物,特别是形式主义者库赖(Curry)曾明确指出:“现在有许多人把形式主义与应称为希尔伯特主义的学派等同起来,这是不对的”. 造成这种历史误解的主要原因是绝大多数形式主义者“都奉希尔伯特为祖师”. 时间一长,也就习惯于此说了.

希尔伯特在数学基础问题上的基本观点是:一方面希望保存古典数学的基本概念和古典逻辑的推理原则,特别是那些与实无限性有关的概念和方法,诸如无限集概念和排中律在无限集上的使用等;但在另一方面,希尔伯特同样出于可信性的考虑,对这些实无限性概念和方法的使用顾虑重重,几乎和直觉主义者一样地认为可信性只存在于有限之中,无限是不可靠的. 希尔伯特要在有穷主义中保存实无限观点下的古典数学,而把全部数学划分为具有真实意义的“真实数学”和不具有真实意义的“理想数学”,并希望通过有穷主义的构造性方法去证明理想数学的相容性,以使实无限性的理想成分在应用上的有效性与上述有穷主义立场获致统一. 这就是克雷塞尔(Kriesel,G.)所说的:“希尔伯特是从有限性的观点出发去理解超穷方法之应用的.”

希尔伯特规划是希尔伯特主义的主要组成部分,也是希尔伯特用以实现其主张的方案,主要内容是:

1. 证明古典数学的每个分支都可在数学系统公理化意义下予以公理化.

2. 证明每一个在上述意义下被公理化了的系统都是完备的. 即系统内任一可表述的命题均可在系统内得到判定.

3. 证明每一个在上述意义下的系统都是相容的.

4. 证明每个这样的系统所相应的模型都是同构的.

5. 寻找这样一种方法,借助于它,可在有限步骤内判定任一命题的可证明性.

希尔伯特为具体实施其规划而创立证明论,即元数学理论. 它着眼于整个形式系统,并以“证明”本身作为研究对象.

希尔伯特主义派有三种数学系统:

1. 非形式化的数学系统 G:即普通的数学系统,在其中允许使用古典逻辑推理规则,例如,在无穷集合上使用排中律等.

2. 形式化的数学系统 H:在 H 中的符号、公式、公理、命题等都是形式的,在未加解释之前都是没有内容和意义的,而经解释后就是 G 中相应的内容. 即 G 是 H 的模型,H 是 G 的形式化.

3. 元数学系统 K:这是用以研究 H 的元理论,而在 K 中的推理规则必须保持直觉的可信性,例如不能涉及无穷,不允许在无穷集合上使用排中律等.

希尔伯特主义派在实质上还是对实无限性采取了排斥态度. 希尔伯特认为:“就像无穷小的运算已被有限范围内的运算所代替一样……建立在无限之上的推理方法也必须用有限过程来代替.”他在元数学的推理中,完全彻底地和荷兰数学家布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)站在一起了. 但从他和布劳威尔的激烈争论中力争保留古典数学这一点上看,却又不能认为希尔伯特视无限集理论为天堂之说是虚假的. 希尔伯特曾在一次著名的讲演中说:“没有任何问题能像无限那样,从来就深深地触动着人们的情感;没有任何观念能像无限那样,曾如此卓有成效地激励着人的理智;也没有任何概念能像无限那样,是如此迫切地需要予以澄清.”

一般地说,人们对希尔伯特主义派的评论,可以归结为如下几条:

1. 普遍认为,希尔伯特把所有涉及无限的概念和方法都视为没有真实意义的观点,是从根本上歪曲了数学和真实世界的关系,是不符合认识论原则的.

2. 希尔伯特规划中曾提出要证明每一个数学系统都是完备的. 但哥德尔不完备性定理指出:即使把初等数论形式化之后,在这个形式演绎系统中,也总可找出一个合理的命题来,它在系统内既无法证其为真,也无法证其为假. 这表明希尔伯特规划的上述要求是无法实现的. 不仅如此,由不完备性定理还可推知:人们只能凭借更强的在系统内不能表述的方

法去证明系统的无矛盾性.这就直接表明了希尔伯特关于用有限方法证明系统无矛盾性的设想是不能实现的.

3.普遍认为,希尔伯特创立证明论的思想具有重大意义.因为证明论立足于把整个系统作为研究对象的高度,才使人们首次不只是着眼于系统内部,而能站在系统之外对它进行研究,并且这一研究获得了一系列重大成果.例如哥德尔不完备性定理便是立足于证明论的思想高度、着眼于整个系统而获得的重要成果之一.又如以布尔巴基为代表的结构主义的出现,也是立足于这种高度去考察问题的结果.

4.希尔伯特所倡导的形式化研究方法,是一种具有重要意义的研究方法.正如恩格斯所倡导的那样,"为了能够从纯粹形态中去研究这些形式和关系,必须使它们完全脱离自己的内容,把内容作为无关紧要的东西放在一边".

5.不论希尔伯特最终的立足点如何,他面对布劳威尔向古典数学发出的挑战进行激烈斗争,而力争保存古典数学这一功绩,受到绝大多数数学家的推崇.

形式主义派(formalist school) 数学基础中的学派之一.形式主义派数学观的核心思想有两条:

1.无论是逻辑的或数学的公理系统,其中的基本概念和公理都是一行行毫无意义的符号.形式主义者库赖(Curry)指出:"形式主义者关于数学的定义是这样的,数学是关于形式系统的科学."而形式主义者美国数学家科恩(Cohen,P. J.)则更认为,数学只是"一种纯粹的、在纸上的符号游戏".

2.数学的真理性等价于数学系统的相容性.因此,"无矛盾性在形式主义者那里便成为对于数学系统的惟一要求".

形式主义观点的形成和发展,一方面来自希尔伯特规划和形式化研究方法走向极端,另一方面也导源于非欧几何的出现而引起的关于数学真理性的争论.当时,由于两种互相矛盾的几何系统得以互为相对相容,从而人们提出关于数学真理性体现在何处的问题.有的人认为几何的真理只在于"如果这些公理是真的,那么由它演绎出来的定理成立"这样的蕴涵式,如此等,说法不一.而形式主义者在这场争论中所形成的基本观点,就是几何的真理性体现在几何系统的无矛盾性上.

形式主义者的无穷观正如形式主义者鲁宾孙(Robinson)所说的:"我关于数学基础的主张建立在以下两个主要观点上:其一,无论从无穷整体这一名词的哪一种意义来说,无穷整体都是不存在的(即真实的无穷不存在,理想的无穷也不存在).更严格地说,就是关于无穷整体的任何讲话或意谓实际上都是没有意义的.然而,其二,我们还是应该如通常那样去从事数学活动,即我们做起来就好像无穷整体是存在的那样."在此,还应提及形式主义派与现代柏拉图主义派关于数学实无限性在柏拉图哲学意义上的实在性的争论.柏拉图主义者是承认那种具有任意大基数的超穷集合在哲学意义上的实在性的,只要它们能通过适当的公理予以定义.但形式主义者则如上所见,基本上继承了德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)的无穷观.

希尔伯特对理想数学的相容性证明仅仅是相容性证明,并没有给理想数学增添任何真理性.希尔伯特的数学真理性只存在于有限性之中.当然,希尔伯特也曾有过片面强调形式的倾向.例如,他说过:"数学思考的对象就是符号本身,符号是这个思考的本质,它们不再代替理想化的物理对象."终然如此,希尔伯特"绝不是一个狂热的、彻底的形式主义者".形式主义数学真理观与希尔伯特数学真理观是不相同的.人们对形式主义派的一般评论如下:

1.一般认为,数学的真理性仅表现在数学系统无矛盾性的观点是不足取的.固然真理不应有矛盾,但不自相矛盾的却未必是真理.例如,微积分理论基础的建立进行了几百年,无限集理论一开始就陷入了矛盾,而它们恰恰都是在不相容之中发展壮大起来的.所以,不能把相容性视为真理性的惟一标准.

2.公理化与形式化的研究方法本来是一种进步,但把形式化的高度抽象引向极端,片面夸大,直至视数学理论为符号的游戏的观点也是不足取的.亦即"形式主义者反对在数学的任何部分放进客观内容,而从他们自己的假定出发,就必然地反对历史上确定的那些数学领域的重要性及其内容".试问"一个关于无意义的符号游戏,如何能对物理世界的过程具有内在的重要关系呢"?

非精确性经典数学基础

非精确性经典数学基础(foundation of non-accurately classical mathematics) 数学基础的一个分支学科.指奠定非精确性经典数学理论基础及相关问题的一门学科.作为从量的侧面研究客观世界的一门学科,数学无法一开始就研究一切量,20世纪60年代,美国控制论专家扎德(Zadeh,L. A.)明确提出要用数学的手段去研究那些为精确性经典数学所拒绝研究的模糊现象,创立了当今意义下的模糊数学,并给出了一种运用经典数学手段去处理模糊现象的相对合理的方法.由此,使得数学的研究对象由精确性的发展到模糊性的.但因扎德所创立的模糊数学和提供的方法没有解决模糊谓词的造集问题,且直接或间接地将其基础置于近代公理集合论

之上，而近代公理集合论的造集谓词又必须是精确谓词，因而在此意义下，可以说扎德未能在数学基础理论意义下完成数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充.

不少数学工作者对此做出了努力并获得了一系列有意义的成果. 迄至目前为止，归纳起来不外乎有如下三种方案：

1. 将模糊数学直接或间接地奠基于近代公理集合论. 例如，从扎德到琴狄霍姆(Gentilhomme)的奠基方案、汪培庄的奠基方案、梅内斯(Manes)的奠基方案，均属这一类.

2. 构造一种完全不依赖于精确性经典意义下的ZFC公理集合论的、专门用以描述模糊数学的公理集合论系统. 这就是由恰宾(Chapin)和韦德纳(Weidner)所建立的ZB系统. 模糊数学可被直接奠基于ZB系统，而ZB系统又不依赖于任何经典意义下的集合论系统. 但应指出的是，ZB系统的逻辑基础却仍然是经典意义下的二值逻辑的一阶理论.

3. 拓宽精确性经典数学的逻辑基础和集合论基础，解决模糊谓词的造集问题，使之能为精确性经典数学和未来的不确定性数学(在内容和方法上将有别于当今意义下的模糊数学)提供一个共同的理论基础. 20世纪80年代所建立起来中介逻辑演算系统和中介公理集合论系统属于此类奠基方案.

扎德模糊数学奠基方案(Zadeh's program to lay a foundation on fuzzy mathematics)　为模糊数学奠定理论基础的一种方案. 从美国控制论专家扎德(Zadeh, L. A.)到琴狄霍姆(Gentilhomme)关于模糊数学的这种奠基方案是一种把模糊数学直接奠定在精确性近代公理集合论基础上的做法. 根据扎德最初对模糊子集所下的定义，即知在刻画这一概念时所用的概念和方法无非是一个经典意义下的集合(以下简称精确集)、一个具有连续统势的[0,1]闭区间和一个映射方法. 由此而必须依赖于经典意义下的实数理论和自然数系，而自然数系是由ZFC公理集合论直接构造出来的，所以扎德所构造出来的模糊子集，实际上就是精确性经典集合论中的有序对集合. 即当X为一精确集，而I为[0,1]闭区间时，则$X\times I$的任一子集就是“模糊子集”. 因此，那些模糊集合论中的种种运算，也无非是在某种特定的精确性经典数学结构上的种种运算而已. 所以扎德构造模糊集理论的思想方法，决定了这一数学学科必然直接以经典的二值逻辑为逻辑工具的ZFC公理集合论为它的基础.

遵循扎德的思想方法，琴狄霍姆在1968年引进了晕集的概念，而耐各依达(Negoită)与拉莱斯库(Ralescu)于1975年又将晕集推广到一般的格L上，这就是L集轮，从而就十分具体地建立了模糊集与精确集之间的关系. 这种关系是通过“分解”与“表现”两个定理来具体实现的. 通俗地讲：分解定理是指任何模糊集都可分解为若干个精确集之并，而表现定理则指，一组精确集如果满足一定条件(即构成所谓集轮)，则就可表现一个模糊集，这就完全沟通了模糊集与精确集之间的关系. 所以从扎德构造模糊集合论的思想方法和琴狄霍姆的具体化，必然导致这种模糊集合论成为精确性经典数学的一个分支，并直接奠定在ZFC公理集合论的基础上.

汪培庄模糊数学奠基方案(Wang Peizhuang's program to lay a foundation on fuzzy mathematics)　为模糊数学奠定理论基础的一种方案. 汪培庄所从事的“模糊集与随机集落影”的研究，实际上在模糊数学与ZFC公理集合论之间建立了一种中间环节的理论框架. 这一理论框架，一方面奠基于ZFC公理集合论的基础上，同时又能给隶属函数以一种构造性描述，并能对模糊集运算在更深层次上予以解释和论证，使得模糊集理论与可能性理论全部纳入这一理论框架. 因而这一理论框架在奠基于ZFC公理集合论之上的同时，又成为模糊数学的直接的理论基础，是一种在ZFC公理集合论与模糊数学之间构造中间环节理论框架的奠基方案.

梅内斯模糊数学奠基方案(Manes's program to lay a foundation on fuzzy mathematics)　为模糊数学奠定理论基础的一种方案. 该方案所研究的是一种直接在经典数学框架中定义数学结构的方案. 它立足于把模糊数学和许多其他理论的共同点抽象出来，然后定义一类在经典数学框架中的数学结构，并称之为广义的模糊理论. 通常的模糊数学便被纳入这种被称为广义模糊理论的数学结构$(T,e,(-)^{\#})$之中. 这样，模糊数学便被视为经典数学框架中的某种特殊结构. 显然，这一奠基方案就更加密切地依赖于经典数学，并且也是一种把模糊数学直接奠基于ZFC公理集合论之上的方案. 梅内斯(Manes)所定义的广义模糊理论$T=(T,e,(-)^{\#})$由三个要素组成：

T：　对每个集X指定一个集TX；

e：　对每个集X指定一个函数$e_X:X\to TX$；

$(-)^{\#}$：　对每个函数$\alpha:X\to TY$指定一个函数$\alpha^{\#}:TX\to TY$.

并对任意的$\alpha:X\to TY,\beta:Y\to TZ$，下列三公理成立：

扩展公理：　$\alpha^{\#}e_X=\alpha$(并列的记号表示合成)；

准恒等公理：$(e_X)^{\#}=\mathrm{id}_{TX}$(id是恒等变换)；

结合公理：　$(\beta^{\#}\alpha)^{\#}=\beta^{\#}\alpha^{\#}$.

在理论T中，T，e，$(-)^{\#}$的取法不同，就构成诸如普通集合论、(狭义)模糊集合论、概率集合论、可能性集合论等不同的理论.

ZB系统(ZB system)　一种描述模糊集合论的

公理体系.美国控制论专家扎德(Zadeh,L.A.)首次引入模糊集定义,迄今已几经修改和扩张,例如,戈根(Goguen)曾把[0,1]闭区间改为可传的半序集,而布朗(Brown,E.)则把它限制为完备的布尔格.然而,不论这样或那样的定义方式,都必须依赖于一个事前约定的集合理论.恰宾(Chapin)是第一个考虑构造模糊数学所特有的公理体系的学者.他构造了一个称为"集合值集论"的公理体系,这是一种完全不依赖于经典意义下之公理集合论的、专门描述模糊集合论的公理体系.后来韦德纳(Weidner)对这一公理体系作了很大的改进,构造了一个由9条公理组成的公理系统,并称为ZB系统.它是一种带等号和两个非逻辑符号的一阶理论.这两个原始的非逻辑符号是:

1.三元谓词符号 $\varepsilon(X,Y,W)$,它被解释为 X 以模糊度 W 是 Y 的元素.

2.二元谓词$\leqslant$,它被解释为模糊度的序.

若以fuz表示"模糊",则ZB系统的九条非逻辑公理的名称分别为:fuz外延公理,fuz函数化公理,fuz序公理,fuz对偶公理,fuz联集公理,fuz替换公理,fuz幂集公理,fuz正则公理,fuz无穷公理.实际上,ZB系统也是平行于ZF系统的一种展开,它并不依赖于某种事前约定的集合论,而且ZB系统中的对象都是模糊集.

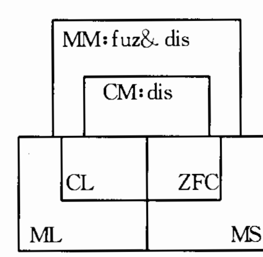
韦德纳除了对ZB系统进行展开而获得一批为ZB系统所特有的定理外,还证明了ZB系统对于ZF系统的相对相容性.此外,又证明了布尔值全域 $V^{(B)}$ 可被解释为ZB系统的一个模型,而 $V^{(B)}$ 中的任一 B 值函数均可被视为一种模糊集合.因此,ZB系统是模糊集合论所特有的一种公理系统,模糊数学就被直接奠基于该系统之上,但ZB系统又不依赖于任何经典意义下的集合论系统.然而应指出的是:配套于ZB系统的逻辑工具却仍然是经典意义下的二值逻辑的一阶理论,亦即ZB系统没有构造模糊数学所特有的逻辑演算系统,而仍然以经典的二值逻辑作为它的逻辑工具.

中介原则(medium principle)　一种承认中介状态的思想原则.中介原则指无条件承认存在着这样的反对对立谓词 P 和 $\urcorner P$,有对象 x 部分地具有性质 P,同时又部分地具有性质 $\urcorner P$.记为 $\sim P(x)$.此处,形式符号 $\urcorner$ 是"对立否定词",解释并读为"对立于"或"假";形式符号 $\sim$ 是"模糊否定词"或"部分否定词",解释并读为"部分地".而 $P(x)$ 表示对象 x 具有性质 P,或说 x 满足谓词 P,因而 $\sim\urcorner P(x)$ 表示对象 x 部分地具有性质假 P 等.

中介对象(medium object)　逻辑学术语.指反对对立面的中介状态的对象.任给一反对对立谓词 P 和 $\urcorner P$,如果有对象 x 部分地具有性质 P,同时又部分地具有性质 $\urcorner P$,即 $\sim P(x)\&\sim\urcorner P(x)$(简记为 $\sim P(x)$),则称此对象 x 为该反对对立谓词 P 和 $\urcorner P$ 的中介对象.

中介逻辑(medium logic)　在中介原则观点下建立起来的一种非经典逻辑.狭义地,中介逻辑仅指中介逻辑演算系统ML.广义地,中介逻辑除了它的基础部分,即演算系统ML之外,还应包括中介公理集合论系统MS,以及后来发展起来的中介代数系统、中介模态逻辑、中介逻辑的根岑系统、中介模型论等.广义中介逻辑简记为MM(ML&MS).ML&MS是朱梧槚、肖奚安于20世纪80年代建立起来的一种非经典逻辑演算系统与公理集合论系统.建立ML&MS的思想原则是无条件贯彻"中介原则".如所知,在经典的二值逻辑和精确性经典数学中,在构造任何逻辑系统或数学系统时,都必须无形中贯彻一条相反于"中介原则"的原则,即在论域的适当限制下,确认任何反对对立谓词 P 和 $\urcorner P$ 都没有中介对象存在.即不存在任何对象 x,能使 x 部分地具有性质 P,同时又部分地具有性质 $\urcorner P$.这就是所谓"非男即女""非真即假"等.该原则称为"无中介原则".但在事实上,被排斥于经典数学之外的中介对象或模糊现象客观地广为存在,只是精确性经典数学不予承认和研究而已.

20世纪60年代,美国控制论专家扎德(Zadeh,L.A.)明确提出要用数学的手段去处理和研究模糊现象,提出了一套相对合理的处理模糊现象的方法,并由此创立了模糊数学.模糊数学的诞生标志着数学的发展已进入了数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充时代.然而,这时的模糊数学没有解决模糊谓词的造集问题,因而并未能在数学基础理论意义下实现数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充.在ML&MS中,不仅精确谓词可以造集,同时完全解决了模糊谓词的造集问题.并且严格证明了任何一个经典的二值逻辑系统都是ML的子系统.而且近代公理集合论系统ZFC中除正则公理外,其余用以推出整个经典数学的9条集合论公理,均已严格地被证明为MS系统中的9条定理.这表明整个经典数学也可产生于ML&MS并奠基于ML&MS.从而ML&MS就为精确性经典数学和处理模糊现象的不确定性数学(未来的不确定性数学将有别于当今意义下的模糊数学)提供了一个共同的理论基础,并在数学基础理论意义下完成了数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充.如上图所示:此处dis表示清晰现象,而fuz为模糊现象的简记.



CL 表示经典二值逻辑，CM 表示精确性经典数学系统. 其余记号均于上文中明示.

中介逻辑演算(medium logic calculus)　见本卷《数理逻辑》同名条.

中介公理集合论(medium axiomatic set theory)　见本卷《数理逻辑》同名条.

模糊谓词(fuzzy predicate)　逻辑学的基本概念之一. 它是一种存在对象满足该谓词与否不分明的那种谓词. 设 P 为一谓词(概念或性质)，如果存在着这样的对象 x，它部分地具有性质 P，部分地不具有性质 P，则称 P 为模糊谓词，简记为 fuz$P$. 此外 fuz 表示"模糊的".

模糊谓词 fuz$P$ 在 MS 中的形式定义为

$$\underset{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle}{\text{fuz}} P =_{\text{df}} \exists x_1, \exists x_2, \cdots, \exists x_n$$
$$(\mathring{\sim} P(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_r)).$$

由上述 fuz$P$ 的形式定义可看出，MS 系统中的任何谓词要么是 fuz$P$，要么是 dis$P$，亦即 MS 系统中不存在这样的谓词，它部分地模糊又部分地清晰.

清晰谓词(distinct predicate)　逻辑学的基本概念之一. 它是任何对象满足该谓词与否完全分明的那种谓词. 设 P 为一谓词(概念或性质)，如果对任何对象 x 而言，总是要么 x 完全满足 P，要么 x 完全不满足 P，亦即不存在这样的对象，它部分地满足 P，部分地不满足 P，则称 P 是清晰谓词，并记为 dis$P$. 此处 dis 是"清晰的"的简记.

模糊集合(fuzzy set)　模糊集合论的一个概念. 它是存在对象是否属于该集合不分明的那种集合. 在精确性经典数学中，任给一对象 x 和一集合 A，要么 $x\in A$，要么 $x\notin A$. 但在 MS 系统中，由于对立否定词和模糊否定词～的引进，对象与集合的关系也扩张了. 亦即对象 x 与集合 A 之间，除了 $x\in A$ 和 $x\notin A$ 之外，还存在着 x 部分地属于 A，部分地不属于 A 的情形，通常将这各情形记为 $x\,\widetilde{\in}\,A$. 于是，若对集合 A，存在着对象 x 使有 $x\,\widetilde{\in}\,A$，则称 A 为模糊集合，简记为 fuz$A$.

清晰集合(distinct set)　模糊集合论的一个概念. 它是指任何对象 x 属于该集合与否完全分明的集合. 设 A 为一集合，如果不存在对象 x，使 x 部分地属于 A，部分地不属于 A，亦即没有 x，使 $x\,\widetilde{\in}\,A$，则称 A 为清晰集合，简记为 dis$A$.

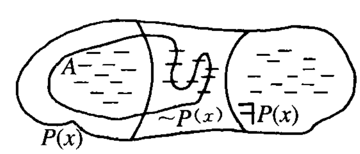
恰集(exact set)　中介公理集合论的基本集合之一. 恰集的直观含义是：给定谓词 P，如果集合 A 满足如下条件：

1. $P(x)\dashv\vdash x\in A$；

2. $\sim P(x)\dashv\vdash x\,\widetilde{\in}\,A$；

3. ╕ $P(x)\dashv\vdash x\notin A$；

则称集合 A 为谓词 P 的恰集，简记为 $A^{exa}P$. 如图中之集合 A 便是谓词 P 的惟一确定的恰集. 当然，这里对于任一使 $x\,\widetilde{\in}\,A$ 的 x 而言，没有再对 x 部分地属于 A 的程度的多少去做区分. 恰集 $A^{exa}P$ 在 MS 系统中的形式定义为



$$A \overset{exa}{\underset{x}{}} P(x,t) =_{\text{df}} \forall x(x\in a \succ\!\prec P(x,t)).$$

由如上形式定义看出，当 A 为 P 的恰集时，则对任何 x 而言，$x\in A$ 与 $P(x,t)$ 是等值的. 另外，上述形式定义中对于 exa 下面的 x，在不致引起混淆的情况下，往往略去不写. 并在 MS 系统中有如下的恰集简记形式

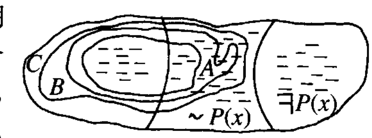
$$A = \{x \mid P(x,t)\} =_{\text{df}} A \overset{exa}{\underset{x}{}} P.$$

概集(comprehension set)　中介公理集合论的基本集合. 概集的直观含义是：给定谓词 P，如果集合 A 满足如下条件：

1. $P(x)\vdash x\in A$；

2. ╕ $P(x)\vdash x\notin A$；

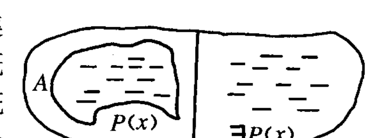
则称集合 A 为谓词 P 的概集，简记为 $A^{com}P$. 设 P 为一模糊谓词，则图中之 A,B,C 等都是 P 的概集. 一个谓词 P 的概集可以有很多，而且既可以是清晰集，也可以是模糊集. 如图所示，集合 A,C 为清晰集合，而 B 是模糊集合，但三者均为 P 的概集.



概集 $A^{com}P$ 在 MS 中的形式定义为

$$A \overset{com}{\underset{x}{}} P(x,t) =_{\text{df}} \forall x((P(x,t)\Rightarrow x\in a)\wedge$$
$$(╕\, P(x,t)\Rightarrow x\notin a)).$$

任一谓词 P 的恰集也一定是 P 的概集，但谓词 P 的概集未必是 P 的恰集. 当 P 为清晰谓词时，则 P 的恰集与概集完全一致，并且惟一确定. 如图中之集合 A 便是 dis$P$ 的惟一确定的恰集，同时 A 也是 P 的惟一确定的概集.



泛概括公理(axiom of pan-comprehension)　中介公理集合论的一条核心公理. 泛概括公理的直观思想和含义是：任给一谓词 P，不论它是清晰谓词，还是模糊谓词，则至少有一集合 A，使

$$A \overset{com}{\underset{x}{}} P,$$

即 A 是谓词 P 的概集.

稍加分析即可看出:一方面,因为泛概括公理已取消了惟有康托尔意义下的清晰谓词方可造集的限制,即 $\mathrm{fuz}P$ 也可造集,所以可以说泛概括公理与康托尔意义下的概括原则相去甚远.其次,当

$$A\overset{com}{\underset{x}{}}P$$

时,A 未必恰由所有满足 P 的 x 组成,往往在构造 A 的同时,带进了使有 $\sim P(x)$ 的一些 x,或使之 $x\,\tilde{\in}\,A$.再则,此处的集合 A 与谓词 P 之间未必总有严格的一一对应关系,即 P 的概集并非总是惟一确定的.所以泛概括公理的内容含义已远非康托尔意义下的概括原则,但在另一方面,从某种意义上理解,泛概括公理又全面保留了概括原则的内容.因为当人们只处理清晰现象时,那么对于任给的清晰谓词 P 而言,总有惟一确定的集合 A,使

$$A\overset{com}{\underset{x}{}}P.$$

即 P 有惟一确定的恰集 A,而且此时 A 也是 P 的惟一确定的概集,特别是 A 恰由所有满足 P 的 x 组成.

如上的直观理解及其通俗论述在 MS 系统中均已严格形式化.关于泛概括公理在 MS 系统中的形式陈述为:对任何 $NorP(x_1,x_2,\cdots,x_n;t)$ 而言,只要其中不包含 a 的自由出现,则

$$\exists a(a\overset{Com}{\underset{x}{}}\exists x_1\cdots\exists x_n(\not b(x=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle)$$
$$\wedge\ p(x_1,x_2,\cdots,x_n;t))).$$

此处 $NorP$ 表示 P 是正规谓词.

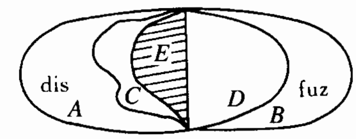
泛概括定理(pan-comprehension theorem) 中介公理集合论的一条基本定理.泛概括定理是泛概括公理的特殊情况:对任何 $NorP(x,t)$,只要其中不包含 a 的自由出现,则

$$\exists a(a\overset{Com}{\underset{x}{}}P(x,t)).$$

直观地说,泛概括定理指任何正规谓词均有一概集.此外,在 MS 系统中,由泛概括定理可进一步证明下述定理:对任何 $NorP(x,t)$,只要其中不包含 a 的自由出现,则

$$\underset{x}{\mathrm{dis}}P(x,t)\Rightarrow\exists a(a\overset{exa}{\underset{x}{}}P(x,t)).$$

泛概括定理表明,在 MS 系统中,任何正规清晰谓词,必有一集 A,使得 A 是该谓词的恰集.另一方面,在 MS 系统中,又能严格证明,任何康托尔意义下能用来造集的谓词都是 MS 系统意义下的正规清晰谓词.亦即 MS 系统中的正规清晰谓词囊括了一切康托尔意义下的造集谓词,而且正规清晰谓词的外延大于康托尔意义下之造集谓词的外延.由于 MS 系统中有定理 $\vdash \mathrm{dis}P\vee\mathrm{fuz}P$,故所有谓词分为清晰谓词($A$)和模糊谓词($B$)两类.在正规限制下(如图),有正规清晰谓词($C$)及正规模糊谓词($D$)两类.而图中阴影部分($E$)表示康托尔意义下的一切造集谓词,$C$ 包括了 E.因此,再看上述定理的结论(在 MS 系统中,任何正规清晰谓词必有惟一确定的恰集)可知,MS 系统中的泛概括公理又在实际上全面保留了康托尔意义下概括原则的内容.这样,"在 MS 系统中是否会出现悖论"的问题就可做出肯定的回答:不会.在 MS 系统中已严格证明,历史上任何逻辑数学悖论,以及在二值系统内无需解释的多值逻辑悖论和无穷值悖论,均可在 MS 系统中排除(参见"悖论").从而,人们一直在寻找一种如何修改概括原则的方案,使之既能排除古典集合论中的悖论,又能最大限度地保留概括原则的合理内容,这一问题终于在 MS 系统中得到了解决(参见"中介公理集合论").



撰 稿 毛宇光 朱梧槚 宫宁生 顾红芳 萧奚安 蒋星耀

审 阅 王元元 朱梧槚 宋方敏 张东摩

数 理 逻 辑

数理逻辑(mathematical logic) 数学的重要分支. 它是用数学方法研究诸如推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的能行性等逻辑问题的一门学科. 因此,数理逻辑既是一门逻辑化了的数学分科,又是一个数学化了的逻辑分支.

数理逻辑以推理本身作为自己的研究对象,其中主要包括演绎推理、形式推理、数学推理和各种近、现代的非经典推理. 经典数理逻辑的研究领域包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论和证明论等五大块. 非经典逻辑包括模态逻辑、多值逻辑、非单调逻辑、归纳逻辑、似然逻辑、不协调逻辑、开放逻辑、中介逻辑等.

阐明推理的有效性是数理逻辑的研究内容之一,同时也从某个侧面显示了逻辑被数学化的片段. 数理逻辑的早期发展,是用数学方法(这里主要指数学中的符号化方法或形式化方法)研究演绎推理的有效性开始的. 这就是通常所说数理逻辑的基础部分,即命题演算和谓词演算的基本内容. 不少文章或著作中数理逻辑这个词,往往指这种狭义的数理逻辑. 最早想到用数学方法研究演绎推理,或者说最早想把演绎推理法数学化的是德国数学家、哲学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.). 他被几何论证符号化中显示出来的代数威力所感动,进而设想一种比数量代数更为宽广的代数学科,这种代数将是逻辑的一部分,并且是代数化了的逻辑. 实际上,法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)已经开始谨慎地去建立一种逻辑的代数,有关此项工作的一个未完成的文稿至今还被保存着. 但莱布尼茨不仅探索着一个与笛卡儿所想同样宽广的目标,而且开创性地提出了一个更加雄伟的方案. 1666 年,莱布尼茨完成了《论组合的艺术》一书的写作,其中就包括有他对演绎推理普遍系统的早期计划. 后来他又写过许多文字片段,借以探讨逻辑代数这一目标,但是这些文字片段直到 20 世纪也未能出版,因而很少产生直接的影响. 当然,在 18 世纪和 19 世纪也曾有别人草拟过类似的计划,但都没有比莱布尼茨的有关工作更前进一步. 逻辑代数的直接创始者,应推英国数学家德·摩根(De Morgan,A.)和英国数学家布尔(Boole,G.). 1874 年,德·摩根出版了《形式逻辑》和许多有关文章,在这些论著中,他修正了古希腊哲学家、科学家亚里士多德(Aristotle)的逻辑,并且开创了关系逻辑的研究. 另一方面,符号化方法得以对逻辑代数的研究起到重大作用,关键的一步是布尔走出来的. 布尔确信,语言的符号化会使逻辑严密化. 他的主要想法被包括在他的《逻辑的数学分析》(1847)和《思维规律的研究》(1854)这两部著作中. 他用 $x,y,\cdots$,表示类或集合,用 $x+y$ 和 xy 表示两个集合的并和交,然后列出一些自明地反映推理规则的表达式作为公理,再以这些公理用许可的规则去导出众多的推理关系,即从外延去研究逻辑. 布尔看到了如上关于类的演算可被解释为命题演算,使他的代数成为直接反映推理规则的命题代数. 后来又几经改进,最后便成为当今众所周知的布尔代数. 因而几乎可以说,主要是布尔的工作使得被符号化了的逻辑开始成为一种具有科学性的逻辑,并由此使得逻辑科学从哲学中分化出来而逐步接近数学. 此后,又经一些学者的推进,直到 1897 年,德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)在他的《概念演算》一书中,建立了命题演算和一阶谓词演算的公理基础,从而完成了演绎推理的数学化工作. 弗雷格扩展了变量、量词和命题函数的运用,还引进了实质蕴涵的概念,这种对蕴涵的解释,在数理逻辑中无疑是极其方便和重要的,从而使得逻辑演算的内容比亚里士多德的逻辑大为丰富. 然而,这种反映演绎推理规律的逻辑演算系统的建立和完善,并没有穷尽数理逻辑的研究. 人们很自然地会问,这两个逻辑演算系统可反映的演绎推理规律的程度如何? 或者更确切地说,人们既要问演绎推理的所有规律是否都在逻辑演算中得到了反映? 还要问逻辑演算中的每一条规则是否都是演绎推理中某条规则的反映? 这实际上也就是后来人们在逻辑演算中进行语义研究时的完全性和可靠性问题. 即若对前一问题的回答是肯定的,则就断定了这个逻辑演算系统是完全的;若对后一问题的回答是肯定的,则就断定了这个逻辑演算系统是可靠的. 直到 20 世纪 30 年代,以上所问都得到了肯定的答案,其中做出重大贡献的首推一阶谓词演算系统的完全性.

关于证明的真实性和数学的真理性的探求也是数理逻辑的研究内容之一,同时也表明存在着数学内容逻辑化的倾向与片段. 虽然经典数学中可使用的推理几乎都是演绎推理. 但是,如果只是将演绎推理数学化,或者说充分地达到了严密化,那么证明的真实性和数学的真理性等问题远未解决. 19 世纪末,德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))在提供整个经典数学的理论基础与扩充数学研究对象的意义下创建了古典集合论. 如果该集合论系统的真理

性得以保证，那么借助于严格的逻辑工具所推出的大块数学，其真理性也就不成问题. 然而这种理想的情景未能出现，事实上，在古典集合论中却出现了一系列悖论. 特别是在 1902 年，由于罗素悖论的出现，使得把集合论作为整个经典数学的理论基础的设想面临严重的困难. 为了解决集合论中的悖论问题，数学家们的方案之一是求助于公理化手段. 德国数学家策梅洛(Zermelo，E. F. F.)于 1908 年首先给出了一个集合论公理系统，后经德国学者弗伦克尔(Fraenkel，A. A.)等数学家的改进，最终形成了当前的 ZF 公理集合论系统. 在 ZF 公理系统中，所有已经出现之集合论悖论得以排除，而且迄今未发现任何新的悖论在其中出现. 这就使得整个现代公理集合论得以诞生，并使经典数学奠定在一个相对牢固的理论基础之上. 当然，现代集合论的发展状况远非当年的情景，限于篇幅，对此不再详述. 但总体来说还应指出，因为至今尚未从理论上证明近代公理集合论永远不会出现新的悖论. 所以近代公理集合论的诞生，并没有从根本上解决集合论系统的相容性问题. 此外，数学作为一门演绎推理性质的学科，数学命题的真理性至少从形式上是建立在公理的真理性和逻辑规则的有效性之上的. 因而即使在非欧几何的出现，致使"数学真理是绝对真理"这一观念受到冲击之后，数学家还可用逻辑推理的严格性作为精神支柱，并以此解释数学在应用中的有效性. 但因集合论悖论的出现，这一精神支柱也动摇了，在数学家中形成一种危机感，进而促使数学家们去探索数学推理在什么情况下有效，在什么情况下无效；数学命题在怎样的情况下具有真理性，在怎样的情况下失灵. 20 世纪初，数学基础论这一学科诞生了. 摆在从事数学基础问题研究的数学家面前的首要任务，就是如何为数学的有效性重新建立可靠的依据. 由于在这项巨大工程中所持的基本观点不同，在数学基础论的研究中形成了各个流派. 德国数学家希尔伯特(Hilbert，D.)是其中一个主要流派的代表人物，他提出了著名的希尔伯特规划，希望规划的实现能一劳永逸地解决数学系统的相容性问题. 他的基本想法是利用具体的、有穷的证明作为出发点，用简单的、直观的和有限的元数学工具来证明数学系统，特别是算术公理系统的相容性. 这就是证明论这个数理逻辑的重要分支在原来意义下的涵义. 希尔伯特和他的学派，确实证明了一些简单的形式系统的无矛盾性，并且相信他们即将实现算术和集合论之无矛盾性证明这一目标. 然而，美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)于 1931 年证明了下述事实：任何一个包含数论的数学系统的相容性不可能在自身系统内得到证明，必须凭借更强的、在系统内不能表述的方法去证明对象系统的相容性. 就是说，当人们使用元理论去证某个对象理论的无矛盾性时，这个元理论要比对象理论更强，必需是一个能表述对象理论所不能表述的那个方法的理论，因而元理论不可能比对象理论简单，而是更复杂、更不可靠. 因此，哥德尔就从理论上推断了希尔伯特规划是不可能实现的. 于是，原来意义下证明论的涵义开始变化，而那些仍想证明算术系统相容性的数学家，也开始寻求其他的、较为直观的元数学工具. 1935 年，根岑(Gentzen，G.)使用直到超穷序数

$$\varepsilon_0=\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

的超穷归纳法，证明了算术系统的相容性. 另一方面，证明论的研究已成为运用现代数学工具去研究数学证明的一门学问，亦即证明论把数学本身作为自己的研究对象，从而这种研究也更加逻辑化了. 在研究证明的真实性和数学真理性过程中，形式语言、形式系统这类概念是必不可少的. 那么这种形式和它所反映的内容之间究竟是一种什么关系？为探索这种关系，开展了对模型论这个数理逻辑重要分支的研究. 确切地说，模型论是研究形式语言与其解释或模型之间关系的一门学问，或者说是研究语法和语义之间关系的一门学问. 这种关系的探索对于证明的真实性和数学的真理性的研究是必不可少的.

计算的能行性问题是数学中的一个至关重要的问题. 并且对数学家、逻辑学家或哲学家都是十分重要的. 但究竟什么问题是能行可计算的?在直观上认为是可计算的函数有哪些？如何用形式的方法定义可计算性？哪些问题是不可计算的？对能行性的研究导致了递归论的诞生. 早期递归论致力于用形式方法定义直观意义下的能行可计算性. 美籍奥地利数学家哥德尔、法国数学家埃尔布朗(Herbrand，J.)和美国逻辑学家、数学家克林(Kleene，S. C.)最早引进了一般递归函数的概念，相继出现了图灵机、波斯特系统、λ 演算等计算模型，并且先后证明了在这些模型下所定义的可计算函数恰恰就是部分递归函数. 继而又发现所有已知的直观上承认为可计算的函数皆为一般递归函数. 美国数学家、逻辑学家丘奇(Church，A.)提出了一个著名的丘奇论题：一个全函数是直观上能行可计算的，当且仅当它是一般递归函数；一个部分函数是直观上能行可计算的，当且仅当它是部分递归函数. 随着计算机的出现和发展，人们注意到机器可计算的函数恰好也是一般递归函数. 因此递归论的研究也变得更加重要. 现代递归论的主要研究方向有如下几种：其一是将能行性的研究范围从数论函数拓宽到一般的数学结构上；其二是将直到 ω 的递归拓广到直到超穷数 α 的超穷递归，通常称为 α 递归；其三是研究不可解问题之间的归约问题，即研究不可解问题之困难程度的差别；其

四是研究计算和推理等问题的复杂性问题.至此,计算能行性的研究,也是数理逻辑研究的内容之一.因此也就明确了递归论也和逻辑演算、集合论、模型论、证明论一样地被包括在广义数理逻辑的研究领域之中.

现在,再让人们回过去看看如上所论之数理逻辑的主流所说的用数学方法研究推理,显然还是囿于演绎推理的范畴.然而人类思维的过程与功能是极其丰富和复杂的,人类思维活动中的种种推理方式决非演绎推理所能完全囊括的.由于受到种种时代因素的刺激,从20世纪30年代开始,人们仿照用数学方法研究演绎推理的办法,开始用数学方法去研究各种各样的非经典的推理,从而导致了诸如模态逻辑、时态逻辑、非单调逻辑、多值逻辑、归纳逻辑、似然逻辑等多种多样的非经典逻辑系统的诞生.通常认为数理逻辑的研究领域并不包括这些非经典的逻辑系统,而认为仅由逻辑演算、集合论、模型论、证明论和递归论五个部分构成.但从数理逻辑是用数学方法研究推理之有效性这一点来看,将如上所说之种种非经典的逻辑系统一并纳入数理逻辑的研究领域之中才更为合适.

数理逻辑基础

命题(proposition) 命题逻辑的基本概念之一.通常用日常生活的语言,如中文、英语,给出数学命题,但是日常语言的语义有歧义性,是不精确的,因而从它们抽象出来的逻辑概念——命题也就很难精确定义了.英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)在《数理哲学导论》中说:"(命题)这个词不能严格地定义".但他认为"命题这个词应该限制于可以在某种意义上被称为符号的东西,或更进一步地说,限制于那些表达真假的符号".因此,按照罗素的观点,命题是陈述句.例如,"二加二等于五"是命题,"苏格拉底是人"和"苏格拉底不是人"也都是命题,因为第一句和第三句所表达的意义是假的,而第二句所表达的意义是真的.有一些陈述句,如"火星上有生物","$2^{\sqrt{\pi}}$是代数数",目前尚不能判定其真假,这些句子是不是命题呢?根据排中律知道,这些句子或为真,或为假,因而在承认排中律的古典逻辑中,这些句子也是命题.因此,在古典逻辑中,可以认为陈述句是命题.但是必须指出的是,以荷兰数学家布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)为代表的直觉主义不承认排中律,因而也就不承认每一命题必可分真假.对于他们来说命题又有另一种解释了.

真值(truth value) 命题逻辑的基本概念之一.指命题所取的值.在二值逻辑中,真值有两种:"真"和"假".通常用符号"T"表示真,用"F"或"$\perp$"表示假.如果一个命题正确地反映了客观,则该命题的真值为真,或称该命题有真值"T".否则该命题的真值为假,或称有真值"F"(或"$\perp$").例如,命题"苏格拉底是人"的真值是"T",而"二加二等于五"有真值"F".真值这个词是德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)首先提出来的.

联结词(connectives) 亦称命题联结词.命题逻辑的基本概念之一.指由已有的命题构造出新命题所用的词语.例如,由命题"二加二等于五"和"苏格拉底是人"可以构造出新命题"二加二等于五并且苏格拉底是人".在这里,"并且"是联结词.又例如,由命题"苏格拉底是人"可以构造出它的否命题"苏格拉底不是人".在这个否命题中,"不"是联结词.最重要的联结词有否定"非",合取"且",析取"或",蕴含"如果……则……"以及等价"当且仅当".

命题联结词(propositional connective) 即"联结词".

原子命题(atomic proposition) 亦称简单命题或初始命题.命题逻辑研究的基本对象.指不含任何联结词的命题.例如,命题"二加二等于五并且苏格拉底是人"不是原子命题,因为该命题中含有联结词"并且".而"二加二等于五"是原子命题,因它不包含任何联结词.在命题逻辑中,原子命题是最基本的研究对象,把它们作为一个整体而不再加以分解进行研究.但是在谓词演算中,命题即使是命题演算的原子命题也不再是最基本的成分了,还可以分解为更加基本的成分,如谓词(参见"谓词")与个体.

简单命题(simple proposition) 即"原子命题".

初始命题(primitive proposition) 即"原子命题".

复合命题(compound proposition) 一种含有命题联结词的命题.指由其他较简单的命题经联结词联结而成的较为复杂的命题.构成该命题的较为简单的命题称为该复合命题的成分命题,或支(肢)命题.如命题"二加二等于五并且苏格拉底是人"是复合命题,因为它含有联结词"并且".而命题"二加二等于五"和"苏格拉底是人"是它的成分命题.在命题逻辑中,复合命题与其成分命题的逻辑关系是一项重要研究内容.

成分命题(component proposition) 见"复合命题".

支(肢)命题(component proposition) 见"复合命题".

真值函数(truth-value function) 亦称真值函项.一种特殊函数.指以真值集$\{T,F\}$为定义域和值域的函数.根据真值函数的变元个数,真值函数可分为一元真值函数,二元真值函数……n元真值函数

等.对任意的自然数 $n \geqslant 1$,总有 2^{2^n} 个不同的 n 元真值函数.

真值函项(truth-value function) 即"真值函数".

真值表(truth table) 研究命题逻辑的一种工具.反映真值函数与其变元之间的真值对应关系的表称为真值表.例如,设 p,q 为命题,$f(p,q)$ 为"p 并且 q",则右面的表格反映了真值函数 $f(p,q)$ 与 p,q 之间的真值对应关系,被称为 $f(p,q)$ 的真值表.

p	q	$f(p,q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

给定一个真值函数,人们能列出一个惟一的真值表.但对于同一个真值表,在自然语言里却能有许多真值联结词与之对应.真值表是美国哲学家、物理学家皮尔斯(Peirce,C. S.)首先使用的,现在它已成为命题逻辑中的一个有力的研究工具.

否定词(negation) 真值联结词之一.通常用符号"¬","～","N","⁻"等来表示(右表).设 p 为一命题,则 $\neg p$(或 $\sim p, Np, \bar{p}$,读做"非 p")表示这命题的否命题,$\neg p$ 被称为是 p 的否定式.例如,若 p 为命题"二加二等于五",则 $\neg p$ 表示命题"二加二不等于五".p 与否定式 $\neg p$ 之间的逻辑关系是:p 为真,当且仅当 $\neg p$ 为假.这可用上面的真值表来表示.

p	$\neg p$
T	F
F	T

否定式(negative form) 见"否定词".

合取词(conjunction) 真值联结词之一.通常用符号"∧","&","K"等来表示.如果 p,q 为两个命题,则 $p \wedge q$(或 $p \& q, Kpq$,读做"p 且 q")表示由 p,q 组成的复合命题"p 且 q".$p \wedge q$ 被称为是 p 和 q 的合取式,而 p,q 称为该合取式的合取项,或合取支(肢).例如,用合取词可以由命题"苏格拉底是人"和"二加二等于五"组成命题"苏格拉底是人并且二加二等于五".合取式与其合取项之间的真值关系可用右面的真值表来表示.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

合取式(conjunctive form) 见"合取词".

合取项(conjunctive term) 见"合取词".

析取词(disjunction) 真值联结词之一.通常用符号"∨","A"等来表示.如果 p,q 是两个命题,则 $p \vee q$(或 Apq,读做"p 或 q")表示由 p,q 组成的命题"p 或 q".$p \vee q$ 被称为是 p 和 q 的析取式.p,q 被称为是该析取式的析取项,或析取支(肢).逻辑中联结词"或"的含意与日常语言中"或"的含意有所不同.日常语言中"或"的含意有两种,其一为可兼的"或".对于可兼的"或",p 或 q 是真的,当且仅当命题 p 和 q 中至少有一为真.例如,命题"我每天打球或跑步"中的"或"是可兼的.如果客观情况是我每天又打球又跑步,人们也认为该命题是真的.另一种是不可兼的"或".对于不可兼的"或",p 或 q 是真的,当且仅当命题 p 和 q 中有且仅有一个是真的.例如,语句"这两本书我们每人分一本,你可拿这本或那本"中的"或"是不可兼的,即你须拿亦仅只能拿一本书.在逻辑中,析取词"或"是可兼的.析取式与其析取项之间真值的关系可用上面的真值表来表示.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

析取式(disjunctive form) 见"析取词".

析取项(disjunctive term) 见"析取词".

蕴涵词(implication) 亦称条件词.真值联结词之一.通常用符号"→""⊃","C"等来表示.如果 p,q 是两个命题,$p \to q$(或 $p \supset q, Cpq$,读做"p 蕴涵 q")表示由 p 和 q 组成的复合命题"如果 p,则 q".逻辑中的蕴涵词与日常语言中的联结词"如果……则……"不尽相同.在日常语言,语句"如果 p,则 q"中的 p 与 q 要有某种联系才能成立.但在逻辑中,只要不是 p 真且 q 假,则 $p \to q$ 有真值"真",而不管 p,q 之间是否有某种联系.例如,在逻辑中,命题"如果法国在欧洲,则海水是咸的"和"如果法国在澳洲,则海水是甜的"均有真值"真".但在日常语言中,人们就不认为这些语句是真的了.因为人们认为,海水是咸是甜与法国的位置无关.蕴涵词可用下面的真值表来定义(上表).对于蕴涵词这种定义,逻辑学家曾有过长期争论.英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)认为这种定义的主要特点是"真命题所蕴涵的命题是真的".但是,如果第一个命题是假的,这个性质就没有了.罗素本人也认为这种定义有点人为的做作.美国逻辑学家刘易斯(Léwis,C. I.)批评过蕴涵词的这种定义.他说,因为假命题蕴涵任何命题和任何命题蕴涵真命题,所以"月亮是用绿色乳酪制成的"蕴涵了"二加二等于四".刘易斯认为这样一类命题不能应用于有效的推理.按照刘易斯的观点,这样定义的蕴涵是一种实质蕴涵.刘易斯引进了另一种蕴涵——严格蕴涵,并据此创立了模态逻辑(参见"模态逻辑","严格蕴涵").但必须指出的是,在数学推理中,实质蕴涵是行之有效的.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)首先将蕴涵词称为条件词.条件词又名实质条件词.形如 $p\rightarrow q$ 的式子,称为蕴涵式,p,q 称为命题.位于蕴涵词符号前面(或左边)的部分称为前件.位于蕴涵词符号后面(或右边)的部分称为后件.

条件词(conditional) 见“蕴涵词”.

蕴涵式(implication form) 见“蕴涵词”.

前件(antecedent) 见“蕴涵词”.

后件(seccedent,consequent) 见“蕴涵词”.

等价词(equivalence) 亦称等值词、双条件词.真值联结词之一.通常用“$\equiv$”“$\leftrightarrow$”,“E”等符号来表示.如果 p,q 均为命题,则 $p\equiv q$(或 $p\leftrightarrow q$,Epq,读 p 当且仅当 q)表示由 p 和 q 组成的命题“p 当且仅当 q”,其直觉含义是说命题 p 与 q 的真值完全相同,即同为真或同为假.例如,由命题“苏格拉底是人”和“二加二等于五”及等价词可以组成命题“苏格拉底是人,当且仅当二加二等于五”.等价词可由右面的真值表来定义.形如 $p\equiv q$ 的式子,称为等价式,此处 p,q 是命题.在等价式中,位于等价词符号左边(或右边)的部分称为左端(右端).

p	q	$p\equiv q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

等值词(equivalence) 即“等价词”.

双条件词(biconditional) 即“等价词”.

等价式(equivalent form) 见“等价词”.

左端(the left end) 见“等价词”.

右端(the right end) 见“等价词”.

断定号(assertion sign) 一种逻辑语法符号.指由德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)首先引入的符号“$\vdash$”.将断定号加在一命题 p 前,即 $\vdash p$,是指 p 被断言是真的.而美国学者罗塞(Rosser,J. B.)和美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)对此符号的用法作了发展,表达式“$D_1,D_2,\cdots,D_n\vdash E$”表示 E 可从 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 推演出,从而 $\vdash$ 便成了推演号;当 $n=0$,“$\vdash E$”表示 E 是可证的.在一些命题演算和谓词演算系统中,在公理和定理前加上断定号以表示该公式在该系统中是可证的,如一个公式前不加上这个符号则表示这个公式仅仅是被考虑到的.位于推演号前面(或左面)的部分,称为前提.位于推演号后面(或右面)的部分,称为后承.例如,在 $\alpha\vdash\beta$ 中,α 为前提,β 为后承.

推演号(deduction sign) 见“断定号”.

前提(premise) 见“断定号”.

后承(consequence) 见“断定号”.

命题变元(propositional variable) 亦称命题字母、命题符等.命题逻辑的基本概念之一.指命题演算中表示命题的符号.命题逻辑研究的是复合命题的真值与其成分命题的真值之间的逻辑关系,而在命题逻辑中的联结词都是真值联结词,复合命题的真值完全可由其成分命题的真值而确定,所以在命题演算中只须注意命题的真值,而不需考虑这些命题本身的意义.因此命题变元仅保留了命题最基本的逻辑属性——“真”与“假”,它是以真值集$\{T,F\}$为变域的变元.其真值恒为真(T)或恒为假(F)的命题.称为命题常项(或常元).

命题字母(propositional letter) 即“命题变元”.

命题符(propositional symbol) 即“命题变元”.

命题常元(propositional constant) 见“命题变元”.

命题常项(propositional constant) 见“命题变元”.

命题公式(propositional formula) 亦称合式公式.数理逻辑术语.它是按照一定规律形成的符号序列.在命题演算中,公式通常用归纳定义给出.例如,在一个具有五个联结词$\neg,\vee,\wedge,\rightarrow,\equiv$的系统中,合式公式定义如下:

1.命题变元和命题常元是公式.

2.如果 α 是公式,则 $\neg\alpha$ 也是公式.

3.如果 α,β 是公式,则 $\alpha\vee\beta,\alpha\wedge\beta,\alpha\rightarrow\beta,\alpha\equiv\beta$ 均为公式.

4.只有由1~3条给出的才是公式.

因此,根据上述定义,$\neg p$,$(p\rightarrow q)\vee\neg p$ 等是公式,而 $p\neg$,$pq\rightarrow$ 等都不是公式.

表达式(expression) 数理逻辑术语.指有穷长的符号串.公式是表达式,但表达式未必是公式.例如,$p\rightarrow$ 是表达式,但它不是公式,因为它不符合命题公式的组成规则.

命题原子公式(propositional atomic formula) 不含联结词的命题公式.指由单独一个命题变元或命题常元组成的命题公式.如 p,q 等均为原子公式,而 $p\rightarrow q$,$\neg p$ 等均不是原子公式.含有联结词的命题公式.称为命题复合公式.例如 $\neg p$,$p\rightarrow q$,$(p\wedge q)\vee r$ 均为命题的复合公式.

命题复合公式(propositional compound formula) 见“命题原子公式”.

完备联结词集(adequate set of truth functional connectives) 亦称完全联结词集.若干真值联结词组成的集合.指具有下列性质的联结词的集合:对于任给的一个真值表,存在一个仅由该集中联结词构成的命题演算公式,使得该公式所对应的真值表恰为该真值表.$\{\neg,\vee,\wedge\}$,$\{\neg,\vee\}$,$\{\neg,\wedge\}$,$\{\neg\rightarrow\}$等均为完备的联结词集.如果一个联结词集的子集

是完备的，则该集也是完备的．一个完备的联结词集至少要包含几个联结词呢？谢佛（Sheffer，H. M.）曾指出，由一个被称为谢佛竖的联结词组成的集合是完备的联结词集（参见“谢佛竖”）．

完全联结词集（adequate set of truth functional connectives） 即“完备联结词集”．

谢佛竖（Sheffer stroke） 亦称析取否定词．一种联结词．由谢佛（Sheffer，H. M.）于1913年首先定义的一种真值联结词．通常以“|”记之，其定义如右表．$p|q$ 表示“非 p 或非 q”，即 $\neg p \vee \neg q$．按照英国数理逻辑学家罗素（Russell，B. A. W.）在《数学原理》中给出的 p，q 不相容的定义，$p|q$ 表示 p，q 不相容．由单独一个谢佛竖组成的集{|}是完备的联结词集．

p q	$p\|q$
T T	F
T F	T
F T	T
F F	T

析取否定词（negation of disjunction） 即“谢佛竖”．

合取否定词（negation of conjunction） 一种联结词．是谢佛（Sheffer，H. M.）于1913年在定义谢佛竖时同时定义的另一种联结词．以“$\downarrow$”记之，其定义如右表．$p\downarrow q$ 表示“非 p 且非 q”，即“$\neg p \wedge \neg q$”，也就是 p，q 同假．由单独一个析取否定词组成的联结词集{$\downarrow$}是完备的联结词集．

p q	$p\downarrow q$
T T	F
T F	F
F T	F
F F	T

命题演算指派（assignment in propositional calculus） 亦称命题演算的真值指派．简称指派．一种特殊映射．指从全体命题变元集到真值集的一种映射．

命题演算真值指派（truth assignment in propositional calculus） 即“命题演算指派”．

命题公式特异指派（special assignment for a propositional formula） 一种特殊映射．是从某命题公式中出现的命题变元集到真值集的映射．设公式 $\alpha=(p\rightarrow q)\vee r$，$f:\{p,q,r\}\rightarrow\{T,F\}$ 为一映射，使得 $f(p)=T$，$f(q)=F$，$f(r)=T$，则称 f 为公式 α 的一个特异指派．公式的特异指派对公式全部变元都指派以真值，通常用按照变元的某种顺序列出赋予各变元的真值的方法表示．例如，给公式 α 的变元以顺序 p，q，r，则上面的指派为 $f=(T,F,T)$．

命题公式部分指派（partial assignment for a propositional formula） 亦称命题公式的有缺指派．一种特殊映射．是从一命题公式的命题变元集到真值集的部分映射．部分指派可以对某些命题变元不指派真值．例如，设公式 $\alpha=(p\rightarrow q)\vee r$，部分指派 $f=(T,x,F)$ 是指 $f(p)=T$，$f(r)=F$，而对命题变元 q 没有指派真值．

命题公式有缺指派（partial assignment for a propositional formula） 即“命题公式部分指派”．

命题公式加缺指派（relatively partial assignment of a propositional formula） 一种有缺指派．设 f 为一（特异或部分）指派．若 f 为一部分指派 g 的相容扩张，则 g 称为 f 的加缺指派．例如 $f=(F,T,F)$，则 $g=(x,T,F)$ 和 $g'=(x,x,F)$ 均为 f 的加缺指派．前者称为 f 的加一缺指派，后者为加二缺指派，且 g' 亦为 g 的加（一）缺指派．

命题公式成假指派（falsifying assignment of a propositional formula） 一种指派．是使命题公式的真值为 F 的指派．设公式 $\alpha=(p\rightarrow q)\wedge r$．$\alpha$ 对应于指派 (T,F,F) 的真值为 F，这时 (T,F,F) 便称为 α 的成假指派．有缺指派亦可为成假指派．例如，不论指派 p，q 以何真值，只要指派 r 以 F，则 α 的真值为 F，因此 (x,x,F) 为 α 的有缺成假指派．

命题公式成真指派（satisfying assignment of a propositional formula） 一种指派．是使命题公式的真值为真的指派．例如，设公式 $\alpha=(p\rightarrow q)\vee r$．对应于指派 (T,F,T)，α 的真值为 T，所以 (T,F,T) 称为 α 的成真指派．有缺指派亦可为成真指派．例如，不论指派 p，q 以何真值，只要指派 r 以 T，则所对应的公式 α 的真值总为 T，所以 (x,x,T) 为 α 的有缺成真指派．

命题公式饱和成假指派（saturated falsifying assignment of a propositional formula） 一种特殊的成假指派．指其任何加缺指派均不是成假指派的成假指派．设 $\alpha=(p\rightarrow q)\wedge r$．$f=(F,T,F)$ 为 α 的成假指派，但不是饱和成假指派，因为它的加缺指派 $g=(x,x,F)$ 为 α 的成假指派．但 g 为 α 的饱和成假指派，因为 g 的加缺指派 (x,x,x) 不再为 α 的成假指派．

命题公式饱和成真指派（saturated satisfying assignment of a propositional formula） 一种特殊的成真指派．指其任何加缺指派均不是成真指派的成真指派．设 $\alpha=(p\rightarrow q)\wedge r$．$f=(F,T,F)$ 为 α 的成真指派，但不是饱和成真指派，因为它的加缺指派 $g=(F,T,x)$，$g'=(F,x,x)$ 为 α 的成真指派．但 g' 为 α 的饱和成真指派，因为 g' 的加缺指派 (x,x,x) 不再为 α 的成真指派．

命题演算赋值（valuation of propositional calculus） 一种特殊映射．是从全部命题演算公式集到真值集的映射．该映射必须满足下列条件：对任何一个命题公式 α，有一个惟一确定的真值 $\sigma(\alpha)$，并且使得：

1. $\sigma(\neg\alpha)=\underset{\sim}{\neg}\sigma(\alpha)$；

2. $\sigma(\alpha\vee\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\vee}\sigma(\beta)$.

3. $\sigma(\alpha\wedge\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\wedge}\sigma(\beta)$.

4. $\sigma(\alpha\rightarrow\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\rightarrow}\sigma(\beta)$.

5. $\sigma(\alpha\equiv\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\equiv}\sigma(\beta)$.

此处$\underset{\sim}{\neg}$，$\underset{\sim}{\vee}$，$\underset{\sim}{\wedge}$，$\underset{\sim}{\rightarrow}$，$\underset{\sim}{\equiv}$的定义如下：

$\underset{\sim}{\neg}T=F$
$\underset{\sim}{\neg}F=T$；

$T\underset{\sim}{\vee}T=T$
$T\underset{\sim}{\vee}F=T$
$F\underset{\sim}{\vee}T=T$
$F\underset{\sim}{\vee}F=F$；

$T\underset{\sim}{\wedge}T=T$
$T\underset{\sim}{\wedge}F=F$
$F\underset{\sim}{\wedge}T=F$
$F\underset{\sim}{\wedge}F=F$；

$T\underset{\sim}{\rightarrow}T=T$
$T\underset{\sim}{\rightarrow}F=F$
$F\underset{\sim}{\rightarrow}T=T$
$F\underset{\sim}{\rightarrow}F=T$；

$T\underset{\sim}{\equiv}T=T$
$T\underset{\sim}{\equiv}F=F$
$F\underset{\sim}{\equiv}T=F$
$F\underset{\sim}{\equiv}F=T$.

任一赋值 σ 必须给每一个命题变元以一赋值，因而确定了一个指派 A；同时，对任一指派 A，有一惟一确定的赋值 σ 与之对应，使得对所有命题变元 p，有

$$A(p)=\sigma(p).$$

真值表方法(truth table method)　一种求真值的重要方法. 指利用真值表来求命题演算公式真值的方法. 这种方法首先列出公式中所有变元的各种可能的真值组合，即指派，然后遵循由简到繁的原则逐步列出各指派所对应的该公式的子公式的真值，最后列出该公式的真值. 例如，求公式 $\alpha=(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow p)$ 的真值的真值表如下：

$p\ q$	$\neg p\ \neg q$	$\neg p\rightarrow q$	$\neg q\rightarrow p$	α
$T\ T$	$F\ F$	T	T	T
$T\ F$	$F\ T$	T	T	T
$F\ T$	$T\ F$	T	T	T
$F\ F$	$T\ T$	F	F	T

从上表可以发现 α 是永真公式. 真值表方法是命题逻辑语义部分的重要方法，它有许多重要作用，如求成真指派，求成假指派，证明一个公式是永真公式，可满足公式等. 其缺点是对于复杂的公式，用此法工作量太大.

命题可满足公式(satisfiable propositional formula)　一种命题公式. 在某个指派下其值为真的命题公式称为命题的可满足公式. 例如，公式 $p\rightarrow q$ 是可满足公式，因为对于指派(F,T)，该公式的真值为 T. 所有永真公式皆是可满足公式，但可满足公式未必都是永真公式. 上面所给出的可满足公式 $p\rightarrow q$ 就不是永真公式，因为对于指派(T,F)，其真值为 F. 一个永假公式不是可满足的公式.

命题永真公式(valid propositional formula)　亦称重言式. 一种命题公式. 对于任何指派，其真值总是真的命题公式称为命题的永真公式. 例如 $p\vee\neg p$ 是一个永真公式，因为无论给 p 以什么样的真值其总有真值 T. 永真公式反映了命题的逻辑规律. 例如永真公式 $\neg p\vee p$ 反映了排中律，$\neg(\neg p\wedge p)$ 反映了矛盾律等. 永真公式是命题逻辑的研究重点，在一个融贯的命题演算公理系统中推演出的公式都是永真公式(参见“融贯性”).

在命题演算中有一类永真公式，这类公式所表示的直觉意义与人们通常的直觉思维不尽相符，因此被视为“怪论”，称这类命题演算中的永真公式为蕴涵怪论. 如公式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 是一蕴涵怪论，它是永真公式，而它反映的逻辑规律“如果 p，则 q 蕴涵 p”不符合人们日常的思维方式. 对于蕴涵怪论的态度有多种. 有人认为它既然是永真公式，就应将它与其他永真公式一样对待，甚至有人将一些蕴涵怪论，如 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 作为公理. 有人则不承认蕴涵怪论，设法在命题演算系统中避免它们的出现. 有的认为蕴涵怪论也是永真公式，只要将它们与其他永真公式区别开就可以了. 中国数理逻辑学家莫绍揆在 20 世纪 50 年代初建立的一个命题演算系统就能很好地区别蕴涵怪论和其他永真公式.

反映命题演算规律永真的等价式称为命题演算的运算律. 例如，设 α,β 为命题，$(\alpha\vee\beta)\equiv(\beta\vee\alpha)$ 反映了真值联结词“$\vee$”运算的交换律. 主要的命题演算的运算律有交换律，结合律，分配律，德·摩根律等. 命题演算的运算律与命题演算的系统有关，不同的系统可有不同的运算律. 例如，双否律$(\neg\neg\alpha)\equiv\alpha$ 在古典系统中成立，但在直觉主义系统中就不成立. 正确地使用运算律能使公式得以简化并更深刻地揭示这些公式所反映的逻辑规律.

蕴涵怪论(implication paradox)　见“命题永真公式”.

命题演算的运算律(the operational laws of propositional calculus)　见“命题永真公式”.

命题永假公式(falsehood propositional formula)　亦称不可满足公式、矛盾式等. 一种命题公式. 对于任何指派其真值总是假的命题公式称为命题的永假公式. 例如 $\neg p\wedge p$ 是一个永假公式. 一个公式 α 是永假的当且仅当 $\neg\alpha$ 是永真的.

德·摩根律(De Morgan law)　一种运算律. 该运算律由两个公式组成，两公式均含否定词：

1. $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p\wedge\neg q)$.

2. $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p\vee\neg q)$.

命题演算的德·摩根律可从类逻辑的德·摩根

律演变过来.类逻辑的德·摩根律虽然以英国数学家德·摩根(De Morgan,A.)的名字命名,但实际上该运算律在中世纪就很著名,只是后来又被德·摩根重新发现.直觉主义逻辑并不完全承认德·摩根律,他们不承认$\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p\vee\neg q)$.

排中律(law of excluded middle) 逻辑学的重要定律.在命题演算中反映排中律的公式为$p\vee\neg p$.正如在逻辑中不同学派对排中律采取不同态度一样,在各种不同的命题演算系统中,对公式$p\vee\neg p$的态度也不一样.在古典的命题演算系统中$p\vee\neg p$是一条定理,而在直觉主义和构造主义系统中$p\vee\neg p$不再是一条定理.

范式(normal form) 在命题演算和谓词演算中具有某种标准形式的公式.每个命题演算或谓词演算的公式均有无穷多个与之等值的公式.这无穷多个公式中,有一类具有特殊形式的公式能更清楚地显示这些互相等值的公式所反映的逻辑规律,将这类公式称为该公式的范式.在命题演算中有合析范式,析合范式等.在谓词演算中有前束范式,∃前束范式(参见"斯科朗范式")等.范式在理论证明和电路设计中有很重要的作用.

简单析取式(simple disjunctive formula) 一类析取式.是含有一个变元及其否定的析取式.它的每一个析取项或是一个命题变元,或是一个命题变元的否定.$p,\neg p,\neg p\vee q,\neg p\vee\neg q\vee p$等均为简单析取式.简单析取式的重要特点是其成假指派很容易找出,且它的真性也容易判定.一个简单析取式是永真的,当且仅当该公式至少含有一个变元及其否定.例如$\neg p\vee q\vee p$是永真公式,因它它含有p与p的否定$\neg p$.而公式$\neg p\vee q$非永真.当人们指派p以T,q以F,该公式的真值为F.

简单合取式(simple conjunctive formula) 一类合取式.是含有一个变元及其否定的合取式.每一个合取项或为命题变元,或为命题变元的否定的合取式.$p,\neg p,\neg p\wedge q,\neg p\wedge\neg q\wedge p$等均为简单合取式.简单合取式的重要特点是它的成真指派很容易找到,且它的永假性也容易判定.一个简单合取式是永假的,当且仅当它至少含一个变元及其否定.如公式$\neg p\wedge\neg q\wedge q$是永假的,因为它含有命题变元$q$及$q$的否定$\neg q$.而公式$\neg p\wedge q$不是永假的,当指派$p$以$F$,$q$以$T$时,该公式有真值$T$.

析合范式(disjunctive normal form) 亦称析取范式.一种析取式.是若干简单合取式的析取式.如$p,\neg p,\neg p\vee q,(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$均为析合范式.析合范式的重要特征是它的成真指派集是各析取项的成真指派的并集.由于它的各析取式是简单合取式,它的成真指派集很容易找到.

析取范式(disjunctive normal form) 即"析合范式".

合析范式(conjunctive normal form) 亦称合取范式.一种合取式.是简单析取式和简单析取式的合取式.如$p,\neg p,\neg p\wedge q,\neg p\vee q,(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$等均为合析范式.合析范式的重要特征是它的成假指派集是各合取项的成假指派集的并集.由于它的合取项均为简单析取式,它的成假指派集很容易找到.

合取范式(conjunctive normal form) 即"合析范式".

优析合范式(superior disjunctive normal form) 规范表示的析合范式.指具有下列特征的析合范式:

1.如果某个命题变元在范式中出现,则该变元要在该范式的每一个简单合取式中都出现.

2.范式中没有永假的简单合取式.

3.在该范式中没有相同的简单合取式,在每一个简单合取式中没有相同的合取项.

4.根据事先给定的所有命题变元及其否定的排列顺序,所有简单合取式和每一个简单合取式中的每一个合取项均按字典顺序排列.

例如,$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$为一优析合范式.而$(p\wedge q)\vee(\neg q\vee r),p\wedge\neg p\wedge q,p\wedge p\wedge\neg q$等都不是优析合范式.每一个命题演算公式均有惟一一个与之等值的优析合范式.

优合析范式(superior conjunctive normal form) 规范表示的合析范式.指具有下列特征的合析范式:

1.如果某个命题变元在范式中出现,则该变元要在该范式的每一个简单析取式中都出现.

2.没有永真的简单析取项.

3.在该范式中没有相同的简单析取式,在每一个简单析取式中没有相同的析取项.

4.根据事先给定的所有命题变元及其否定的顺序,所有简单析取式和每一个简单析取式中的每一个析取项均按字典顺序排列.

例如,$(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$为一优合析范式.而$(p\vee\neg q)\wedge p,p\vee\neg p\vee q,(p\vee\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$等都不是优析合范式.每一个命题演算公式均有惟一一个与之等值的优合析范式.

命题演算的范式存在定理(existence theorem of normal form in propositional calculus) 命题演算的基本定理之一.每一个命题演算公式都有与之等值的合析范式和析合范式.范式定理的证明是"能行的",即它的证明不仅证明了范式的存在性,而且给出了求范式的方法.

命题公式的特异析合范式(special disjunctive normal form of a propositional formula) 一种特殊的析合范式.指根据一个命题公式的特异成真指

派集做出的析合范式. 设 $\alpha=(p\to q)\wedge r$. 其特异成真指派集为 $\{(T,T,T),(F,T,T),(F,F,T)\}$. 由此集做出一范式 $\alpha'=\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3$,其中 β_1,β_2,β_3 为分别对应于该特异指派集中各指派的简单合取式. 做出这些简单合取式的规律是若指派变元 S 以 T,则对应的简单合取式中含有 S,否则含有 $\neg S$. 根据此规律,便得到 $\alpha'=(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$. α' 为 α 的特异析合范式.

命题公式的特异合析范式(special conjunctive normal form of a propositional formula) 一种特殊的合析范式. 指根据一个命题公式的特异成假指派集做出的合析范式. 设 $\alpha=(p\to q)\wedge r$. 其特异成假指派集为 $\{(T,T,F),(T,F,T),(T,F,F),(F,T,F),(F,F,F)\}$. 由此集做出一范式 $\alpha'=\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3\wedge\beta_4\wedge\beta_5$,其中 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 为分别对应于该特异成假指派集中各指派的简单析取式. 做出这些简单析取式的规律是:若指派变元 S 以 T,则对应的简单析取式含有 $\neg S$,否则含有 S. 根据此规律,便得到 $\alpha'=(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)$. α' 为 α 的特异合析范式.

命题公式的饱和合析范式(saturated conjunctive normal form of a propositional formula) 一种特殊的合析范式,指根据一命题公式的饱和成假指派集做出的合析范式. 设 $\alpha=(p\to q)\wedge r$. α 的饱和成假指派集 $=\{(T,F,X),(X,X,F)\}$,由此集做出一范式 $\alpha'=\beta_1\wedge\beta_2$,其中 β_1,β_2 为简单析取式,β_1 根据指派 (T,F,X) 做出,β_2 根据指派 (X,X,F) 做出. 其规律为:若指派某变元 S 以 T,则对应的简单析取式中含有 $\neg S$;若指派 S 以 F,则对应的简单析取式中含有 S;若对 S 没有指派,则在对应的简单析取式中 S 不出现. 根据这规律 $\beta_1=\neg p\vee q$,$\beta_2=r$,α 的一个饱和合析范式为 $\alpha'=(\neg p\vee q)\wedge r$.

命题公式的饱和析合范式(saturated disjunctive normal form of a propositional formula) 一种特殊的析合范式. 指根据一个命题公式的饱和成真指派集做出的析合范式. 设 $\alpha=(p\to q)\vee r$. α 的饱和成真指派集 $=\{(F,X,X),(X,T,X),(X,X,T)\}$. 由此集做出一个范式 $\alpha'=\beta_1\vee\beta_2\vee\beta_3$. 其中 β_1,β_2,β_3 为分别对应于此集合中三个指派的简单合析式. 做出这些简单合取式的规律为:若指派 S 以 T,则在对应的简单合取式中含有 S;若指派 S 以 F,则对应的简单合取式中有 $\neg S$;若对 S 没有指派,则在对应的简单合取式中 S 不出现. 根据些规律,$\beta_1=\neg p$,$\beta_2=q$,$\beta_3=r$,α 的一饱和析合范式为

$$\alpha'=\neg p\vee q\vee r.$$

命题演算分离规则(modus ponens in a propositional calculus) 一种推演规则. 指在命题演算和谓词演算形式的公理系统中广泛使用的推演规则. 此规则的符号表示为 $\alpha,\alpha\to\beta,\vdash\beta$,即从 $\alpha,\alpha\to\beta$ 可推演出 β. 此规则的逻辑意义是如果一个蕴涵式及其前件均为逻辑真的,则它的后件也是逻辑真的. 分离规则保持了永真性,即如果 $\alpha,\alpha\to\beta$ 是永真的,则 β 也是永真的.

推理定理(deduction theorem) 亦称推演定理、演绎定理. 说明形式系统推演规律的一个定理. 该定理断言:设 Γ 为公式集,α,β 为公式,若 $\Gamma:\alpha\vdash\beta$,则有 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$. 推理定理的作用在于消去假设. 如果由假设 Γ,α 可以推出 β,则消去假设 α,可以由 Γ 推出 $\alpha\to\beta$. 在自然推理系统中推理定理是消去假设的依据.

命题逻辑(propositional logic) 符号逻辑的一部分. 在命题逻辑中研究的是由命题经联结词而构成的复杂命题的规律以及它们之间的逻辑关系. 命题逻辑的形式系统称为命题演算. 一个命题演算. 即命题逻辑的形式系统由以下几部分组成:

1. 组成部分:

1) 原始符号. 其中包括命题变元的符号及命题联结词的符号.

2) 形成规则. 其中包括公式的定义.

2. 推理部分(又称变形部分):

1) 公理. 不同系统有不同的公理,但所有命题演算的公理均为命题逻辑的重言式.

2) 推理规则,即从公理推导出定理的规则. 不同的系统有不同的规则,但大多数命题演算中有分离规则.

命题演算(propositional calculus) 见"命题逻辑".

希尔伯特-贝尔奈斯命题演算系统(Hilbert-Bernays' system of propositional calculus) 一种简明的命题演算系统. 由德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)和德国学者贝尔奈斯(Bernays,P.)在1934年出版的《数学的基础》一书中提出的命题演算系统. 该系统有五个基本联结词:"→"(蕴涵),"&"(合取)"∨"(析取),"~"(等价),"¯"(否定). 该系统与其他系统不同的显著特征是其公理按五个基本联结词分成五组. 每组有三条公理,它刻画了一个基本联结词的特征. 各组公理是相对独立的,就是说,仅含某几种联结词的定理公式可由与其对应的几组公理推导出. 该系统的公理如下:

1. 关于蕴涵词:

1) $A\to(B\to A)$.

2) $(A\to(A\to B))\to(A\to B)$.

3) $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$.

2. 关于合取词:

1) $A\ \&\ B\to A$.

2）$A\&B\to B$.

3）$(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\&C))$.

3. 关于析取词：

1）$A\to A\vee B$.

2）$B\to A\vee B$.

3）$(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$.

4. 关于等价词：

1）$(A\sim B)\to(A\to B)$.

2）$(A\sim B)\to(B\to A)$.

3）$(A\to B)\to((B\to A)\to(A\sim B))$.

5. 关于否定词：

1）$(A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A})$.

2）$A\to\overline{\overline{A}}$.

3）$\overline{\overline{A}}\to A$.

希尔伯特-贝尔奈斯系统的公理意义很直观，便于推导．正因为如此，它广泛地被采用，是一个影响很大的系统．

罗素-怀特海命题演算公理系统（Russel and Whitehead axiomatic system of propositional calculus） 一种重要的命题演算公理系统．是由英国数理逻辑学家罗素（Russell，B. A. W.）和英国逻辑学家、数学家怀特海（Whitehead，A. N.）在《数学原理》一书中给出的命题演算公理化的形式系统．该系统中只有否定词和析取词两个命题联结词作为初始联结词，合取词和蕴涵词都是被定义的概念．且该系统有 7 条原始命题，其中 1 条为定义，其余 6 条为公理．和意大利数学家、逻辑学家佩亚诺（Peano，G.）一样，罗素和怀特海在一个命题后加上符号“P_p”表示该命题为原始命题．这 7 条原始命题为：

1. $p\supset q\cdot=\cdot\sim p\vee q$ 　蕴涵定义．
2. 被一真初始命题蕴涵的任何命题为真．
3. $\vdash:p\vee p\cdot\supset\cdot p$ 　重言式原理．
4. $\vdash:q\cdot\supset\cdot p\vee q$ 　添加原理．
5. $\vdash:p\vee q\cdot\supset\cdot q\vee r$ 交换原理．
6. $\vdash:p\vee(q\vee r)\cdot\supset\cdot q\vee(p\vee r)$ 　结合原理．
7. $\vdash:q\supset r\cdot\supset:p\vee q\cdot\supset\cdot p\vee r$ 　附加原理．

根据罗素的定义，初始命题就是不包含任何变元的命题，它表示由感官得知的东西，像“太阳是明亮的”，“坎加罗住在澳大利亚”等．在罗素和怀特海的系统中有两条演绎规则：

1. 分离规则．
2. 代入规则．

尼科德（Nicod，J.）在他的论文“原始命题数的减少”中证明了罗素和怀特海系统中的 6 条公理不是独立的．但尽管如此，罗素和怀特海的系统仍是一个十分重要的命题演算系统，它对后来建立的许多命题演算系统都有很大影响，罗素和怀特海所建立的符号至今仍被广泛采用着．

尼科德命题演算公理系统（Nicod axiomatic system of propositional calculus） 一种命题演算公理系统．该系统的显著特征是只含谢佛竖“|”一个联结词和一条公理：

$$p|(q|r)\cdot|:\cdot t|(t|t)\cdot|:(s|q).$$

推演规则为：从$\vdash A$ 和 $A|(C|B)$可得$\vdash B$. 如果用通常的联结词符号表示，此规则为

$$A,A\to(C\wedge B)\vdash B.$$

该系统是由尼科德（Nicod，J.）于 1916 年建立的．它具有一定的理论研究价值，但它的直觉解释较难理解，证明定理的方法较复杂，不易掌握，因此在实际中很少有人采用．

公理的完备性（completeness of axioms） 亦称公理的完全性．公理系统的重要性质之一．有三种类型的完备性：

1. 相对完备性．一个理论的公理系统是完备的，是指该公理系统能将该理论中所有定理推出，即若一个公式是该理论的定理，则该公式也是该系统中的定理．

2. 绝对完备性．一个公理系统是完备的，是指若将该系统中任何非定理的公式作为新公理加入该系统，则所得的新系统是（语法）不协调的．

3. 古典完备性定义．一个公理系统是完备的，是指对任何一个没有变元的闭公式 α，α 与 $\neg\alpha$ 中必定有一个为该系统的定理．

命题演算的完备性（completeness of propositional calculus） 命题演算公理系统的一个重要性质．古典命题演算公理系统均具有相对（语义）的和绝对（语法）的完备性．按照克里普克（Kripke，S. A.）对直觉主义逻辑的公理系统的语义解释，直觉主义命题演算公理系统具有相对（语义）的完备性．但由于直觉主义命题演算公理系统是古典命题演算公理系统的真子系统，所以它不可能具有绝对（语法）的完备性．

公理的协调性（consistency of axioms） 亦称公理的相容性、和谐性、不矛盾性．公理系统的重要性质之一．有三种类型的协调性：

1. 古典协调性．一个公理系统是协调的，是指不存在任何公式 α，使得 α，$\neg\alpha$ 均为该系统的定理．

2. 语法协调性．一个公理系统是协调的，是指并非任一公式 α 均在该系统内可证．

3. 语义协调性．一个公理系统是协调的，是指一切在系统内可证的公式都是永真的．语义的相容性又称可靠性，有效性．

公理的相容性（consistency of axioms） 即“公理的协调性”．

命题演算系统的协调性(consistency of a propositional calculus system) 命题演算公理系统的一个重要性质.命题演算系统均具(古典的,语法的,语义的)协调性.因为命题演算公理系统的公理都是永真的,而其推理规则(如分离规则)保持永真性,所以推演出的定理也是永真的,即命题演算公理系统具有语义的协调性.对于任一个公式 α,若 α 是定理,则 α 是永真的,$\neg\alpha$ 是永假的,所以 $\neg\alpha$ 不可能也是定理,因而并非所有公式均为定理(即可证的),故命题演算系统具有古典的和语法的协调性.

公理的独立性(independence of axioms) 公理系统的重要性质之一.如果一个公理系统中某条公理在该系统中可由其他公理推出,则称该系统中的公理不是独立的,否则称是独立的,即该系统具有公理的独立性.具有公理独立性的系统是较简明的系统.大多数公理系统具有公理独立性,但也有一些系统不具有此性质.德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)开始构造的谓词演算系统中的九条公理互相不独立.后来他改进了他的系统,将公理减为六条,但这六条中仍有三条公理可用其中一条来代替.

个体(individual) 一阶逻辑的概念之一.指独立存在于客观世界的事物.个体可以是具体的,也可以是抽象的,它们可以用专有名词来指称.在命题中,个体是作为主词出现的.抽象的事物如"实数集中的实数","罗素类型论中的类型"是个体,具体的事物如"五台山"、"长江大桥"、"熊猫"等也是个体.

在一个逻辑系统中,所有的个体组成的集合,称为个体域,亦称论域.以个体域为其变域的变元,称为个体变元,通常用字母,如 $x,y,z,\cdots$ 等来表示.个体变元不是专指某一个个体,而是表示某类个体中的一个.表示特定的个体的符号,称为个体常元,通常用字母,如 $a,b,c,\cdots$ 或 $x^0,y^0,z^0,\cdots$ 来表示.例如,可用 x^0 表示北京.个体常元表示的值不能变化.

个体域(individual universe) 见"个体".

论域(universe of discourse) 见"个体".

个体变元(individual variable) 见"个体".

个体常元(individual constant) 见"个体".

谓词(predicate) 一种映射.以个体域为定义域.真假值为值域的映射.谓词描述个体的性质以及它们之间的关系,它是谓词演算中研究的基本对象之一.在命题"2 是偶数"中,"……是偶数"是谓词.若用符号 $A(\quad)$ 表示此谓词,则 $A(2)$ 为命题"2 是偶数"."="(等于)也是一个谓词,称逻辑谓词,且是谓词演算中惟一的逻辑谓词;其他谓词均被称为非逻辑谓词.根据谓词所含变元个数的多少,谓词还可分为零元谓词、一元谓词、二元谓词等.零元谓词通常是指命题常元.上面所说的谓词 A 是一元谓词,"="是二元谓词.

一元谓词演算中除谓词"="(等于)以外的所有谓词统称为非逻辑谓词.以谓词为变域的变元,称谓词变元,通常用字母来表示,故又称"谓词字母".谓词变元一般都被指明是几元谓词变元,即指明它具有几个空位.在谓词后面的空位中填以项所得的式子为谓词填式.在谓词后面的空位中填以不同变元所得的式子为谓词命名式.

逻辑谓词(logical predicate) 见"谓词".

非逻辑谓词(non-logical predicate) 见"谓词".

谓词变元(predicate variable) 见"谓词".

谓词填式(stuffed form of a predicate) 见"谓词".

谓词命名式(name form of a predicate) 见"谓词".

函词(function) 亦称函数.一种映射.指以个体域为定义域和值域的映射.设 $F(x)$ 表示"x 的父亲",$S(x,y)$ 表示"x 和 y 之和",则 F,S 都是函词.根据函词中所含变元个数的多少,函词可分为零元函词、一元函词、二元函词等.通常将个体看做是零元函词.上面所说的函词 F 是一元函词,S 是二元函词.以函数为变域的变元,称为函词变元,即函数字母,通常用字母来表示.函词变元通常被指明是几元函词变元,即指明它具有几个空位.形如 $I_{mn}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=x_n$ 的个体函词($m\geqslant n>0$)称为投影函词,又称广义幺函词.在函词后面的空位中填以项所得的式子为函词填式.在函词后面的空位中填以不同变元所得的式子称为函词命名式.

函词变元(function letter) 见"函词".

投影函词(projection function) 见"函词".

函词填式(stuffed form of a function) 见"函词".

函词命名式(name form of a function) 见"函词".

量词(quantifier) 逻辑演算的基本概念之一.数理逻辑语言的一种符号,是全称量词与存在量词的统称,也是命题演算与谓词演算的区别所在,在命题演算中不研究量词,而谓词演算研究量词.量词是德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)首先引进的.

全称量词(universal quantifier) 数理逻辑语言的一种符号.是表示数量概念的一种逻辑词.通常用符号$(\forall x)$,(x),$\prod x$ 等来表示,读做"对任何 x 都……",它表示当 x 取(论域中)任何一值时受其作用的命题均为真.例如$(\forall x)[x>0]$表示"所有 x 均大于 0".

存在量词(existential quantifier) 数理逻辑语

言的一种符号.是表示数量概念的一种逻辑词.通常用符号$(\exists x)$,(Ex),Σx等来表示,读做“存在x使得……”,它表示存在一个(论域中的)x使得受其作用的命题为真.例如,$(\exists x)[x>0]$表示“有一个x使得$x>0$”.

量词指导变元(operating variables of a quantifier) 亦称量词作用变元.一种变元.指受量词作用的变元.例如,在量词$(\exists x)$和$(\forall x)$中x为指导变元.

量词作用变元(operating variables of a quantifier) 即“量词指导变元”.

逻辑运算子(logical operator) 亦称逻辑词.命题联结词和量词的统称.

逻辑词(logical operator) 即“逻辑运算子”.

出现(occurrence) 数理逻辑术语.指一个变元或一个子式在表达式中的存在形式.一表达式α在另一表达式β中有一个出现,是指存在表达式γ_1,γ_2,使得$\beta=\gamma_1\alpha\gamma_2$.一个表达式可以在另一表达式中有多于一个的出现.例如,设$\beta=(\gamma\vee\alpha)\rightarrow\alpha$,表达式$\alpha$在$\beta$中有两个出现.

辖域(scope) 数理逻辑术语.指逻辑运算子的作用范围.辖域的定义如下:

1.一元运算子.如“$\neg$”,“$(\forall x)$”,“$(\exists x)$”的辖域是紧跟其后的一对括号元内的部分.

2.二元运算子.如“$\rightarrow$”,“&”,“$\vee$”的辖域是左右两个表达式.它们的右辖域是与其紧相邻的左面一对括号内的部分,它们的右辖域是与其紧相邻的右面一对括号内的部分.

例如,公式$\neg((x>0)\&(y=1))$中“$\neg$”的辖域是$(x>0)\&(y=1)$,而“&”的辖域有两个,左辖域是$x>0$,右辖域为$y=1$.

约束出现(bound occurrence) 变元在公式中的一种出现.一个变元x在一个公式φ中的约束出现是指存在一个φ的子公式ψ,使得ψ是以量词$(\forall x)$或$(\exists x)$开头,并且x在该量词的辖域中.例如,在公式$(\forall x)[x^2>y]$中,x是约束出现,也可称x在该公式中的出现是约束的.

自由出现(free occurrence) 变元非约束的出现.一个变元在一公式中的出现如果不是约束的,则称该变元在该公式中为自由出现.例如,在公式$(\forall x)[x^2>y]$中,y的出现是自由的.

约束变元(bound variable) 一种变元.指在一个公式中约束出现的变元.约束变元的一个重要特征是,尽管它们的取值不定,但如果其所在公式没有自由变元,这个公式的真值是确定的.例如,在公式$(\forall x)[x>0]$中,x是约束变元,尽管人们不给x取定某值,但仍可确定该公式在实数域上的值为假.

自由变元(free variable) 一种变元.指在一个公式中自由出现的变元.自由变元的一个重要特征是其值不取定,则所在公式的值也不确定.例如,在公式$(\forall x)[x^2>y]$中,y为自由变元,若y取值-1,则该公式值为真,若y取值1,则该公式值为假.

项(term) 谓词演算公式的基本组成部分.项的归纳定义如下:

1.每一个个体常元、个体变元是项;

2.如果F是$n(n\geqslant 1)$元函词,$t_1,t_2,\cdots,t_n$是项,则$F(t_1,t_2,\cdots,t_n)$也是项;

3.只有根据1,2给出的表达式才是项.

根据上面的定义,个体常元c是项,个体变元x是项.若F是二元函词,则$F(x,c)$也是项.

公式(formula) 数理逻辑术语.指具有一定形式的表达式.其归纳定义如下:

1.原子公式是公式.

2.如果α,β是公式,则$\neg\alpha,\alpha\vee\beta,\alpha\wedge\beta,\alpha\equiv\beta$是公式.

3.如果x是个体变元,α是公式,则$(\forall x)\alpha$,$(\exists x)\alpha$均是公式.

4.只有根据1,2,3给出的表达式才是公式.

含有自由变元的公式称为开公式.例如,设R为二元谓词,公式$(\exists x)R(x,y)$含有自由变元y为开公式.不含自由个体变元的公式称为闭公式或语句.例如,设R为二元谓词,则公式$(\exists x)(\exists y)R(x,y)$是闭公式.

开公式(open formula) 见“公式”.

闭公式(closed formula) 见“公式”.

语句(sentence) 见“公式”.

原子公式(atomic formula) 一种基本公式.谓词演算的原子公式是形如$R(t_1,t_2,\cdots,t_n)(n\geqslant 0)$的表达式,此处$R$是上一个$n$元谓词或谓词变元,$t_1,t_2,\cdots,t_n$是项.因为命题常元、命题变元是零元谓词,所以它们都是原子公式.

正语句(positive sentence) 一阶逻辑的一种语句.指由原子公式及联结语$\wedge,\vee,\forall,\exists$构成的语句.

谓词演算公式的闭包(closure of a formula in predicate calculus) 一种闭公式.设α为一谓词演算公式,$x_1,x_2,\cdots,x_n$为α中所有的自由变元,则公式$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)\alpha$称为$\alpha$的闭包.

全称封闭式(universal closure) 一种闭公式.是用全称量词约束给定公式所有自由变元所得的闭公式.设公式α中含有n个自由的个体变元$x_1,x_2,\cdots,x_n$,则公式$(\forall x_n)\cdots(\forall x_2)(\forall x_1)\alpha$称为$\alpha$的全称封闭式,以符号$\Delta\alpha$记之.一个公式是永真的,当且仅当它的全称封闭式是永真的.

存在封闭式(existential closure) 一种闭公式.是用存在量词约束给定公式的所有自由变元所

得的闭公式.设公式 α 含有 n 个自由的个体变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则公式 $(\exists x_n)\cdots(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha$ 称为 α 的存在封闭式.一个公式是不可满足的,当且仅当它的存在封闭式是不可满足的.

代入(substitution) 谓词演算的基本运算之一.设 φ 是一个谓词演算公式,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 φ 中的(未必全部)自由变元,$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 n 个项,则用项 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 分别代替 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 φ 中所有出现的运算,称为用 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 代入 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.其结果式用符号

$$\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \end{pmatrix},$$

$$\varphi\left(\frac{t_1}{x_1},\frac{t_2}{x_2},\cdots,\frac{t_n}{x_n}\right) \text{或} \varphi\frac{t_1,t_2,\cdots,t_n}{x_1,x_2,\cdots,x_n}$$

记之.例如,$\varphi(x,y,z)\equiv R(x,y)\vee T(y,z)$,$t=x^2$,则

$$\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}\varphi=\begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}\varphi=R(x,x^2)\vee T(x^2,z).$$

代入的一个重要特征是,代入必须是处处代入,即用一个项 t 代入一个自由变元 x,必须用 t 代替 x 在公式中所有的自由出现.

谓词变元代入规则(substitution rule for predicate variables) 谓词(和函词变元)公式等价变换的规则之一.先将大小代入式都改名(参见"改名"),使得大小代入式的约束变元与对方的一切变元(自由或约束)都不相同,然后做出小代入式的相应填式,再把这些填式代入到代入变元的相应填式处.例如,要在公式 $(\forall x)[A\,xz\to Bx]$(此处 A,B 均为谓词)中把 $\alpha(e_1,e_2,x)$ 代入 A_{e_1,e_2},根据上述原则,先将大代入式改名,得 $(\forall u)[A\,uz\to Bu]$,然后将小代入式 $\alpha(e_1,e_2,x)$ 代入得 $(\forall u)[\alpha(u,z,x)\to Bu]$.

函词变元代入规则(substitution rule for functional variables) 见"谓词变元代入规则".

改名(change of bound variables) 谓词演算的基本运算之一.在一个公式中将一个约束变元改为另一个约束变元的运算.正确的改名不改变公式的真值.例如,可将公式 $(\exists x)[x^2<y]$ 中的约束变元 x 改为 z,得 $(\exists z)[z^2>y]$.所得公式与原公式是等价的.

改名规则(rule for change of bound variables) 改名遵循的原则.该规则要求公式中约束变元改名后真值不变.如果一个公式 α 中没有变元 y 的任何出现(自由或约束出现),当把 α 中一切 x 的自由出现改为 y 的自由出现,其结果记为 β,则永有

$$(\forall x)\alpha\equiv(\forall y)\beta,\ (\exists x)\alpha\equiv(\exists y)\beta.$$

替换(replacement) 亦称置换.谓词演算的一种语法运算.设表达式 α 在表达式 β 中有一个出现,则由表达式 γ 代替表达式 α 在 β 中的这一出现的运算称为替换.替换结果可用符号

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}\beta$$

记之.例如,在公式 $\beta=(\gamma\vee\alpha)\to\alpha$ 中,用 γ 分别替换 α 在 β 中的第一个出现和第二个出现的结果分别为 $(\gamma\vee\gamma)\to\alpha$ 和 $(\gamma\vee\alpha)\to\gamma$.

谓词演算替换定理(replacement theorem in a predicate calculus) 谓词演算的重要定理之一.该定理断言:谓词公式中的某个子公式被与其等价的公式代换,其真值不变.设 α,β,γ 均为谓词演算公式.α,β 中仅含自由的个体变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,β 在 γ 中有一个出现,则从 $\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv\beta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可得

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\gamma\equiv\gamma.$$

前束范式(prenex normal form) 亦称前束式.一种谓词演算公式.指其一切量词都未被否定地处于公式的最前端且其辖域都延伸至公式的末端的谓词演算公式.设 $Q\in\{\exists,\forall\}$,一个公式 α 是前束范式,当且仅当存在一个不含量词的公式 β,使得

$$\alpha=(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)\beta.$$

例如,公式 $(\forall x)[F(x)\to G(x)]$ 为一个前束范式,而 $(\forall x)[F(x)\vee G(x)]\to(\exists y)R(y)$ 不是前束范式.与一个谓词演算公式等价的前束范式公式称为谓词演算公式的前束范式.例如,公式 $p\to(\forall x)\alpha(x)$ 的前束范式为 $(\forall x)[p\to\alpha(x)]$,此处 p 为一个命题变元.其所有存在量词都在全称量词的前面出现的前束范式称为斯科朗范式,又称∃前束范式.一个公式 α 是斯科朗范式,当且仅当存在一个不含量词的公式 β,使得

$$\alpha=(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_m)(\forall x_1)\cdot(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)\beta(m\geqslant 0,n\geqslant 0).$$

例如,公式 p,$(\forall x)[F(x,y)]$,$(\exists x)(\forall y)[F(x,y)]$ 为斯科朗范式.

斯科朗范式(Skolem normal form) 见"前束范式".

前束范式存在定理(existence theorem of prenex normal form) 谓词演算的重要定理之一.该定理断言:谓词演算的每一个公式都有与之等价的前束范式.前束范式存在定理的证明是能行的,即证明本身给出了求公式前束范式的步骤.但是,一个公式的前束范式不具有惟一性.

谓词演算在个体域上的指派(assignment of a predicate calculus over an individual domain) 一种映射.指谓词演算形式系统的语义解释.个体域 I 上的指派是满足下列条件的映射 σ:

1. 对每一个命题变元 p,$\sigma(p)\in\{T,F\}$.
2. 对每一个个体变元 x,$\sigma(x)\in I$.

3. 对每一个谓词变元 R，$\sigma(R)$ 为 I 上的一个具体的 n 元谓词.

4. 对每一个函词变元 F，$\sigma(F)$ 为 I 上的一具体的 n 元函词.

谓词演算公式在个体域上的指派(assignment of formula in a predicate calculus over an individual domain) 一种映射. 指局限于公式中符号的指派. 设谓词演算公式 α 中含有自由的个体变元 $x_1,x_2,\cdots,x_m$；命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$；谓词变元 $R_1,R_2,\cdots,R_j$；函词变元 $F_1,F_2,\cdots,F_k$. 公式 α 在个体域 I 上的指派是满足下列条件的映射 σ：

1. $\sigma(x_i)\in I\ (i=1,2,\cdots,m)$.

2. $\sigma(p_i)\in\{T,F\}\ (i=1,2,\cdots,n)$.

3. $\sigma(R_i)$ 为 I 上的一个具体的 n_i 元谓词($i=1,2,\cdots,j$).

4. $\sigma(F_i)$ 为 I 上的一个具体的 n_i 元函词($i=1,2,\cdots,k$).

谓词演算赋值(valuation in a predicate calculus) 满足一定条件的指派. 它是从全体谓词演算公式集到真值集的映射 σ(设 α,β 为任意两个谓词演算公式)，该映射 σ 必须满足下列条件：

1. $\sigma(\neg\alpha)=\underset{\sim}{\neg}\sigma(\alpha)$.

2. $\sigma(\alpha\vee\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\vee}\sigma(\beta)$.

3. $\sigma(\alpha\wedge\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\wedge}\sigma(\beta)$.

4. $\sigma(\alpha\rightarrow\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\rightarrow}\sigma(\beta)$.

5. $\sigma(\alpha\equiv\beta)=\sigma(\alpha)\underset{\sim}{\equiv}\sigma(\beta)$.

此处 $\underset{\sim}{\neg}$，$\underset{\sim}{\vee}$，$\underset{\sim}{\wedge}$，$\underset{\sim}{\equiv}$ 的定义与命题演算赋值中的这些符号的定义相同.

6. 如果对任一个 x，在 I 上的取值 $\alpha(x)$ 为真，则 $(\forall x)\alpha(x)=T$，否则 $(\forall x)\alpha(x)=F$.

7. 如果对某个 x，在 I 上的取值 $\alpha(x)$ 为真，则 $(\exists x)\alpha(x)=T$，否则 $(\exists x)\alpha(x)=F$.

个体域上的可满足公式(satisfiable formula over an individual domain) 一类基本公式. 指对于个体域上某个指派的值为真的公式. 例如，α 为公式 $(\exists x)[x>y]$，$I_1=\{1\}$，$I_2=\{1,2\}$. α 在 I_2 上是可满足的，因为对于指派 y 以 1，α 的值为真. 但 α 在个体域 I_1 上不是可满足的，因为对于 y 的任何 I_1 上的指派(实际上只有一种指派，即指派 y 以 1)，α 的值均为假. 由此可见谓词演算公式的可满足性与个体域有关.

个体域上的永真公式(valid formula over an individual domain) 一类基本公式. 指对于个体域 I 上的任一指派的值均为真的公式. 例如，α 为公式 $(\exists x)[x>y]$，I 为自然数域，则 α 是 I 上的永真公式，因为无论指派 y 以什么样的自然数，总存在 $x>y$，从而 α 为真. 个体域 I 上的永真公式均为个体域 I 上的可满足公式.

个体域上的永假公式(falsehood formula over an individual domain) 一类基本公式. 指在某个个体域上不可满足的公式.

可满足谓词演算公式(satisfiable formula of a predicate calculus) 一类公式. 指在某个个体域上可满足的谓词演算公式.

永真谓词演算公式(valid formula of a predicate calculus) 亦称重言式. 一类公式. 指在任何个体域上均是永真的谓词演算公式.

重言式(tautology) 即“永真谓词演算公式”.

永假谓词演算公式(falsehood formula of a predicate calculus) 一类公式. 指不可满足的谓词演算公式.

全称量词引入规则(introduction rule of a universal quantifier) 谓词演算的一种语法规则. 设公式 γ 中没有 x 的自由出现. 则全称量词引入规则为 $\Delta(\gamma\rightarrow\alpha(x))\vdash\Delta(\gamma\rightarrow(\forall x)\alpha(x))$，式中 ΔA 表示公式 A 的存在封闭式.

存在量词引入规则(introduction rule of an existential quantifier) 谓词演算的一种语法规则. 设公式 γ 中没有 x 的自由出现，则存在量词的引入规则为 $\Delta(\alpha(x)\rightarrow\gamma)\vdash\Delta((\exists x)\alpha(x)\rightarrow\gamma)$，此处 ΔA 表示公式 A 的全称封闭式.

全称量词消除规则(elimination rule of universal quantifier) 谓词演算的一种语法规则. 即

$$(\forall x)\alpha(x)\vdash\alpha(t),$$

式中 t 为项.

存在量词消除规则(elimination rule of an existential quantifier) 谓词演算的一种语法规则. 设 t 不在公式 γ 中出现，则

$$(\alpha(t)\rightarrow\gamma)\vdash(\exists x)\alpha(x)\rightarrow\gamma.$$

谓词演算公式的对偶式(dual formula of a predicate formula) 具有特定形式的一对公式. 设 α 为谓词演算公式，α 中不含联结词“$\rightarrow$”“$\equiv$”，α 的对偶式 α^* 是在 α 中：

1. 把联结词“$\vee$”与“$\wedge$”互换.

2. 把全称量词 $(\forall x)$ 与存在量词 $(\exists x)$ 互换的结果.

例如，公式 $(\forall x)F(x)\wedge(\exists x)G(x)$ 的对偶式为

$$(\exists x)F(x)\vee(\forall x)G(x).$$

谓词演算对偶规则(duality principle in predicate calculus) 谓词演算的一种语法规则. 对偶规则指出：设 α,β 为两谓词演算公式，而 α^*,β^* 分别为它们的对偶式，则：

1. 从 $\alpha\equiv\beta$ 可得 $\alpha^*\equiv\beta^*$.

2. 从 $\alpha\rightarrow\beta$ 可得 $\beta^*\rightarrow\alpha^*$.

利用对偶原则，可以从一些定理迅速得到与之相应的另一些定理. 例如，由定理$\vdash(\forall x)[F(x)\wedge G(x)]\equiv[(\forall x)F(x)\wedge(\forall x)G(x)]$，利用对偶原则能得到定理$\vdash(\exists x)[F(x)\vee G(x)]\equiv[(\exists x)F(x)\vee(\exists x)G(x)]$.

谓词演算分离规则(modus ponens in a predicate calculus)　谓词演算的一种推理规则. 设α,β为任意两个谓词演算公式. 谓词演算的分离规则是

$$\Delta(\alpha\rightarrow\beta),\Delta\alpha\vdash\Delta\beta.$$

若公式α,β是命题演算公式，则此分离规则与命题演算的分离规则相同，即命题演算的分离规则是此规则的特例. 此处ΔA表示公式A的全称封闭式.

谓词演算公式否定式的求法(deduction of the negation of a formula in a predicate calculus)　谓词公式的一种变形方法. 设α为任一不含联结词“$\rightarrow$”和“$\equiv$”的谓词演算公式. α^-的归纳定义如下：

1. 若α为原子公式$R(x_1,x_2,\cdots,x_n)(n\geqslant o)$，则$\alpha^-$为$\neg R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.
2. 若α为$\neg\beta$，则$\alpha^-=\beta$.
3. 若α为$\beta\vee\gamma$，则$\alpha^-=\beta^-\&\gamma^-$.
4. 若α为$\beta\wedge\gamma$，则$\alpha^-=\beta^-\vee\gamma^-$.
5. 若α为$(\exists x)\beta$，则$\alpha^-=(\forall x)\beta^-$.
6. 若α为$(\forall x)\beta$，则$\alpha^-=(\exists x)\beta^-$.

可以证明$\alpha\equiv\neg\alpha^-$，所以α^-被称为α的否定式. 其定义同时给出了它的求法.

具相等性谓词演算(predicate calculus with equality)　带等号的谓词演算. 它是将相等性与谓词演算结合起来，并将下列公理与公理模式加到谓词演算的公理系统中所得的系统. 相等性公理如下：

1. $t=t$，此处t为项.
2. $(t_1=t_2)\rightarrow(\alpha(t_1)=\alpha(t_2))$，此处$t_1,t_2$为项，$\alpha(x)$是含自由变元$x$的公式.

狭义谓词逻辑(restricted predicate logic)　亦称一阶谓词逻辑或一阶逻辑. 一种基本的谓词逻辑. 该逻辑的特点是在其中除命题联结词外，所讨论的函词和谓词都只以个体为变元，而量词的指导变元也只是个体. 一阶逻辑是应用最广泛的逻辑，它可以形式公理化. 但一阶逻辑不是自封闭的. 虽然一阶逻辑中含有量词“∃”“∀”以及谓词变元A，函词变元F，但没有以谓词变元和函词变元为指导变元的量词. 例如，当A,B为谓词变元，公式$A(x)\rightarrow B(x)$是一阶逻辑的公式，但$(\exists A)(\exists B)[A(x)\rightarrow B(x)]$却不是一阶逻辑的公式. 一阶谓词逻辑的形式系统和狭义谓词逻辑的形式系统分别称为一阶谓词演算和狭义谓词演算.

一阶谓词逻辑(first-order predicate logic)　即“狭义谓词逻辑”.

一阶谓词演算(first-order predicate calculus)　见“狭义谓词逻辑”.

狭义谓词演算(restricted predicate calculus)　见“狭义谓词逻辑”.

谓词逻辑(predicate logic)　符号逻辑的一部分. 即在谓词逻辑中，研究由个体、函词、谓词构造的命题，以及这些命题经使用量词和命题联结词构造的更复杂命题的规律和这些命题之间的逻辑关系.

谓词演算(predicate calculus)　谓词逻辑的形式系统. 第一个谓词演算系统是德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)于1897年建立，此后英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)、德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)也相继建立了各自的谓词演算系统，使得谓词演算系统更加丰富多彩.

谓词的阶(orders of predicate)　谓词的一种分类. 设I_0为一个体域，以I_0上的个体变元为变元的谓词或函词被称为是一阶谓词或一阶函词. 设I_1为I_0上所有函词、谓词组成的集，则以I_1上的函词变元. 谓词变元为变元的谓词称为二阶谓词或二阶函词，照此方法可以定义出更高阶的谓词和函词.

函词的阶(orders of functions)　见“谓词的阶”.

广义谓词逻辑(generalized predicate calculus)　亦称高阶逻辑. 谓词逻辑的推广. 指量词的指导变元不仅可以是个体变元，而且也可以为命题变元、谓词变元或函词变元的谓词逻辑. 广义谓词逻辑可以分成不同的层次. 通常称狭义逻辑为一阶逻辑. 量词的指导变元可以为一阶谓词(和函词)的谓词逻辑称为二阶逻辑. 一般地，量词的指导变元可以为n阶谓词(和n阶函词)的谓词逻辑称为$n+1$阶逻辑.

高阶逻辑(higher order logic)　即“广义谓词逻辑”.

谓词演算的构造(construction of a predicate calculus)　谓词演算形式系统的组成. 一个谓词演算，即谓词逻辑的形式系统由下列几个部分组成：

1. 组成部分：

1) 原始符号. 包括命题变元符号、个体变元符号、谓词符号、函词符号、联结词符号、量词符号.

2) 形成规则. 包括项的定义和公式的定义.

2. 推理部分(又称变形部分)：

1) 公理. 不同的谓词演算系统有不同的公理，但所有谓词演算系统的公理均为谓词逻辑的重言式.

2) 推理规则. 即从公理推导出定理、从前提导出后承的规则. 其中包括分离规则、全称量词引入规则、全称量词消除规则、存在量词引入规则、存在量词消除规则等.

谓词演算系统的完备性(completeness of a system of predicate calculus)　谓词演算系统的特性

之一. 指谓词演算公式或公式集的协调性与可满足性等价的特性. 谓词演算形式化公理系统不具有古典的、语法的完备性(参见"哥德尔不完备性定理"). 但是它具有语义的完备性,这种完备性是哥德尔完备性定理所指出的(参见"完全性定理").

谓词演算系统的协调性(consistency of a system of predicate calculus) 谓词演算系统的特性之一. 指谓词演算形式化公理系统均具有古典的、语法的、语义的协调性.

自然推理系统(axiomatic system of natural deduction) 一种谓词演算公理系统. 它是由法国学者亚希科夫斯基(Jaśkowski)于 1934 年创建的. 该系统的特征是不含公理,只有形成规则和变形规则,从这些变形规则,不用公理就可以推演出一阶谓词演算的全部重言式. 由于这些变形规则是日常人们思维,特别是数学思维规律的抽象,该系统被称之为自然推理系统. 自然推理系统的变形规则的一个重要特征是可以引入假设和消去假设. 下面是一种自然推理系统的变形规则(在下列规则中,α,β,γ 为公式,Γ,Γ' 等为公式集合):

1. 前件规则. 设 $\Gamma\subseteq\Gamma'$, $\Gamma\vdash\alpha$, 则 $\Gamma'\vdash\alpha$.

2. 假定规则. 设 $\alpha\in\Gamma$, $\Gamma\vdash\alpha$.

3. 分别情况证明规则. $\Gamma,\alpha\vdash\beta$, 且 $\Gamma,\neg\alpha\vdash\beta$, 则 $\Gamma\vdash\beta$.

4. 反证规则. $\Gamma,\neg\alpha\vdash\beta$; $\Gamma,\neg\alpha\vdash\neg\beta$, 则 $\Gamma\vdash\alpha$.

5. 前件析取规则. $\Gamma,\alpha\vdash\gamma$, 且 $\Gamma,\beta\vdash\gamma$, 则 $\Gamma,\alpha\vee\beta\vdash\gamma$.

6. 后件析取规则. $\Gamma\vdash\alpha$, 则 $\Gamma\vdash\alpha\vee\beta$; $\Gamma\vdash\alpha$, 且 $\Gamma\vdash\beta\vee\alpha$.

7. 后件中的存在引入规则. $\Gamma\vdash\alpha_x^t$, 则 $\Gamma\vdash(\exists x)\alpha(x)$.

8. 前件中的存在引入规则. $\Gamma,\alpha_x^y\vdash\beta$, 且 y 不在 $\Gamma,\exists x\alpha,\beta$ 中自由出现, 则 $\Gamma,\exists x\alpha\vdash\beta$.

9. 相等性的自反规则. $t\equiv t$.

10. 等式代入规则 $\Gamma\vdash\alpha_x^t$, 则 $\Gamma,t\equiv t'\vdash\alpha_x^{t'}$.

根岑谓词演算系统(Gentzen system of predicate calculus) 古典的和直觉的谓词演算系统的总称. 根岑系统是根据根岑(Gentzen,G.)提出的根岑方法建立起来的,根岑方法的两个显著特征是:

1. 通常的公理系统是尽量使用较少的规则,为此而不惜增加公理. 但根岑方法与之相反,宁可增加规则而减少公理. 在两种根岑系统中,公理均只有一条,但规则却很多.

2. 大多数谓词(或命题)演算系统都使用分离规则,而该规则的特点是由繁到简,即由公式 α 和 $\alpha\to\beta$ 得到公式 β, β 为 $\alpha\to\beta$ 的子公式. 以被证公式 β 为子公式的公式有无穷多个,所以 β 是否可证不能行地判定. 但是在根岑系统中,除切痕规则外,其他规则都是由简到繁,即前提公式是后承(被证)公式的子公式. 根岑还证明了在他的系统中所有可证公式均可不使用切痕规则来证明,因而在根岑系统中,一个公式是否可证,可以能行地判定. 根岑系统的这些特点使得它在计算机科学中有着广泛的应用. 该系统是根岑于 1934 年建立起来的.

海丁谓词演算公理系统(Heyting axiomatic system of predicate calculus) 谓词演算的一种公理系统. 它是由海丁(Heyting,A.)于 1934 年建立的. 该系统是直觉主义逻辑的形式化,它反映了在直觉主义框架中数学思维的逻辑规律. 这个系统实际上是在英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)和英国逻辑学家、数学家怀特海(Whitehead,A. N.)的系统基础上修改而成. 在海丁系统中,排除了罗素和怀特海系统中所有表达排中律的命题以及以这些命题为基础的命题. 与罗素一样,海丁在定理前加上一个断定号"$\vdash$". 与罗素不同的是,海丁在公理前加上两个断定号"$\vdash\vdash$". 海丁系统的命题演算部分的公理共有十一条:

1. $\vdash\vdash a\supset a\wedge a$.
2. $\vdash\vdash\cdot a\wedge b\supset b\wedge a$.
3. $\vdash\vdash\cdot a\supset b\cdot\supset a\wedge c\supset b\wedge c$.
4. $\vdash\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot b\supset c\cdot\supset\cdot a\supset c$.
5. $\vdash\vdash\cdot b\supset\cdot a\supset b$.
6. $\vdash\vdash\cdot a\supset a\vee b$.
7. $\vdash\vdash\cdot a\supset a\vee b$.
8. $\vdash\vdash\cdot a\vee b\supset b\vee a$.
9. $\vdash\vdash\cdot a\supset c\cdot\wedge\cdot b\supset c\cdot\supset\cdot a\vee b\supset c$.
10. $\vdash\vdash\cdot\neg a\supset\cdot a\supset b$.
11. $\vdash\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\neg a$.

在上述公理中,海丁引用了一个新的否定词符号"$\neg$",以区别于在他以前通常使用的否定词符号"$\sim$". 他之所以这样做,是因为直觉主义的否定与通常的否定意义有很大不同. 例如,在罗素和怀特海的系统中,命题:

1. $\vdash\cdot a\supset\sim\sim a$.
2. $\vdash\cdot\sim\sim a\supset a$.

均为定理. 但在海丁的系统中,命题 1 是定理,命题 2 不再是定理.

为了建立谓词演算,海丁引进全称量词(以符号"(x)"表示)和存在量词(以符号"(Ex)"表示),并且添了两条公理:

1. $\vdash:(x)a(x)\cdot\supset\cdot a(y)$.
2. $\vdash:a(y)\cdot\supset\cdot(Ex)a(x)$.

海丁认为,借助于命题演算和谓词演算能重建整个算术. 然而,他又认为,只有将这些命题和运算的内容的实际意义记在心头,这种重建才真正可能.

公理集合论

公理集合论(axiomatic set theory) 数理逻辑的一个分支. 它用公理化方法研究集合的形式理论. 德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))于 19 世纪末期创立的超穷集合理论,将无限对象作为实体引入到数学研究的领域. 然而由于他所从事的关于无穷集合及其性质的研究从根本上背离了数学的传统思想,从而引起了激烈的争论. 另一方面,从集合论内部引发的种种悖论也困扰着康托尔及其支持者们. 最初发现的集合论悖论是关于"最大基数"和"最大序数"的矛盾结果. 康托尔本人于 1898 年发现了第一个集合论悖论,但他没有发表. 两年后,意大利学者布拉利·福尔蒂(Burali-Forti,C.)重新发现了同一悖论,并公之于世. 当时康托尔以及他的一些支持者们并不认为集合论悖论是集合自身的本质缺陷引起的,而认为是某些表述不够严格或某些证明有疏忽的结果,只要将集合论理论充分形式化,这些矛盾就会自然消失. 然而,1902 年,英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)公布的集合论悖论却直接针对集合的最基本概念(参见"罗素悖论"),它表明出现集合论悖论的原因不在于表达的方式,而在于集合论内部的本质缺陷. 为了排除集合论悖论,建立起可靠的超穷集合理论,人们试图从多种途径改造康托尔的集合论. 罗素认为,应该对定义集合的谓词进行限制,禁止使用诸如"一切集合的集合"、"一切序数所组成的良序集的序数"等所谓的非直谓谓词定义集合,这一思想后来被发展成他的类型论. 1908 年,德国数学家策梅洛(Zermelo,E. F. F.)利用公理化方法改造康托尔的集合论,建立了第一个公理化的集合论系统. 与罗素的类型论相比,策梅洛的系统更为数学家们乐意接受. 数学中的公理化方法开始于欧几里得(Euclid)的《几何原本》. 19 世纪末,德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)利用公理化方法成功地证明了欧氏几何相对于实数系统的相容性. 策梅洛希望能用公理化方法建立一个既能保留集合论基本内容,又能排除任何可能的悖论的集合论形式系统.

一个公理化的集合论系统,由用于描述这一系统的语言、与集合论相配套的逻辑体系以及刻画集合论基本假设的公理等三部分组成. 集合论语言包括若干个变元,谓词符号(其中包括表示"属于"关系的二元常谓词符号 $\in$)、命题联结词、量词以及一些推理符号. 与集合论相配套的逻辑体系通常采用带等词的一阶谓词演算系统,也有用多值逻辑作配套逻辑的,如近年来出现的中介公理集合论系统. 至于作为基本假设的公理,则因系统不同而异. 素朴集合论的直接形式化以一阶逻辑为配套逻辑,一阶语言为形式语言,以如下的两条公理为公理,即:

外延公理:

$\forall x\forall y(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y)$;

概括公理:对任何公式 $\varphi(x)$,

$\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow\varphi(x))$.

但是这一系统并不协调,即存在罗素悖论:若取 $\varphi(x)$ 为 $x\notin x$,由概括公理知,有 a,使得 $\forall x(x\in a\leftrightarrow x\notin x)$. 特别地,由逻辑的全称量词消去律($\forall-$)知,有 $a\in a\leftrightarrow a\notin a$. 矛盾.

策梅洛认为引起矛盾的根源在于滥用概括原则,可能构造出"很大"的集,必须对概括原则进行限制,以防止太大的集作为个体而成为系统的研究对象. 他引入 6 条集合论公理(或公理模式)以代替概括原则:

1. 无序对公理:

   $\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u=x\vee u=y)$.

2. 子集公理:对任何公式 $\varphi(x)$,

   $\forall a\exists b\forall x(x\in b\leftrightarrow x\in a\wedge\varphi(x))$.

3. 幂集公理:

   $\forall a\exists b\forall x(x\in b\leftrightarrow x\subseteq a)$.

4. 并集公理:

   $\forall a\exists b\forall x(x\in b\leftrightarrow\exists y(x\in y\wedge y\in a))$.

5. 无穷公理:

   $\exists a(\forall x(x\in a\rightarrow x\cup\{x\}\in a)\wedge\varnothing\in a)$.

6. 选择公理:

   $\forall F(F\neq\varnothing\wedge\forall x\forall y(x\in F\wedge y\in F\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)\rightarrow\exists c\forall x(x\in F\wedge x\neq\varnothing\rightarrow I(c\cap x)))$,

其中 $I(c\cap x)$ 表示 $c\cap x$ 是单点集. 以上 6 条公理与外延性公理构成的集合论系统称为 Z 系统,这些公理保证了数学中常用的集合运算的封闭性. 由这些公理出发,不仅可以导出传统集合论的大多数基本结果,而且可以使已经发现的集合论悖论都不会出现. 然而,Z 系统并不足以推出传统集合论中的所有基本结果. 例如,在 Z 系统中不能保证集合 $\{N, P(N), P(P(N)),\cdots\}$ 的存在性,其中 N 是自然数集合,P 是幂集运算. 1922~1923 年,德国学者弗伦克尔(Fraenkel,A. A.)与挪威数学家斯科朗(Skolem,A. T.)独立地提出下列替换公理:

$$\forall u\forall v\forall w(\psi(u,v)\wedge\psi(u,w)\rightarrow v=w)\rightarrow\forall z\exists y\forall v(v\in y\leftrightarrow(\exists u\in z)\psi(u,v)).$$

该公理模式的功能很强,它可以由旧集合造出许多新的集合. 为了消除"自身属于自身"这类病态集合,斯科朗于 1923 年和冯·诺伊曼(von Neumann,J.)于 1925 年引入下列正则公理:

$$\exists x\varphi(x)\rightarrow\exists x(\varphi(x)\wedge\forall y(y\in x\rightarrow\neg\varphi(y))).$$

由外延公理、无序对公理、子集公理、幂集公理、

并集公理、无穷公理、选择公理、替换公理及正则公理组成的公理集合论系统就是现在最为通用的ZFC系统，Z代表策梅洛，F代表德国学者弗伦克尔，C代表选择公理.不包括选择公理的系统称为ZF系统.

如前所述，集合论悖论与处理"太大的"集合有关.策梅洛通过对概括原则的限制，回避了这些被称为"真类"的对象，只讨论一些"较小的"集合，成功地消除了悖论.然而，冯・诺伊曼认为，集合论悖论的出现不在于处理真类，而在于把真类作为某些集合或其他类的元素.此后的1937年，德国学者贝尔奈斯(Bernays,P.)遵循这一思想，用"类"作为基本概念，发展了公理集合论系统，美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)对之加以改进，形成了一个有5组18条公理的NBG系统或GB公理集合论系统.除上列两种最重要的集合论公理系统之外，还有一些别的公理系统(例如QM公理系统等)，但它们远没有得到发展与应用.自1908年策梅洛建立第一个公理集合论系统至今，公理集合论得到了长足的发展，形成了许多重要的分支.集合论为数学奠基的任务早已完成，但是，它自身的种种问题却仍然未能获得最终解决.这将促使人们继续不停顿地进行艰难的跋涉.

ZF **公理集合论系统**(ZF system of axiomatic set theory) 见"公理集合论".

GB **公理集合论系统**(GB system of axiomatic set theory) 一种重要的公理集合论形式系统.集合论悖论与处理"太大的"集合有关，ZF系统回避这些被称为"真类"的对象，只讨论一些"较小的"集合，成功地避免了罗素悖论.然而，美籍匈牙利数学家冯・诺伊曼(von Neumann,J.)认为，集合论悖论的出现不在于处理真类，而在于把真类作为某些集合或类的元素并用"函词"作为基本概念来表达这个思想.德国学者贝尔奈斯(Bernays,P.)于1937年以后遵循这一思想，用"类"作为基本概念，发展了公理集合论系统.美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)于1939年对之进行改进，1940年又利用这一系统证明了选择公理和连续统假设的相对相容性.这一重要的公理集合论系统从此被称为NBG(Neumann Bernays Gödel)系统或GB(Gödel Bernays)系统.GB系统比ZF系统多一个"类"的概念，其公理分5组共18条，它们分别是：A组4条，是一些刻画基本概念的公理；B组8条，是关于类的存在性的公理；C组4条，是关于集合存在的公理；D组1条，是关于类的正则公理；E组1条，是整体选择公理.由这些公理，可在GB系统证明一条元定理：凡是GB系统的直谓公式，均可构造一个相应的类.即德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))的概括原则可得以保留.

GB系统与ZF系统都是最重要的公理集合论系统，两个系统都是为避免罗素悖论、同时又保留康托尔集合论中的有益成果而构造的，所以大部分公理都相同或相似.但对于概括原则的修改，两系统采取了不同的方案.ZF系统确认在一个已有的集合内，可以用一个谓词造一个集，即对任何合式公式$\varphi(x)$，有$\forall a\exists b\forall x(x\in b\leftrightarrow x\in a\wedge\varphi(x))$；GB系统不需有先验的类，直接由(直谓)公式造类，其精神更接近康托尔概括原则.但ZF系统的对象仅只"集合"一种，它们当然都是系统内的个体；而GB系统的对象除了"集合"之外，还有"真类"，它们实际上不是GB系统的个体，这在一定程度上带来了不便.从系统特征上说，GB系统是ZF系统的扩张，具体地说，凡是ZF系统的合成公式均是GB系统的合成公式，凡是ZF系统的定理均是GB系统的定理；GB系统是ZF系统的保守扩张，即对ZF系统的合式公式A，ZF $\vdash A$，当且仅当GB $\vdash A$.也就是说，ZF系统中非形式定理的合式公式并未被GB系统扩张为形式定理；两个系统相对相容，即$con(\mathrm{ZF})\leftrightarrow con(\mathrm{GB})$.GB系统与ZF系统关系最为密切，这不仅在于两者的公理有许多相同或相仿之处，而且两者的处理对象大体有如下的对应关系：GB系统的集相应于ZF系统的集，GB系统的类相应于ZF系统的谓词.另外，一般地，GB系统是有穷公理化系统，使用起来方便一些.但事实上，这个优点不是本质的，因为若建基于二阶谓词演算，则ZF系统也可有穷公理化.相反地，GB系统须处理两种变元(类变元和集变元)而不甚方便.更何况"X是集合"定义为$\exists Y(X\in Y)$，显得很不自然，这些都远不及ZF系统.现在，大部分数学家更习惯于使用ZF系统.

GB **系统的类**(class of GB system) GB系统的研究对象.类是GB系统的基本概念，在其形式系统中不加定义，而由一些公理刻画它的性质.直观地说，GB系统所有研究对象(个体)都是类，或者说，GB系统只研究称为"类"的对象.类又分两种：集合与真类.集合是可以成为其他类的元素的类，亦即，若$\exists Y(X\in Y)$，则称X为集合，记为$m(X)$.反之，若X不可以成为任何类的元素，即$\neg\exists Y(X\in Y)$，或说$\forall Y(X\notin Y)$，就称X是真类，记为$Pr(X)$.比如，在GB系统，全集V，所有序数的类On，所有基数的类Cn等都是真类.若X是真类，则$X\in Y$不是GB系统的合式公式，即无法谈论$X\in Y$的真假.这一规定有失自然，比如，一般认为无论X是何物，单点集$\{X\}$总是可以接受的，即$X\in\{X\}$总认为是真的，但GB系统却不承认这一点.尽管如此，GB系统引入真类，还是有其方便之处，主要是可以使用类量词$\forall X$，$\exists X$等，而在ZF系统中要表达同样的意义，须使用二阶谓词$\forall\varphi$，$\exists\varphi$等，显得麻烦一些.GB系统的类

变元用大写字母 $A,B,C,X,Y,Z\cdots$ 等表示，集合变元则用小写字母 $a,b,c,x,y,z,\cdots$ 等表示.

真类(proper class)　见“GB 系统的类”.

GB 系统公理(the axioms of GB system)　GB 系统所包含的公理. 共有 5 组，它们是：

A 组：

1. 所有的集合都是类：$CLS(x)$.

2. 类的元素皆为集合：$X\in Y\to m(X)$.

3. 外延性公理. 两个类的所有元素都一样，这两个类就相等：$\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\to X=Y$.

4. 对偶集公理. 任给两集合，可以构造一个以它们为元素的集合，称为“对偶集”：

$$\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u=x\vee u=y).$$

B 组：

1. 存在一个类，它的元素中的二元有序对恰好是属于关系：$\exists A\forall x\forall y(\langle x,y\rangle\in A\leftrightarrow x\in y)$.

2. 任何两个类的交仍是类：

$$\forall A\forall B\exists C\forall u(u\in C\leftrightarrow u\in A\wedge u\in B).$$

3. 任何一个类的补仍是一个类：

$$\forall A\exists B\forall u(u\in B\leftrightarrow\neg(u\in A)).$$

4. 任何一个类的二元有序对元素中的第一元仍构成一个类，或者说，关系的定义域仍是类：

$$\forall A\exists B\forall x(x\in B\leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in A)).$$

5. A 是一类，则 $A\times V$ 也是一类：

$$\forall A\exists B\forall x\forall y(\langle x,y\rangle\in B\leftrightarrow x\in A),$$

其中的 B 即是 $A\times V$.

6. 类关系的逆关系仍为一类：

$$\forall A\exists B\forall x\forall y(\langle x,y\rangle\in B\leftrightarrow\langle y,x\rangle\in A).$$

7. 类的三元关系的轮转仍是类：

$$\forall A\exists B\forall x\forall y\forall z(\langle x,y,z\rangle\in B\leftrightarrow\langle y,z,x\rangle\in A).$$

8. 类的三元关系的换逆序仍是类：

$$\forall A\exists B\forall x\forall y\forall z(\langle x,y,z\rangle\in B\leftrightarrow\langle x,z,y\rangle\in A).$$

由 7 和 8 两种类的三元关系中的三个元素调换为任意次序后，仍然构成一个类. 例如，用以下示意的记法给出三个元素的所有 6 种次序：$\langle a,b,c\rangle\xrightarrow{7}\langle c,a,b\rangle\xrightarrow{8}\langle c,b,a\rangle\xrightarrow{7}\langle a,c,b\rangle\xrightarrow{7}\langle b,a,c\rangle\xrightarrow{8}\langle b,c,a\rangle$.

C 组(集合存在性公理)：

1. 无穷公理. 存在一个无穷集合：

$$\exists a(a\neq\varnothing\wedge\forall x(x\in a\to\exists y(y\in a\wedge x\subset y))),$$

其中 $\subset$ 是真包含关系，即包含于且不等于.

2. 联集公理. 集合的元素的元汇聚起来，仍是一个集合：$\forall x\exists y\forall u\forall v(u\in v\wedge v\in x\to u\in y)$，或写作

$$\forall x\exists y\forall u(\exists v(u\in v\wedge v\in x)\to u\in y).$$

3. 幂集公理. 集合的子集仍汇聚为集合：

$$\forall x\exists y\forall u(u\subseteq x\to u\in y).$$

4. 替换公理. 对于任何集合 x 和任意“单值二元关系”的类 A，都存在集合 y，使得 y 中元素是 x 中元素经二元关系类 A 替换而得：$\forall A(\forall a\exists!b(\langle a,b\rangle\in A)\to\forall x\exists y\forall u(u\in y\leftrightarrow\exists v(v\in x\wedge\langle v,u\rangle\in A)))$. 和 ZF 系统不同，这里的替换公理仅有一条公理，而且 ZF 系统中，替换公理是一个模式，为无穷多条公理.

D 组(关于类的正则公理)：

任何非空类都是正则的，即至少与自身的某个元素不交：$\forall X(X\neq\varnothing\to\exists y(y\in X\wedge y\cap X=\varnothing))$.

E 组(整体选择公理)：

存在一个“整体选择类”A，它从每个非空集合中挑选出惟一的一个元素来：

$$\exists A(\forall a\exists!b(\langle a,b\rangle\in A)\wedge\forall x(x\neq\varnothing\to\exists y(y\in x\wedge\langle x,y\rangle\in A))).$$

直谓公式(predicative formula)　一类合式公式. 若 GB 系统的合式公式中不出现约束类变元(即 $\forall A,\exists X$ 这类量词)，则称该公式为直谓公式. GB 系统的概括定理仅对直谓公式成立.

GB 系统概括原则(comprehension principle of GB system)　GB 系统的一个元定理：对于 GB 系统的任一直谓公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$，存在一个类 A(它当然依赖于 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$)使得

$$\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_n(\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\in A\leftrightarrow\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)).$$

其中小写字母是集合变元，大写字母是类变元. 此定理保留了康托尔集合论中概括原则的主要精神：一个谓词决定一个类. 但有两处修改，一是谓词必须由直谓公式表示；二是构成的类不一定是集合，即不一定能出现在 $\in$ 号之前. 正是作了这样的修改，才得以避免罗素悖论的出现.

王浩(Wang, H.)指出，若去掉对合式公式的“直谓”要求，即允许公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中出现约束真类变元，则命题模式

$$\exists A\forall x_1,\forall x_2,\cdots,\forall x_n(\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\in A\leftrightarrow\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n))$$

不可化归为有限条公理，而且，该命题与 GB 系统是相对相容的.

QM 公理系统(QM-axiomatic system)　一种重要的公理集合论形式系统. 是对 GB 系统略加修改得到的一个系统：对 GB 系统，保留其 A,C,D,E 4 组公理，而将 B 组公理换为以下的公理模式：

B'：对任一合式公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$，$\forall Y_1\forall Y_2\cdots\forall Y_m\exists A\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_n(\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\in A\leftrightarrow\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;Y_1,Y_2,\cdots,Y_m))$ 是公理.

这样组成的系统即为奎因—莫尔斯系统，简称 QM 系统. 因为由 B' 可推出 GB 系统的 B 组公理，所以 QM 系统是 GB 系统的扩张；又由于 B' 不可化归为有限条公理(王浩)，所以必有 QM 系统的定理

是 GB 系统所证不出的，这样，QM 系统是 GB 系统的非保守扩张.

公理模式 B' 是美国数学家奎因(Quine，W. V. O.)于 1940 年给出的，但把它与 GB 系统相结合形成新的公理系统来研究却是源于莫尔斯(Morse，A. P.)于 1965 年的专著. 这一系统一般并不引人注目.

集合论语言(language of set theory)　一种形式语言. 即用于描述公理集合论理论体系的形式语言. 通常所说的集合论语言是由可列个自由变元、可列个约束变元、二元谓词符号 $\in$、逻辑符号 $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，$\forall$，$\exists$，$=$ 及辅助符号(，)，[，]构成的一阶语言. 其中谓词符号 $\in$ 描述集合的属于关系，逻辑符号分别为否定词、析取词、合取词、蕴涵词、双向蕴涵词、全称量词、存在量词及等词. 集合论语言中的合式公式由下列规则生成：

1. 若 a,b 是自由变元，则 $a\in b$，$a=b$ 为合式公式，称之为原子公式.

2. 若 φ,ψ 为合式公式，则 $\neg\varphi$，$\varphi\vee\psi$，$\varphi\wedge\psi$，$\varphi\rightarrow\psi$，$\varphi\leftrightarrow\psi$ 为合式公式.

3. 若 φ 为合式公式，x 为约束变元，则 $\forall x\varphi(x)$ 及 $\exists x\varphi(x)$ 为合式公式. 其中 $\varphi(x)$ 为将合式公式 φ 中某个自由变元 a 的出现替换为约束变元 x 所得.

4. 当且仅当由规则 1，2，3 生成的公式为集合论语言中的合式公式. 通常称不含自由变元的公式为语句.

集合(set)　集合论研究的基本对象. 指公理集合论系统中的个体. 在公理集合论系统中，集合被作为原始概念引入，其性质由系统的公理所界定. 因此在不同的公理集合论系统中，集合的性质及相互之间的关系也不同. 如在 ZFC 公理系统中，集合具有下列最基本的性质：

1. 外延性. 任何两个具有相同元素的集合相等.

2. 遗传性. 集合的任何元素仍是集合.

3. 正则性. 任何一个集合不属于它本身.

在含原子的公理集合论系统中的集合不满足遗传性，在不含正则公理的公理集合论系统中，集合通常不具有正则性. 在素朴集合论中，集合用概括原则定义，即为 $\{x\mid p(x)\}$ 的形式，$p(x)$ 表示关于 x 的某个性质. 集合 $a=\{x\mid p(x)\}$ 意指 $\forall x(x\in a\leftrightarrow p(x))$.

类(class)　公理集合论的基本概念之一. 指满足某种特定性质的个体构成的整体. 设 $\varphi(x)$ 为一个集合论公式，使 $\varphi(x)$ 成立的所有个体组成一个类，记为 $\{x\mid\varphi(x)\}$. 类不是 ZFC 公理系统中的形式概念，但为方便起见，大多数介绍 ZFC 公理系统的文献均引入类的概念. 由于类完全由定义它的公式所决定，所以通常把类与定义它的公式等同看待. 从历史上说，德国数学家康托尔(Cantor，G. (F. P.))当初对集合的定义就相当于现代公理集合论中类的概念，由于康托尔集合论中出现了悖论，因此有些数学家把类看成为一种不祥之物，尽可能避而不用. 德国数学家策梅洛(Zermelo，E. F. F.)于 1908 年构造其公理集合论系统时，完全避免了类的出现；德国学者弗伦克尔(Fraenkel，A. A.)与美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Newmann，J.)在构造自己的公理化集合论系统时，是利用函数代替类的概念. 第一个将类作为形式概念的集合论系统由德国学者贝尔奈斯(Bernays，P.)于 1937 年给出，后来美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)对这一系统作了改进，形成 GB 系统. 把类看成公式的一种简写方法的是美国数学家奎因(Quine，W. V. O.)于 1963 年正式提出的. 这种处理方法有很多优点，因为类除了不能作为集合的元素外，其他性质基本等同于集合，因此在许多场合把类与集合一同处理，从而简化了许多性质的叙述. 对于那些不喜欢“类”的人，只要把所有类的出现替换成相应的公式即可.

使用类的公理集合论系统，通常需要对集合论语言加以扩充. 扩充的集合论语言是在普通集合论语言中增加类变元，合式公式包含形为 $a\in\{x\mid\varphi(x)\}$，$\{x\mid\varphi(x)\}\in a$，$\{x\mid\varphi(x)\}\in\{x\mid\psi(x)\}$ 及其复合形式，这里 $a\in\{x\mid\varphi(x)\}$ 代表 $\varphi(a)$，$\{x\mid\varphi(x)\}\in a$ 表示 $\exists y(y\in a\wedge(\forall z)(z\in y\leftrightarrow\varphi(z)))$，$\{x\mid\varphi(x)\}\in\{x\mid\psi(x)\}$ 表示 $(\exists y)(y\in\{x\mid\psi(x)\}\wedge(\forall z)(z\in y\leftrightarrow\varphi(z)))$. 因此，“一个类属于一个集合”或“另一个类必然含有这个类”表示一个集合. 通常把不是集合的类称为真类，如 $V=\{x:x=x\}$，$On=\{\alpha\mid\alpha$ 为序数$\}$ 等均为真类. 类的相等关系、子集关系及并、交、补的定义与集合基本相同，其运算性质也与集合类似，但通常不考虑类的幂集运算.

无序对(unordered pair)　亦称二元集. 公理集合论术语. 指由两个元素构成的集合. 通常记为 $\{a,b\}$，a,b 为其元素. 若 $a=b$，则 $\{a,b\}$ 只包含一个元素，称其为单点集，记为 $\{a\}$. 由无序对公理，任何两个集合均可构成一个二元集. 在无序对中，两个元素无先后次序，即 $\{a,b\}=\{b,a\}$，这正是无序对一名的由来.

单点集(singleton)　见“无序对”.

有序对(ordered pair)　一种二元集. 指由两个元素构成的具有先后次序的集合. 对任意集合 a,b，定义 $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}$，由无序对公理知，$\langle a,b\rangle$ 为集合，称之为 a,b 的有序对. 根据外延公理，$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$，当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$，因此若 $a\neq b$，则

$$\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle.$$

有序对概念可推广成 n 个集合构成的 n 元有序组. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 为任意 n 个集合，递归定义 n 元有序组 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 如下：

1. $\langle a_1, a_2\rangle = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$.

2. $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle = \langle\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$.

一元组$\langle a\rangle$定义为 a. $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, b_2, \cdots, b_n\rangle$，当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$. 实际上，凡具有此性质的由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 定义的集合都可作为 n 元有序组的定义. 比如“序列”中的有限序列.

空集(empty set)　一种特殊集合. 不含任何元素的集合称为空集. ZFC 公理集合论中的空集公理保证了空集的存在性. 空集通常记为$\varnothing$或 0，因此

$$x = \varnothing \leftrightarrow \forall y (y \notin x).$$

集合的并(union of sets)　集合的基本运算之一. 集合 x 的并，指 x 中所有元素的元素构成的集合，记为$\bigcup x$. 故$\bigcup x = \{t \mid \exists y \in x (t \in y)\}$. 如$\bigcup\{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1\}$. 在 ZFC 公理系统中，并集的存在性由并集公理所保证，即任何集合的并集均为集合. 二元集合$\{a, b\}$的并集记为 $a \cup b$，因此

$$a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}.$$

集合的交(intersection of sets)　集合的基本运算之一. 集合 x 的交，指由 x 中所有元素的共同元素构成的集合，记为$\bigcap x$. 故$\bigcap x = \{t \mid \forall y \in x (t \in y)\}$. 如$\bigcap\{\{0, 1,\}, \{1, 2\}\} = \{1\}$，$\bigcap 0 = V$，$V$ 为集合论全域. 在 ZFC 公理系统中，由子集公理知，任何非空集合的交均为集合. 二元集合$\{a, b\}$的交记为 $a \cap b$，因此 $a \cap b = \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$.

幂集(power set)　集合的基本运算之一. 由集合的所有子集构成的集合. 对任何集合 a，a 的幂集 $P(a) = \{x \mid x \subseteq a\}$. 在 ZFC 公理系统中，幂集公理保证任何集合的幂集均为集合. 如 $P(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. $P(\cdot)$称为幂集运算.

幂集运算(power operation)　见“幂集”.

子集(subset)　集合论的基本概念之一. 它反映了集合与集合之间的包含关系. 设 a, b 为任意集合，若$\forall x (x \in a \rightarrow x \in b)$，则称 a 为 b 的子集，记为 $a \subseteq b$；若其中 $a \neq b$，则记 $a \subset b$，称 a 为 b 的真子集. 有些文献将$\subseteq$写为$\subset$. 由子集公理，对集合 a 及任何公式 $\Phi(x)$，存在集合 b，使$\forall x (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \Phi(x))$，即任何集合 a 中满足某种特定性质的元素全体均构成 a 的一个子集.

真子集(proper subset)　见“子集”.

笛卡儿乘积(Cartesian product)　集合的基本运算之一. 设 a, b 为任意两个集合，称$\{x \mid (\exists y \in a)(\exists z \in b) x = \langle y, z\rangle\}$为 a 与 b 的笛卡儿乘积，记为 $a \times b$. 由外延公理、无序对公理、并集公理、子集公理及幂集公理知，任何两个集合的笛卡儿乘积仍为集合且是惟一的. 笛卡儿乘积可以推广到任意有限个集合的情形. 对任意 n 个集合 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，记 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \{\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle \mid x_1 \in a_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in a_n\}$，称之为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的乘积. 特别地，若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，则记 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = a^n$. $\langle x, y\rangle$和$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$(参见“有序对”). 笛卡儿乘积推广到无穷个集合的乘积的情形见“广义笛卡儿乘积”.

序列(sequence)　以序数为定义域的函数. 设 f 为一个函数，$\mathrm{dom}(f)$为序数，则称 f 为一个序列，记为$\langle f(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{dom}(f)\rangle$. 当 $\mathrm{dom}(f) < \omega$ 时，则称序列 f 为有穷序列；若 $\mathrm{dom}(f) = n$，则称这一序列为 n 元有序组；若 $\mathrm{dom}(f) \geqslant \omega$，则称序列 f 为无穷序列或超穷序列. 有时为了某些特殊需要，也将一般的函数变成一个序列. 设 f 为集合 I 上的函数，用符号$\langle f(i) \mid i \in I\rangle$表示此函数，这时称此函数为一个集合序列，$I$ 称为指标集. 若 f 的值域为序数集，则称$\langle f(i) \mid i \in I\rangle$为一个序数序列；若 f 的值域为基数，则称$\langle f(i) \mid i \in I\rangle$为基数序列等.

有穷序列(finite sequence)　见“序列”.

无穷序列(infinite sequence)　见“序列”.

序数序列(ordinal sequence)　见“序列”.

基数序列(cardinal sequence)　见“序列”.

广义笛卡儿乘积(general Cartesian product)　笛卡儿乘积的推广形式. 设$\langle A_i \mid i \in I\rangle$为一个(集合)序列，令 $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f$ 为 I 上的函数且 $\forall i \in I (f(i) \in A_i)\}$. 称 $\prod_{i \in I} A_i$ 为序列$\langle A_i \mid i \in I\rangle$的广义笛卡儿乘积，有时记为 $\times_{i \in I} A_i$. 若对任何 $i \in I$，均有 $A_i = A$，则 $\prod_{i \in I} A_i = {}^I A$. (${}^I A$ 表示从 I 到 A 的函数的全体构成的集合)，广义笛卡儿乘积的概念由德国数学家康托尔(Cantor, G. (F. P.))于 1895 年给出.

集合运算(operations on sets)　集合论基本运算的总称. 集合的运算包括并运算、交运算、相对补运算、幂集运算、笛卡儿乘积运算等，其定义如下：

并集运算：设 a 为任意集合，a 的并集$\bigcup a = \{x \mid (\exists y \in a)(x \in y)\}$. 若 $a = \{x, y\}$，则$\bigcup\{x, y\}$记为

$$x \cup y;$$

交集运算：设 a 为非空集合，a 的交集$\bigcap a = \{x \mid (\forall y \in a)(x \in y)\}$. 若 $a = \{x, y\}$，则$\bigcap\{x, y\}$记为

$$x \cap y;$$

补集运算：设 a, b 为任意两个集合，b 在 a 中的相对补(或称 a 差 b)$a \setminus b = \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}$. $a \setminus b$ 也可记为 $a - b$；

幂集运算：设 a 为任意集合，a 的幂集

$$P(a) = \{x \mid x \subseteq a\};$$

笛卡儿乘积：设 a, b 为任意集合，a 与 b 的笛卡儿乘积 $a \times b = \{\langle x, y\rangle \mid x \in a \wedge y \in b\}$.

关系(relation)　集合论的基本概念之一. 设 A 为任意集合，称 A^n 的任何子集 R 为集合 A 上的一个 n 元关系，即

$$R \subseteq \{\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle : a_1, a_2, \cdots, a_n \in A\},$$

通常用$R(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in R$.若$R$为二元关系,通常将$\langle a,b\rangle\in R$记为$aRb$,将$\langle a,b\rangle\notin R$记为$a\overline{R}b$.关系的概念是自然界事物与事物之间的相互关系的一种抽象.例如:自然数集N上的小于关系≤可表示为N上的一个二元关系

$$R=\{\langle x,y\rangle:y-x\in \mathrm{N}\wedge x,y\in \mathrm{N}\}.$$

设A为一个真类,若$R\subseteq A^n$,则R可能为一个集合,也可能为一个真类.如果R为集合,则R可以表示为A的某个子集B上的一个n元关系;若R为真类,亦称R为类A上的n元关系,有时也称R为一个n元关系.若R为一个二元关系,则称$\{x\mid\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$为关系$R$的定义域,记为dom$(R)$,或Dom$(R)$,称$\{y\mid\exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$为关系$R$的值域,记为rang$(R)$或Rang$(R)$. dom $(R)\cup$rang(R)称为R的域.若R为集合上的二元关系,则dom(R),Rang(R)均为集合.

设R为一个二元关系,记$R^{-1}=\{\langle y,x\rangle\mid\langle x,y\rangle\in R\}$,称之为$R$的逆关系;集合$\{\langle x,y\rangle\mid\langle x,y\rangle\in R\wedge x\in A\wedge y\in A\}$称为$R$在$A$上的限制,记为$R|A$或$R\upharpoonright A$;集合$\{y\mid(\exists x\in A)(\langle x,y\rangle\in R)\}$称为$A$在关系$R$下的象,记为$R[A]$;$R^{-1}[A]$称为$A$在关系$R$下的原象或逆象.$R\circ S=\{\langle x,z\rangle\mid\exists y\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\}$称为关系$R$与关系$S$的复合.

设R为A上的一个二元关系,若$\forall x\in A(\langle x,x\rangle\in R)$,则称$R$是自反的;若$\forall x\in A(\langle x,x\rangle\notin R)$,则称$R$为非自反或自反的;若$\forall x,y\in A(\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$,则称$R$是对称的;若$\forall x,y\in A(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$,则称$R$是反对称的;若$\forall x,y\in A(\langle x,y\rangle\in R\rightarrow<y,x>\notin R)$,则称$R$是拟反对称的;若$\forall x,y,z\in A(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R)$,则称$R$是可传的或传递的.

n元关系(n-ary relation) 见"关系".

关系的定义域(domain of definition of relation) 见"关系".

关系的值域(range of relation) 见"关系".

逆关系(inverse relation) 见"关系".

关系的象(image of relation) 见"关系".

关系的复合(composition of relations) 见"关系".

自反关系(reflexive relation) 见"关系".

对称关系(symmetrical relation) 见"关系".

传递关系(transitive relation) 见"关系".

映射(mapping) 亦称函数.数学的基本概念之一.设A,B为两个集合,$\varphi\subseteq A\times B$,若对每个$x\in A$,存在惟一的$y\in B$,使$\langle x,y\rangle\in\varphi$,则称$\varphi$为$A$到$B$的映射,记为$\varphi:A\rightarrow B$.显然$\varphi$为一种特殊的二元关系.称$A=dom(\varphi)$为$\varphi$的定义域,rang$(\varphi)(\subseteq B)$为$\varphi$的值域.通常将$\langle x,y\rangle\in\varphi$记为$\varphi(x)=y$,称$y$为$x$的象,$x$为$y$的原象.设$\varphi$为$A$到$B$的映射,若

$$\forall x\in A\forall y\in A(x\neq y\rightarrow\varphi(x)\neq\varphi(y)),$$

则称φ为单射.若ran$(f)=B$,则称φ为满射.若φ既为单射,又为满射,则称φ为一一映射.

函数(function) 即"映射".

单射(one-to-one mapping) 见"映射".

满射(one-to-one mapping) 见"映射".

一一映射(one-to-one mapping) 见"映射".

集合划分(partition of a set) 集合论的基本概念之一.指对集合进行分类的抽象表示.假设把集合(或类)A分成若干类,那么同一个元素不可能分在两个或两个以上不同的类中,所有类中的元素合并起来即是A本身.这一思想可形式的表示为:若$F\subseteq P(A)$,F满足:

1. $\bigcup F=A$;

2. 对任何$X,Y\in F$,$X\cap Y=\varnothing$;

则F构成A的一个分类,或称F为A上的一个划分.如对自然数集,N_0,N_1分别表示偶数集与奇数集,则$F=\{N_0,N_1\}$构成N上的一个划分.集合的划分概念与集合的等价关系有密切的关系,通常是通过构造集合上的一个等价关系对集合进行划分(参见"等价关系").

等价关系(equivalence relation) 一种特殊的二元关系.即日常相等关系的抽象和推广形式.若E为集合(或类)A上的一个二元关系,满足自反性、对称性与传递性(参见"关系"),则E称为A上的一个等价关系.在日常生活中,人与人之间的"同龄"关系,学生与学生之间的"同班同学"关系,均满足自反性、对称性和传递性,因而分别为人的集合与学生的集合上的等价关系.自然数的同余关系也为等价关系.由此可见,等价关系已经脱离了相等关系的原始意义.利用等价关系可以对元素进行分类.设E为集合(或类)A上的等价关系,对A的每个元素x,把所有与x等价的元素构成的集合$\{u\mid\langle u,x\rangle\in E\}$称为$E$的一个等价类,记为$[x]$.若$A$为集合,则$[x]$也为集合,这时称$\{[x]:x\in A\}$为集合$A$在关系$E$下的商集,记为$A/E$.商集$A/E$即是$A$在等价关系$E$之下的分类.若$E$为集合$A$上的一个等价关系,则$A$在$E$下的商集恰好为集合$A$的一个划分.反之,对集合$A$的任何划分$F$,存在$A$的一个等价关系$E$,使$A$在$E$下的商集恰好为$F$.

商集(quotient set) 见"等价关系".

集合的可传性(transitivity of sets) 集合的一种特殊性质.若集合a的每个元素均为a的子集,则称a为可传集(或集合的可传性).如:$0,\{0\}$,$\{0,\{0\}\}$,为可传集,$\{\{\{0\}\},\{0\},0\}$,$\{\{0\}\}$不是可传集.若在上列定义中把集合a改为类A,即类A可传,当且仅当它的每个元素均为A的子集,则可

以得到可传类的概念，如：集合全域 V，序数全域 On，可构造全域 L 等均为可传类（或类的可传性）. 根据正则公理，任意类都可通过一种自然的方式压缩成一个可传类（参见“崩塌定理”）.

类的可传性(transitivity of classes)　见“集合的可传性”.

集合的可传闭包(transitive closure of a set)　一个特殊集合. 指包含这个集合的最小可传集合. 集合 A 的可传闭包，记为 $\mathrm{trcl}(A)$，它可递归构造如下：令 $\bigcup^0 A=A$，$\bigcup^{n+1}A=\bigcup(\bigcup^n A)$，则 A 的可传闭包为

$$\mathrm{trcl}(A)=\bigcup_{n\in\omega}(\bigcup^n A).$$

直观地讲，A 的可传闭包是由 A 的元素加上 A 的元素的元素，再加上 A 的元素的元素的元素等构成.

序关系(order relation)　现代数学的基本概念之一. 它由日常的顺序关系抽象而来. 一般而言，序关系可以看成为某个论域（集合或真类）上满足一定顺序性质的一个二元关系. 若论域为 U，二元关系为 $R(\subseteq U\times U)$，则称 $\langle U,R\rangle$ 为一个序结构，R 为 U 上的序关系，U 称为有序集. 对 R 限定不同的顺序性质，可以得出不同类型的序关系.

通常对序关系的约束条件有：自反性、反自反性、传递性、对称性、反对称性、拟自反性、连通性等. 当 R 为反自反的传递关系时，则 R 为一个偏序关系；若 R 满足反自反性、传递性和三歧性，则 R 为一个全序或线性序关系.

常见的序关系有：（强、弱）偏序关系、全序关系、良序关系等. 设 $\langle U,R\rangle$ 为一个序结构，对任何 $x\in U$，称 $\{y\mid yRx\}$ 为 U 上到 x（关于 R）的一个初始段，记为 $\mathrm{seg}_R(x)$. 例如，“$\in$”关系为 ω 上的一个序关系（良序），对任何 $n\in\omega$，$\mathrm{seg}_{\in}n=\{x\mid x\in n\}=n$. 设 $\mathscr{U}_1=\langle U_1,R_1\rangle$，$\mathscr{U}_2=\langle U_2,R_2\rangle$ 为两个序结构，若存在映射 $f:U_1\to U_2$，使得对任意的 $x,y\in U_1$，$xR_1y\to f(x)R_2f(y)$，则称 f 为 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_2$ 内的保序映射，若 f 又为 U_1 到 U_2 上的一一映射，则称 f 为 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_2$ 的序同构，也称 $\mathscr{U}_1$ 与 $\mathscr{U}_2$ 序同构. 若 f 只是为 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_2$ 内的单射，则称 f 为 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_2$ 内的保序嵌入. 由于历史的原因，对序关系的定义，各种文献称谓不尽相同，很容易引起混淆，需视其上下文而定.

序结构(ordered structure)　见“序关系”.

序同构(order isomorphism)　见“序关系”.

偏序关系(partial order relation)　常见的序关系之一. 若二元关系 R 满足可传性、反自反性，则称 R 为一个严格偏序关系，通常记为 $<$，或 $>$. 若 $<$ 为集合 A 上的严格偏序关系，则称 $\langle A,<\rangle$ 为一个严格偏序结构，称 A 为严格偏序集. 若二元关系 R 满足可传性、自反性，则称 R 为一个弱偏序关系，通常记为 $\leqslant$ 或 $\preccurlyeq$. 若 $\leqslant$ 为集合 A 上的弱偏序关系，则称 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为一个弱偏序结构，称 A 为弱偏序集. 若 R 为集合 A 上的严格偏序关系，则 $R'=R\cup\{\langle x,x\rangle\mid x\in A\}$ 为 A 上的弱偏序关系；反之，若 R 为集合 A 上的弱偏序关系，则 $R'=R\setminus\{\langle x,x\rangle\mid x\in A\}$ 为 A 上的严格偏序关系. 严格偏序关系与弱偏序关系均可 简称偏序关系，或偏序.

设 $\langle A,R\rangle$ 为一个偏序结构，$C\subseteq A$ 为 A 的非空子集，若 $a\in C\wedge\forall x\in C(a\bar{R}x)$，则称 a 为 C 的 R 极大元；若 $a\in C\wedge\forall x\in C(x\bar{R}a)$，则称 a 为 C 的 R 极小元；若 $a\in C\wedge\forall x\in C(xRa\vee x=a)$，则称 a 为 C 的 R 最大元；若 $a\in C\wedge\forall x\in C(aRx\vee x=a)$，则称 a 为 C 的 R 最小元；若 $a\in A\wedge\forall x\in C(xRa\vee x=a)$，则称 a 为 C 的上界；若 $a\in A\wedge\forall x\in C(aRx\vee x=a)$，则称 a 为 C 的下界；若 a 为 C 的上界，且对任何 C 的上界 b，$aRb\vee a=b$，则 a 称为 C 的上确界；若 a 为 C 的下界，且对任何 C 的下界 b，$bRa\vee b=a$，则 a 称为 C 的下确界. 若 A 的任意两个元素 a,b 组成的集合 $\{a,b\}$ 都有上确界和下确界，则称 $\langle A,R\rangle$ 为格.

严格偏序集(strict partial order set)　见“偏序关系”.

弱偏序集(weak partial order set)　见“偏序关系”.

线性序关系(linear ordering relation)　亦称全序关系. 常见的序关系之一. 设 R 为集合或类 A 上的一个二元关系，称 R 为 A 上的一个线性序关系，称 $\langle A,R\rangle$ 为一个线性序结构，若 R 满足：

1. 对每个 $x\in A$，$\neg xRx$（非自反性）.

2. 对任何 $x,y,z\in A$，若 xRy，yRz，则 xRz（传递性）.

3. 对任何 $x,y\in A$，或者 xRy，或者 $x=y$，或者 yRx（三歧性）.

若 A 为集合，则称 A 为线性序集或全序集. 性质 $xRy\vee x=y\vee yRx$ 称为三歧性. 因此线性序关系即为满足反自反性、传递性及三歧性的序关系. 自然数集、整数集、有理数集、实数集上的小于关系均为线性序关系. 实质上，线性序概念正是从数的大小关系抽象而来的. 以上定义的是“严格线性序”，有的文献将满足自反性、传递性和三歧性的序关系也称为线性序关系，实际上是上述“严格线性序关系”再加上“等于”关系. 即前者相当于 $<$，后者相当于 $\leqslant$.

线性序关系的概念是德国数学家康托尔(Cantor，G.（F. P.）)于 1895 年在系统整理良序集的理论时提出的，后人称之为全序或序. 它已成为现代数学中最基本的概念之一，被广泛应用于数学的各个领域中.

全序关系(total ordering relation)　即“线性序关系”.

全序集(total ordered set)　见“线性序关系”.

良序关系(well order relation) 常见的序关系之一. 设 U 为一个集合或真类, R 为 U 上的一个全序关系, 若对 U 的每个非空子集均有 R 最小元, 即对 U 的每个非空子集 x, 均存在 $y\in x$, 使得不存在 x 的任何元素 z, 有 $\langle z,y\rangle\in R$. 这时称 R 为 U 上的良序关系, 或称 R 良序 U. 若 U 为集合, 则称 $\langle U,R\rangle$ 为良序结构, U 称为良序集. 如自然数集上的小于关系即为一个良序关系, 但因为整数集本身不存在最小元, 所以整数上的小于关系不是良序关系.

良序的概念由德国数学家康托尔(Cantor, G. (F. P.))于 1883 年引入, 当时还没有线性序的概念, 他将良序 U 定义为"U 的每个严格有界子集在 U 中都有直接后继". 并且证明了任意两个良序集(类)都可以比较: 设 A 和 B 都为良序集(类), 则 A 同构于 B 的一个初始段, 或 B 同构于 A 的一个初始段, 或者 A 与 B 同构. 康托尔在考虑良序理论时曾认为所有集合均可以被良序, 并给出了一个直观的"证明". 1904 年, 德国数学家策梅洛(Zermelo, E. F. F.)在试图严格证明这一结论时提出了著名的选择公理, 并且证明在选择公理的假设下, 任何集合均可被良序, 现在常称之为良序定理. 事实上, 良序定理与选择公理等价.

良序集(well-ordered set) 见"良序关系".

良基关系(well-founded relation) 一种特殊的二元关系. 是良序关系中抽去全序的成分后获得的一种二元关系. 设 R 为集合(或类) U 上的一个二元关系, 若 U 的每个非空子集均有 R 最小元, 则称 R 为 U 上的一个良基关系. 亦即 R 为 U 上的良基关系, 当且仅当对 U 的每个非空子集 x, 存在 x 的元素 y, 使得对任何 $z\in U$, $\langle z,y\rangle$ 均不属于 R. 若 U 为集合, 则称 $\langle U,R\rangle$ 为良基结构; 若 A 为真类, 通常要求 U 的每个元素关于 R 的初始段必须为一集合. 良序关系一定为良基关系, 反之则不成立. 例如, 在 ZF 公理系统中, 由正则公理知, $\in$ 关系为集合论全域 V 上的良基关系, 但不是良序关系. 从直观上讲, 被良基化的集合或类, 可以通过其上的良基关系对其元素进行分层. 事实上, 若 R 为 U 上的一个良基关系, 则可利用良基关系上的超穷递归原理定义 U 中每个元素 x 关于 R 的秩 $\mathrm{rank}(x,U,R)=\sup\{\mathrm{rank}(y,U,R)+1: yRx\wedge y\in U\}$. 如果 U 可传, $R=\in$, 则 $\mathrm{rank}(x,U,\in)$ 恰好为 x 的秩 $\mathrm{rank}(x)$.

良基结构(well-founded structure) 见"良基关系".

超限递归原理(principle of transfinite recursion) 自然数上的递归原理在无穷集合上的推广. 是集合论中构造新的概念或对象的一种方法. 集合论中的超限递归原理有多种形式. 最一般的形式为良基关系上的超限递归原理. 设 R 为集合(或类) A 上的一个良基关系, 超限递归原理是指, 对任何 $A\times V$ 到 V 上的函数 F, 存在惟一的函数 $G: A\to V$, 使得 $\forall x\in A[G(x)=F(x,G\upharpoonright \mathrm{seg}_R(x))]$, 这里 $\mathrm{seg}_R(x)=\{y\mid yRx\wedge y\in A\}$, $G\upharpoonright \mathrm{seg}_R x=\{\langle z,y\rangle\in G\mid z\in \mathrm{seg}_R(x)\}$. 如果 R 为 A 上的良序关系, 则上列结论称为良序关系上的超限递归原理. 若 A 为序数, R 为"$\in$"关系, 则上列结论称为序数上的超限递归原理. 德国数学家康托尔(Cantor, G. (F. P.))早在 1897 年就已经提出了良序集合上的超限递归原理的基本思想, 1923 年至 1928 年间, 美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)给出了该定理的严格表述. 1955 年, 波兰学者塔尔斯基(Tarski, A.)和蒙太古(Montagne, R.)将这一原理推广到良基关系上. 超穷递归原理的基本思想是: 在定义某个集合论对象时, 可按某种层次性, 用低层次已定义的项来定义更高层次的项. 这种定义集合论对象的方法称为超限归纳定义, 它是集合论中定义新对象的最重要的方法之一.

超限归纳定义(definition by transfinite induction) 见"超限递归原理".

超限归纳原理(principle of transfinite induction) 数学归纳法的推广. 证明集合论命题的基本方法之一. 当需要证明某集合论命题 $\Phi(x)$ 对集合(或类) A 上的所有元素成立时, 如果 A 被关系 R 良序, 则只需证明对任何 $x\in A$, 在假设 $\forall y(yRx\to\Phi(y))$ 下 $\Phi(x)$ 也成立. 这一结论称为良序关系上的超限归纳原理, 这种证明方法称为超限归纳证明, 其中假设 $\forall y(yRx\to\Phi(y))$ 称为归纳假设. 若 R 为 A 上的良基关系, 上列结论同样成立, 这时称之为良基关系上的超限归纳原理. 如果 A 为序数或序数全域 On, R 为"$\in$"关系, 则称这一结论为序数上的超限归纳原理, 它也可以表述为下列更常用的形式:

1. $\Phi(0)$ 成立.
2. $\Phi(\alpha)$ 成立时 $\Phi(\alpha+1)$ 也成立.
3. 若 α 为极限序数, 且 $\forall\beta<\alpha\Phi(\beta)$ 时, 有 $\Phi(\alpha)$ 成立, 则对任何序数 α, $\Phi(\alpha)$ 成立.

超限归纳原理的基本思想与自然数上的归纳原理相当, 它是公理集合论中最基本的证明方法, 特别是当一个概念是用超限递归方法定义时, 证明关于这个概念的结论时通常都是用超限归纳方法.

超限归纳证明(proof with transfinite induction) 见"超限归纳原理".

选择公理(axiom of choice) 简称 AC. 公理集合论的一条重要公理. 它有多种等价形式(参见"选择公理的简单等价形式"、"良序定理"、"佐恩引理"), 其中的一种可叙述为: 任给由非空集合组成的集合 $\mathscr{F}$, 必存在函数 f, 使得对每个 $A\in\mathscr{F}$, 都有 $f(A)\in A$. 这个 f 称为 $\mathscr{F}$ 的选择函数, 它的功能就

是从每个集合 A 中选出一个元素 $f(A)$来.

选择公理的清晰表达,一般归功于德国数学家策梅洛(Zermelo,E. F. F.).不过,首次明确提到选择原则的是意大利数学家、逻辑学家佩亚诺(Peano,G.).他在1890年关于常微分方程的一篇文章中陈述了选择原则,并对它提出了怀疑.德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))在发明基数理论时,就提出了确定连续统的大小问题,并且假定"全体实数的集合(连续统)可以被良序".由于这种良序一直没有被构造出来,所以康托尔的这一假定遭到强烈反对.1904年,策梅洛在用现代术语明确叙述了选择公理之后,严格地证明出"每个集合可被良序"(良序定理).策梅洛是用一个较为明显的陈述替代了康托尔的假定,实际上这种明显的陈述(选择公理)是与良序定理等价的.

20世纪以来,英国数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)、德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)、波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)等人先后发现和证明了上百个与选择公理等价的命题,并且在数学的许多分支中找到了广泛的应用.事实上,在不少数学命题的证明中,尤其是在某种数学对象的非构造性的存在性断言的证明中,人们常常自觉不自觉地使用选择公理,最常见的例子有:实函数连续性的两种定义(序列式、邻域式)的等价性;可数个可数集合之并仍为可数集;任何紧空间的拓扑乘积仍是紧空间(吉洪诺夫定理);每个向量空间都有基底;给定向量空间的一个子空间上的任何线性泛函,必可扩张为全空间上的一个线性泛函(哈恩-巴拿赫定理);每个布尔代数都有素理想(塔尔斯基素理想定理).由此看来,选择公理是现代数学中不可或缺的一条重要的基本原则.但是,由于选择公理的非构造性本质,对于它的使用一直存在着反对意见.反对者的主要依据是,使用选择公理会导出某些有悖于直觉的结论,比如勒贝格不可测集的存在性,以及著名的"分球怪论",从而对它的相容性提出疑问.这一疑问已被美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)于1939年彻底澄清.他证明了选择公理对于ZF公理集合论系统是相对相容的(参见"选择公理的相容性").此外,1963年,美国数学家科恩(Cohen,P. J.)用力迫法证明了选择公理的独立性,表明由公理集合论的ZF系统不可推出选择公理,为在ZF系统中加入与选择公理相矛盾的替代物(如决定性公理)留出了余地.事实上,"任何非空集合之集都存在选择函数"是一种过强的假设,基于这种考虑,人们探索对选择公理中的集合之集 $\mathscr{F}$(或其元素)加上某些限制,使选择函数得以存在,并且作了大量工作(参见"可数集选择公理"、"n 元集合族的选择公理"、"ω 相依选择公理"等).

选择公理的简单等价形式(simple equivalence forms of axiom of choice) 一类命题.指与选择公理有较明显等价性的命题.选择公理的上百条等价命题中,有一些命题的等价性是简单易证的.比如:

1. 如果 $\mathscr{F}$ 是由两两不交的非空集合组成的集,则存在一"代表集"C,它与 $\mathscr{F}$ 中任何非空集合 B 的交集 $B\cap C$ 是单点集.

2. 任给一个二元关系 R,存在一个函数 f,满足:f 的定义域全等于 R 的定义域.

3. 任给函数 f,存在一函数 g,使 g 的定义域是 f 的值域,且对 f 的值域中的任何 x,均有

$$f(g(x))=x.$$

4. 非空集合的笛卡儿乘积仍为非空集合 A.

5. 任何集合 A,存在序数 α,使得 α 枚举了 A.

6. 任何集合,存在基数 λ,使得 λ 与 A 等价(存在一一对应).

7. 任何两个集 A,B 之间可比较大小:

$$A<B\vee A=B\vee A>B(\text{三分律}).$$

良序定理(well-ordering theorem) 选择公理的一种等价形式.该定理断言:每一个集合可以被良序.早在1883年,德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))发明基数理论之时,他就提出了连续统的大小问题,并且假定全体实数的集合(连续统)可以被良序.由于这个良序时至今日仍未找到,所以康托尔的假定一直遭到强烈反对.1904年,德国数学家策梅洛(Zermelo,E. F. F.)给出了选择公理的明确表达,并用之证明了每个集合是可被良序的.不久,又证明了良序定理与选择公理是等价的.由良序定理可知,每一集合序同构于某个序数,又可基等价于某个基数,从而给人们带来了极大的方便,例如,可以在任何集合上应用超穷归纳的证明方法.

佐恩引理(Zorn's lemma) 选择公理的一个等价命题.该引理断言:任给非空半序集,若其中每个全序子集(有时又称为链)都有上界,则该半序集有极大元.这条引理在近代数学中有广泛应用,许多用选择公理证明的命题,使用佐恩引理常常显得更方便.例如,以下在代数、泛函、拓扑中出现的重要定理都是直接应用佐恩引理的结果:每个线性空间必存在基底;每个域的代数闭包存在且惟一;哈恩-巴拿赫扩张定理:任给线性空间的子空间上的线性泛函,必可扩张为全空间上的线性泛函;吉洪诺夫乘积定理:紧空间的拓扑乘积也是紧空间.

佐恩引理首先作为定理被德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年所证明.20年后,佐恩(Zorn,M.)重新发现了它,证明了该命题与选择公理等价(1935年).此后,又利用它证明了任何集是可比较的,即任何集 A,B,必有 $A\leqslant B$ 或 $B\leqslant A$(1944年).称之为"引理",完全是由于历史的沿袭.

豪斯多夫极大原理(Hausdorff maximality principle) 选择公理的一种等价形式.该原理断言:每个非空半序集必包含一个极大全序子集.豪斯多夫极大原理与佐恩引理密切相关,两者都对半序集中具有某些性质的元素(或子集)的存在性做出判断,因而广泛地应用于数学的各分支.该原理由德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1904年利用选择公理加以证明,实际上它与选择公理等价.

图基引理(Tukey's lemma) 选择公理的一种等价形式.设有集合之集 $\mathscr{A}$,若任一集合 A 属于该集 $\mathscr{A}$,当且仅当集合 A 的每个有穷子集都属于该集 $\mathscr{A}$,则称集 $\mathscr{A}$ 具有有穷特征.例如,一给定线性空间的所有线性无关组构成的集即具有有穷特征.图基引理断言,每个具有有穷特征的非空集必有集合之间包含关系下的极大元.可以证明,图基引理与佐恩引理等价,因而也与选择公理等价.因为有许多概念是用有穷性质定义或由有穷时的性质推广至无穷的,所以,要断言极大元的存在性,使用图基引理就甚为方便了.证明"任一线性空间都有基底"即是例证.

分球怪论(the"paradoxical" decomposition of a ball) 亦称巴拿赫-塔尔斯基悖论.一个著名悖论.是在承认选择公理时得到的一个与人们的直觉相悖的结论:利用选择公理,可以将一球体切割成有限多块,然后重新拼合而得到与原球同样大小的两个球.之所以得到如此奇怪的结论,是由于在选择公理之下,存在勒贝格不可测集,而以上所作切割得到的小块,正是一些不可测集.这样,在重新拼合它们时,就可以使其测度发生变化,致使1个单位体积变为2个单位体积了.该怪论虽然在逻辑上不导致矛盾,但由于它与人们的直觉直接冲突,所以成为反对使用选择公理的最有力的根据.

1914年,德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)给出球面的一种奇异分解,基于这种分解,波兰数学家巴拿赫(Banach,S.)与波兰学者塔尔斯基(Tarski,A.)于1924年证明了分球怪论.当然,他们的工作皆是在选择公理的前提下进行的.

巴拿赫-塔尔斯基悖论(Banach-Tarski paradox) 即"分球怪论".

可数集选择公理(the axiom of choice for denumerable sets) 简称 AC_ω.选择公理的一种减弱形式.设 $\mathscr{F}$ 是可数集($\mathscr{F}$ 的元素是任意非空集),则此类 $\mathscr{F}$ 上存在选择函数,此即为可数集选择公理.若考虑 $\mathscr{F}$ 是有限集的情形,则在 ZF 系统中可证 $\mathscr{F}$ 上存在选择函数.对之稍作加强,就成为可数集选择公理.此公理弱于选择公理 AC,且 AC_ω 不蕴涵 AC,但在 ZF 系统中不可证明 AC_ω.人们甚至已经证明,当可数集 $\mathscr{F}$ 中的元素是实数的无穷集时(美国数学家科恩(Cohen,P.J.),1963),或是实数集合的二元集时(美国数学家费弗曼(Fefferman,C.),1965),AC_ω 仍在 ZF 系统中不可证明.虽然如此,这种弱形式的选择公理却较易于为反对者所接受.其间并没有什么逻辑上的理由,完全是人们的一种感觉.

在许多使用选择公理的场合,尤其是在分析等学科中,实际上只需使用可数集选择公理就足够了.例如,假定可数集选择公理成立,则可证:可数个可数集合之并仍是可数集合(这一事实广泛地应用于实分析和测度论中);每个无穷集合必包含一可数子集,亦即每个戴德金有限集是有限集;ω_1 是正则序数.在描述集合论中,可数集选择公理是必不可少的,同时,在许多情况下,可数集选择公理也就足够了.

n 元集合族选择公理(the axiom of choice for family of sets that have exactly n elements) 简称 C_n.选择公理的一种减弱形式.对于恰含 n 个元素的集合所形成的族,该公理断言其上存在一选择函数.C_2 的一个直观例子就是英国数理逻辑学家罗素(Russell,B.A.W.)所说的"在无穷多双袜子中,从每双中选出一只".起初是波兰学者塔尔斯基(Tarski,A.)对 C_n 的研究,十分巧妙地证明了 C_2 蕴涵 C_4.以后,人们还证明了,当且仅当 $n=1,2,4$ 时,C_2 蕴涵 C_n.此种类型的选择公理在公理集合论中作用不大.研究哪些 C_n 组合在一起可以蕴涵另一些 C_n,成为组合数学中的研究课题.对此尚未得到很好的结果.一个显然的结果是,对任何正整数 k,C_{kn}蕴涵 C_n.

ω 相依选择公理(the axiom of ω dependent choices) 简称 DC_ω.选择公理的一种减弱形式.该公理断言:设 A 是一个集合,R 是 A 上的二元关系,若对每个 $x\in A$,存在 $y\in A$ 满足 xRy,则存在 A 中的元素序列 $\{x_n|n<\omega\}$,使得 $x_0=u$(A 中任一指定元素),并且对所有的 $n<\omega$,x_nRx_{n+1}.因为每次选择的 x_n,要依赖于前面已选好的元素 x_{n-1}(因而依赖于前面的所有元素),所以称之为"相依"选择公理.该公理由德国学者贝尔奈斯(Bernays,P.)于1942年提出.他还证明了,在 ZF 中,选择公理 AC 蕴涵 ω 相依选择公理 DC_ω.DC_ω 蕴涵可数集选择公理 AC_ω.廷森(Jensen,R.)于1966证明了 AC_ω 不蕴涵 DC_ω,又由于可证明 DC_ω 不蕴涵 AC_{ω_1}(ω_1 选择公理:任何含有 ω_1 个集合的集上存在选择函数),又 AC 蕴涵 AC_{ω_1}是显然的,所以知 DC_ω 不蕴涵 AC.利用 DC_ω 可证明如下结论:集合上的全序 S 不是良序之充要条件是存在 S 序之下的"无穷倒退"序列(若对所有 $n<\omega$,有 $z_{n+1}Sz_n$,则称$\{z_n|n<\omega\}$是在 S 序之下的无

穷倒退序列).

良序集选择公理(the axiom of choice for well-ordered sets) 简称 AC_ω. 选择公理的一种减弱形式. 该公理断言:在每个良序集(但其元素不一定被良序)上存在选择函数. 延森(Jensen,R.)于 1967 年证明了良序集选择公理 AC_{ω_0} 蕴涵 ω 相依选择公理 DC_ω,但反向蕴涵不成立.

戴德金集合(Dedekind's sets) 一种特殊集合. 指没有可数(无穷)子集的无穷集合. 因为在选择公理之下,任何无穷集合都有可数子集,所以,戴德金集合只能在没有选择公理的系统中讨论. 没有选择公理时,甚至不能证明无穷集 a 的幂集 $P(a)$ 包含一可数无穷子集. 但是,波兰学者塔尔斯基(Tarski,A.)于 1924 年证明了(不用选择公理)一个集合 a 是无穷集,当且仅当 a 的幂集的幂集 $PP(a)$ 包含一个可数无穷子集.

选择公理的相容性(the consistency of the axiom of choice) 选择公理的重要特性之一. 指选择公理不会导致逻辑矛盾的特性. 由于分球怪论等与人们直觉相悖结论的出现,对选择公理是否会导致其他逻辑矛盾产生了严重怀疑,于是,研究它的相容性成为紧要的任务. 用哥德尔不完全定理只能研究选择公理对集合论公理系统 ZF 的相对相容性,即由 ZF 系统的相容性证明 ZF+AC(ZFC)的相容性. 该问题由美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)于 1939 年解决,他用两种在 ZF 系统中构造 ZFC 模型的方法(内模型法)证明了这种相对相容性. 第 1 个模型称为可构造模型 L,L 由所有可构造集组成,可构造集是由空集出发,用各种集论运算逐次构造得到的集合. L 中成立 ZF 的所有公理;另一方面,L 中的所有集合可以依其被构造的前后定义一个良序,所以在该模型中,选择公理成立. 第 2 个模型是遗传序数可定义模型 HOD(hereditarily ordinal-definable). HOD 中的元素是可用包含序数作参数的公式定义出的集合,该集合的元素、该集合的元素的元素等也都是可如此定义的集合. 模型 HOD 在集论运算下封闭,它满足 ZF 的所有公理. 另外,因为可以将定义集合的所有可能方式加以枚举,故可用这一枚举及序数参数的自然良序来构造 HOD 上的良序,再加之 HOD 中元素的元素仍是 HOD 的元素,于是选择公理在 HOD 中成立.

选择公理的独立性(independence of the axiom of choice) 选择公理的重要特性之一. 指选择公理不可由其他集合论公理推导出来的特性. 自 1939 年美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)证明了选择公理相对于 ZF 公理系统的相容性之后,又提出选择公理对于 ZF 公理系统是否独立的问题. 直到 1963 年,美国数学家科恩(Cohen,P. J.)引进一种构造模型的强有力方法—力迫法,才使选择公理的独立性问题得以完满解决.

要构造一个模型,使得选择公理在其中不成立这样一种想法,可以追溯到 20 世纪 20 年代的德国学者弗伦克尔(Fraenkel,A. A.),他的思想于 20 世纪 30 年代被波兰数学家莫斯托夫斯基(Mostowski,A.)吸取和发展. 莫斯托夫斯基引入了称为置换模型的结构,使选择公理在其中为假. 但是,并没有证明选择公理(对于 ZF 公理系统)的独立性,因为这个结构的基础全域不是集合论全域,而是包罗了原子在内. 事实上,在上述置换模型中,所找到的一个不能被良序的集合(它被用来否定选择公理)是原子的集合,而不是实数集或其他真正数学上的集合. 然而这个思想被科恩用来与力迫法相结合,就彻底解决了选择公理的独立性问题. 他的做法是:在 ZF 系统的基础模型 M 之上只附加有对称名的那些新集,得到 M 的对称扩张的结果模型. 在结果模型中,存在由整数集组成的无穷集,它不能被良序,此集就是戴德金集合的例子. 又因整数集可等价地看做实数,这就是实数的戴德金集合的例子. 戴德金集合的存在性是当选择公理不成立时才有可能的,从而证明了选择公理在结果模型中不能为真.

选择公理对于 ZF 公理系统的独立性表明,存在着在 ZF 系统之上加入选择公理的弱形式的可能(如不独立,这种加入弱形式的办法实属无效),甚至存在在 ZF 系统之上加入与选择公理相矛盾命题为公理的可能(如不独立,这种加入将导致矛盾).

置换模型(permutation models) 见"选择公理的独立性".

不用选择公理的数学(mathematics without the axiom of choice) 一类数学体系及模型. 指不使用选择公理可以推导出的数学体系以及不满足选择公理的集合论模型. 选择公理虽然在现代数学中扮演了十分重要的角色,然而,由于它的非构造性的特点,使人们对它的真实性一直有所争论. 这样,考察不使用选择公理能得出一些什么结论,当然是一件很有意义的工作. 涉及实数的例子是最令人感兴趣的. 以色列学者索洛韦(Solovay,R. M.)构造了一个集合论模型,其中选择公理不成立,因而消除了使用选择公理才会有的不自然反例. 在这个模型中,每个实数集合是勒贝格可测的,不存在不连续的可加函数等;同时,该模型中 ω 相依选择公理成立,这样,勒贝格测度理论和描述集合论中的标准定理仍然成立. 美国数学家科恩(Cohen,P. J.)构造的模型中包含了一个实数的戴德金集,即没有可数子集的无穷集合;由之可构造一个函数,满足连续函数的序列型定义,却不满足连续函数的邻域型定义. 劳切利(Läuchli,H.)还构造了模型,其中一个是没有基底

的向量空间；另一个是存在两个不同基数的基底的向量空间；还有一个是没有代数闭包的域. 在没有选择公理时，基数理论也变得复杂起来. 首先，基数的定义要作修改. 任给集合 x，若 x 可良序，仍可用等价于 x 的最小序数来定义 x 的基数 $|x|$；若不然，$|x|$ 定义为与 x 等价的、具有最小秩的所有集合之集. 此定义是斯科特(Scott，D. S.)于 1955 年给出的. 这样定义的合理性的根据是：由正则公理，上述具最小秩的所有集合，确实构成一个集合，而不是真类. 在此定义下的基数，不再具有三分性，即有的基数之间无法比较大小. 并且，这样定义的基数具有一些奇妙的结果，例如，存在一无穷基数 m，它本身以及 2^m 都是不能证明比 $\aleph_0$ 大的戴德金基数. 又如，有模型使得 $\aleph_1$ 是奇异的，即存在递增序列 $\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots\}$，其极限是 ω_1.

序型(order type)　公理集合论的基本概念之一. 如果有序集合 $\langle A,R\rangle$ 与 $\langle B,S\rangle$ 是序同构的，即存在一一对应 $f:A\to B$，满足 $\forall a_1\in A\forall a_2\in A(a_1Ra_2\leftrightarrow f(a_1)Sf(a_2))$，则称 $\langle A,R\rangle$ 与 $\langle B,S\rangle$ 是同一序型的. 人们特别重视良序集的序型，可以证明，任何良序集 $\langle A,R\rangle$ 都与惟一的一个序数 α 同序型. 以后就称该序数 α 为该良序集合的序型，记为 $\alpha=\mathrm{ord}(A,R)$.

良序集合的序型(order type of well ordered sets)　见“序型”.

序数(ordinal number)　公理集合论的基本概念之一. 序数理论基本上就是良序集理论. 德国数学家康托尔(Cantor，G. (F. P.))最早考虑如何用集合的概念来定义序数，他认为，序数就是由一个(良序化了的)集合 M 中抽象掉其元素的各种属性，只保留它们之间的次序关系所得到的一般概念，M 的序数记为 $\overline{M}$. M 上的一横表示一次抽象. 但这一叙述只说明了序数应该如何，却没有说明序数究竟怎么样定义. 1903 年，英国数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)把序数定义为良序集在序同构下的等价类，该定义有着直观的意义. 按此定义，序数 1 就是所有良序化了的单元素集组成的类，序数 2 就是所有良序化了的两元集组成的类等. 但这一定义从 ZF 公理集合论的角度看却有着致命的弱点：它们都是真类而不是集合，即不能成为 ZF 系统的个体. 人们要想对之进行研究和计算，当然需要序数是系统内的个体. 在 ZF 系统中，定义序数的办法是属于美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann，J.)的. 即将序数定义为等价类中的一个具体代表元素，而不是该等价类本身. 此被选出的代表元素是一个被 $\in$ 关系良序化的集合，并且是下列意义下可传的：A 可传指 A 的每个元素都是 A 的子集，亦即 A 的元素的元素仍是 A 的元素. 这样，$\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\cdots$ 都是序数，它们被依次记为 $0,1,2,3,\cdots$ 而 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ 等则不是序数. 这样定义的序数有许多好的性质，便于在序数上定义符合人们直觉的大小关系以及各种运算. 例如，当 x 是序数，$y\in x$ 时，则 y 必为序数. 又如，除了有属于关系 $0\in 1\in 2\in\cdots$ 之外，还有包含关系 $0\subset 1\subset 2\subset\cdots$ 最小的无穷序数 ω 是所有有限序数之集合：$\omega=\{0,1,2,\cdots\}$. 利用后继序数和极限序数的概念，还可以定义更大的序数. 所有序数构成的类常记为 On，康托尔最初定义序数时认为 On 也是序数，如果对任何序数 α,β，定义 $\alpha<\beta=\alpha\in\beta$，则“$<$”关系为 On 上的一个良序关系. 若 On 为序数，则 On 将是最大的序数，但 $On\cup\{On\}$ 也是序数，这与 On 为最大序数矛盾. 康托尔于 1895 年发现这一矛盾，但未曾公开发表，后来由意大利学者布拉利·福尔蒂(Burali-Forti，C.)于 1897 年再次发现并公之于世，这就是著名的布拉利·福尔蒂悖论. 在 ZFC 公理系统中，显然 On 不是集合，从而也不可能为序数，故这一悖论在 ZFC 公理系统中不成立.

布拉利·福尔蒂悖论(Burali-Forti's paradox)　见“序数”.

后继序数(successor ordinal)　一种序数. 设 β 是序数，称 $\beta\cup\{\beta\}$ 为 β 的后继. 可以证明，β 是序数，则 β 的后继也是序数，记为 $\beta+1$. 如果由序数 α，可以找到序数 β，使 α 为 β 的后继，即 $\exists\beta(\alpha=\beta+1)$，则称 α 为后继序数. 例如，自然数 $1,2,3,\cdots$ 都是后继序数，但 $0,\omega$ 不是后继序数.

极限序数(limit ordinal)　一种序数. 若 $\alpha\neq 0$ 且 α 不是后继序数，则称 α 为极限序数. 极限序数不直接跟在某个序数之后，因此它有这样的性质：若 $\beta<\alpha$，则必有序数 γ 满足 $\beta<\gamma<\alpha$. 因而极限序数 α 又满足

$$\alpha=\sup_{\beta<\alpha}\beta=\bigcup_{\beta<\alpha}\beta.$$

人们经常见到的极限序数有 $\omega,2\omega,\omega^\omega$ 等.

自然数(natural number)　一种序数. 指有限序数. 在 ZF 系统中，人们可以避开“有限”概念而定义自然数. 称 α 为自然数，指 $\forall\beta\leqslant\alpha(\beta=0\vee\beta$ 是后继序数). 由这个定义知，只有 $0,1,2,\cdots$ 是自然数，$\omega,\omega+1,\cdots,2\omega\cdots$ 都不是自然数. 公理集合论中把 0 也作为自然数处理，有一定的方便之处. 所有自然数形成的集合就是序数 ω，但是 ω 的存在性是由无穷公理所保证的.

有限集(finite set)　一种特殊集合. 有限集似乎可以定义为元素个数为有限的集合，但这一定义本身就用了有限这一概念. 德国数学家康托尔(Cantor，G. (F. P.))最初将其定义为能与自然数集合等势的集合，但这一定义又依赖于自然数的概念. 1888 年，德国数学家戴德金(Dedekind，(J. W.)R.)

给出了有限集的另一种定义方式，他将有限集定义为不能与其真子集等势的集合. 然而在利用这一定义证明某些有限集的性质时需要选择公理. 英国逻辑学家、数学家怀特海(Whitehead, A. N.)与英国数理逻辑学家罗素(Russell, B. A. W.)于1912年给出的下列有限集的定义克服了这一缺点. 给定一个集合 a，设 u 为 a 的幂集的一个子集，若 u 满足：

1. $0\in u$；

2. 对每个 $x\in u, y\in a$，有 $x\cup\{y\}\in u$；

则称 u 为 a 的一个归纳集. 若 a 属于它的每个归纳集，则称 a 为有限集. 怀特海与罗素证明，当且仅当选择公理的一种情形 AC_ω 成立时，他们的定义与戴德金的定义等价(参见“可数集选择公理 AC_ω”). 不是有限集的集合称为无限集. 在 ZF 公理系统中，称满足戴德金有限集定义的集合为戴德金有限集，否则称为戴德金无限集.

无限集(infinite set)　见“有限集”.

戴德金有限集(Dedekind finite set)　见“有限集”.

戴德金无限集(Dedekind infinite set)　见“有限集”.

可数集(countable set)　一种特殊集合. 能与自然数集 ω 建立一一对应关系的无限集称为可数集. 不能与自然数集建立一一对应关系的无限集称为不可数集.

不可数集(uncountable set)　见“可数集”.

序数算术(ordinal arithmetic)　序数的基本运算. 指序数的加法、差、乘法、乘方运算. 序数的加法运算递归定义为：

$$\alpha+0=\alpha;$$
$$\alpha+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+1;$$

当 β 为极限序数时，

$$\alpha+\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma).$$

序数的加法运算具有下列主要性质：

1. (加法运算封闭)若 α,β 为序数，则 $\alpha+\beta$ 为序数.

2. $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$.

3. 若 $\alpha<\beta$，则 $\alpha+\gamma<\gamma+\beta$.

4. 若 $\alpha\leqslant\beta$，则 $\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$.

5. 若 $\alpha\leqslant\beta$，则存在惟一的序数 γ，使 $\alpha+\gamma=\beta$.

6. (加法的结合律) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

注意序数加法不满足交换律，如 $1+\omega\neq\omega+1$.

序数的差运算定义为

$$\alpha\dot{-}\beta=\bigcap\{\gamma\mid\beta+\gamma\geqslant\alpha\}.$$

序数的乘积运算递归定义为：

$$\alpha\cdot 0=0;$$
$$\alpha\cdot(\beta+1)=(\alpha\cdot\beta)+\alpha;$$

当 β 为极限序数时，

$$\alpha\cdot\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha\cdot\gamma).$$

序数的乘法运算具有下列基本性质：

1. (乘法运算封闭)若 α,β 为序数，则 $\alpha\cdot\beta$ 为序数.

2. $0\cdot\alpha=\alpha\cdot 0=0$, $1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha$.

3. 若 $\alpha<\beta$ 且 $\gamma>0$，则 $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\beta$.

4. 若 $\gamma\cdot\alpha=\gamma\cdot\beta$ 且 $\gamma>0$，则 $\alpha=\beta$.

5. 若 $\alpha\leqslant\beta$，则 $\alpha\cdot\gamma\leqslant\beta\cdot\gamma$.

6. $\alpha\cdot\beta=0$，当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$.

7. (乘法对加法的分配律)

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

8. (乘法的结合律) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

9. 若 $\beta\neq 0$，则存在惟一的 γ,δ，使 $\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta$ 且 $\delta<\beta$.

注意序数乘法不满足交换律，如 $2\cdot\omega\neq\omega\cdot 2$.

序数的乘方运算递归定义如下：

$$\alpha^0=1;$$
$$\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha;$$

当 β 为极限序数时，

$$\alpha^\beta=\begin{cases}\bigcup_{\gamma<\beta}\alpha^\gamma & (\alpha\neq 0),\\ 0 & (\alpha=0).\end{cases}$$

序数的乘方运算具有下列基本性质：

1. $0^0=1$, $0^\beta=0(\beta>0)$, $1^\beta=1$.

2. 若 $\alpha\geqslant 1$，则 $\alpha^\beta\geqslant 1$.

3. 若 $\alpha<\beta$, $\gamma>1$，则 $\gamma^\alpha<\gamma^\beta$.

4. 若 $\alpha<\beta$，则 $\alpha^\gamma\leqslant\beta^\gamma$.

5. $\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$.

6. $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$.

基数(cardinal number)　亦称势. 公理集合论的基本概念之一. 是度量集合大小的量. 在德国数学家康托尔(Cantor, G. (F. P.))之前，无穷只是一个很模糊的概念，人们无法区分两个无穷集的大小. 1873年，康托尔发现自然数集与实数集之间不存在一一对应的关系，由此意识到可以用一一对应作为度量无穷集合大小的尺度. 他把集合的大小称为集合的势，记为 $\overline{\overline{x}}$，x 为一集合. 并且他定义，若集合 A 与集合 B 之间可建立一一对应关系，则称 A 与 B 等势，记为 $A\approx B$. 然而康托尔对势没有作非常严格的定义，而将集合的势定义为从集合中抽去元素特性及顺序特性得出的一般概念. 德国数学家、数理逻辑学家弗雷格(Frege, (F. L.) G.)与英国数理逻辑学家罗素(Russell, B. A. W.)将集合的基数(势)定义为在等势关系下该集合所在的等价类. 这一定义虽然比较严格，但这样定义的基数不是 ZF 公理集合论中集合的基数. 在 ZF 公理集合论中，按如下方法定义集合 x 的基数 $|x|$：

1. 若 x 是可良序化的，则定义 $|x|$ 为最小的与 x 等势的序数.

2. 若不然，则定义 $|x|$ 为与 x 等势的真类中所有具有最小秩的元素的全体所组成的集合.

如果某个集合的基数是 a，则如此定义的基数满足 $|x|=|y|$，当且仅当 $x\approx y$. 定义 1 是由美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)于 1928 年引入的；定义 2 则是上述弗雷格与罗素思想的翻版. 如果存在从集合 x 到 y 的单射，则定义 $|x|\leqslant|y|$. 如果 $|x|\leqslant|y|$ 且 $|y|\leqslant|x|$，则 $|x|=|y|$. 这就是著名的康托尔-伯恩施坦定理. 对于任意的集合 x 和 y，有 $|x|\leqslant|y|$ 或者 $|y|\leqslant|x|$，当且仅当选择公理成立. 可良序化的集合的基数称为良序基数. 每一个良序基数都是序数. 因此，若设定某一选择公理，则每一个基数都是序数. 对任意的序数 α，存在大于 α 的最小良序基数，记为 α^+(参见"后继基数"). 由此可见，所有的良序基数构成序数全域的一个无界的子类，即为真类. 因此，可以定义一个从序数全域到所有无穷良序基数构成的真类上的保序映射 $\aleph$(参见"良序关系")，使得 $\forall\alpha<\beta(\aleph(\alpha)<\aleph(\beta))$，式中 $\aleph$ 读做"阿列夫". 还常用 $\aleph_\alpha$ 代替 $\aleph(\alpha)$，表示第 α 个无穷良序基数，用 ω_α 表示 $\aleph_\alpha$ 的序型，故 $\aleph_0=\omega_0=\omega$，$\aleph_{\alpha+1}=\omega_{\alpha+1}=\aleph_\alpha^+$. 若 α 为极限序数，则 $\aleph_\alpha=\omega_\alpha=\sup\{\omega_\rho|\rho\in\alpha\}$. $\aleph_\alpha$ 是极限基数，当且仅当 α 是极限序数.

后继基数(successor cardinal)　基数的一种. 设 α 为一个序数，令 α^+ 表示大于 α 的最小基数. 设 K 为一个基数，若存在序数 α，使 $K=\alpha^+$，则称 K 为后继基数，所有非 0 有限基数均为后继基数，0 和 ω 不是后继基数. 在选择公理之下，任何基数都是 $\aleph$，于是 $\aleph_1$，$\aleph_2$，$\aleph_3$，$\aleph_{\omega+1}$ 等都是后继基数，但 $\aleph_0(=\omega)$，$\aleph_\omega$ 都不是后继基数. 不是后继基数的无穷基数为极限基数.

极限基数(limit cardinal)　见"后继基数".

共尾度(cofinality)　公理集合论术语. 指良序集或线性序集的一个无界子集的序型. 设 $\langle A,R\rangle$ 是线性序集，且 $B\subseteq A$，如果 $\forall x\in A(x\in B\vee\exists y(xRy))$，则称 B 为 A 的共尾子集(通常称为 A 的无界子集). 对于包含一个可良序化的共尾子集的线性序集，定义它的共尾度为同构于它的一个共尾子集的最小序数. 例如，自然数集是有理数集的可良序化的共尾子集，故有理数集有共尾度. 实际上，有理数集的共尾度为 ω. 任意一个良序集，特别地，每一个序数，都有共尾度. 如果假定选择公理，则每一个线性序集都有共尾度. 线性序集 (A,R) 如果有共尾，则它的共尾度记为 $cf(A)$，设 α 为序数，则 $cf(\alpha)\leqslant\alpha$. 例如，后继序数 $\alpha+1$ 的共尾度为 1. ω 的共尾度 $cf(\omega)=\omega$. 一般地，如果 B 是线性序集 (A,R) 的共尾子集，则 B 有共尾度，当且仅当 A 有共尾度，且

$$cf(B)=cf(A).$$

共尾子集(cofinal subsets)　见"共尾度".

无界子集(unbounded subsets)　见"共尾度".

正则基数(regular cardinals)　一种特殊基数. 如果 α 为极限序数，且 $cf(\alpha)=\alpha$，则称 α 为正则的. 正则的基数称为正则基数. 不正则的无穷基数称为奇异基数. 由于正则的序数一定是基数，故人们对正则的序数、正则序数、正则的基数和正则基数这几个概念不加区别地使用. 通常也有人将 ω 称为正则基数，将 $\aleph_{\alpha+1}$ 称为正则序数. 正则性是基数的重要概念之一，它由德国数学家豪斯多夫(Hausdorff, F.)于 1908 年引入. 关于正则基数的性质曾引申出许多重要的集合论命题，其中最重要的问题是：是否能在 ZF 系统中证明存在大于 ω 的正则基数？一方面，由选择公理知，$\aleph_1,\aleph_2,\cdots,\aleph_{\alpha+1}$ 都是大于 ω 的正则基数. 另一方面，以色列集合论学家吉帖克(Gitik, M.)于 1979 年在假定存在某种大基数真类的情况下，证明了不存在大于 ω 的正则基数，也是和 ZF 系统相容的.

奇异基数(singular cardinals)　见"正则基数".

正则序数(regular ordinals)　见"正则基数".

基数算术(cardinal arithmetic)　基数的基本运算. 指基数的加法、乘法及乘方运算. 两个基数 κ 与 λ 的和，指将 κ 的元素与 λ 的元素合并起来构成的集合的基数，即 $\kappa+\lambda=|\kappa\times\{0\}\cup\lambda\times\{1\}|$. 基数的加法运算满足交换律与结合律. 两个基数 κ 与 λ 的积，指它们的笛卡儿积的基数，即 $\kappa\cdot\lambda=|\kappa\times\lambda|$. 基数乘法满足交换律、结合律以及对加法的分配律. 基数乘方运算对应于集合的乘方运算，即 $\kappa^\lambda=|{}^\lambda\kappa|$，其中 ${}^\lambda\kappa$ 表示所有从 A 到 B 的函数的集合，乘方运算满足：

1. $((\kappa)^\mu)^\lambda=\kappa^{\mu\cdot\lambda}$.
2. $(\kappa\cdot\mu)^\lambda=\kappa^\lambda\cdot\mu^\lambda$.
3. $\kappa^{\mu+\lambda}=\kappa^\mu\cdot\kappa^\lambda$.

对无穷基数而言，基数具有下列独特的性质：

1. $\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.
2. $\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta=\aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.
3. 若 $\beta\leqslant\alpha$，则 $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}=2^{\aleph_\alpha}$.

基数的加法运算和乘法运算还可以扩充到无穷多个基数的加法与乘法运算. 设 $\langle\kappa_i:i\in I\rangle$ 为一个基数序列，I 为指标集，定义

$$\sum_{i\in I}\kappa_i=\left|\bigcup_{i\in I}(\kappa_i\times\{i\})\right|,$$

$$\prod_{i\in I}\kappa_i=\left|\prod_{i\in I}\kappa_i\right|,$$

式中 $\prod_{i\in I}\kappa_i$ 表示 $\langle\kappa_i:i\in I\rangle$ 的广义笛卡儿 n 乘积.

柯尼希引理(König lemma)　亦称柯尼希不等式.公理集合论的基本定理之一.设$\{k_i:i\in I\}$与$\{\lambda_i:i\in I\}$为两个基数序列,I为共同的索引集.若对任意$i\in I,k_i<\lambda_i$,则

$$\sum_{i\in I}k_i<\prod_{i\in I}\lambda_i.$$

这一结论由柯尼希(König,J.)于1905年给出.如果对每个$i\in I$,取$\kappa_i=1,\lambda_i=2$,令$\lambda=|I|$,则柯尼希引理变为$\lambda<2^{\lambda}$,即康托尔定理,因此柯尼希引理是康托尔定理的推广.柯尼希引理的重要性在于它给出了基数运算的一个严格不等式,这在基数运算定律中并不多见.柯尼希引理有一些常用的推论,如:

1.对任何基数$\kappa,cf(2^{\kappa})>\kappa$.

2.对任何无穷基数$\kappa,\lambda,cf(\lambda^{k})>\kappa$.

3.对任何无穷基数κ,若$cf(\kappa)\leqslant\lambda$,则$\kappa^{\lambda}>\kappa$.式中$cf(\kappa)$表示$\kappa$的共尾数.

人们常将柯尼希无限引理称为柯尼希引理.

连续统假设(continuum hypothesis)　简称CH.公理集合论术语.指连续统的势的一个假设.它是德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))于1878年提出的,通常称直线上所有点的集合为连续统,它的势(基数)记为c.这个势与所有实数组成的集合的势相等,也与自然数的所有子集组成的集合的势相等.但这个势究竟有多大?却是一个不易回答的问题.远在亚里士多德时期,人们认为无穷集合无大小之分,即所有的无穷集都是等势的,这自然也就不存在连续统的势有多大的问题.直至两千年之后的1874年,康托尔证明了:任一集合A的幂集$P(A)$的势都大于A的势,这才指出上述观点是错误的.现在要问,连续统的势(它等于$P(N)$的势,N是自然数集合,也即$2^{\aleph_0}$,这里$\aleph_0$是第1个无穷基数)与可数无穷集的势$\aleph_0$之间是否有其他势?康托尔猜测,这两者之间不存在其他的势.用基数的术语,即是任何基数k不可能满足$\aleph_0<k<2^{\aleph_0}$,此即连续统假设.若承认选择公理,则因任何无穷基数等势于一个$\aleph$,连续统假设便成为$2^{\aleph_0}=\aleph_1$,即实数集等势于最小的一个不可数基数.将连续统假设记为CH.在数学研究的许多领域中,CH是不可或缺的.例如,在研究实数子集的测度性质与拓扑性质时,其中有一个基本问题:“与实数集R不等势的子集是否测度必为零?是否属于第一范畴(第一纲)?”在没有CH时,不能给以确定的回答.数学家在研究这类问题时,常常承认CH为附加公理,事实上,CH与下述命题K和L的合取等价:

K:与R不等势 的R的子集,必是第一范畴集.

L:存在一与R等势的R的子集,和每一无处稠密集的交都是至多可数的.

CH也与下述命题M和S的合取等价:

M:与R不等势的R的子集测度为零.

S:存在一与R等势的R的子集,和每一零测度集的交都是至多可数的.

CH的真与假,直接给数学带来重大影响,波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński,W.)于1934年就曾列举了12个与CH等价的数学命题,又曾列举了CH的82个推论,近年来,又有新的推论出现.正因为连续统问题是数学中很基础的问题,长期以来,它一直是数理逻辑,特别是其中公理集合论分支关心的重点.连续统假设的原始形式是康托尔1874年首次宣布的,当时虽未给出证明,但他肯定这个证明是不难给出的.他写道:“这个定理通过归纳的过程将会被搞清楚”.从那时起,康托尔就试图做出这样一个证明.例如,1883年他又宣称,他希望不久用一个精确的证明来正面地回答这个问题.一年后,在其著作的结尾,他再次允诺在稍后的续篇中给出这个证明.但是,直至康托尔1918年去世,他也未能给出这个预期的证明.1900年,德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)在著名演讲《数学问题》中列举了23个未解决的数学难题,其第1个就是“$2^{\aleph_0}$等于$\aleph_1$?”.1925年,希尔伯特曾提出一个试图解决CH的大纲,然而,后来人们发现他的大纲是错误的,因为他使用了“自然数集合的每一个子集合都是递归集合”这一命题.但是,随着递归函数论对算法概念的精确化,到20世纪30年代,发现并非自然数集合的一切子集合都是递归的.直到1939年,美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)提出可构造集的概念,才用内模型法证明了广义连续统假设GCH(因而CH)是相对于ZFC系统相容的;到1963年,美国数学家科恩(Cohen,P.J.)创造了力迫法,用构造外模型的办法证明了CH(因而GCH)相对于ZFC系统是独立的.这就是说,仅在公理集合论系统ZFC中无法判定CH与GCH的真假.哥德尔早在1947年就曾猜测,在ZF这样的系统中CH是不可判定的.接着,他又说,从已承认的公理中给出一个不可判定性的证明,并未解决问题,因为“集合论的概念和定理描述了一些完全确定的实在世界,在其中,康托尔的猜想一定或是真的或是假的.因此,从今天承认的公理所得到的它的不可判定性,只能意味着这些公理并未包括那个实在世界的完全描述”.从这个认识出发,人们一直在寻找新的公理或新的公理系统,以求可以判定CH乃至GCH的真假.但其进展缓慢.后来知道,就是附加像可测基数存在公理那样的直观上可靠的公理,仍然无法推出CH.因而许多数学家认为CH不可信,想用新的公理取代CH.在这一方面,美国学者马丁(Martin,D.A.)等人在1970年提出的马丁公理应该是最佳的选择.目前,其研究仍在继续中.

连续统(Continuum) 见"连续统假设".

广义连续统假设(generalized continuum hypothesis) 简称 GCH. 连续统假设的推广. 是对一般无穷基数的幂的一种假设,它可以叙述为:对任何无穷集合 A,不存在集合的势大于 A 的势而小于幂集 $P(A)$的势. 用基数的术语可以表述为:若 m 是无穷基数,则不存在基数 n 满足 $m<n<2^m$. 它又等价于:若 m 是无穷基数,则对任何基数 n,若 $m\leqslant n\leqslant 2^m$,则 $n=m$ 或 $n=2^m$. 称此为 GCH(Ⅰ). 若选择公理 AC 成立,则可叙述为:对任何序数 α,有 $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$. 称此为 GCH(Ⅱ). 波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński,W.)于 1947 年证明了 GCH(Ⅰ)等价于 GCH(Ⅱ)与 AC 的合取. 在 GCH 之下,势的幂运算可以简化为

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=\begin{cases}\aleph_\alpha & (\aleph_\beta<cf(\aleph_\alpha)),\\ \aleph_{\alpha+1} & (cf(\aleph_\alpha)\leqslant\aleph_\beta\leqslant\aleph_\alpha),\\ \aleph_{\beta+1} & (\aleph_\beta\geqslant\aleph_\alpha).\end{cases}$$

广义连续统假设在 ZF 系统中是不可判定的(参见"连续统假设").

集合论系统的相对相容性(relative consistency of set-theoretical system) 一种减弱形式的相容性. 一个公理化理论相容(或称协调、一致)是指其公理体系无矛盾. 即在这一理论中不存在一个矛盾的证明. 哥德尔第二不完全性定理指出,没有一个强于公理化算术的公理化理论,可以通过这一理论本身的形式化方法证明其相容性,尤其在 ZF 系统中不可能证明 ZF 系统的相容性. 因此,通常所说的某集合论公理系统相容,一般指该集合论系统相对于另一公理集合论系统相容. 更确切地说,若 Σ_1,Σ_2 为两个集合论公理系统,则在假设 Σ_1 相容的前提下,能在 Σ_1 中证明 Σ_2 相容,这时称 Σ_2 相对于 Σ_1 相容,记为 $con(\Sigma_1)\rightarrow con(\Sigma_2)$, 这里 $con(\Sigma)$表示 Σ 相容.

若记 PA 为佩亚诺算术系统,ZF$-P$ 表示在 ZF 公理系统中去掉幂集公理,ZF$^-$表示在 ZF 系统中去掉正则公理,ZF+CH 表示在 ZF 系统中加上连续统假设,则有:

$con(PA)\rightarrow con(\mathrm{ZF}-P)$;

$con(\mathrm{ZF}^-)\rightarrow con(\mathrm{ZF})$;

$con(\mathrm{ZF})\rightarrow con(\mathrm{ZFC})$;

$con(\mathrm{ZFC})\rightarrow con(\mathrm{ZFC}+\mathrm{CH})$.

集合论命题的相容性(consistency of set-theoretical proposition) 集合论命题的重要性质之一. 指集合论命题相对于某个公理集合论系统的相容性(以下与独立性一起阐述). 设 A 为一个集合论命题,$\sum$ 为某公理集合论系统,如果 $\sum\cup\{A\}$ 相对于 $\sum$ 相容,即 $con(\sum)\rightarrow con(\sum\cup\{A\})$,则称 A 相对于公理系统 $\sum$ 相容(或协调、一致). 若命题 A 及其否定$\neg A$ 均相对于 $\sum$ 相容,则称 A 独立于公理系统 $\sum$. 因此,A 相对于 $\sum$ 相容,表明当 $\sum$ 协调时,A 的否定不能由 $\sum$ 推出;A 独立于公理系统 $\sum$,表明当 $\sum$ 协调时,A 与 A 的否定在 $\sum$ 中均不可证. 通常把 A 相对于 ZF 系统或 ZFC 系统相容(或独立) 简称 A 相容(或独立).

在公理集合论中,证明一个命题相容或独立于某个集合论公理系统,往往具有非常重要的意义. 当一个重要的集合论假说需要作为一条新加公理时,为保证添加这一公理后集合论系统仍然相容,人们首先必须证明该命题相容于原集合论公理系统. 如果考虑简洁性,还需要证明这一命题独立于原公理系统. 近代公理集合论发展的一个主流方向正是证明某些具有重要意义的集合论命题与 ZF 或 ZFC 等集合论公理系统的相容性或独立性. 最著名的相容性与独立性结果有:选择公理相对于 ZF 系统的相容性与独立性、连续统假设相对于 ZFC 系统的相容性与独立性、苏斯林假设相对于 ZFC 系统的相容性与独立性、马丁公理相对于 ZFC 系统的相容性与独立性等. 目前,相容性与独立性证明已成为现代公理集合论的一个重要分支;用于相容性与独立性证明的一些重要方法,如可构造性方法、力迫法已被广泛应用于其他数学领域或集合论分支.

集合论命题的独立性(independence of set-theoretical proposition) 见"集合论命题的相容性".

内模型法(method of inner model) 集合论相对相容性证明的基本方法之一. 设 Σ_1,Σ_2 为集合论语言中的两个公式集,M 为 Σ_1 的一个模型,若存在公式 $A(x)$,使 $N=\{x\mid x\in M,A(x)\}$为 Σ_2 的模型,则称 N 为 M 的内模型. 假定 Σ_1 相容且已知 Σ_1 有模型 M,若能在 Σ_1 下证明存在 M 的一个内模型 N,使 N 为 Σ_2 的模型,则就证明了 Σ_2 对于 Σ_1 相对相容. 通常把这种相对相容性证明方法称为内模型. 美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann,J.)于 1929 年最先使用内模型法证明基础公理的相容性,美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)于 1938 年证明连续统假设与选择公理的相容性时也是采用内模型法. 1951 年至 1953 年,谢泼德森(Shepherdson,J. C.)连续发表三篇论文详细阐述了内模型方法,他指出,对可传模型而言,不能用内模型方法证明连续统假说的独立性. 美国数学家科恩(Cohen,P. J.)于 1963 年通过对内模型方法的局限性分析,发明了相容性与独立性证明的外模型方法,即力迫法.

外模型法(method of outer model) 集合论相容性与独立性证明的主要方法之一. 设 Σ_1,Σ_2 为集合论语言中的两个公式集,M 为 Σ_1 的一个模型,若 $N\supseteq M,N\neq M$,且 N 为 Σ_2 的模型,则称 N 为 M 的一个外模型. 假定 Σ_1 相容且已知 Σ_1 有模型 M,若能

在 Σ_1 下证明存在 M 的一个外模型 N，使 N 为 Σ_2 的模型，则就证明了 Σ_2 对于 Σ_1 相对相容. 通常把这种相对相容性证明方法称为外模型法. 外模型法是美国数学家科恩(Cohen, P. J.)于 1963 年证明连续统假设及选择公理的独立性时发明的. 对内模型法而言，可以构造集合论全域 V 的一个子类(如 WF, L, HOD 等)，使这个子类满足一些特殊的命题，从而证明这些命题的相容性. 然而，人们却不能构造 V 的任何外模型，因为 V 已经包含了所有的集合. 科恩的方法是首先假设 ZF 系统存在一个可数标准集合模型(即标准模型假设)，构造这一集合模型的一个外模型(即兼纳扩充)，以获得相容性结果，然后说明取消标准模型假设并不影响相容性结果的正确性.

集合论模型(model of set theory)　解释集合论语言的系统或结构. 设 M 为非空集合或真类，E 为 M 上的一个二元关系，则结构 $\langle M,E\rangle$ 为集合论语言的一个模型，M 称为模型的域. 这里，集合论全域 V 中的每个集合被解释成 M 中的一个元素，集合的属于关系 $\in$ 被解释成二元关系 E. 对任意集合论语言中的合式公式 φ，模型 $\langle M,E\rangle$ 与 φ 的满足关系 $\langle M,E\rangle\vDash\varphi$，可递归定义如下：

1. 若 φ 为原子公式，则 $\langle M,E\rangle\vDash x=y$，当且仅当 $x=y$；$\langle M,E\rangle\vDash x\in y$，当且仅当 $x\in y$.

2. 若 φ 形如 $\varphi_1\wedge\varphi_2$，则 $\langle M,E\rangle\vDash\varphi_1\wedge\varphi_2$，当且仅当 $\langle M,E\rangle\vDash\varphi_1$ 且 $\langle M,E\rangle\vDash\varphi_2$.

3. 若 φ 形如 $\neg\psi$，则 $\langle M,E\rangle\vDash\neg\psi$，当且仅当 $\langle M,E\rangle\vDash\psi$ 不成立.

4. 若 φ 形如 $\exists x\psi$，则 $\langle M,E\rangle\vDash\exists x\psi$，当且仅当存在 $a\in M$ 使 $\langle M,E\rangle\vDash\psi(a)$.

集合论模型与模型论中定义的模型有着非常密切的关系. 一方面集合论模型只是对集合论语言的解释，因此，它是一种特定语言的模型；另一方面模型论中的模型之论域必须为一集合，而集合论模型的域可以为一真类. 尽管两者有一定区别，但模型论中的许多定理，如完备性定理、LST 定理、紧致性定理等在集合论中均有相应的形式.

相对化(relativization)　模型满足关系的一种表述形式. 设 M 为非空集合或真类，φ 为集合论语言中的合式公式，用 φ^M 表示 φ 到模型 M 的相对化，它可递归定义如下：

1. 若 φ 为原子公式，则 $(x=y)^M$ 成立，当且仅当 $x=y$；$(x\in y)^M$ 成立，当且仅当 $x\in y$.

2. 若 φ 形如 $\varphi_1\wedge\varphi_1$，则 $(\varphi_1\wedge\varphi_2)^M$ 成立，当且仅当 $\varphi_1^M\wedge\varphi_2^M$ 成立.

3. 若 φ 形如 $\neg\psi$，则 $(\neg\psi)^M$ 成立，当且仅当 $\neg\psi^M$ 成立.

4. 若 φ 形如 $\exists x\psi$，则 $(\exists x\psi)^M$ 成立，当且仅当 $\exists x(x\in M\wedge\psi^M)$ 成立.

由上述定义可看出，φ^M 成立等价于 $\langle M,\in\cap M^2\rangle\vDash\varphi$，因此 φ 相对化到 M，相当于集合论公式 φ 到模型 $\langle M,\in\cap M^2\rangle$ 上的解释. 类似于模型论中的术语，对语句集 S，若对任何 $\varphi\in S$，φ^M 成立，则称 M 为 S 的模型. 集合论的相对化处理方法使得人们可以在纯集合论的框架下进行集合论公理的相容性与独立性证明，而不必借助模型论的工具. 设 S，T 为集合论语言中的两个语句集，若存在某个集合或真类 M，使得由 T 能证明 $M\neq 0$ 且 M 为 S 的模型，则 T 相容蕴涵 S 相容，即 S 相对于 T 相对相容.

集合论概念的绝对性(absoluteness of concepts of set theory)　集合论概念的重要性质之一. 指集合论概念在不同模型中的不变性. 设 M，N 为集合论语言的两个标准模型，$M\subset N$，$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为任意公式，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为公式中的所有自由变元，若对任意的 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in M$，$\varphi^M(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，当且仅当 $\varphi^N(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则称 φ 对 M，N 绝对，这里 φ^M 表示 φ 在 M 中的相对化，φ^M 成立，亦即 $M\vDash\varphi$. 若 φ 对 M，V 绝对(V 为集合全域)，即对任何 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in M$，$\varphi^M(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 当且仅当 $\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 则称 φ 对模型 M 绝对. 直观地讲，一个集合论概念相对于两个模型绝对，是指这个概念在这两个模型中具有相同的意义，这一点在用模型方法证明集合论命题的相容性或独立性时非常重要. 比如在力迫法构造中，由于序数概念对任何 ZF 系统的可传模型均绝对，因此只要兼纳扩充 $M[G]$ 不包含 M 之外的序数，则就可以知道 M 与 $M[G]$ 具有相同的序数. 而由于基数概念不绝对，因此可以利用兼纳扩充将一个不可数基数崩塌为可数基数，或将一个不可达基数崩塌为可达基数. 最重要的绝对性概念有："x 为序数"、"x 为可构造集"、"R 为一个关系"、"R 良序 A"、"R 为 A 上的良基关系"等，这些概念对 ZF 系统的任意可传模型均绝对. 典型的非绝对性概念有："α 为基数"、"α 可数"、"$|y|=|x|$"、"$y=p(x)$"、"α 为正则基数"等. 设 $F(x)$ 为一个函数，若公式 $y=F(x)$ 对模型 M 绝对，且 F 在 M 下仍为函数，则称函数 F 对 M 绝对. 对 ZF 系统的任意可传模型绝对的典型函数有：后继函数 $S(x)$，$\mathrm{dom}(R)$，$\mathrm{ran}(R)$，$\mathrm{type}(A,R)$，$\mathrm{rank}(x)$，$L(\alpha)$，$R(\alpha)$ 等. 另外，空集、自然数集 ω 对 ZF 系统的任意可传模型也绝对. 任意能由受限公式表达的集合论概念对 ZF 系统的任意可传模型均绝对. 另外，绝对概念对函数的复合运算并与递归运算封闭.

绝对性概念最初由美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)于 1940 年提出，当时他把对可构造全域 L 绝对的概念称为是绝对的，后来绝对性概念被

推广到一般集合模型上.

标准模型(standard model) 亦称$\in$模型.一种集合论语言模型.若结构$\langle M,E\rangle$中的二元关系E为M上的属于关系,即$E=\in\cap(M\times M)$,则称$\langle M,E\rangle$为集合论语言的标准模型,简称M为模型.标准模型是将集合论的属于关系符号$\in$解释为M上的属于关系,因此,相当于集合论到自身的一种解释.在集合论相容性与独立性证明中所构造的模型,一般均为标准模型.对标准模型而言,满足关系$M\vDash\varphi$可以用相对化的方法来描述(参见"相对化").

可传模型(transitive model) 一类标准模型.若M为集合论语言的一个标准模型且M可传,则称M为一个可传模型.可传模型是集合论相容性与独立性证明中最常采用的一类模型.模型的可传性可保证模型满足外延公理,也可保证许多集合论概念绝对.由崩塌定理,任意良基模型均同构于一个可传模型.可数的可传模型称为可数可传模型,记为CTM.这种模型在力迫法中经常采用.

可数可传模型(countable transitive model) 见"可传模型".

集合模型(set model) 一类集合论语言模型.在集合论相容性与独立性证明中,集合模型通常指域为集合的标准模型.由反射原理,对任何ZFC系统有限条公理而言,一定存在一个满足这有限条公理的集合模型(参见"反射原理").设θ为强不可达基数,令$H(\theta)=\{x:|\mathrm{trcl}(x)|<\theta\}$,$\mathrm{trc}l(\theta)$表示$x$的可传闭包,则$H(\theta)$为ZFC系统的一个集合模型,因此强不可达基数存在公理蕴含着存在ZFC系统的集合模型.但由哥德尔不完全定理,在ZFC系统中不能构造出ZFC系统的标准集合模型,否则由ZFC系统就可以证明其自身的相容性.由此可见,强不可达基数的存在性是不可能从ZFC系统中推出的.

极小模型(minimal model) 集合论的一种模型.若M为ZF系统的一个可传模型,且为ZF系统的所有可传模型的子模型,则称M为ZF系统的极小模型.可构造集全域L为ZF系统的极小真类模型(参见"可构造集全域L").在标准模型假设SM下,存在ZF系统的极小集合模型(参见"标准模型假设").

崩塌定理(collapsing theorem) 公理集合论的重要定理之一.设R为类A上的二元关系,若对任何A中的元素x,y,有$\forall z\in A(zRx\leftrightarrow zRy)\rightarrow x=y$,则称$R$为$A$上的外延关系.崩塌定理是指:对任何类$A$上的良基关系$R$,若$R$为$A$上的外延关系,且对任何$x\in A$,$\{y:yRx\}$为集合,则存在惟一的可传类$M$及从$\langle A,R\rangle$到$\langle M,\in\rangle$的一个惟一的同构映射.因此,若$\langle A,R\rangle$为某集合论理论$T$的模型,则存在一个惟一的理论$T$的标准可传模型同构于$\langle A,R\rangle$.崩塌定理由波兰数学家莫斯托夫斯基(Mostowski,A.)于1949年给出,它在集合论相容性与独立性证明中起着非常重要的作用.

反射原理(reflection principle) 亦称反射定理.模型论中LST定理的集合论形式.设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$为ZF系统的任意有限条公理,则存在集合模型$M$,使$M\vDash\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\cdots\varphi_n$,即$M$为$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的模型.这一结论称为反射原理.在ZF系统中,不可能证明存在ZF系统标准集合模型(参见"集合模型"),但由反射原理,可以证明(在ZF系统中),任何有限片段均存在集合模型.反射原理还可以表述为下列更一般的形式:设H为一个类,对每个序数α,设$Z(\alpha)$为一个集合,且满足:

1. $\alpha<\beta\rightarrow Z(\alpha)\subset Z(\beta)$;
2. 若γ为极限序数,则$Z(\gamma)=\bigcup_{\alpha<\gamma}Z(\alpha)$;
3. $Z=\bigcup_{\alpha\in On}Z(\alpha)$,$O_n$表示序数的全体;

则在ZF系统中可以证明,对任何公式Φ及任意序数α,存在序数$\beta>\alpha$,使得$Z\vDash\Phi$,当且仅当$Z(\beta)\vDash\Phi$即公式Φ对$Z(\beta)$,Z绝对.反射原理由蒙太古(Montague,R.)最先给出,它在公理集合论中有着非常广泛的应用.

受限公式(bounded formula) 亦称Δ_0公式或受囿公式.只用受限量词的公式.受限公式由下列规则生成:

1. 原子公式为受限公式.
2. 若φ,ψ为受限公式,则$\neg\varphi,\varphi\wedge\psi,\varphi\vee\psi,\varphi\rightarrow\psi,\varphi\leftrightarrow\psi$为受限公式.
3. 若φ为受限公式,则形为$(\exists x\in y\varphi)$及$(\forall x\in y\varphi)$的公式为受限公式.

通常把形为$\forall x\in y$,$\exists x\in y$的量词称为受限量词.因此,受限公式即为所有量词均为受限量词的公式.在ZF公理系统下,许多集合论基本概念可以用受限公式表达.如:$x\subset y$可表达为$\neg\exists z\in x(\neg z\in y)$,$z=\{x,y\}$可表达为

$$x\in z\wedge y\in z\wedge\forall w\in z(w=x\vee w=y).$$

受限公式对ZF系统的任何可传模型绝对,因此用受限公式描述的集合论概念在不同的可传集合论模型中性质保持不变.这一性质在集合论相容性与独立性证明中有非常广泛的应用.

受限量词(bounded quantifier) 见"受限公式".

集合论公式分层(hierarchy of set-theoretical formula) 公理集合论术语.指集合论公式的分类方法.设Σ_n与$\Pi_n(n\in w)$为按下列递归方式定义的公式集:

1. $\Sigma_0(=\Pi_0)$为受限公式集.

2. 若 $\varphi(x)\in\Sigma_n$，x 为 φ 中的任一自由变元，则
$\exists x\varphi(x)\in\Sigma_{n+1}$，$\forall x\varphi(x)\in\Pi_{n+1}$.

3. 若 $\varphi(x)\in\Pi_n$，x 为 φ 中的任一自由变元，则
$\exists x\varphi(x)\in\Sigma_{n+1}$，$\forall x\varphi(x)\in\Pi_{n+1}$.

公式的 Σ_n 与 Π_n 分层是一个纯语法概念，但一个公式可以随它所在的集合论系统的不同，而分别具有不同的分层种类或层次. 在 ZF 系统中，若公式 φ 既可表示为 Σ_n 公式，又可表示为 Π_n 公式，则称 φ 为 Δ_n 公式. 特别地，Δ_0 公式即为受限公式(参见"受限公式"). 公式分层理论与绝对性概念有非常密切的关系，一般随着 n 的增大，公式的绝对性也越差，因而它在不同模型中的性质差异也越大. 公式的 Σ_n 分层与 Π_n 分层方法在模型论与证明论中常被使用.

良基集(well-founded set) 一种特殊集合. 指可传闭包上良基关系的集合. 若记 trcl(x)为集合 x 的可传闭包. 如果"$\in$"关系为 trcl(x)上的良基关系，那么称 x 为良基集；所有良基集构成的类称为良基集全域，记为 WF. WF$\subset V$，V 为集合全域. 在 ZF 公理系统下，$V=$WF，即 ZF 系统中的任何集合均为良基集. 如果在 ZF 系统中去掉正则公理(记为 ZF$^-$)，则不能证明 $V=$WF，但可以证明 WF 为 ZF 系统的可传模型，由此可知，ZF 系统相对于 ZF$^-$ 系统相对相容，亦即正则公理相对于 ZF$^-$ 系统公理系统相容. 良基集还可以用累积分层的方法来定义. 设 $R(\alpha)$为从序数全域 On 到集合全域 V 的函数，超穷递归定义 $R(\alpha)$如下：

1. $R(0)=0$.
2. $R(\alpha+1)=P(R(\alpha))$.
3. 当 α 为极限序数时，

$$R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}R(\beta).$$

令

$$\mathrm{WF}=\bigcup_{\alpha\in On}R(\alpha),$$

在 ZF$^-$ 中 WF 的两种定义方式等价. 良基集的概念由梅利曼诺夫(Mirimanoff)于 1917 年引入.

集合累积分层(cumulative hierarchy of sets) 一种集合分类方法. 它是对集合按其构造的层次进行分类的. 对每一序数 α，递归定义集合 $R(\alpha)$如下：

1. $R(0)=0$.
2. $R(\alpha+1)=P(R(\alpha))$.
3. 当 α 为极限序数时，$R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}R(\beta)$.

称 $\langle R(\alpha):\alpha\in On\rangle$ 为集合的累积分层.

在 ZF 公理系统中，集合的累积分层具有下列性质：

1. 每个 $R(\alpha)$可传.
2. 若 $\alpha<\beta$，$R(\alpha)\subset R(\beta)$.
3. $\alpha\subseteq R(\alpha)$.
4. $V=\bigcup_{\alpha\in On}R(\alpha)$，$V$ 为集合全域.

因此对任何集合 x，必然存在一个累积分层 $R(\alpha)$包含 x. 通常把使 $x\in R(\alpha+1)$成立的最小序数 α 称为集合 x 的秩(参见"集合的秩")，它反映了该集合所在的累积层次. 若没有正则公理，即在 ZF$^-$ 公理系统中，不能证明

$$V=\bigcup_{\alpha\in On}R(\alpha),$$

这时，记 WF$=\bigcup_{\alpha\in On}R(\alpha)$(参见"良基集").

集合的秩(rank of sets) 公理集合论概念之一. 是反映集合所在的构造层次的量. 设 $\langle R(\alpha):\alpha\in On\rangle$ 为集合的累积分层(参见"集合的累积分层")，在 ZF 公理系统中，有

$$V=\bigcup_{\alpha\in On}R(\alpha),$$

因此，任何集合 x 必然属于某个累积分层 $R(\alpha)$. 通常称使 $x\in R(\alpha+1)$成立的最小序数 α 为集合 x 的秩，记为 rank(x). 若 rank(x)$=\alpha$，则 $x\subset R(\alpha)$，但 $x\notin R(\alpha)$，且对任何 $\beta>\alpha$，$x\in R(\beta)$. 如rank(0)$=0$，rank(1)$=1$，rank(ω)$=\omega$. 在 ZF 公理系统中，由于 $\in$ 关系为集合全域 V 上的良基关系，因此，也可以根据良基关系的超穷递归原理直接定义集合 x 的秩为

$$\mathrm{rank}(x)=\bigcup_{y\in x}(\mathrm{rank}(y)+1),$$

上列两种关于集合秩的定义是等价的. 秩的概念由梅利曼诺夫(Mirimanoff)于 1917 年引入，1935 年，德国数学家策梅洛(Zermelo，E. F. F.)将秩的概念推广到一般良基关系上. 设 R 为类 A 上的良基关系，若对任何 $x\in A$，$\{y:yRx\}$为一集合，对任何集合 $x\in A$，递归定义 x 关于 R，A 的秩如下

$$\mathrm{rank}(x,R,A)=\bigcup_{yRx\wedge y\in A}(\mathrm{rank}(y,R,A)+1).$$

滤子(filter) 集合论的基本概念之一. 是由一个集合的某些子集组成的具有特定性质的集合. 设 I 为一非空集合，$S(I)$是由 I 的所有子集构成的集合，如果 $D\subseteq S(I)$适合下列诸条件：

1. $I\in D$；
2. 若 $X,Y\in D$，则 $X\cap Y\in D$；
3. 若 $X\in D$ 且 $X\subseteq Z\subseteq I$，则 $Z\in D$；

则称 D 为定义在 I 上的一个滤子. 滤子的例子是很多的，如平凡滤子 $D=\{I\}$，非真滤子 $D=S(I)$. 对每个 $Y\subseteq I$，称滤子 $D=\{X\subseteq I:Y\subseteq X\}$为由 Y 生成的主滤子；滤子 $D=\{X\in S(I):I\backslash X$是 I 的有限子集$\}$称为自由滤子. 如果 D 是 I 上的一个滤子，并且对任意的 $X\in S(I)$，$X\in D$，当且仅当 $I\backslash X\overline{\in}D$. 则称 D 是 I 上的一个超滤子. 超滤子实质上是极大真滤子(即，D 为 I 上的真滤子，并且在 I 上不存在真滤子 $F\neq D$. 使得 $D\subseteq F$). 滤子和理想有非常密切的关系. 若 I 为集合 S 上的理想，则 $F=\{X\subset S:S\backslash X\in$

$I\}$为集合 S 上的一个滤子，称之为 I 的对偶滤子，记为 I^*. 反之，若 F 为集合 S 上的滤子，则 $F^*=\{X\subset S:S\backslash X\in F\}$为集合 S 上的一个理想，称之为 F 的对偶理想. 滤子概念也可以定义在偏序结构上. 设$\langle P,\leqslant\rangle$为一偏序结构，$F\subset P$ 且满足：

1. F 非空；

2. 若 $p\leqslant q$ 且 $p\in F$，则 $q\in F$；

3. 若 $p,q\in F$，则存在元素 $r\in F$ 使 $r\leqslant p$ 且 $r\leqslant q$；

则称 F 为偏序$\langle P,\leqslant\rangle$上的滤子. 集合 S 上的滤子可以看成偏序$\langle P(S),\subseteq\rangle$上的滤子. 滤子有很多变体，但一般均可看成是某个特定偏序结构上的滤子. 例如，布尔代数 B 上的滤子可以看成是偏序结构$\langle B\backslash\{0\},\leqslant\rangle$上的滤子，这里"$\leqslant$"为布尔代数中定义的普通序关系. 滤子概念在数理逻辑的其他领域以及抽象代数、拓扑学、微分几何等现代数学分支中有着非常广泛的应用.

真滤子(proper filter)　见"滤子".

自由滤子(free filter)　见"滤子".

主滤子(principal filter)　见"滤子".

超滤子(ultrafilter)　见"滤子".

非主超滤子(nonprincipal ultrafilter)　一种超滤子. 设 I 是一非空集合，D 是 I 上的超滤子. 如果适合：对每个 $i\in I$，$\{i\}\notin D$，则称 D 为非主超滤子.

对偶滤子(dual filter)　见"滤子".

对偶理想(dual ideal)　见"滤子".

理想(ideal)　集合论中的基本概念之一. 设 S 为任意集合，若 $I\subseteq P(S)$且满足：

1. $\varnothing\in I$；

2. 若 $X,Y\in I$，则 $X\cup Y\in I$；

3. 若 $X,Y\subseteq S$，$X\in I$，$Y\subseteq X$，则 $Y\in I$；

则称 I 为集合 S 上的理想. 理想的概念在现代数学的几乎每个分支中均有应用，且有许多变体或引申. 例如，布尔代数上的理想即为集合上的理想的一种变体. 设 B 为任意布尔代数，若 B 的一个子集 I 满足：

1. $0\in I$，$1\notin I$(其中 0,1 分别为布尔代数 B 中的零元与幺元)；

2. 对任何 $u\in I$，$v\in I$，有 $u+v\in I$；

3. 对任何 $u,v\in B$，若 $u\in I$ 且 $v\leqslant u$，又 $v\in I$；

则称 I 为 B 上的理想.

理想与滤子有非常密切的联系(参见"滤子").

偏序集的稠密集(dense set in ordered sets)　偏序集的一种子集. 设$\langle P,\leqslant\rangle$为一个偏序集，$D\subseteq P$，若对 P 的任意元素 p，存在 $q\in D$，使 $q\leqslant p$，则称 D 为 p 的稠密子集. 偏序集中的稠密集概念与拓扑学中的稠密集概念有非常密切的关系，若对每个 $p\in P$，令 $O_p=\{q\in p:q\leqslant p\}$，则 O_p 构成 P 上的一个拓扑基，这个拓扑基诱导的拓扑称为 P 上的序拓扑. P 的一个子集 D 在偏序集 P 中稠密，当且仅当它在相应的序拓扑下稠密.

稠密集的概念还可以推广到布尔代数上. 设 B 为一个布尔代数，则 $B_0=B\backslash\{0\}$(0 为 B 中的零元)关于 B 中的$\leqslant$关系构成一个偏序集. 若 $D\subset B_0$ 为 B_0 的稠密子集，则称 D 为 B 的稠密子集. 即对任何 $p\in B$，$p\neq 0$，则存在元素 $q\in D$，$q\neq 0$ 且 $q\leqslant p$. 对偏序集 P，设 $p\in P$，$E\subset P$，若对任何 $q\leqslant p$，存在 $r\in E$，使 $r\leqslant q$，则称 E 为 P 中的 p 下稠密子集. 稠密集的概念是组合集合论、大基数理论、描述集合论、布尔值模型理论、力迫法等领域中的基本概念.

偏序集完备嵌入(complete embedding of partially ordered sets)　一种映射. 指一个偏序集到另一个偏序集的映射. 设$\langle P,\leqslant_P\rangle$与$\langle Q,\leqslant_Q\rangle$为两个偏序集，$i$ 为 P 到 Q 的一个映射，称 i 为 P 到 Q 的一个完备嵌入. 若 i 满足：

1. 对任何 $p,p'\in P$，$p'\leqslant_P p$，有 $i(p')\leqslant_Q i(p)$.

2. 对任何 $p_1,p_2\in P$，若 p_1 与 p_2 在 P 中不相容，则 $i(p_1)$与 $i(p_2)$在 Q 中不相容.

3. 对任何 $q\in Q$，存在 $p\in p$，使得对任何 $p'\in P$，若 $p'\leqslant_P p$，则 $i(p')$与 q 在 Q 中相容.

若$\leqslant_P=\leqslant_Q\cap(P\times P)$，且 P 到 Q 的恒等映射为一个完备嵌入，则记为$P\subseteq_C Q$. 完备嵌入是力迫法中，尤其是迭代力迫法中的重要概念. 完备嵌入具有下列重要的力迫性质：设 P,Q 为基模型 M(参见"力迫法")中的力迫概念，i 为 P 到 Q 的一个完备嵌入，则：

1. 若 H 为 M 中的 Q 兼纳集，则 H 在 i 下的逆象 $i^{-1}(H)$为 M 中的 P 兼纳集，且

$$M[i^{-1}(H)]\subset M[H].$$

2. 若 Φ 为对 ZFC 系统的可传模型绝对的公式，则$\Vdash_P\Phi$，当且仅当 $i(P)\Vdash_Q\Phi$.

偏序集稠密嵌入(dense embedding of partially ordered sets)　一种映射. 指一个偏序集到另一个偏序集的映射. 设$\langle P,\leqslant_P\rangle$，$\langle Q,\leqslant_Q\rangle$为偏序集，$i$ 为 P 到 Q 的一个映射，若 i 满足：

1. 对任何 $p,p'\in P$，若 $p'\leqslant_P p$，且 $i(p')\leqslant_Q i(p)$；

2. 对任何 $p_1,p_2\in P$，若 p_1 与 p_2 在 P 中不相容，且 $i(p_1)$与 $i(p_2)$在 Q 中不相容；

3. P 在 i 下的象集是 Q 的稠密子集；

则称 i 为 P 到 Q 的稠密嵌入.

稠密嵌入一定为完备嵌入，但反过来不成立. 稠密嵌入有下列重要的力迫性质：

1. 若 P 到 Q 存在稠密嵌入，则 P 与 Q 有相同的兼纳扩充.

2. 若 i 为 P 到 Q 的稠密嵌入，Φ 为任意公式，则 $P\Vdash_P\Phi$，当且仅当 $i(P)\Vdash_Q\Phi$.

偏序集乘积(product of partially ordered sets) 偏序集的一种运算. 设 $\langle P_1,\leqslant_{P_1}\rangle$，$\langle P_2,\leqslant_{P_2}\rangle$ 为两个偏序集，令 $P=P_1\times P_2$(P_1 与 P_2 的笛卡儿乘积)，定义 P 中的偏序关系 $\leqslant_p$ 如下：对任何 $p_1,q_1\in P_1,p_2,q_2\in P_2$，$\langle p_1,p_2\rangle\leqslant_p\langle q_1,q_2\rangle$，当且仅当 $p_1\leqslant_{P_1}q_1$ 且 $p_2\leqslant_{P_2}q_2$. 称 P 为 P_1 与 P_2 的乘积，仍记为 $P_1\times P_2$，或记为 $P_1\otimes P_2$，此时称为 P_1 与 P_2 的直积. 偏序集的乘积具有良好的力迫性质，下面的结论是迭代力迫法中的基本结论，常称之为乘积引理，由以色列学者索洛韦(Solovay，R. M.)于 1970 年给出：设 P_1,P_2 为 M 中的偏序集，则 $G\subseteq P_1\times P_2$ 为 M 上的 $P_1\times P_2$ 兼纳集，当且仅当 $G=G_1\times G_2$，其中 G_1,G_2 分别为 M 中的 P_1 与 P_2 兼纳集. 此时，$M[G]=M[G_1][G_2]$. 偏序集的乘积运算还可以推广到任意多个偏序集的积的情形. 设 $\langle P_i:i\in I\rangle$ 为一个偏序集序列，I 为索引集，设 1 为每个 P_i 的共同的最大元. 对任意的

$$p=\langle p_i:i\in I\rangle\in\prod_{i\in I}P_i\Big(\prod_{i\in I}P_i\text{ 为集合序列的乘积}\Big),$$

称集合 $S(p)=\{i\in I:p_i\neq 1\}$ 为 p 的支持. 于是对任何基数 k，$\langle P_i:i\in I\rangle$ 的 k 乘积 P 定义为

$$P=\Big\{p\in\prod_{i\in I}P_i:|S(p)|<k\Big\}.$$

P 中的偏序关系 $\leqslant_P$ 定义为：$p\leqslant pq$，当且仅当对任何 $i\in I,p_i\leqslant q_i$. 当 $k=\omega$ 时，称 P 为 $\langle p_i:i\in I\rangle$ 的有限支持乘积；当 $k=\omega_1$ 时，称 P 为 $\langle p_i:I\in I\rangle$ 的可数支持乘积.

可数链条件(countable chain condition) 简称 CCC. 现代数学的基本概念之一. 设 $\langle p,\leqslant\rangle$ 为一个偏序集，$A\subseteq P$ 为 P 的一个子集，若对任何 $p,q\in A$，不存在 $r\in P$，使 $r\leqslant p$ 且 $r\leqslant q$，则称 A 为 P 中的一条反链. 若 P 中每一反链均可数，则称 $\langle P,\leqslant\rangle$ 具有可数链条件，在拓扑学与布尔代数中也有可数链条件的概念，它们可以看成偏序集上的可数链条件概念的变体. 设 B 为一个布尔代数，若 $\langle B\backslash\{0\},\leqslant\rangle$ 具有可数链条件，则称 B 具有可数链条件，这里“$\leqslant$”定义为：$a\leqslant b$，当且仅当 $a+b=b$. 设 $\langle X,T\rangle$ 为一个拓扑空间，若 $\langle T\backslash\{\varnothing\},\subseteq\rangle$ 满足可数链条件，则称 X 具有可数链条件，即 X 中每个两两不相交的非空开集簇可数.

链条件(chain condition) 可数链条件概念的推广. 设 κ 为任意无穷基数，$\langle P,\leqslant\rangle$ 为一个偏序集，若 P 中每条反链的基数均小于 κ，则称 $\langle P,\leqslant\rangle$ 具有 κ 链条件，记为 κ-CC，因此，可数链条件即为 ω_1-CC. 若偏序集 $\langle P,\leqslant\rangle$ 具有 κ 链条件，也称 $\langle P,\leqslant\rangle$ 是 κ 饱和的(κ-saturated). 通常用 sat(P)表示 $\kappa\cdot\omega$，这里的 κ 是使 P 为 κ 饱和的最小的基数 κ. sat(P)一定为正则基数.

可构造性(constructibility) 一种可构造集理论. 是研究集合的可构造性以及可构造集合的各种特殊性质的理论，也是证明集合论命题相对相容性的一种重要方法. 集合论的可构造性由美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)于 1938 年在证明选择公理相对于 ZF 系统，及连续统假设相对于 ZFC 系统的相容性时提出. 在 ZFC 系统中，似乎所有集合都可以通过累积分层的方法从空集开始，通过反复运用幂集运算构造出来，即令 $R(0)=0,R(\alpha+1)=P(R(\alpha))$. 当 α 为极限序数时，

$$R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}R(\beta),\text{则 }V=\bigcup_{\beta\in On}R(\beta),$$

这里 On 为所有序数构成的类. 然而，这种构造只说明了 V 的构造过程，并不是 V 中的每个元素都可以用这种方法构造出来. 也就是说，ZFC 系统只提供了构造出一个集合框架的手段，而未曾提供构造框架中每个元素的方法. 其原因在于幂集运算似乎将集合扩充得过大，使得人们只能说明对任何集合 x 而言，x 的所有子集可以构成一个新的集合 $P(x)$，但 $P(x)$究竟包含了哪些元素，却无法在 ZFC 系统中具体地描述出来. 例如，不能一一定义出 $P(\omega)$中的所有元素，否则 $P(\omega)$的基数就可以轻松地确定下来，从而也就可以解决连续统假设问题. 为了限制幂集运算，哥德尔利用“可定义幂集”取代幂集. 所谓一个集合 x 的可定义幂集 Def(x)，指包含能用集合论语言定义出的所有 x 的子集(参见“可构造集全域”)，因此，一旦 x 已知，则 Def(x)中的每个元素也可描述. 令 $L(0)=0,L(\alpha+1)=\mathrm{Def}(L(\alpha))$，当 α 为极限序数时，

$$L(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}L(\beta).$$

称$\{L(\alpha):\alpha\in On\}$为集合的可构造分层，再令

$$L=\bigcup_{\alpha\in On}L(\alpha),$$

称 L 为可构造集全域，L 中的元素称为可构造集. 可构造集一定为集合，但随之而来的一个问题是：是否每个集合都是可构造集，即是否有 $L=V$. 通常把假设“$V=L$”称为可构造性公理(参见“可构造性公理”). 哥德尔 1938 年证明，可构造性公理与 ZFC 系统相容，亦即在 ZFC 系统中无法证明 $V\neq L$. 后来，美国数学家科恩(Cohen，P. J.)于 1963 年利用力迫法证明了 $V\neq L$ 与 ZFC 系统也相容，从而得出可构造性公理独立于 ZFC 公理系统. 尽管在 ZFC 系统中无法确定每个集合是否都是可构造集，但人们可以通过可构造集的特别的构造方式获得有关可构造集的若干特殊性质，由可构造性公理相对于 ZFC 系统的协调性可知，这些性质也协调于 ZFC 公理系统. 以这种方式可以获得大量集合论相容性结果，这

种相对相容性证明方法称为可构造性方法. 选择公理相对于 ZF 系统的协调性以及连续统假设(包括广义连续统假设)相对于 ZFC 系统的协调性正是利用这种方法获得的. 另外许多重要的组合原则、大基数性质及一些拓扑学性质相对于 ZF 系统或 ZFC 系统的协调性也可以利用这种方法得到证明. 法国数学家、工程师莱维(Lévy, A.)与休恩菲尔德(Shoenfield, J. R.)等人于 20 世纪 50 年代末期,在哥德尔可构造性方法的基础上,发展了一种更为灵活的可构造性理论,称为相对可构造性. 目前可构造性理论已经成为现代集合论的一个重要分支,被广泛应用于无穷组合论、拓扑学、描述集合论等数学分支中的相容性证明中. 延森(Jensen, R.)于 20 世纪 70 年代发展了他的精细结构理论(fine-structure theory). 延森的可构造域的覆盖定理,是 20 世纪 70 年代集合论中最引人注目的、最深刻的进展. 如今,研究满足很强的大基数假设又具有某种覆盖性质的内模型,成了现代集合论中最富挑战性和最深刻的课题.

可构造分层(constructible hierarchies) 见"可构造性".

可构造集全域(universe of constructible sets) 一种可构造集模型. 美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)用于证明连续统假设与选择公理的相容性所构造的 ZF 系统模型,也是 ZF 系统的最重要的内模型. 令 $\mathrm{Def}(x)$表示通过对 x 及 x 的元素进行有限次哥德尔运算所能得到的 x 的全部子集,即

$$\mathrm{Def}(x)=\mathrm{cl}(x\cup\{x\})\cap P(x),$$

其中 $\mathrm{cl}(M)$表示 M 的哥德尔闭包,称 $\mathrm{Def}(x)$为 x 的可定义幂集. 对任意序数 α,递归定义集合 $L(\alpha)$ 如下,$L(0)=0$;$L(\alpha+1)=\mathrm{Def}(L(\alpha))$;当 α 为极限序数时,

$$L(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}L(\beta).$$

则称

$$L=\bigcup_{\alpha\in On}L(\alpha)\ (On\ \text{表示序数全域})$$

为可构造集全域,L 中的元素称为可构造集. 可构造集全域最初由哥德尔于 1938 年构造,上列定义方式是他在 1940 年给出的. 戴夫林(Devlin, K.)利用模型论术语重新给出了可构造集的概念,目前流行的方法是通过形式化集合上的 n 元可定义子集来定义可定义幂集. 哥德尔于 1938 年证明可构造集全域 L 具有下列基本性质:

1. L 为 ZF 系统的模型.
2. L 满足可构造性公理,即 $L\vDash V=L$.
3. 若 M 为 ZF 系统的可传模型且包含所有序数,则 $L\subseteq M$. 在 L 中不仅 $V=L$,GCH(包括 CH)及 AC 成立,许多组合原则,如$\diamondsuit$,$\diamondsuit^+$,W,$\square$等及大量大基数性质、拓扑性质在 L 中也成立,因此 L 是 ZF 系统的最重要的内模型之一. 另外,用来构造 L 的序列$\langle L(\alpha):\alpha\in On\rangle$也具有非常重要的性质,这些性质在公理集合论中具有非常广泛的应用. 通常称$\langle L(\alpha):\alpha\in On\rangle$为可构造分层,它具有下列性质:

1. 对任何序数 α,$L(\alpha)\subset R(\alpha)$.
2. $L(\alpha)$对 ZF 系统的任何可传模型绝对.
3. 若 ψ 为 ZF—P(P 为幂集公理)的任何有限条公理的合取,则对任何 ψ 的可传模型 M,$L^M\subset M$.

类似于集合秩的概念,利用可构造分层可定义可构造集的 L 秩:对任何 $x\in L$,令 $\rho(x)$为使 $x\in L(\beta+1)$成立的最小序数 β,称之为 x 的 L 秩. L 秩反映了可构造集所在的构造层次,它是研究可构造集的重要工具.

可构造集(constructible set) 见"可构造集全域".

可构造性公理(the axiom of constructibility) 集合论的重要假设之一. 即命题"每个集合都是可构造集",记为 $V=L$(参见"可构造性"). 可构造性公理虽被称为公理,但人们并不把它视为像 ZF 系统的基本公理一样理所当然地为"真",也不把它作为一个新的集合论基本假设加到 ZF 或 ZFC 公理系统上. 之所以称之为公理,是因为它是一个非常强的集合论命题,在可构造公理下,许多重要的不能由 ZF 系统或 ZFC 系统决定的集合论假设(如广义连续统假论、选择公理、某些组合原则等)就可以被确定下来.

美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)和美国数学家科恩(Cohen, P. J.)分别证明了可构造性公理相容且独立于 ZFC 公理系统,可以用构造性公理扩充 ZFC 系统,以便获得更多相容于 ZFC 系统的集合论命题. 这方面的研究构成了可构造性理论的主要内容,然而并没有任何迹象表明可以将可构造性公理作为集合论基本假设加到 ZFC 公理系统中. 相反地,随着大基数理论的研究,人们发现某些大基数的存在性与可构造性公理相悖,如假设可测基数存在,则可以证明存在不可构造的集合. 而某些大基数的存在性似乎比假设可构造性公理更具直观基础. 尽管如此,可构造性理论作为一种集合论相容性与独立性 证明的强有力的工具,仍然被广泛研究与应用.

哥德尔运算(Gödel operations) 用于构造集的基本运算. 设 $\mathscr{F}_1(x,y)=\{x,y\}$,$\mathscr{F}_2(x,y)=x\times y$,$\mathscr{F}_3(x,y)=\{\langle u,v\rangle:u\in x\wedge v\in y\wedge u\in v\}$,$\mathscr{F}_4(x,y)=x\setminus y$,$\mathscr{F}_5(x,y)=x\cap y$,$\mathscr{F}_6(x)=\bigcup x$,$\mathscr{F}_7(x)=\mathrm{dom}(x)$,$\mathscr{F}_8(x)=\{\langle u,v\rangle:\langle v,u\rangle\in x\}$,$\mathscr{F}_9(x)=\{\langle u,v,w\rangle:\langle u,w,v\rangle\in x\}$,$\mathscr{F}_{10}(x)=\{\langle u,v,w\rangle:\langle v,w,u\rangle\in x\}$,则称由上列十种运算及它们的有限次复合构成的函数为哥德尔运算. 哥德尔运算是美籍奥

地利数学家哥德尔(Gödel, K.)于 1940 年重新修改可构造集全域 L 的定义时引入的.

集合的哥德尔闭包(Gödel closure of sets) 一种哥德尔闭集. 对所有哥德尔运算均封闭的集合称为哥德尔闭集. 包含集合 M 的最小哥德尔闭集称为 M 的哥德尔闭包, 记为 $\mathrm{cl}(M)$.

哥德尔闭集(Gödel close set) 见"哥德尔闭包".

定义的可定义性(defining definability) 公理集合论中的基本问题之一. 一般而言, 一个集合 a 是可定义的, 是指存在一个集合论公式 $\varphi(x)$, 使得 $\forall x(\varphi(x)\Leftrightarrow x=a)$. 如: 0 是可定义的, 因为 $\forall x(x=0\Leftrightarrow\forall y(y\neq x))$, 类似地, ω, ω_{10} 等均是可定义的. 然而"可定义"这一概念本身却无法在 ZF 公理系统中被定义, 因为若存在一个集合论公式 $D(x)$ 表示"x 可定义", 则由于集合论语言是可数的, 因此用来定义集合的公式也只有可数个, 从而在所有集合中只有可数个集合可被明确定义, 尤其只有可数个序数是可定义的. 设 δ 为第一个不可定义的序数, 即 $\forall x(x$ 为序数 $\wedge\neg D(x)\wedge(\forall y\in x)D(y)\Leftrightarrow x=\delta)$, 但这恰好已经定义了序数 δ, 这与 δ 不可定义矛盾. 因此"可定义"这一概念不能在 ZF 公理系统中被形式化. 然而, "相对于集合 A 可定义"能被在 ZF 系统中形式化. 具体地讲, 对任意集合 A 及自然数 n, 可通过递归方式定义集合 $Df(A,n)$, 使之包含且仅包含所有可由相对化到 A 上的 n 元公式所能定义的集合. 美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)于 1939 年在构造可构造集全域 L 时使用了集合上的可定义集的概念, 但未给出严格的构造过程. 利用上列相对可定义性的概念, 可以定义出在构造可构造集全域 L 时使用的可定义幂集的概念. 令 $\mathrm{Def}(A)$ 表示能由相对化到 A 上的任意有限元公式所能定义的 A 的子集, 因此, 就可以用 $Df(A,n)$ 的形式定义在 ZF 系统或 ZF—P(P 为幂集公理)定义出可定义幂集的概念.

相对可构造性(relative constructibility) 一种可构造性理论. 由法国数学家、工程师莱维(Lévy, A.)与休恩菲尔德(Shoenfield, J. R.)在美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)的可构造性方法的基础上发展起来的一种可构造性理论. 设 A 为任意集合, 仿照可构造集全域 L 的构造方法定义 $L_\alpha[A]$ 如下:

$$L_0[A]=\varnothing;L_{\alpha+1}[A]=\mathrm{Def}_A(L_\alpha[A]);$$

当 α 为极限序数时,

$$L_\alpha[A]=\bigcup_{\beta<\alpha}L_\beta[A].$$

令

$$L[A]=\bigcup_{\alpha\in On}L_\alpha[A],$$

式中 $\mathrm{Def}_A(x)=cl(X\cup\{X\}\cup\{A\cup X\})\cap P(x)$, On 为序数全域. 称 $L[A]$ 为相对 A 的可构造集全域, $L[A]$ 中每一元素称为相对 A 可构造集. $L[\varnothing]$ 即为 L. $L[A]$ 具有与 L 相类似的性质, 事实上, 对任何集合 A:

1. $L[A]$ 为 ZFC 的模型.
2. $L[A]$ 满足 $\exists X(V=L[x])$.
3. 存在序数 α_0 使得对所有

$$\alpha\geqslant\alpha_0, L[A]\models 2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}.$$

相对可构造集全域还可用另一种方式构造. 设 A 为一个可传集合, 定义 $L_\alpha(A)$ 如下:

$$L_0(A)=\varnothing;L_{\alpha+1}(A)=\bigcup_{T\in A}\mathrm{Def}_T(L_\alpha(A));$$

当 α 为极限序数时,

$$L_\alpha(A)=\bigcup_{\beta<\alpha}L_\beta(A).$$

令

$$L(A)=\bigcup_{\alpha\in On}L_\alpha(A).$$

$L(A)$ 具有类似于 $L[A]$ 的性质, 但它们之间的最大区别在于 AC 在 $L(A)$ 中可以不成立. 相对可构造性方法比哥德尔的可构造性方法具有更大的灵活性, 用它可以获得很多更为细致的相容性结果.

序数可定义集(ordinal-definable set) 简称 OD. 一种特殊的集合. 能在集合论语言中由有限个序数所定义的集合称为序数可定义集. 设 A 为一个集合, 若存在公式 φ 及序数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使

$$A=\{x:\varphi(x,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\},$$

则称 A 为序数可定义集. 但这种定义不能在集合论语言中形式化, 形式的定义方式可利用哥德尔运算的概念定义序数可定义集. 设 $\mathrm{cl}(M)$ 表示集合 M 的哥德尔闭包, $R(\alpha)$ 为 V 的良基聚积分层(参见"良基聚积分层"), On 表示所有序数构成的真类, 则称

$$\mathrm{OD}=\bigcup_{\alpha\in On}\mathrm{cl}(\{R(\beta):\beta<\alpha\})$$

为序数可定义全域, OD 的元素称为序数可定义集. $A\in\mathrm{OD}$, 当且仅当存在一个分式 φ 及有限个序数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使 $A=\{x:\varphi(x,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\}$. 由于在 OD 中可以定义一种良序关系, 因此 AC 在 OD 中成立, 并且在其中可以证明无序对公理、并集公理、幂集公理等但在 ZF 系统中不能证明 OD 为可传类, 因此在 ZF 系统中不能证明 OD 为 ZFC 系统的模型. 但根据 OD 可以构造 ZF 系统的一个可传模型 HOD, 用它可证明 AC 与 ZF 系统的相容性(参见"遗传序数可定义全域 HOD"). 序数可定义的概念由美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)于 1946 年提出, 福平卡(Vopěnka, P.)等人于 1968 年给出了上列形式定义, 斯科特(Scott, D. S.)与迈希尔(Myhill, J.)(1971)对这一定义作了更进一步的推广.

序数可定义全域(ordinal-definable universal) 见"序数可定义集".

遗传序数可定义全域(hereditarily ordinal—definable universal)　ZF 系统的内模型. 设 trcl(x)表示 x 的可传闭包,则遗传序数可定义全域 HOD=$\{x\in \mathrm{OD}:\mathrm{trcl}(x)\subset \mathrm{OD}\}$,其中 OD 为序数可定义全域. HOD 的元素称为遗传序数可定义集. 由于 HOD 可以在 ZF 系统中构造,且满足选择公理,因此,它可以用于证明 AC 系统与 ZF 系统的相容性,但不能用来证明 GCH,CH 以及其他重要的相对相容性结果.

由 HOD 的构造可知,HOD$\subseteq$OD$\subseteq V$,但 HOD$\neq V$ 在 ZFC 系统甚至在 ZFC+GCH 中不可判定,这一结论可由可构造公理的相容性直接推论.

遗传序数可定义集(hereditarily ordinal definable set)　见"遗传序数可定义全域".

大基数公理(large cardinal axioms)　关于大基数存在的一类新加公理. 设有关于基数 α 的一条性质 $P(\alpha)$,它是可以用 ZFC 系统的语言形式描述的,尽管人们根据直觉相信,有很大的 α 使 $P(\alpha)$为真,但却不能在 ZFC 系统内证明"$\exists\alpha P(\alpha)$"这一命题. 人们若将$\exists\alpha P(\alpha)$作为公理加入到 ZFC 系统之中,就称之为一条大基数公理,满足 $P(\alpha)$的 α 称为大基数. 大基数的种类很多. 一般地,$P(\alpha)$都是 ω(其基数为$\aleph_0$)的某个性质向不可数基数的推广,因而,可以说大基数公理是无穷公理的自然延伸,是人类对无穷世界的认识进一步深化的产物. 例如,不可达基数是将 ω 的"集论运算的不可到达性"推广到不可数基数而得到的大基数. 弱紧基数则是将 ω 所满足的分划关系 $\omega\to(\omega)^2_2$ 推广至不可数基数而得到的. 从这个角度看,大基数公理为人们所乐于接受. 增加了大基数公理之后,人们可以对集合论中某些悬而未决的问题做出一定程度的回答. 例如,若存在强不可达基数 κ,则 ZFC 相容;若存在拉姆齐基数,则 $V\neq L$,即可构造公理不真;若存在强紧基数 κ,则 $V\neq L[X]$对任何集合 X 成立,又对于任何大于 κ 的奇异强极限基数 λ,$2^\lambda=\lambda^+$,这对广义连续统假设做出了部分回答.

大基数的研究由来已久. 例如,早在 1911 年,就开始了对今天称为马赫罗(Mahlo,P.)基数的一类基数的研究;1930 年后,就提出了不可达基数和可测基数的概念. 但在 20 世纪 60 年代之前,这种研究是零星的、分散的. 直到 20 世纪 60 年代,人们才将大基数公理作为集合论的附加公理来加以研究. 近年来,含大基数的内模型成为集合论研究的热点. 人们更习惯于用从全域 V 到某传递类 M 的非平凡的基本嵌入(elementary embedding)$j:V\to M$ 来描述大基数公理. 设 κ 为 j 的临界点,即最小的满足 $j(\alpha)=\alpha$ 的序数,记为 $\kappa=\mathrm{crit}(j)$. 此时,V 和 M 越相似,所引入的大基数公理越强. 例如,如果 $M^\lambda\subseteq M$,则称 κ 为 λ 超紧基数;如果对任意为 $\lambda\geqslant\kappa$,κ 为 λ 超紧基数,则称 k 为超紧基数;如果 $V_{j(k)}\subseteq M$,则称 k 为超强基数;如果对于任意的 $f:\kappa\to\kappa$,存在 $j':V\to M'$ 使得 $\mathrm{crit}(j)=k$ 且 $V^{j(f))(x)}\subseteq M'$,其中 M'是传递的,则称 κ 为谢拉赫基数;如果对于任意的 $f:\kappa\to\kappa$,存在 $\delta<\kappa$,使得 f 在 δ 中封闭且存在 $j':V\to M'$满足 $\mathrm{crit}(j')=\delta$ 且 $V_{(j(f)(\kappa)}\subseteq M'$,其中 M'是传递的,则称 κ 为邬丁基数. 如果 $V_\lambda\subseteq M$,则称 κ 为 λ 强基数. λ 超紧基数是以色列学者索洛韦(Solovay,R. M.)引入的. λ 强基数和超强基数这两个概念是从米雪尔(Mitchell,W.)的工作中提取出的. 谢拉赫基数是分别根据他们发现的大基数性质而命名的. 可以证明:

1. 若 κ 是 2^κ 超紧基数,则存在 κ 个小于 k 的超强基数.

2. 若 κ 是超强基数,则 κ 是谢拉赫基数并且存在 κ 个小于 κ 的谢拉赫基数.

3. 若 κ 是谢拉赫基数,则 κ 是邬丁基数并且存在 κ 个小于 κ 的邬丁基数.

4. 若 κ 是邬丁基数,则 κ 是不可达基数并且存在 κ 个小于 κ 的基数 δ 满足对于任意的 $\lambda<k$,δ 是 λ 强基数.

作为公理集合论研究的三大主流之一,大基数公理的研究与可构造性及力迫法这两者的研究有很大的不同:如果说后两者对集合论中的相容性与独立性进行精细的探讨与刻画的话,那么前者则是充分使用各种数学工具,开拓越来越丰富的集合论研究对象.

大基数(large cardinals)　见"大基数公理".

超紧基数(super compact cardinals)　见"大基数公理".

超强基数(super strong cardinals)　见"大基数公理".

谢拉赫基数(Shelah cardinals)　见"大基数公理".

邬丁基数(Woodin cardinals)　见"大基数公理".

不可达基数(inaccessible cardinals)　强弱不可达基数的统称. 如果 κ 是不可数的、正则的极限基数,则称 κ 是弱不可达基数;如果 κ 是不可数的、正则的强极限基数,则称 κ 是强不可达基数. 这两类大基数合称不可达基数(或不可到达基数),也有文献只把强不可达基数称为不可达基数. 不可达基数的概念是波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński,W.)和波兰学者塔尔斯基(Tarski,A.)于 1930 年引入的. 由于任何基数 λ 的后继基数 λ^+不超过 λ 的幂 2^λ,所以每个强不可达基数必为弱不可达基数;又由于在广义连续统假设 GCH 之下,$\lambda^+=2^\lambda$,所以在 GCH 之下,每个弱不达基数也是强不可达基数. 之所以如

此称呼这类大基数，是因为不能用通常的集合论运算来“到达”它们．事实上，若κ是强不可达基数，又集合X的基数$|X|<\kappa$，则幂集$P(X)$的基数也小于κ；又若$|S|<\kappa$，且对每个$X\in S$，$|X|<\kappa$，则$|\bigcup S|<\kappa$．这就是说，由小于κ的基数，无论进行何种运算，总达不到κ．可数无穷基数$\aleph_0$也具有上述两条性质，因此，也可以说在有限基数的范围内，用除去无穷公理之外的任何集论运算，$\aleph_0$也是“不可到达”的．这就清楚地看出，不可达基数确实是无穷基数$\aleph_0$的一种自然推广．“存在不可达基数”已不是ZFC系统的定理．若想肯定这一事实，只有引入大基数公理．事实上，若κ是强不可达基数，则直到κ层的集V_κ就是ZFC系统的模型．这样，若存在强不可达基数，则ZFC系统便相容．但不可能在ZFC系统中证明ZFC系统的相容性，于是推知：“存在不可达基数”不是ZFC系统的定理．

弱不可达基数(weakly inaccessible cardinals) 见“不可达基数”．

强不可达基数(strong inaccessible cardinals) 见“不可达基数”．

马赫罗基数(Mahlo cardinals) 与不可达基数联系最为密切的一类大基数．若κ是弱(或强)不可达基数，且小于κ的所有正则基数之集合是κ的驻子集，则称κ是弱(或强)马赫罗基数．通常，马赫罗基数指强马赫罗基数．早在1911年至1913年，马赫罗(Mahlo，P.)就研究了现今称为弱马赫罗基数的一类基数．

κ为弱(或强)马赫罗基数的充分必要条件是：小于κ的弱(或强)不可达基数之集合是κ的驻子集．由定义知，弱(或强)马赫罗基数必是弱(或强)不可达基数．但不可达基数不一定是马赫罗基数．而且，若κ是马赫罗基数，则κ必是第κ个不可达基数．亦即，若设$f:On\to g$是不可达基数类g的排序函数，则马赫罗基数κ是函数f的不动点$f(\kappa)=\kappa$．反之则不对，即若$f(\kappa)=\kappa$，κ不一定是马赫罗基数．而且，满足$f(\kappa)=\kappa$的最小基数一定不是马赫罗基数．所以在ZFC系统中，要想通过集论运算从不可达基数构造出马赫罗基数，与从ZFC系统中已有的基数构造出不可达基数同样是不可能的．

语言的紧致性(compactness of language) 刻画无穷语言中语句集及其子集相互关系的一种重要性质．设α,β为无穷基数，在通常的一阶语言基础上进行如下扩张：允许其合式公式中出现$<\alpha$个合取、析取联结词和$<\beta$个量词，这样的形式语言系统记为$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$．若语言$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中存在一个基数为$\zeta$的语句集没有模型，但该语句集的每个基数$<\eta$的子语句集都有模型，则称语言$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$是$(\zeta,\eta)$不紧的；反之，即语言$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中任何一个基数为$\zeta$的语句集，若它的每个基数$<\eta$的子语句集有模型，则该语句集有模型，此时称语言$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$是$(\zeta,\eta)$紧的．例如，通常的一阶语言可记为$\mathscr{L}_{\omega\omega}$，紧致性定理可写作：$\mathscr{L}_{\omega\omega}$是$(\omega,\omega)$紧的，也是$(\zeta,\omega)$紧的，这儿$\zeta$是任何无穷基数．但对有限的$n$，$\mathscr{L}_{\omega\omega}$都是$(n,n)$不紧的，比如取语句集$\{\varphi,\psi,\neg\varphi\vee\neg\psi\}$，可知$\mathscr{L}_{\omega\omega}$是$(3,3)$不紧的．语言的紧致性可用来定义弱紧基数和强紧基数．

弱紧基数(weakly compact cardinals) 大基数的一种，是大基数理论中的一个核心概念．若语言$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$中任何只用到$\leqslant\kappa$个非逻辑符号的语句集$\mathscr{A}$有模型，当且仅当$\mathscr{A}$的每个基数$<\kappa$的子语句集有模型，则称基数$\kappa>\omega$是弱紧基数．弱紧基数是由匈牙利学者爱尔特希(Erdös，P.)和波兰学者塔尔斯基(Tarski，A.)于1961年开始进行研究的．弱紧基数的等价性质很多，例如以无穷组合论中的一些性质来刻画，对于$\kappa>\omega$，κ是弱紧基数与以下各条等价：

1. κ具有分划性质$\kappa\to(\kappa)^2_2$．

2. 对任何基数$\gamma<\kappa$及$n<\omega$，κ具有分划性质$\kappa\to(\kappa)^n_\gamma$．

3. κ是强不可达基数且有树性质．

此外，κ是弱紧基数还与下列这些性质等价；

4. κ是超滤性质．

5. κ有弱超滤性质且κ是强不可达基数．

6. κ有V_κ可扩张性质．

7. κ有序性质．

8. κ是π^1_1不可描述基数．

汉弗(Hanf，W. P.)于1964年与库仑(Kunen，K.)于1977年的工作结合起来，得到如下结论：弱紧基数κ是强马赫罗基数，并且κ以下的强马赫罗基数的集合是κ的驻子集．通常的一阶逻辑语言是$\mathscr{L}_{\omega\omega}$，其紧致性定理是：$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的任一语句集$\mathscr{A}$有模型，当且仅当$\mathscr{A}$的每个有穷子集有模型．亦即，语言$\mathscr{L}_{\omega\omega}$是$(\omega,\omega)$紧的．上述弱紧基数的定义与此略有不同，如果完全依照ω的这一紧致性而加以推广，则可定义另一种弱紧基数，人们称之为弱紧2基数．基数$\kappa<\omega$称为弱紧2基数，是指语言$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$是$(\kappa,\kappa)$紧的，即对于$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的任何基数$\leqslant\kappa$的语句集$\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$有模型，当且仅当$\mathscr{A}$的每个基数$<\kappa$的子语句集有模型．若将先前定义的弱紧基数称为弱紧1基数，则可以证明：κ是弱紧1基数，当且仅当κ是弱紧2基数，且是强不可达基数．在广义连续统假设之下，弱紧1与弱紧2基数是相同的．弱紧2基数必为弱马赫罗基数．

强紧基数(strongly compact cardinals) 一类很“大”的大基数．若对于任何无穷基数λ，语言$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$都是$(\lambda,\kappa)$紧的，且$\kappa>\omega$，则称基数$\kappa$是强紧基数．语言$\mathscr{L}_{\omega\omega}$是$(\lambda,\omega)$紧的，这儿$\lambda$是任意无穷基数．因

而，强紧基数也是对无穷基数 ω 的某些性质进行推广而得到的. 开斯勒(Keisler, H. J.)和波兰学者塔尔斯基(Tarski, A.)于 1964 年引入强紧基数的概念.

强紧基数必是可测基数，因而也必是弱紧基数. 福平卡-赫巴契克于 1966 年证明了：若存在强紧基数，则对任何集合 $X, V\neq L[X]$. 这里 V 是全集，$L[X]$是相对于 X 的可构造集，或说是从 X 出发的可构造集. 以色列学者索洛韦(Solovay, R. M.)于 1974 年用力迫法证明了：若 κ 是强紧基数，对于每个$>\kappa$ 的奇异强极限基数 λ，有 $2^{\lambda}=\lambda^{+}$. 亦即对于一些很特殊的、很大的基数，证明了广义连续统假设是成立的.

分划性质(partition property)　亦称剖分性质. 无穷组合论中刻画基数大小的一种基本性质. 设 κ,λ 都是基数，n 是自然数，m 是有穷或无穷基数. 如果把 κ(看做集合)的 n 元子集的集合$[\kappa]^{n}=\{A\subseteq\kappa\mid |A|=n\}$任意划分为 m 块，至少有一个基数为 λ 的子集 $H\subseteq\kappa$，使得$[H]^{n}$ 中的元素(即 H 的 n 元子集)全都落入所划分的同一块中，则说这些基数之间存在分划性质 $\kappa\to(\lambda)^{n}_{m}$. 分划性质是熟知的鸽笼原则的直接推广. 鸽笼原则“m 个物体放入 $n(<m)$个盒了中，至少有 2 个物体被放入同一个盒子”，现在可记为 $m\to(2)^{1}_{n}$. 命题“任意 6 个人中必有 3 个人互相都认识或互相都不认识”则可记为 $6\to(3)^{2}_{2}$. 分划性质的这种记号是匈牙利学者爱尔特希(Erdös, P.)和拉多(Rado, R.)于 1956 年引入的. 因此，也有称分划性质为爱尔特希记号的. 早在 1930 年，英国数理逻辑学家拉姆齐(Ramsey, F. P.)就证明了$\aleph_0\to(\aleph_0)^{2}_{2}$. 但值得注意的是，任何$\geqslant 3$ 的自然数 m 都不具有分划性质 $m\to(m)^{2}_{2}$；而且，人们所熟悉的许多比$\aleph_0$ 大的基数也都不具有这个分划性质，例如，波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński, W.)于 1933 年证明了 $2^{\aleph_0}/(\aleph_1)^{2}_{2}$，又由定义直接得知当$\kappa/(\lambda)^{n}_{m}$及 $\kappa_1\leqslant\kappa$ 时，必有 $\kappa_1/(\lambda)^{n}_{m}$，而 $\aleph_1\leqslant 2^{\aleph_0}$，所以 $\aleph_1/(\aleph_1)^{2}_{2}$. 那么具有分划性质 $\kappa\to(\kappa)^{2}_{2}$ 的不可数基数究竟是否存在呢？这须由大基数理论来回答. 事实上，满足性质 $\kappa\to(\kappa)^{2}_{2}$ 的不可数基数为弱紧基数，它的存在性在 ZFC 系统中是不可证明的.

分划性质可以用来刻画多种基数，例如：

1. α 是正则基数，当且仅当$\forall\beta<\alpha[\alpha\to(\alpha)^{1}_{\beta}]$.

2. κ 是弱不可达基数，当且仅当 $\kappa>\omega$ 且
$$\forall\gamma<\kappa[\kappa\to(\kappa)^{1}_{\gamma^{+}}].$$

3. κ 是强不可达基数，当且仅当 $\kappa>\omega$ 且
$$\forall\gamma<\kappa[\kappa\to(\kappa)^{1}_{2^{\gamma}}].$$

4. κ 是弱紧基数，当且仅当 $\kappa>\omega$ 且 $\kappa\to(\kappa)^{2}_{2}$.

5. κ 是不可表达基数，当且仅当 $\kappa>$且
$$\kappa\to(\text{驻集})^{2}_{2}.$$

第 5 个性质是指，如果把 κ 的 2 元子集任意分为 2 块，必可找到 κ 的一个基数为 κ 的驻子集 H，使得 H 的所有 2 元子集都落入同一块中. κ 是拉姆齐基数，当且仅当 $\kappa\to(\kappa)^{<\omega}_{2}$. $\kappa\to(\kappa)^{<\omega}_{2}$ 意为，把 κ 的有限子集的集$[\kappa]^{<\omega}=\{A\mid A\subseteq\kappa$ 且 A 是有限集$\}$分成两类，必有 κ 的子集 $H\subseteq\kappa$，使得 H 的所有子集皆被分到同一类中.

驻子集(stationary subset)　序数组成的一种集合. 若对于序数类 Ω 的每个闭无界子集 B，都有 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 Ω 的子集 A 为 Ω 的驻子集. 相反地，若有 Ω 的某个闭无界子集 B，使 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 是 Ω 的些微子集，驻子集的基数与原有序数类 Ω 的基数相等，因而可以说，驻子集的概念与“几乎所有”的概念很相似，但却没有用到测度的概念来定义. 驻子集的概念在定义马赫罗基数. 不可表达基数等大基数时起很重要的作用.

些微子集(insignificant subset)　见“驻子集”.

序数类闭无界子集(closed unbounded subset of class of ordinals)　序数类的一种子集. 给定序数类 Ω 及 Ω 的一个子集 $A\subseteq\Omega$，若在 Ω 中不存在序数 α，使 A 中每个序数都小于 α，则称 A 在 Ω 中无界；若 A 包含本身的属于 Ω 的极限点，则称 A 是 Ω 的闭子集. Ω 的无界闭子集称为 Ω 的闭无界子集. 简记为 Ω 的 $c.u.b$.

λ 可加测度(λ-additive measure)　满足 λ 可加性条件的抽象测度. 设 λ 是无穷基数，集合 A 上的 λ 可加实值测度 μ 是从 A 的幂集 $P(A)$到实数区间$[0,1]$上的一个函数，且满足条件：

1. $\mu(\varnothing)=0, \mu(A)=1$.

2. 对每个 $x\in A, \mu(\{x\})=0$.

3. 对于两两不交集合的集 $\mathscr{X}\subseteq P(A)$，若$|\mathscr{X}|<\lambda$，则 $\mu(U\mathscr{X})=\sum_{B\in\mathscr{X}}\mu(B)$($\lambda$ 可加性).

“λ 可加实值测度”简记为“λ-$\mathscr{C}$ 测度”. 集合 A 上的 λ 可加二值测度(简记为“λ-2 测度”)则指满足上述三个条件的从 $P(A)$到两点集$\{0,1\}$的函数. λ-$\mathscr{C}$ 测度和 λ-2 测度合称 λ 可加测度. 这种抽象测度的概念是由美国数学家乌拉姆(Ulam, S. M.)于 1930 年引进的，它在研究可测基数时起着关键的作用. 有限可加实值测度是$\aleph_0$-$\mathscr{C}$ 测度，而概率测度(可数可加实值测度)是$\aleph_1$-$\mathscr{C}$ 测度.

可测基数(measurable cardinal)　一类重要的大基数. 指利用抽象测度概念定义的基数. 设 κ 是无穷基数，若任何基数为 κ 的集合 A 上，都存在 λ 可加实值测度(或 λ 可加 2 值测度)，则称 κ 是 λ-$\mathscr{C}$(或 λ-2)可测基数. 若 $\kappa>\aleph_0$ 是 κ-$\mathscr{C}$(或 κ-2)可测基数，则称 κ 是实值可测(或二值可测)基数，两者合称为可测基数. 波兰数学家巴拿赫(Banach, S.)和波兰

数学家库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)于 1920 年证明了:若 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$,则在连续统上不存在(可数可加)测度.因而,可测基数的存在性不是简单的问题.研究可测基数,肇始于 1930 年的巴拿赫等人.两种可测基数之间有如下关系:首先,由定义可直接可得,二值可测基数必是实值可测基数.其次,美国数学家乌拉姆(Ulam,S.M.)于 1930 年证明了,每个实值可测基数要么 $\leqslant 2^{\aleph_0}$,要么是二值可测基数.于是可推知,在广义连续统假设下,实值可测基数与二值可测基数相同.

利用以色列学者索洛韦(Solovay,R.M.)于 1971 年的结果可以证明,实值可测基数 κ 必是弱马赫罗基数,且小于 κ 的弱马赫罗基数组成 κ 的驻子集.乌拉姆早在 1930 年就证明了最小的可测基数 $\geqslant$ 最小的不可达基数.大约 1960 年,开斯勒(Keisler,H.J.)和波兰学者塔尔斯基(Tarski,A.)引入超积方法研究可测基数,证明了最小的可测基数比最小的不可达基数要大.另外,由于二值可测基数有树性质,于是得知,二值可测基数必是弱紧基数.若假设"存在二值可测基数"的大基数公理成立,则有如下这些关于可构造公理与广义连续统假设的结论:斯科特(Scott,D.S.)于 1961 年用超幂方法证明了,若存在可测基数,则 $V\neq L$,即可构造公理不成立;罗伯托姆(Rowbottom,F.)的下述结论更指出了大量的子集是不可构造的:若存在可测基数 κ,则对每个满足 $\omega\leqslant\lambda<\kappa$ 的基数 λ,仅有 λ 个可构造子集,特别地,ω 仅有可数个可构造子集;法国数学家、工程师莱维(Lévy,A.)和以色列学者索洛韦于 1971 年用力迫法证明了,设"ZF+存在可测基数"相容,则"ZF+存在可测基数+CH"以及"ZF+存在可测基数+$\neg$CH"都相容,这儿 CH 表示连续统假设,此定理断定,即使加上"存在可测基数"的假定,对于连续统假设的真假,ZF 系统仍不能做出明确的判断.

不可表达基数(ineffable cardinals) 一类大基数.指对分划性质 $\kappa\to(\kappa)_2^2$ 进行适当扩张而定义的基数.设对于任何分划 $f:[\kappa]^2\to 2$,存在 κ 的一驻子集 $X\subseteq\kappa$,满足 $|f``[X]^2|=1$,则称 κ 满足 $\kappa\to$(驻集)$_2^2$.若 $\kappa>\omega$,且满足 $\kappa\to$(驻集)$_2^2$,则称 κ 是不可表达基数.注意到测度为 1 的集必为驻集,驻集的基数必与原集合之基数相等,故知,可测基数必是不可表达基数,不可表达基数必是弱紧基数.不可表达基数是延森(Jensen,R.)利用其他方法定义的,后来库仑(Kunen,K.)证明了该定义与现在给出的定义等价,并且还证明了不可表达基数是 π_2^1 不可描述的.延森和以色列学者索洛韦(Solovay,R.M.)指出,若 κ 是不可表达基数,则不存在 κ 库雷巴树;在可构造公理之下,κ 是不可表达基数,当且仅当不存在 κ 库雷巴树.若 κ 是不可表达基数,则不存在 κ 阿龙扎扬树.

κ 库雷巴树(κ-Kurepa tree) 一种无穷树.指对长度、枝、层的基数作一定限制的树.设树 T 的长度为 κ,对每个序数 $\lambda<\kappa$,树 T 的第 λ 层元素个数 T_λ 满足 $|T_\lambda|\leqslant|\lambda|+\aleph_0$,并且该树有多于 κ 条长度为 κ 的枝,则称树 T 为一棵 κ 库雷巴树.对任何一基数 κ,是否存在 κ 库雷巴树,是对 κ 的重要特征的一种刻画.

拉姆齐基数(Ramsey cardinals) 一类大基数.指对分划关系性质 $\kappa\to(\kappa)_2^2$的肩码作适当修改而定义的基数.由于当 $\kappa\geqslant\omega$ 时,$\kappa\to(\kappa)_2^2$ 等价于 $\kappa\to(\kappa)_2^n(n<\omega)$;另外,拉多(Rado,R.)又证明了,在选择公理之下,任何 $\kappa\geqslant\omega$,$\kappa\not\to(\kappa)_2^\omega$.可见分划性质 $\kappa\to(\kappa)_2^2$ 的肩码最多只能增大为 $\kappa\to(\kappa)_2^{<\omega}$这种情况,则称满足 $\kappa\to(\kappa)_2^{<\omega}$ 的基数为拉姆齐基数.由于 $\omega\not\to(\omega)_2^{<\omega}$,所以拉姆齐基数不能看做是 ω 的某种推广.比较几种大基数的定义匈牙利学者(爱尔特希(Erdös,P.)与海纳尔(Hajnal,A.),1962)可知,可测基数是拉姆齐基数,拉姆齐基数是弱紧基数.斯科特(Scott,D.S.)等于 1961 年证明了,若存在拉姆齐基数,则可构造公理不真,即 $V\neq L$.

爱尔特希基数(Erdös cardinals) 一类大基数.指对分划性质作某种改变而得到的基数.任给序数 α,记满足分划性质 $\kappa\to(\alpha)_2^{<\omega}$ 的最小基数 κ 为 $\kappa(\alpha)$,称为爱尔特希基数.与其他类型的大基数不同,爱尔特希基数是随 α 而变的一组基数.匈牙利学者爱尔特希(Erdös,P.)与海纳尔(Hajnal,A.)于 1958 年证明了:$\kappa(\alpha)<\kappa(\alpha+1)$,即爱尔特希基数是随 α 严格上升的;若 α 是极限序数,则 $\kappa(\alpha)$是强不可达基数.利用爱尔特希基数,可以很方便地定义拉姆齐基数:爱尔特希基数函数 $\kappa(\alpha)$的不动点即是拉姆齐基数,即满足 $\kappa(\eta)=\eta$ 的 η 是拉姆齐基数.

延森基数(Jensen cardinals) 一种大基数.指用语言的模型概念定义的基数.若每个大小为 κ 的(可数语言的)模型 $\mathscr{U}$ 都有大小为 κ 的初等真子模型 $\mathscr{B}$,则称无穷基数 κ 为延森基数.也可用如下的等价条件刻画延森基数:对于每个分划 $F:[\kappa]^{<\omega}\to\kappa$,都存在 $H\subseteq\kappa$,$|H|=\kappa$,使$[H]^{<\omega}$在 F 之下的象不是整个 κ 集.匈牙利学者爱尔特希(Erdös,P.)和海纳尔(Hajnal,A.)于 1966 年证明了没有一个$\aleph_n$是延森基数.罗伯托姆(Rowbottom,F.)证明了最小的延森基数是弱不可达的或有共尾 ω.而基斯勒(Keisler,H.J.)和罗伯托姆于 1965 年证明:若 $V=L$,则不存在延森基数.库仑(Kunen,K.)于 1970 年证明了有这样的模型:在其中每个延森基数都是拉姆齐基数.

$\prod_n^m$ 公式($\prod_n^m$-formulas) 亦称$\sum_n^m$ 公式.一种

重要公式. 指高阶语言中合式公式的一种范式. 它在定义大基数时有很重要的作用. 在高阶语言中，若一公式的前束范式的较高阶量词在较低阶量词之前，则称此范式为完全前束范式. 若完全前束范式的最前面量词是 $m+1$ 阶全称量词(或存在量词)，并且 $m+1$ 阶的量词共有 n 层(若干个相连的同名量词称为一层)，则此公式称为 $\prod_n^m$ 公式或 $\sum_n^m$ 公式.

$\sum_n^m$ 公式($\sum_n^m$-formulas)　见"$\prod_n^m$ 公式".

$\prod_n^m$ 不可描述基数($\prod_n^m$-indescribable cardinals)　一类大基数. 指用 $\prod_n^m$(或 $\sum_n^m$) 公式的概念和模型论工具所定义的基数. 若对任何仅含一个二阶自由变元 X(但其中的约束变元不限二阶)的 $\prod_n^m$ 公式(或 $\sum_n^m$ 公式)$\Phi(X)$，当有 α 层结构 $\langle V_\alpha, \in \restriction V_\alpha, R\rangle$ 满足 $\Phi(R)$ 时，即 $\langle V_\alpha, \in \restriction V_\alpha, R\rangle \vDash \Phi(R)$ 成立时，存在 $\beta<\alpha$，使 β 层子结构也满足 $\Phi(R)$，即 $\langle V_\beta, \in \restriction V_\beta, R\cap V_\beta\rangle \vDash \Phi(R\cap V_\beta)$，则称基数 α 为 $\prod_n^m$(或 $\sum_n^m$) 不可描述基数. 注意到反射原理是指全域中的任何一阶公式可以用某一层 V_β 中的相对化公式来代替，此处的不可描述性则指，在 α 层结构中真的公式，必可在 α 之前的某 β 层中为真(公式加以适当的限制). 故可认为，这种不可描述基数必是很大的一类大基数.

事实上，有如下一些结果：κ 是强不可达基数，当且仅当 κ 是 $\prod_0^1$ 不可描述基数，又当且仅当 κ 是 $\sum_1^1$ 不可描述基数；κ 是弱紧基数，当且仅当 κ 是 $\prod_1^1$ 不可描述基数；若 κ 是可测基数，则 κ 是 $\prod_1^2$ 不可描述基数.

$\sum_n^m$ 不可描述基数($\sum_n^m$-indescribable cardinals)　见"$\prod_n^m$ 不可描述基数".

翻转(flip)　公理集合论的基本概念之一. 设 κ 是不可数基数，κ 的子集的任一长度为 μ 的序列 $\langle A_\alpha | A_\alpha \subseteq K \wedge \alpha<\mu\rangle \in {}^\mu P(\kappa)$ 的一个翻转，是指序列 $\langle B_\alpha|\alpha<\mu\rangle$，其中的每个 B_α 要么是 A_α，要么是 $\kappa-A_\alpha$. 翻转的概念是由阿波拉松(Abramson, F. G.)等 4 人于 1977 年提出的. 它是由分划性质推广而得的一个概念. 利用它可对众多的大基数给出统一的描述. 他们还证明了如下一些充分必要条件，从而成功地用翻转概念统一描述了多种大基数：

1. κ 是强不可表达基数，当且仅当对任何 $\mu<\kappa$，${}^\mu P(\kappa)$ 中任何序列有一个翻转 $\langle B_\alpha|\alpha<\mu\rangle$ 满足条件

$$|\bigcap_{\alpha<\mu} B_\alpha| = \kappa.$$

2. κ 是弱紧基数，当且仅当 ${}^\kappa p(\kappa)$ 中任何序列有一个翻转 $\langle B_\alpha|\alpha<\kappa\rangle$，使对任何 $\eta<\kappa$，有

$$|\bigcap_{\alpha<\eta} B_\alpha| = \kappa.$$

3. κ 是不可表达基数，当且仅当 ${}^\kappa p(\kappa)$ 中任何序列有一个翻转 $\langle B_\alpha|\alpha<\kappa\rangle$，使得

$$D_{\alpha<\kappa} B_\alpha = \bigcap_{\beta<\kappa}[B_\beta \cup (\beta+1)]$$

(称为对角线交)为 κ 的驻集.

4. κ 是可测基数，当且仅当对任何基数 λ，${}^\lambda p(\kappa)$ 中任何序列有一个翻转 $\langle B_\alpha|\alpha<\lambda\rangle$，使对任何 $\eta<\kappa$，有

$$|\bigcap_{\alpha<\eta} B_\alpha| = \kappa.$$

力迫法(forcing method)　构造集合论模型的主要方法之一. 它是由美国数学家科恩(Cohen, P. J.)于 1963 年为证明连续统假设的否定($\neg$CH)与 ZFC 公理系统的相容性、选择公理的否定($\neg$AC)与 ZF 公理系统的相对相容性时发明的. 构造集合论模型主要有两条途径：一是内模型方法，即从 ZF(C)系统的一个模型 M 出发，构造 M 的一个子模型 N，使 N 为ZF(C)$\cup\{\varphi\}$的模型. 美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)在证明 CH 及 AC 的相容性时采用的即是内模型法；二是外模型法，即从ZF(C)系统的一个模型 M 出发，通过扩充 M 成为一个更大的模型 N，使 N 为 ZF(C)$\cup\{\varphi\}$的模型. 科恩通过分析哥德尔的证明过程意识到，要证明$\neg$CH 及$\neg$AC 的相对相容性，至少不可能在已有的ZF(C)系统的标准模型之内构造一个标准模型，使之满足$\neg$CH 或$\neg$AC. 因此，他采用了外模型方法. 假设 ZF(C)系统有一个可数的可传标准模型 M，取不属于 M 的自然数集合 a(因 M 可数，故这样的 a 不仅能找到，而且很多)，把 a 加到 M 上，以扩充出一个新的模型 $N[a]$($\supseteq M\cup\{a\}$)，使得 $N[a]$满足 M 所满足的 ZF(C)系统的所有公理. 为此，必须恰当选择 a，以"逼迫"(Forcing)$N[a]$满足人们所希望的命题. 这一过程有些像代数中构造代数扩域的过程，将 a 作为一个待定元，通过观察 $N[a]$的性质确定 a. 由于 a 为自然数集合，因此 a 的性质取决于哪些自然数属于它，哪些自然数不属于它. 设 p 为 ω 到$\{0,1\}$的有限函数，用函数 p 来表示 a 的一个部分信息，即当 $p(n)=1$ 时，表示 $n\in a$；当 $p(n)=0$ 时，表示 $n\notin a$. 如果能凭借 a 的一个部分信息 p 推知 $N[a]$必定满足某个集合论性质 A，则称 p"力迫"A 在 $N[a]$中成立，记为 $p\vDash A$，这里 p 称为力迫条件，A 称为力迫结论. "力迫"一词的含义是因为 a 具有条件 p 之后，才迫使性质 A 在 $N[a]$中成立. 通过恰当定义力迫关系"$\Vdash$"，可以使之满足下列性质：

1. 可靠性. $p\Vdash A$ 与 $p\Vdash TA$ 不能同时成立.

2. 平凡性. 若 $p\Vdash A$，则对任何 $q\supseteq p$，$q\Vdash A$(因为 q 比 p 包含了更多有关 a 的信息).

3. 完全性. 对任何条件 p 及性质 A，总存在条件 $q\supseteq p$，使 $q\Vdash A$ 或$\Vdash\neg TA$，此时称 q 决定 A.

根据上列性质，先将所有集合论性质排成一个序列 $A_0, A_1, \cdots$，任取一个力迫条件 p 作为起点，若 p 不能决定 A_0，则由完全性可知存在 $p_0\supseteq p$，使 p_0

决定 A，否则取 $p_0=p$. 若 p_0 也能决定 A_1，则取 $p_1=p_0$，否则取 $p_1\supset p_0$，使 p_1 决定 A_1，依此类推，可以得到一个力迫条件序列$\{p_n\}$，使得对任何 n，$p_n\Vdash A_n$ 或 $p_n\Vdash\neg$ AC. 称这样的序列为一个完全序列，它完全决定了 $N[a]$的性质. 令 $a=\{n:p_n(n)=1\}$，从而待定元 a 就可以由力迫序列$\{p_n\}$所确定. 一个实际的力迫证明通常采用反证法，它是一种对角线方法. 对给定的力迫序列$\{p_n\}$，若欲证明性质 A 在 $N[a]$中成立，反证假设$\neg A$ 在 $N[a]$中成立，从而存在一个力迫条件 $p_n\Vdash TA_n$，因 p_n 有限，故可对 p_n 进行恰当扩充，使 $q\supset p_n$ 且 $q\Vdash\neg(\neg A)$，但由性质 2，$q\Vdash\neg A$，这与性质 1 矛盾. 从而得出原证结论. 利用这种方法可以证明 ZFC$+V\neq L$ 相对于 ZFC 系统相容. 对上列方法再进行一般化，可以证出$\neg$ AC，$\neg$ CH 的相容性结果.

以上为科恩的力迫法的基本思想，在随后的十多年中，人们对力迫法作了较大的改进，形成了多种力迫法表述形式，最有代表性的是斯科特(Scott，D. S.)与以色列学者索洛韦(Solovay，R. M.)等人发展的布尔值模型方法及休恩菲尔德(Shoenfield，J. R.)给出的偏序集上的兼纳扩充方法. 目前通常采用后一种表述方法或将两种方法相结合. 力迫扩张的过程可大致描述如下：对 ZF(C)系统的一个可数可传模型 M(称为基模型)以及 M 中的一个偏序 P(称为力迫概念)，令 $G\subseteq P$ 为 P 的一个兼纳子集(参见“兼纳集”)，一般地，$G\notin M$，由兼纳模型定理(参见“兼纳模型定理”)，存在一个包含 G 且扩充 M 的模型 $M[G]$，使 $M[G]$为 ZF(C)系统的一个可数可传模型. $M[G]$称为 M 的兼纳扩充. 为了能在基模型 M 中讨论扩充模型 $M[G]$的性质，引入若干新的常元(它们可以在 M 中定义出来)，用以表示 $M[G]$中的集合，通常称之为$M[G]$中元素的名，记为 $\bar{a}$，$a\in M[G]$. 借助这些名，可以在基模型中描述兼纳模型 $M[G]$的性质.

在基模型中，恰当定义力迫法关系 $p\Vdash\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$(这里 $p(\in P)$称为力迫条件，φ 为经扩充的集合论语言的公式，$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的名)，使得如下力迫定理成立：$M[G]\Vdash\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，当且仅当存在 $p\in G$，使 $p\Vdash\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$. 因此，$M[G]$的性质就可以由 M 中的力迫关系所决定. 为了证明某个集合论假设 A 加到 ZF(C)系统后相对 ZF(C)系统的相容性，可以适当构造偏序集 P，使得兼纳扩充 $M[G]$满足 A. 利用这种方法可获得诸如 ZFC$+\neg$CH，ZF$+\neg$AC，ZFC$+$GCH$+V\neq L$ 等相对相容性结果. 如果进行一次力迫扩充，仍不能使兼纳扩充模型获得所需的性质，可以将扩充后的模型作为基模型，再进行若干次扩充，直至获得所需的性质. 这种方法称为迭代力迫法. 例如 ZFC$+$MA$+\neg$CH 以及 ZFC$+$SH 的相对相容性即是用迭代力迫法获得证明的. 近十多年来，应用迭代力迫法进行了大量的研究，取得了非常丰富的研究成果. 以色列数学家谢拉赫(Shelah，S.)在这方面的成就举世瞩目. 他引入正常力迫法并且证明了许多迭代力迫法的保持定理. 谢拉赫还用他的理论解决了一大批著名的数学问题，如拓扑学中的 P 点存在性问题，无限交换群中的怀特海问题等. 目前已被应用于递归论、超限算术、无穷组合论、一般拓扑、测度论、泛代数、模型论等众多领域，是迄今为止获得相对相容性结果的主要方法.

兼纳集(generic set)　亦称脱殊集. 力迫法的一个概念. 设 M 为一个非空集合，P 为 M 中的偏序集，$P\in M$，若 $G\subset P$ 为 P 的滤子，且对任何 P 的稠密子集 D，$D\in M\rightarrow G\cap D\neq\varnothing$，则称 G 为 M 上的 P 兼纳集，或称 G 为 P 的兼纳子集. 兼纳集的概念是美国数学家科恩(Cohen，P. J.)于 1963 年在利用力迫法证明 AC 与 CH 的独立性时引入的. 为了在基模型 M 上构造一个扩张模型，科恩引入了 M 之外的一些元素，将这些元素与 M 一起共同扩张成 ZF 的另一个模型 N. 为了不至于使扩张后的模型包含更多的序数，要求新引入的元素必须具有与 M 中的“普通”元素类似的性质，这些用来扩张 M 的“普通”元素称为兼纳集. 兼纳是英文 generic 的音译，意为普通、一般的意思. 目前对兼纳集的定义是以色列学者索洛韦(Solovay，R. M.)在科恩思想的基础上建立起来的一般性概念，它不仅是力迫法中的基本概念，也被经常运用于其他数学领域.

若 M 可数，则对任何 $p\in P$，均存在一个 M 上的 P 兼纳集，使 $p\in G$. 这一结论称为兼纳集 G 存在定理，是保证力迫扩张存在性的前提.

兼纳扩充(generic extension)　力迫法的一个概念. 指力迫法中利用兼纳集对基模型的扩张. 设 M 为 ZF 系统的可传模型，G 为 M 上的某偏序集 P 的兼纳子集，通过力迫构造过程，将 M 扩张为包含 G 的一个模型 $M[G]$，则$M[G]$称为 M 的兼纳扩充. M 称为兼纳扩充的基模型. 不同的力迫构造过程得到的兼纳扩充通常也不同，一般地，兼纳扩充满足下列条件：

1. $M\subset M[G]$.
2. $G\in M[G]$.
3. $M[G]$与 M 具有相同的序数.
4. $M[G]$为 ZF 系统的模型且为 M 的所有可传扩张模型中最小的一个.

兼纳扩充的存在性称为兼纳模型定理(参见“兼纳模型定理”).

兼纳模型定理(generic model theorem)　关于力迫法的重要命题. 它给出了兼纳扩充的存在性条

件. 设 M 为 ZF(C)系统的可传模型,$\langle P,\leqslant\rangle$为 M 中的偏序集(参见“力迫概念”),$G\subseteq P$ 为 M 上的 P 兼纳集,则存在一个可传模型 $M[G]$,使:

1. $M[G]$为 ZF(C)系统的模型.
2. $M\subseteq M[G]$且 $G\in M[G]$.
3. M 与 $M[G]$具有相同的序数.
4. 若 N 为 ZF(C)系统的可传模型,使 $M\subseteq N,G\in N$,则 $M[G]\subseteq N$.

兼纳模型定理为证明集合论外加公理的相容性与独立性提供了一个统计——模式. 比如:若欲证明命题 A 与 ZF(C)系统相容,只须选择适当的力迫概念 P 及兼纳集 G,使 P 与 G 满足兼纳模型定理中的条件,且使 A 在 $M[G]$中成立,即可得出 A 与ZF(C)系统相容,而不必再逐一验证ZF(C)系统每条公理在$M[G]$中的可满足性.

力迫语言(forcing language)　一种一阶语言. 它由一个二元关系符$\in$及若干常量符构成,不同的力迫构造,用的力迫语言通常也不同. 一般地,若 M 为力迫基模型,则力迫语言除含二元关系符$\in$外,还含 M 中每个元素的一个名及兼纳集的名,有些力迫构造还提供了对兼纳扩充$M[G]$的每个潜在元素的名. 一旦选择 了一个兼纳集 G,则每个力迫语言的常元都被解释为模型 $M[G]$中的一个元素,相反,$M[G]$中的每个命题也可以用力迫语言来描述. 根据这种对应关系,兼纳模型 $M[G]$的性质就可以用力迫语言来描述. 虽然集合论语言不包含力迫语言中引入的一些新常量,然而对力迫语言中的每个常量可以用类似于哥德尔编码的方式将其用基模型 M 中的惟一的元素表示之. 这样,力迫语言中的每个语句也对应于 M 中的一个语句,从而力迫关系就可以在 M 中定义,兼纳扩充 $M[G]$中的每个元素也可以用 M 中的无素指称.

力迫关系(forcing relation)　一种二元关系. 指力迫条件与力迫语句之间的关系. 通过力迫定理,它又能反映力迫条件对兼纳模型中的性质的决定关系. 对任意偏序集 P,设 $p\in P$ 为一个力迫条件,σ 为相关的力迫语言中的一个语句,p 与 σ 的力迫关系记为 $p\Vdash\sigma$,称 p 力迫 σ,其定义随力迫法的陈述形式的不同而有较大的差异. 美国数学家科恩(Cohen,P. J.)原来对力迫关系的定义是通过对 σ 的结构进行递归定义. 现代力迫法通常也采用这种方式定义力迫关系. 在布尔值模型中,力迫关系定义为:$p\Vdash\sigma$,当且仅当 $e(p)\leqslant\|\sigma\|$,式中 e 表示 P 到 P 的正规开代数 $B=r.o.(P)$的规范嵌入,$\|\sigma\|$ 表示 σ 的布尔值. 力迫关系具有下列性质:

1. 若 $p\Vdash\sigma,q\leqslant p$,则 $q\Vdash\sigma$.
2. 对任何 $p\in P$,$p\Vdash\sigma$ 与 $p\Vdash\neg\sigma$ 至多有一个成立.
3. 对任何 $p\in P$,存在 $q\leqslant p$,使 $q\Vdash\sigma$ 与 $q\Vdash\neg\sigma$ 有且仅有一个成立.
4. $p\Vdash\neg\sigma$,当且仅当不存在 $q\leqslant p$ 使 $q\Vdash\sigma$.
5. $p\Vdash\sigma\wedge\tau$,当且仅当 $p\Vdash\sigma$ 且 $p\Vdash\tau$.
6. $p\vdash\sigma\vee\tau$,当且仅当对任何 $q\leqslant p$,存在 $r\geqslant q$ 使 $r\Vdash\sigma$ 或 $r\Vdash\tau$.

由于力迫关系对 ZF 系统的任何模型绝对,因此,它可以在力迫基模型中被定义,由力迫定理可知,$\exists p\in G(p\Vdash\sigma)^M$,当且仅当 $M[G]\Vdash\sigma$. 这说明兼纳模型 $M[G]$中的性质可以在基模型中通过兼纳集 G 所决定,这是力迫方法的重要特征.

力迫概念(notation of forcing)　公理集合论术语. 指用于构造兼纳扩充的偏序集. 设 M 为 ZF(C)系统的可传模型,$\langle P,\leqslant\rangle$为 M 中的一个非空偏序集,则对 M 中的每个 P 兼纳集 G,由兼纳模型定理,存在 M 的兼纳扩充$M[G]$,使得 $M[G]$也是 ZF(C)系统的可传模型. 这里偏序集$\langle P,\leqslant\rangle$称为力迫概念,$P$ 中的元素称为力迫条件(参见“力迫条件”). 对给定的基模型,力迫概念决定了兼纳扩充模型的基本性质,因此,使用力迫法的关键在于选择适当的力迫概念. 构造不同的力迫概念的技巧,形成了具有不同特色的力迫方法. 最常用的力迫概念有下面几种:

1. 有限部分函数偏序集 $F_n(I,J)$. 其元素为定义域 I 的子集、值域为 J 的子集的有限函数,即

$$F_n(I,J)=\{p:|p|<\omega\wedge p\text{ 为函数}\wedge\operatorname{dom}(p)\subset I\wedge\operatorname{ran}(p)\subset J\}.$$

$F_n(I,J)$中的偏序关系$\leqslant$定义为函数的反包含关系,即若 $p,q\in F_n(I,J)$,则 $p\leqslant q$,当且仅当 $p\supseteq q$. 美国数学家科恩(Cohen,P. J.)于 1963 年证明连续统假设的独立性时就是使用这种类型的偏序集. 更具体地说,科恩使用的是 $F_n(\kappa\times\omega,2)$型的偏序集,常称之为科恩偏序.

2. 无穷部分函数偏序集 $F_n(I,J,\lambda)$. 设 λ 为无穷基数,令 $F_n(I,J,\lambda)=\{p:|p|<\lambda\wedge p$ 为函数 $\wedge\operatorname{dom}(P)\subset I\wedge\operatorname{ran}(p)\subset J\}$,$F_n(I,J,\lambda)$中的偏序关系仍定义为函数的反包含关系.

3. 莱维偏序集 $L_v(\kappa)$. 设 κ 为任意基数,令

$$L_v(\kappa)=\{p;|p|<\omega\wedge p\text{ 为函数 }\wedge\operatorname{dom}(p)\subset k\times\omega\wedge\forall\langle\alpha,n\rangle\in\operatorname{dom}(p)(p(\alpha,n)\in\alpha)\},$$

$L_v(\kappa)$中的偏序关系定义为函数的反包含关系.

在上列偏序集中,$F_n(I,J)$与 $F_n(I,J,\lambda)$具有很好的保基数性,而 $L_v(\kappa)$能崩塌基数. 另外,使用偏序集的乘积、偏序集的完备或稠密嵌入等技巧,也是构造新力迫概念的重要手段.

力迫条件(forcing condition)　公理集合论术语. 指用于力迫构造的偏序集的元素. 美国数学家科恩(Cohen,P. J.)对力迫条件的原始定义形为 $n\in a$

或 $n\notin a$ 的有限协调公式集，这里 a 代表用于兼纳扩充的兼纳集（或代表兼纳集的名），n 为自然数. 因此，每个力迫条件就给出了兼纳集元素构成的一个局部情况，由于兼纳扩充模型 $M[G]$ 由兼纳集 G 所决定，因此，一定的力迫条件可以确定出兼纳模型中具有或者不具有某种性质，一列适当的力迫条件无穷序列可以确定出兼纳扩充 $M[G]$ 中的所有性质，这种力迫条件序列称为完备力迫条件序列. 现代力迫法对力迫条件的定义由科恩的原始定义抽象与简化而得.

设 $\langle P,<\rangle$ 为用于力迫构造的偏序集，$p,q\in P$ 为两个力迫条件，若 $p<q$，则称 p 强于 q，若存在 $r\in P$ 使 $r\leqslant p$ 且 $r\leqslant q$，，则称 p 与 q 相容，否则称为不相容，记为 $p\perp q$.

完备力迫条件序列(complete forcing condition sequence) 见“力迫条件”.

力迫定理(forcing theorem) 力迫法基本定理. 它给出了力迫关系与兼纳模型中的满足关系的对应关系. 设 M 为 ZF(C) 系统的可传模型，$\langle P,<\rangle$ 为 M 中的偏序集（即力迫概念），G 为 M 上的 P 兼纳集，$M[G]$ 为 M 的兼纳扩充，则对任何力迫语言中的公式 $\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$M[G]\Vdash\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，当且仅当 $(\exists p\in G)p\Vdash\sigma(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$，这里 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的名. 力迫定理表明：验证 $M[G]$ 中的某一性质是否成立，可以转化为寻找某个适当的力迫条件，使之力迫这个性质. 由于力迫关系可以定义于基模型，因此，对给定的兼纳集 G，可以在 M 中决定 $M[G]$ 的性质.

伊斯顿定理(Easton theorem) 论证基数的重要定理. 伊斯顿(Easton, W.)于 1970 年利用力迫法，证明对任何正规基数 κ，只要不违反单调性与柯尼希引理，2^κ 可以等于任何基数. 具体地说，设 E 为一个函数，dom (E) 为所有的正规基数，若对任何 $\kappa\in \mathrm{dom}(E)$，$E(\kappa)$ 为基数，且 $cf(E(\kappa))>\kappa$，又对任何 $\kappa,\kappa'\in\mathrm{dom}(E)$，$\kappa<\kappa'\to E(\kappa)\leqslant E(\kappa')$，则称 E 为一个伊斯顿索引函数. 伊斯顿定理断言：若 M 为 ZFC+GCH 的模型，E 为任意伊斯顿索引函数，则存在 M 的兼纳扩充 $M[G]$，它与 M 有相同的基数，且对任何正则基数，$M[G]\Vdash 2^\kappa=E(\kappa)$. 伊斯顿在证明上列著名结论时，设计了一种特殊的两步迭代力迫法，这种方法常被称为伊斯顿力迫法.

伊斯顿索引函数(Easton index function) 见“伊斯顿定理”.

伊斯顿力迫法(Easton forcing) 见“伊斯顿定理”.

崩塌基数(cardinal collapsing) 亦称跌落基数. 力迫法的一个概念. 设 $P\in M$ 为基模型 M 中的力迫概念，κ 为 M 中的无穷基数，若存在 P 的兼纳集 G，使 κ 在 $M[G]$ 中的基数小于 κ，即 $|\kappa|^{M[G]}<\kappa$，则称 P 崩塌基数 κ. 设 κ,λ 为 M 中的无穷基数，$\kappa<\lambda$，若存在 P 的兼纳集 G，使得在 $M[G]$ 中 $\kappa=\lambda$，则称 P 将 λ 崩塌到 κ. 例如，若 κ 为正规基数，$\lambda>\kappa$ 为任意基数，则 $F_n(\kappa,\lambda,\kappa)$ 可将 λ 崩塌到 κ. 再如，若 κ 为正规基数，$\lambda>\kappa$ 为一个不可达基数，则莱维偏序 $L_v(\kappa)$ 可将 λ 崩塌为 κ. 其中 $F_n(\kappa,\lambda,\kappa)$ 与 $L_v(\kappa)$ 的定义（参见“力迫概念”）. 美国数学家科恩(Cohen, P. J.)于 1963 年最先发现可以将一个不可数基数崩塌为一个可数基数. 后来法国数学家、工程师莱维(Lévy, A.)发展了科恩理论，发现任何不可达基数均可以被崩塌为一个可达的正规基数.

保基数(cardinal preserving) 力迫法的一个概念. 若力迫概念使其模型与兼纳扩充有相同的基数，则称之为保基数. 设 M 为力迫基模型，P 为力迫概念，若对任意兼纳扩充 $M[G]$，使 β 为 M 中的基数，当且仅当 β 为 $M[G]$ 中的基数，则称 P 保基数. 由于基数概念不是绝对的，因此不是所有的力迫概念均保基数，但可以证明，若 P 在基模型中满足可数链条件，则 P 保基数. 在有些力迫构造中，并不需要基模型与兼纳扩充中的基数完全相同，因此，存在保部分基数的概念. 设 $P\in M$ 为基模型 M 中的力迫概念，θ 为 M 中的无穷基数，若对任何 P 的兼纳子集 G 及任何序数 $\beta\geqslant\theta(\leqslant\theta)$，均有 β 为 M 中的基数，当且仅当 β 为 $M[G]$ 中的基数，则称 P 保基数 $\geqslant\theta(\leqslant\theta)$. 若 P 在 M 中具有 θ 链条件，则 P 保基数 $\geqslant\theta$. 保基数的概念由美国数学家科恩(Cohen, P. J.)于 1963 年引入，他发现了可数链条件与保基数的关系. 以色列学者索洛韦(Solovay, R. M.)发展了科恩的理论，建立一般链条件与部分保基数的关系.

迭代力迫法(method of iterated forcing) 力迫法的一种推广. 是重复进行力迫构造过程，以获得具有某种特定性质的兼纳模型的方法. 设 M 为 ZF(C) 系统的模型，对 M 重复进行 α 次兼纳扩充过程，得到一列模型：$M=M_0\subseteq M_1\subseteq\cdots\subseteq M_\xi\subseteq\cdots\subseteq M_\alpha$ 使得 $M_{\xi+1}=M_\xi[G_\xi]$，G_ξ 为 M_ξ 上某个偏序集 P_ξ 的兼纳集. 上列过程称为 α 次迭代力迫. 当 $\alpha=2$ 时，称之为两步迭代力迫，当 α 为极限序数时，称之为极限迭代力迫. 对两步迭代力迫，最自然的方法是，首先通过基模型 M 中的一个力迫概念 P_0 及 P_0 的一个兼纳子集 G，获得兼纳扩充 $M_1=M_0[G_0]$，再选择 $M[G_0]$ 上的力迫概念 P_1 及 P_1 的一个兼纳子集 G_1，以获得兼纳扩充 $M_2=M_1[G_0]=M_0[G_0][G_1]$，且使 M_2 具有所需的力迫性质. 有限次迭代力迫过程也可仿此方法进行. 然而这种方法不能推广到极限迭代的情形，因为当 α 为极限序数时，例如 $\alpha=\omega$ 时，M_α 很难给出. 如果取

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta,$$

则 M_α 一般不具有兼纳模型的性质，例如 $\{G_\beta:\beta<\alpha\}$ 一般不属于 M_α. 一般的迭代力迫法是在基模型 M 中寻找一列偏序集 $\{Q_\zeta:\zeta<\alpha\}$，使 $P_0=Q_0\subseteq_c Q_1\subseteq_c\cdots\subseteq_c Q_\zeta\subseteq_c\cdots\subseteq_c Q_\alpha$，式中 $\subseteq_c$ 表示两个偏序集的完备嵌入，则对每个 Q_α 的兼纳子集 G_α 存在一列兼纳集 $\langle G_\zeta:\zeta<\alpha\rangle$，使 G_ζ 为 Q_ζ 的兼纳子集，且

$$M=M_0\subseteq M_1[G_1]\subseteq\cdots\subseteq M[G_\zeta]\subseteq\cdots\subseteq M[G_\alpha].$$

这就是通过构造偏序集的完备嵌入序列实现迭代力迫过程. 迭代力迫法最初由以色列学者索洛韦(Solovay, R. M.)与特纳鲍姆(Tennenbaum, S.)于1971年在证明 MA+┐CH 与 Suslin 假设的相容性时所发明，现在已成为一种强有力的相容性与独立性证明方法.

几乎分离力迫(almost disjoint forcing)　一种力迫方法. 是以几乎分离集簇作为力迫概念的力迫方法. 设 $\mathscr{A}=\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 为一个 ω 上的几乎分离集簇(参见“几乎分离集簇”)，X 为 ω_1 的任意子集. 令 $P_{\mathscr{A},X}=\{p:p$ 为函数 $\wedge\,\mathrm{dom}(p)\subset\omega\wedge\mathrm{ran}(p)=\{0,1\}\wedge\forall\alpha\in X\,|\mathrm{dom}(p)\cap A_\alpha|<\omega\wedge|\{n:p(n)=1\}|<\omega\}$，定义 $P_{\mathscr{A},X}$ 中的偏序关系 $\leqslant$ 为：$p\leqslant q$，当且仅当 $p\supseteq q$. 则以 $\langle P_{\mathscr{A},X},\leqslant\rangle$ 为力迫概念的力迫构造称为几乎分离力迫. 几乎分离力迫方法常被用在描述集合论中. 该方法最初由美国学者马丁(Martin, D. A.)、以色列学者索洛韦(Solovay, R. M.)、延森(Jensen, R.)等人所发明.

标准模型假设(standard model hypothesis)　一种中间假设. 它是美国数学家科恩(Cohen, P. J.)在介绍力迫法时引入的一个命题. 在证明集合论外加公理的相容性时，通常以 ZF 公理系统本身的相容性作为前提. 由模型论中的完备性定理，既然 ZF 系统相容，则一定存在 ZF 系统的一个集合模型 $\langle M,E\rangle$. 由哥德尔不完全性定理，集合模型的存在性不能在 ZF 系统中证明，因此它只是一种假设，科恩称之为公理 M. 由假设 M 可作下列更进一步的假设：存在 ZF 系统的一个标准集合模型，称之为标准模型假设，记为 SM. 显然 SM 的存在性也不能在 ZF 系统中证明，而且在 ZF 系统中不能证明公理 M 蕴涵标准模型假设 SM. 若假设 SM，则可以证明存在集合 M_0，使得：

1. M_0 可数、可传；
2. M_0 为 ZF$+V=L$ 的模型；
3. M_0 为 ZF 系统的任何可传模型的子模型，即 M_0 是 ZF 系统的可传模型中最小的一个；

则称这样的 M_0 为 ZF 系统的极小集合模型，因此 SM 蕴含着极小集合模型存在. 在科恩的力迫法中，首先假设 SM，从而存在极小集合模型 M，在 M 上进行力迫构造，得出 M 的一个外模型 N，使 N 满足一定的力迫性质，以便得出所需的相容性结果. 由于对 ZF 系统的任意有限条公理而言，SM 成立，即 ZF 系统的任意有限条公理均存在标准集合模型，而在力迫证明中只用到 ZF 系统的有限条公理，因此只要将所用的全部有限条公理一一列出，就存在满足这些公理的一个标准集合模型，使力迫证明过程仍然成立，从而利用力迫法得出的相容性结果也仍然成立. 从这一观点出发，标准模型假设并不是必须的. 然而，标准模型假设避免了繁琐地列出所使用的每条集合论公理，突出了力迫法本质思想，因此它对简化力迫证明起到了不可低估的作用.

完备布尔代数(complete Boolean algebra)　一种特殊布尔代数. 指每个子集都有上下确界的布尔代数. 设 $(B,+,\cdot,-,0,1)$ 为一个布尔代数，对任何 $x,y\in B$，令 $x\leqslant y$ 表示 $x\cdot y=x$，称“$\leqslant$”为 B 中的自然偏序，对 B 的任何子集 X，记 $\bigvee X$ 为 X 的元素在自然偏序下的上确界，$\bigwedge X$ 为 X 的元素在自然偏序下的下确界，若对任何 $X\subseteq B$，均有 $\bigvee X\in B$ 且 $\bigwedge X\in B$，则称 B 为一个完备布尔代数. 任何布尔代数均可以被扩充为一个完备布尔代数，且可以使之成为扩充后的完备布尔代数的稠密子代数.

布尔值模型方法(Boolean-valued model approach)　集合论独立性证明的基本方法之一. 自从1963年美国数学家科恩(Cohen, P. J.)利用他所创立的力迫法，证明了连续统假设相对于 ZFC 公理系统的独立性以及选择公理相对于 AFC 公理系统的独立性之后，人们对于力迫法给以极大的关注，试图利用力迫法证明集合论以及其他数学分支中的独立性问题. 然而，科恩原来的方法较为繁琐，且方法本身有相当大的局限性. 1964年至1967年之间，由以色列学者索洛韦(Solovay, R. M.)、斯科特(Scott, D. S.)、沃朋卡(Vopěnка, P.)等人对科恩的方法进行了较大的改进，引入了布尔值模型的概念，避免了科恩原来方法中构造兼纳模型的繁琐细节，使得模型扩充过程变得相当自然而直观，力迫推理也更易于操作. 从科恩对连续统假设独立性的证明过程可以看出，要想设计一个集合论模型满足 ZFC+┐CH，构造一个比 V 小的模型是不可行的(参见“内模型法”)，必须对 V 进行扩充，而 V 已经包括了所有集合，因此，从直观上讲，在 ZFC 系统内构造出比 V 还大的类模型似乎是不可能的. 1965年，索洛韦提出了把对每个公式的真值指派从2值扩充到一个布尔值域的思想，随后，斯科特将这一思想付诸实施，从而建立了一套布尔值模型理论. 众所周知，在一个确定的论域上，任何一个集合 X 可以用它的特征函数来惟一刻画，集合与其特征函数具有一一对应关系，即对任何集合 $x\in V$，存在一个与 X 对应的

特征函数 C_x，使得 $x\subseteq \mathrm{dom}(C_x)$，且当 y 属于 x 时，$C_x(y)=1$；当 y 不属于 x 时，$C_x(y)=0$. 所有 x 对应的特征函数 C_x 构成的类 $V^{(2)}$ 与 V 就具有某种同构关系. 如果将 C_x 的取值从 $\{0,1\}$ 扩充为一个布尔代数 B，则所有这种扩充的特征函数 C_x 构成的类 $V^{(B)}$ 就可以构成 $V^{(2)}$ 的一个扩充，从而也可以被视为对 V 的一种扩充(参见"布尔值模型"). 事实上，通过对布尔代数适当的限制(要求布尔代数完全)，可以证明 $V^{(B)}$ 满足 ZFC 系统的所有公理，从而构成 ZFC 系统的一个模型，这样就避免了科恩方法中利用兼纳集构造兼纳扩充的技术难点，也使得模型扩充过程变得更为自然.

在布尔值模型中，每个集合论公式 φ 均被赋予一个布尔值，称为公式的布尔值，记为 $[\varphi]^B$(参见"布尔值模型"). 若公式 φ 的布尔值为 1，则认为 φ 在该布尔值模型下成立. 因此要证明某命题 A 与 ZFC 相容，只须证明 $[A]^B=1$. 为了将力迫机制引入到布尔值模型理论中，索洛韦提出可以把力迫关系 $P\Vdash\varphi$ 看做布尔值的大小关系，即定义 $p\Vdash\varphi$，当且仅当 $p\leqslant[\varphi]^B$. 从而，可以用力迫条件 P"逼迫"$[\varphi]=1$. 其中有一个技术问题，即如何将力迫条件偏序集 P 与布尔代数 B 相联系. 对任意偏序集 P，设 $p\in P$，令 $O_p=\{q\in P:q\leqslant p\}$，则 O_p 构成 P 的序拓扑的基，这个序拓扑的正则开代数 $R.O.(P)$ 恰好构成一个完全布尔代数. 当 P 满足一定条件时，P 与 $R.O.(P)$ 的一个稠子集之间可建立一个序同构关系，从而在同构的意义下，可把两者等同看待，因此，可以把力迫条件 P 看成为完全布尔代数 $R.O.(P)$ 的子集. 通过适当选择力迫条件 P，使得 $B=R.O.(P)$ 具有一些特定的性质，使得 $V^{(B)}$ 满足某些特定公理. 如令 $P=2^{<\omega}$，以"$\supseteq$"作为偏序关系，可以证明 $V^{(B)}\Vdash V\neq L$. 如果令 $P=2^{<\omega\times\omega_2}$，且假设 GCH 成立，可证明 $V^{(B)}\Vdash 2^{\aleph_0}=\aleph_2$ 等. 应该指出，公式的布尔值的定义实质上是一种真值定义，因此它不可能在 ZFC 系统中被完全形式化. 法国数学家贝尔(Bell, J. L.)等人于 20 世纪 70 年代中期，利用兼纳超滤的方法，实现了在 ZFC 系统的可传模型中定义 $V^{(B)}$ 及 $[\cdot]^B$ 的理论，从而使布尔值模型理论与科恩原来的兼纳扩充理论相融合. 虽然布尔值模型理论为构造集合论模型提供了一种新的思路，然而，在具体使用力迫方法证明某些独立性问题时，由于力迫条件与布尔代数只是一种同构嵌入关系，不像科恩原来方法那样，力迫条件与被力迫项之间具有非常直接的关系，因此，在具体选择力迫条件时仍然有一些较繁琐的细节. 1971 年，休恩菲尔德(Shoenfield, J. R.)提出，可以直接利用偏序集，而不必将其嵌入到一个完全布尔代数中实现力迫扩张，从而弥补了布尔值模型理论的不足. 由于布尔值模型方法具有简单、直观等优点，目前仍然有大量研究者偏好于使用这种方法.

布尔值集全域(universe of Boolean-valued sets)　利用布尔代数对集合全域 V 的一种扩充. 在某个论域上，集合与其特征函数具有一一对应关系，通常可把它们等同看待. 如果把特征函数的值域扩充为一个布尔代数，那么同一个集合将有多个特征函数与其对应. 利用这种方法可将集合全域 V 进行"扩张". 形式地讲，设 B 为一个布尔代数，对序数 α，递归定义 $V_\alpha^{(B)}$ 为满足下列条件的函数 f 的全体：

1. $\mathrm{ran}(f)\subseteq B$.

2. 存在 $\zeta<\alpha$，使 $\mathrm{dom}(f)\subseteq V_\zeta^{(B)}$.

令

$$V^{(B)}=\bigcup_{\alpha\in On}V_\alpha^{(B)},$$

On 为序数全域，称 $V^{(B)}$ 为关于布尔代数 B 的布尔值集全域，$V^{(B)}$ 的元素称为布尔值集. 显然，若布尔代数 B 不同，则相应的布尔值集全域 $V^{(B)}$ 也不同. 若 B 为一个二值布尔代数 2，则 $V^{(2)}$ 具有类似于 V 的性质. 事实上，对每个 $x\in V$，定义 $\hat{x}=\{\langle\hat{y},1\rangle:y\in x\}$，则 $\hat{x}\in V^{(2)}$. 映射 $x\vdash\hat{x}$ 为 V 到 $V^{(2)}$ 的一一映射，且对任何公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，有 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 成立，当且仅当 $V^{(2)}\Vdash\varphi(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)$. 由于 $V^{(2)}\subseteq V^{(B)}$，因此 $V^{(B)}$ 可以被看成是对 V 的一种扩充，对每个 $x\in V$，称 $\hat{x}\in V^{(B)}$ 为 $V^{(B)}$ 的标准元. 必须指出，这里所说的扩充只是模型论意义上的扩充，因为 $V^{(B)}$ 为 V 的子类.

布尔值集(Boolean-valued set)　见"布尔值集全域".

布尔值模型(Boolean－valued model)　一类特殊的集合论模型. 普通的集合论模型是将集合论公式解释成一个多元关系，模型满足该公式，当且仅当解释后的关系式为真. 布尔值模型也将集合论公式解释为一个多元关系，而这个多元关系式不是取真假两个值，而是取布尔代数的一个值. 形式地讲，对一个布尔代数 $(B,+,\cdot,-,0,1)$，与之对应的一个布尔值模型由三元组 $\langle U,I,E\rangle$ 构成，其中 U 为论域，I,E 为 $U\times V$ 到 B 的二元函数，它们分别用来解释"="关系及"$\in$"关系，对每个公式 φ，定义 φ 的一个布尔值 $[\varphi]^B$ 如下：

1. 对原子公式 $a=b,a\in b$ 而言，

$[a=b]^B=I(a,b),[a\in b]^B=E(a,b)$.

2. 对复合公式，$[\cdot]^B$ 的定义恰好使逻辑运算与布尔运算相对应：

$[\neg\varphi]^B=([\varphi]^B)^-$；

$[\psi\wedge\psi]^B=[\psi]^B\cdot[\psi]^B$；

$[\exists x\varphi(x)]^B=\bigvee_{x\in U}[\varphi(x)]^B$；

式中 $\bigvee_{x\in U}[\varphi(x)]^B$ 表示 $\{[\varphi(x)]^B:x\in U\}$ 在 B 中的上

确界.

布尔值模型的满足关系定义为

$\langle U,I,E\rangle \Vdash \varphi$,当且仅当$[\varphi]^B=1$. 为了获得满足ZFC系统的所有公理的布尔值模型,通常取B为一个完全布尔代数,U为一个布尔值全域$V^{(B)}$,令I,E满足下列条件:对任何$x,y\in V^{(B)}$,

$$E(x,y)=\bigvee_{y\in \mathrm{dom}(v)}(v(y)\cdot I(u,y)),$$

$$I(x,y)=\bigwedge_{x\in \mathrm{dom}(u)}(u(x)\rightarrow E(x,y))\cdot\bigwedge_{y\in \mathrm{dom}(v)}(v(y)\rightarrow E(y,u)),$$

式中$\wedge$表示取下确界,$x\rightarrow y$表示x^-+y. 通常把如上定义的布尔值模型$\langle V^{(B)},I,E\rangle$简记为$V^{(B)}$. 对任何完全布尔代数$B$,$V^{(B)}$满足ZFC系统的全部公理. 同时,如果对$B$进行适当选择,可以使$V^{(B)}$满足$\neg$CH或$\neg$AC等. 利用构造布尔值模型的方法,可以获得众多集合论命题的相容性结果(参见“布尔值模型方法”).

决定性公理(axiom of determinacy) 简称AD. 描述集合论的一条重要假设. 考虑自然数的一些无穷序列构成的集合$A\subseteq{}^{\omega}\omega$,定义二人对弈$G(A)$如下:首先甲给出一自然数$n_0$,接着乙据此响应以$n_1$,然后甲再给$n_2$,乙又出$n_3$,如此等,将此过程进行到$\omega$步结束,得到一个序列$\langle n_0,n_1,n_2,\cdots\rangle$. 若该序列在集合$A$中,则甲胜,该序列若不在$A$中,则乙胜. 若甲有必胜策略或乙有必胜策略,则称对弈$G(A)$是决定的. 决定性公理断言:对于任何集合$A\subseteq{}^{\omega}\omega$,对弈$G(A)$都是决定的. 决定性公理是由迈切尔斯基(Mycielski,J.)和斯维尔兹柯夫斯基(Swierczkowski,S.)于1962年引入的. 这些年来,人们对决定性公理作了大量仔细而深刻的研究. 借助于决定性公理,可以解决描述集合论的几乎所有的重要问题. 比如,在AD下:

1.(迈切尔斯基和斯维尔兹柯夫斯基)每个实数集合都是勒贝格可测的.

2.(同1)每个实数集合都具有贝尔性质.

3.(美国学者戴维斯(Davis,M. D.)1964)每个不可数的实数集都有一完全子集.

由此可见,在选择公理下决定性公理是不成立的. 另一方面,决定性公理蕴涵实数子集的任何可数类都有选择函数. 因此,在AD下,实数论中的各种基本定理,只要它不牵涉到不可数个实数集合,皆不会因选择公理的缺席而受影响. 那么决定性公理是否与通常的集论公理系统(ZF)相容呢? 决定性公理与大基数有紧密的联系. 实际上,决定性公理与大基数、描述集合论与大基数理论和内模型理论是现代集合论中最主流的研究领域. 以色列学者索洛韦(Solovay,R. M.)、美国学者马丁(Martin,D. A.)、谢拉赫(Shelah,S.)和库仑(Kunen,K.)等人在这方面做了大量的工作(参见“决定性公理与大基数”). 例如,索洛韦证明了在AD下存在无穷多个可测基数. 1984年,邬丁(Woodin,W. H.)首先在一种非常强的大基数假设下,证明了决定性公理AD与ZF系统的相容性. 1988年,马丁和斯梯尔(Steel,J.)的工作加上邬丁的工作,蕴涵如果存在一个超紧基数,则AD和ZF系统是相容的.

在决定性公理下的各种大基数性质. 以色列学者索洛韦(Solovay,R. M.)首开先河,他证明了,在决定性公理AD之下,$\aleph_1$,$\aleph_2$都是可测基数,并且$\aleph_1$上的闭无界滤子是超滤. 在他之后,主要是在20世纪60年代和70年代初,人们研究了更多的AD与大基数之间的关系,例如,在决定性公理之下:

1. 美国学者马丁(Martin,D. A.)证明了每个$\aleph_n(3\leqslant n<\omega)$是奇异基数,但$\aleph_{\omega+1}$是可测基数.

2. 库仑(Kunen,K.)证明了$\aleph_{\omega+2}$是可测基数.

3. 马丁证明了ω_1具有分划性质$\omega_1\rightarrow(\omega_1)^{\omega_1}$.

4. 索洛韦证明了存在ZF系统的一个可传模型,其中有许多可测基数.

5. 库伦还得到,存在ZF系统的一个可传模型,其中$\aleph_2$是可测基数的可测极限.

这些结果使人们认识到,决定性公理比许多大基数公理都要强.

决定性公理的变形(variety of axiom of determinacy) 改变决定性公理中的对弈$G(A)$得到的各种变化形式. 任取集合X和$A\subseteq{}^{\omega}X$,对弈规则为甲乙依次从X中选取元素$x_0,x_1,x_2,\cdots$,视最后形成的序列$(x_0,x_1,x_2,\cdots)$是否属于A而决定甲胜或乙胜,此种对弈记为$G_X(A)$. 公理AD_X是指,任何$A\subseteq{}^{\omega}X$,$G_X(A)$是决定的. 如果将对弈规则改变为:甲每次可取X中元素的有穷非空序列,乙每次仅取一个元素,此种对弈记为$G_X^*(A)$. 公理AD_X^*是指:对任何$A\subseteq{}^{\omega}X$,$G_X^*(A)$是决定的. 又若对弈规则中甲、乙均可取X中元素的有穷非空序列,相应的对弈和公理记为$G_X^{**}(A)$和AD_X^{**}. 一般形式的决定性公理AD即为AD_ω. 有如下这些蕴涵关系:

$$\begin{array}{ccccc} AD(=AD_\omega) & \rightarrow & AD_\omega^* & \rightarrow & AD_\omega^{**} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ AD_2 & & AD_2^* & & AD_2^{**} \end{array}$$

因而,AD_2是AD的等价形式,AD_ω^*,AD_2^*,AD_ω^{**},AD_2^{**}都是AD的弱形式. 由决定性公理AD推出的有关实数集合的一些性质,实际上可由其弱形式推出. 例如,对每个$A\subseteq{}^{\omega}2$,若甲有$G_2^*(A)$的必胜策略,当且仅当A有完全子集. 因而$|A|=2^{\aleph_0}$. 若乙有$G_2^*(A)$的必胜策略,当且仅当$|A|=\aleph_0$. 又因实数集R与${}^{\omega}2$之间一一对应,所以,$AD_2^*\rightarrow\forall A\subseteq R(|A|=\aleph_0\vee|A|=2^{\aleph_0})$. 又如,利用$AD_\omega^{**}$即可证明每个

实数子集都有贝尔性质. 如果将 AD_X 中的 X 取为任意的，即断言 $\forall X(AD_X)$，记之为 AD^{Δ}，则有 $AD^{\Delta}\to AC$. 但前已知 $AD\to\neg AC$，所以 $AC\to\neg AD\to\neg\forall X(AD_X)\to\neg AD^{\Delta}$. 故有 $AD^{\Delta}\to\neg AD^{\Delta}$，矛盾. 所以这种太强的推广形式不可取.

射影决定性公理(the axiom of projective determinacy) 简称 PD. 决定性公理的一种最重要的弱形式. 决定性公理认为，对任何 $A\subseteq{}^{\omega}\omega$，对弈 $G(A)$ 都是决定的，这一假定太强，以致与选择公理相矛盾. 一种自然的想法是，仅对 ${}^{\omega}\omega$ 中的简单子集 A 断言对弈 $G(A)$ 的决定性. 描述集合论中最重要的一类集合是射影集，1953 年，盖勒(Gale, D.)和斯图尔特(Stewart, F. M.)提出了射影决定公理：对任何射影集 $A\subseteq{}^{\omega}\omega$，对弈 $G(A)$ 是决定的. 在 PD 下，描述集合论学家们解决了在 ZFC 系统中不可判定的关于射影集的经典问题. 例如，在 PD 下，每一个射影集：

1. 都是可测的(由迈切尔斯基(Mycielski, J.)和斯维尔兹柯夫斯基(Swierczkowski, S.)解决).

2. 都有贝尔性质(由波兰数学家巴拿赫(Banach, S.)和马祖尔(Mazur, B.)解决).

3. 或者可数或者有一个完备子集(由美国学者戴维斯(Davis, M. D.)解决).

4. 每一个 Π^1_{2n+1} 关系都有 Π^1_{2n+1} 单值化(由莫斯却瓦基斯(Moschovakis, Y. S.)解决).

PD 蕴含存在无穷多个可测基数，1984 年，邬丁(Woodin, W. H.)首先在一种非常强的大基数假设下，证明了美国学者马丁(Martin, D. A.)和斯梯尔(Steel, J.)于 1988 年证明的存在超紧基数蕴含 PD，即

$$Con(\text{ZFC}+\text{存在超紧基数})\to Con(\text{ZFC}+\text{PD}).$$

描述集合论(descriptive set theory) 集合论的一个分支. 是研究可以用简单的方式予以描述的实数集合或其他具有类似结构的集合的数学分支. 有不少数学问题，看来对于任意实数集合是不可回答的，如已经证明，连续统假设在 ZFC 系统中是不可确定的. 还有些数学问题，对任意实数集合而言，其答案令人感到不很协调，例如在选择公理之下，存在实数的勒贝格不可测集. 当人们转而讨论一类特殊的实数集合——有简单拓扑结构的集合，或以某些简单方式逐层定义的集合，这些问题就有了明确的、令人感觉协调的答案了. 最早的例子是 1883 年的康托尔-本迪克松定理：实数的每个闭集至多可数或包含有完全子集. 注意到实数的完全子集的基数是 $2^{\aleph_0}$，所以，实数的闭集的基数要么 $\leqslant\aleph_0$，要么 $=2^{\aleph_0}$，即连续统假设对闭集成立. 19 世纪末和 20 世纪初，波莱尔(Borel, (F.-É.-J.-) É.)、法国数学家贝尔(Baire, R. L.)和法国数学家勒贝格(Lebesgue, H. L.)等人创建了描述集合论这一分支. 他们以及后来的俄国数学家卢津(Лузин, Н. Н.)、波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński, W.)、俄国数学家苏斯林(Суслин, М. Я.)等人的工作主要是详细研究波莱尔集合的构造及性质，以及不借助于诸如选择公理这种非能行的方法而构造更多类的实数集合，并研究它们的性质. 主要研究的是解析集和射影集，它们都有很好的性质，这些研究属于经典描述集合论. 另一方面，借助于递归函数论，美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.)和其他逻辑学家从 20 世纪 30 年代至 20 世纪 50 年代，建立了一套完美的 ω 子集的可定义性理论. 到了 1959 年，艾迪生(Addison, J. W.)证实了克林的可定义性理论和经典的描述集合论实际上讨论的是同一对象. 今天所讨论的描述集合论是结合了这两种理论的一般理论，即能行描述集合论. 现代描述集合论已成为集合论和递归论之间的交叉学科，近年来的发展尤为迅猛.

约化性(reduction) 集合类的一种性质. 设有集合类 Γ 中的任何两个集合 A,B，若存在 $A',B'\in\Gamma$，使得 $A'\subseteq A,B'\subseteq B$，同时 $A'\cup B'=A\cup B$，且 $A'\cap B=\varnothing$，则称 Γ 具有约化性，记为 Reduction(Γ). 可以将此定义中的两个集合推广为三个、有穷个或无穷个集合，相应地称为 n 约化性和无穷约化性. 对于每个 $n>1$，Σ^0_n 有约化性，从而波莱尔集类有约化性(并且也有 n 约化性、无穷约化性). 此外，波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski, K.)还证明了 CA 集类具有约化性，即 Reduction (Π^1_1). 集合类 Γ 的约化性可由 Γ 的准良序性推得，这只须 Γ 在有限交、有限并和连续前像映射下封闭.

准良序性(prewellordering) 集合类的一种比约化性质更强的性质. 集合类 Γ 有准良序性是指：对每个 $A\in\Gamma$，都存在从 A 到序数的函数 φ，以及 Γ 的对偶 $\check{\Gamma}$ 中的二元关系 R,S，满足条件：对任何 $\beta\in A$，

$$\alpha\in A\ \&\ \varphi(\alpha)<\varphi(\beta)\leftrightarrow\langle\alpha,\beta\rangle\in R,$$
$$\alpha\in A\ \&\ \varphi(\alpha)\leqslant\varphi(\beta)\leftrightarrow\langle\alpha,\beta\rangle\in S.$$

记为 $P_{wo}(\Gamma)$. 只要 Γ 对有限并、有限交和连续前像映射封闭，则 $P_{wo}\to$ Reduction(Γ)；$\forall\rho(1\leqslant\rho<\omega\to P_{wo}(\Sigma^0_\rho))$；CA 集是准良序性的，即 $P_{wo}(\Pi^1_1)$，这是已有的经典结果. 莫斯却瓦基斯(Moschovakis, Y. S.)首先给出准良序性的抽象概念，他还证明了 $P_{wo}(\Pi^1_n)\to P_{wo}(\Sigma^1_{n+1})$，因而得 $P_{wo}(\Sigma^1_2)$，即 PCA 集类也是准良序的.

苏斯林算子(Suslin operation) 用集合的并、交构造的一种运算. 是对集合类的功能很强的运算. 设 $\{A_s\mid\in \text{Seq}\}$ 是以整数的有限序列为下标的集合的类，对每个无穷序列 $a\in{}^{N}N$，记 $\bar{a}(n)$ 为 a 在 n 上的限制 $a\upharpoonright n$，即 $\bar{a}(n)=\langle a(0),a(1),\cdots,a(n-1)\rangle$，则

定义苏斯林算子 $\mathscr{A}$ 对集合类 $\{A_s \mid s \in \mathrm{Seq}\}$ 作用的结果是

$$\mathscr{A}\{As \mid s \in \mathrm{Seq}\} = \bigcup_{a \in {}^N N} \bigcap_{n=1}^{\infty} A\bar{a}(n).$$

可列并、可列交运算都是 $\mathscr{A}$ 算子的特例. 算子 $\mathscr{A}$ 是由阿历克山德罗夫(Alexanderof, P. S.)做出的. 俄国数学家苏斯林(Суслин, M. Я.)借助于 $\mathscr{A}$ 算子, 由任何闭集的类得到解析集(A 集), 做出了比波莱尔集(B 集)类更广泛的集类.

射影集(projective set)　描述集合论中最重要的一类集合. 给定波利希(polish)空间 $\mathscr{X}$, 它的子集的一个类若满足如下条件: 包含波莱尔集, 在求补运算和连续映射下封闭, 并且是满足这两条的最小类, 则称该类为射影集类, 其中的元素($\mathscr{X}$ 的子集)为射影集. 也可以等价地定义为, 开集类在射影运算和补运算之下的闭包即为射影集的类. 射影集是由俄国数学家卢津(Лузин, H. H.)与波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński, W.)于 1925 年相互独立地给出定义的. 卢津等人早期把射影集分为波莱尔集(B 集)、解析集(A 集)、余解析集(CA 集)、PCA 集以及 CPC 集等. 现代人则习惯于用 Σ, Π 等记号对射影集作如下分层:

Σ_1^1 = 所有解析集的集合;

Π_1^1 = 解析集的余集的集合;

$\Sigma_{n+1}^1 = \mathscr{X} \times N$ 中所有 Π_n^1 集的射影的集合;

$\Pi_{n+1}^1 = \mathscr{X}$ 中 Σ_{n+1}^n 集的余集的集合;

$\Delta_n^1 = \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$.

于是, Σ_1^1 集即为 A 集, Π_1^1 集为 CA 集, Σ_2^1 集为 PCA 集, Π_2^1 集是CPCA 集等, Δ_1^1 即为波莱尔集. 而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^1$ 即为射影集的类. 它们之间有如下包含关系:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \subsetneqq & \Sigma_1^1 & \supsetneqq & & \subsetneqq & \Sigma_2^1 & \supsetneqq & & \subsetneqq & \Sigma_3^1 \\ \Delta_1^1 & & & & \Delta_2^1 & & & & \Delta_3^1 & & & \cdots \\ & \subsetneqq & \Pi_1^1 & \subsetneqq & & \subsetneqq & \Pi_2^1 & \subsetneqq & & \subsetneqq & \Pi_3^1 \end{array}$$

俄国数学家苏斯林(Суслин, M. Я.)已证明了 $\Sigma_1^1 \not\subseteq \Pi_1^1$, 即存在解析集, 它的余集不是解析集. 卢津于 1930 年也证明了: 对每个 n, $\Sigma_n^1 \not\subseteq \Pi_n^1$, 即有 Σ_n^1 集, 它的余集不是 Σ_n^1 集. 设 $\mathscr{A}^2 = \langle \omega, {}^\omega\omega; ap, +, x, <, 0, 1, a \rangle$ 是一个二阶算术模型, 其中 $ap: {}^\omega\omega \times \omega \to \omega$ 是由 $ap(x, m) = x(m)$ 定义的, $+$, x, $<$, 0, 1, 即为通常算术中的运算和数. $a \in {}^\omega\omega$ 被看做 ω 上的一个二元关系. 当然, 这时的语言有两种变元: $u_0^0, u_1^0, u_2^0, \cdots$ 表示 ω 上的元素; $v_0^1, v_1^1, v_2^1, \cdots$ 在 ${}^\omega\omega$ 中变化. 相应地, 有数值量词和函数值量词, 分别用 $\exists^0, \forall^0$ 和 $\exists^1, \forall^1$ 表示. 设 $A \subseteq {}^r\omega x^h({}^\omega\omega)$, 这里 $v, h \in \omega$, 如果 A 可以在 $\mathscr{A}^2$ 中用一个不带函数值量词的公式来定义, 则称 A 为算术的(arithmetical)a; 如果 A 可以在 $\mathscr{A}^2$ 中定义, 则称 A 为解析的(analytical)a. 借助对公式的分层可以对这些集合分层, 即 $\Sigma_n^1(a)$ 类和 $\Pi_n^1(c)$ 类($n > 0$): 设 $A \subseteq {}^r\omega\ x^h({}^\omega\omega)$,

$A \in \Sigma_n^1(a) \leftrightarrow \exists R \subseteq {}^r\omega x^{h+n}({}^\omega\omega)$, R 为算术的(arithmetical)a, 且 $\forall \bar{\omega} \in {}^r\omega x^h({}^\omega\omega)(\bar{\omega} \in A \leftrightarrow \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \cdots Q x_n((\bar{\omega}, x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R))$;

$A \in \Pi_n^1(c) \leftrightarrow \exists R \subseteq {}^r\omega x^{h+n}({}^\omega\omega)$, R 为算术的(arithmetical)a, 且 $\forall \bar{\omega} \in \omega x^h({}^\omega\omega)(\bar{\omega} \in A \leftrightarrow \forall^1 x_1 \exists^1 x_2 \cdots Q x_n((\bar{\omega}, x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R))$,

其中, 如果 n 为奇数, Q 为 $\exists^1$, 否则 Q 为 $\forall^1$. 特别地, 如果 $\mathscr{A}^2$ 结构中的 a 为常值函数, 则省去这些定义中的后置词"的 a". 注意, 这里 analytical 和 analytic 两个词尾不一样. 自然数的算术(arithmetic)子集和解析的(analytical)子集是由美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.)引入的. 从 20 世纪 30 年代到 50 年代, 克林等人借助于递归函数论建立了完美的 ω 子集的可定义性理论. 例如, 克林定义了超算术集(ω 的子集)类, 并对它作了类似于波莱尔集的分层. 同时, 对于解析的(analytical)集类, 克林建立了类似于对影集的分层. 经典理论与克林之可定义性理论之间的类似性, 是由克林的学生艾迪生(Addison, J. W.)首先严格地表述在他的博士论文中. 事实上, 对于任意的 A, $n > 0$,

$$A \in \Sigma_n^1 \leftrightarrow \exists a \in {}^\omega\omega (A \in \Sigma_n^1(a));$$

$$A \in \Pi_n^1 \leftrightarrow \exists a \in {}^\omega\omega (A \in \Pi_n^1(a)).$$

尽管解析集具有非常好的拓扑性质和测度性质(参见"解析集"). 但是, 更高阶的射影集却不一定有这好的性质. 一方面, 早在 20 世纪 30 年代, 美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)就发现, 如果 $V = L$, 则存在一个不可测的 Δ_2^1 集和一个不包含完全子集的不可数的 Π_1^1 集; 另一方面, 在 PD 下, 可以将所有的经典结果推广到所有射影集上. 1988 年, 美国学者马丁(Martin, D. A.)和斯梯尔(Steel, J.)证明了如果存在超紧基数, 则 PD 成立. 事实上, 高阶射影集的可测度蕴含大基数公理, 比如, 如果所有的 Σ_3^1 集都可测, 则 ω_1 是 L 中的不可达基数(谢拉赫(Shelah, S. 1984)).

射影集类(projective set class)　见"射影集".

解析集(analytic sets)　简称 A 集. 波莱尔集合的一种扩张. 设 A 是波利希(polish)空间 $\mathscr{X}$ 的子集, 若存在从贝尔空间 $\mathscr{N}$ 到 $\mathscr{X}$ 的连续映射 $f: \mathscr{N} \to \mathscr{X}$, 使得 $A = f[\mathscr{N}]$, 则称 A 是解析集. 解析集的全体记为 Σ_1^1. 解析集起初是由俄国数学家苏斯林(Суслин, M. Я.)借助 $\mathscr{A}$ 算子做出的. 后来, 俄国数学家卢津(Лузин, H. H.)找到了它的一系列等价定义. 例如 A 是 $\mathscr{X}$ 中的解析集等价于:

1. A 是某个波利希(polish)空间 $\mathscr{Y}$ 中的波莱尔集 B 的连续映象.

2. 对某空间 $\mathscr{Y}$，A 是乘积空间 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 中波莱尔集合向 $\mathscr{X}$ 的射影.

3. A 是 $\mathscr{X}\times\mathscr{N}$ 中闭集的射影，其中 $\mathscr{N}$ 是贝尔空间.

4. A 是对某个闭集的类用苏斯林算子 $\mathscr{A}$ 作用的结果.

从而可知，波莱尔集是解析集；解析集的类在可数并、可数交、连续映象及其逆象以及苏斯林算子 $\mathscr{A}$ 之下皆封闭. 但在求余(补)运算下不封闭，即有解析集的余集不是解析集(苏斯林). 解析集与波莱尔集之间更深层的关系，反映在如下这些性质上：

1. 如果某解析集的余集也是解析集，则它必是波莱尔集(苏斯林，1917).

2. 如果一解析集是由 $\mathscr{A}$ 算子作用于互不相交的波莱尔集的类得出的，则它必是波莱尔集(卢津).

3. 两个不相交的解析集，可以借波莱尔集分离开(卢津，1927).

对于实数集合一些重要的基本问题，解析集有如下的明确答案：

1. 任何(实数的)解析集是勒贝格可测的(卢津，1917).

2. 每个解析集都有贝尔性质(卢津和波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński，W.)，1923).

3. 每个不可数解析集含有完全子集(苏斯林，1930 年以前). 由此可得推论：每个解析集(特别地，每个波莱尔集)要么至多可数，要么有基数 $2^{\aleph_0}$. 又知，每个解析集是 $\aleph_1$ 个波莱尔集合之并.

单值化(uniformization)　刻画将关系转化为函数的一个概念. 设 $p\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 是二元关系，又若函数 $f\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 满足：$\mathrm{dom}\,f=\mathrm{dom}\,P$，$f\subseteq P$，则称 f 单值化了 P，或函数 f 是关系 P 的单值化. 如果集合类 Γ 中任一关系 P 都可被 Γ 中的一函数 f 所单值化，则称 Γ 具有可单值化性质. 在选择公理之下，任何关系 R 均可被一函数 f 单值化. 但无选择公理时，这个 f 不一定能找到；而且，当 $R\in\Gamma$ 时，不能保证所找到的 f 是否 $\in\Gamma$. $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ 具有可单值化性质. 1938 年，近藤(Kondo)证明了 $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 具有可单值化性质，从而 $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 也具有可单值化性质.

完全子集性质(perfect subset property)　集合的一种拓扑性质. 集合 A 是完全的，指它是闭集且没有孤立点，亦即 A 与自身的聚点集合一致. 如果集合 B 或者至多可数，或者包含一个完全子集，就称 B 具有完全子集性质. 在完备度量空间中的非空完全子集的势 $\geqslant 2^{\aleph_0}$，可见实数集合若有完全子集性质，其势 $\leqslant\aleph_0$ 或 $=2^{\aleph_0}$. 最早找到具有完全子集性质的集是实数上的闭集(德国数学家康托尔(Cantor，G. (F. P.))、挪威数学家本迪克松(Bendixson，I. O.)，1883). 其后，英国学者杨(Young，W. H.)于 1906 年证明了 G_σ 集和 F_σ 集具有完全子集性质. 德国数学家豪斯多夫(Hausdorff，F.)和亚历克塞得罗夫(Aleksandrov，P. S.)于 1916 年相互独立地证明了波莱尔集具有该性质. 1930 年以前，俄国数学家苏斯林(Суслин，М. Я.)证明了所有解析集具有完全子集性质.

余解析集(coanalytic sets)　简称 CA 集. 一种特殊集合. 指解析集的余集. 由于解析集的类 $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 对于集合的求补运算不封闭，就将解析集的余集(即补集)称为余解析集(记为 CA 集). 余解析集的全体记为 $\boldsymbol{\Pi}^1_1$. 由解析集的性质可直接推出每个(实数的)余解析集都是勒贝格可测的，并具有贝尔性质. 每个 CA 集是 $\aleph_1$ 个波莱尔集合之并(实际上，波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński，W.)于 1925 年证明了每个 PCA 集都是 $\aleph_1$ 个波莱尔集之并)，从而，若有选择公理，每个 CA 集要么至多可数，要么基数为 $\aleph_1$，要么基数为 $2^{\aleph_0}$.

贝尔空间 $\mathscr{N}$ 中两个重要的 CA 集的例子是 WF 和 WO. 设 Γ 是 $N\times N$ 到 N 的标准双射. 对于每个 $x\in\mathscr{N}$，可定义自然数集 N 上的一个二元关系 E_x 如下：

$$mE_xn \Leftrightarrow x(\Gamma(m,n))=0.$$

称这个关系 E_x 是被 x 所编码的关系. 再定义

$$\mathrm{WF}=\{x\in\mathscr{N}\mid x\text{ 编码了一个良基关系}\},$$

$$\mathrm{WO}=\{x\in\mathscr{N}\mid x\text{ 编码了一个良序关系}\}.$$

则可证 WF 和 WO 都是 CA 集，但不是 A 集(解析集)，从而不是波莱尔集.

波莱尔集(Borel sets)　一类特殊集合. 指实变函数论和描述集合论中最重要、最基本的一类集合. n 维实空间 R^n 中的开子集类生成 σ 代数，即为所有波莱尔集合的类. 这是由波莱尔(Borel，(F.-É.-J.-)É.)于 1905 年引入的. 以后人们将之扩大为任意 Polish 空间 $\mathscr{X}$ 中的波莱尔集合的概念. 波莱尔集可以如下构造性地给出：

$\boldsymbol{\Sigma}^0_1=$ 所有开集的类，$\boldsymbol{\Pi}^0_1=$ 所有闭集的类；对 $\alpha<\omega_1$，递归地定义：

$\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha=\{A\mid$ 存在 $A_0,A_1,\cdots$，每个 A_i 属于某个 $\boldsymbol{\Pi}^0_\beta$，$\beta<\alpha$，$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\}$，

$\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha=\{A\mid$ 存在 $A_0,A_1,\cdots$，每个 A_i 属于某个 $\boldsymbol{\Sigma}^0_\beta$，$\beta<\alpha$，$A=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\}=\{\overline{B}\mid B\in\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha\}$，

$\boldsymbol{\Delta}^0_\alpha=\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha\cap\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$.

可以看出它们之间有如下包含关系

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \subset & \Sigma^0_1 & \subset & & \subset & \Sigma^1_2 & \subset & & \subset & \Sigma^0_\alpha & \subset & \\ \Delta^0_0 & & & & \Delta^0_1 & & & & \cdots\ \Delta^0_\alpha & & & & \cdots \\ & \subset & \Pi^0_1 & \subset & & \subset & \Pi^1_2 & \subset & & \subset & \Pi^0_\alpha & \subset & \end{array}$$

当 $\mathscr{X}$ 是不可数集时，上述集类间都是真包含关系. 上述 $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ 中集合即为 F_σ 集，$\boldsymbol{\Pi}^0_2$ 中即 G_σ 集，$\boldsymbol{\Sigma}^0_3$ 中的集是 $G_{\sigma\sigma}$ 集等.

$\bigcup_{0<\alpha<\omega_1}\boldsymbol{\Sigma}_\alpha^0=\bigcup_{0<\alpha<\omega_1}\boldsymbol{\Pi}_\alpha^0$ 是所有波莱尔集的类. 每个集类 $\boldsymbol{\Sigma}_\alpha^0,\boldsymbol{\Pi}_\alpha^0,\boldsymbol{\Delta}_\alpha^0$ 在有限并,有限交,连续映射的逆映射(即连续前像映射)下封闭,但在连续映射下不封闭. 波莱尔集是解析集的一部分,所以有贝尔性质.

贝尔性质(Baire property) 集合的一种拓扑性质. 一个集合 A,若存在开集 G,使得 A 与 G 的对称差 $A\Delta G$ 是贫集(即第一范畴的,至多可数个稀疏集合之并),称 A 具有贝尔性质. 具有贝尔性质的集合之全体形成 σ 代数. 与勒贝格可测性一样,选择公理蕴涵存在一个没有贝尔性质的实数集合. 例如,利用选择公理构造出的维塔利集合就没有贝尔性质. 如果集合 $X\subseteq R^n$ 本身与其余集都没有完全子集,则 X 就无贝尔性质. 俄国数学家卢津(Лузин,Н. Н.)等人 1923 年证明了每个解析集都有贝尔性质,因而每个余解析集也有贝尔性质. 更上层的射影集不一定具有贝尔性质. 但在外加公理之下,可能有变化的结论. 例如,以色列学者索洛韦(Solovay,R. M.)于 1970 年证明了如果 Con(ZFC+存在不可达基数),则 Con(每个射影集具有贝尔性质). 1984 年,谢拉赫(Shelah,S.)将此结果改进为 $Con(\text{ZFC})\rightarrow Con$(ZFC+每个射影集具有贝尔性质). 另一方面,索洛韦于 1969 年指出,若 $V=L$,则在 Δ_2^1 中存在没有贝尔性质的集合. 若存在可测基数,则 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 中所有集合有贝尔性质. 但更好的结果已不会再有了,西尔维(Silver,J.)指出,"在 Δ_3^1 中存在没有贝尔性质的集合"与"存在可测基数"相容.

可被波莱尔集分离性(separated by Borel set) 刻画集合对相互关系的一种性质. 设 A,B 是两个集合,若存在波莱尔集合 D,使得 $A\subseteq D$,且 $B\subseteq\mathscr{X}\setminus D$(即 A,B 分别被包含于集合 D 及其余集中),则称集合对(A,B)可被波莱尔集分离. 俄国数学家卢津(Лузин,Н. Н.)于 1927 年证明了任何两个不交的解析集都可被波莱尔集分离.

波利希空间(Polish space) 描述集合论的主要空间之一. 是完备、可分的度量空间. 它保留了实空间 R 的最重要的拓扑性质. 常见的 polish 空间有:n 维实空间 R^n,闭区间$[0,1]$,贝尔空间 $\mathscr{N}={}^NN$ 等. 有人建议将 polish 空间译为"光溜空间",但尚未被公认.

无穷组合论(infinitary combinatorics) 亦称组合集合论. 公理集合论的重要分支之一. 它主要研究无穷集合的各种组合性质. 通常指的组合数学一般研究有穷集合的组合性质,因此可称为有穷组合论. 无穷组合论最初的研究来源于有穷组合论中各种组合性质在无穷集合上的推广,如基数的运算、枚举原则、分离性理论、分划演算以及对无穷树的研究等. 它们可以看做有穷组合论中关于计数、枚举、组合、分划、树等的研究在无穷集合上的自然延伸. 随着公理集合论的发展,特别是可构造性理论、力迫法的产生,无穷组合论也产生了自身特有的问题,如大基数的组合性质、马丁公理等均是无穷组合论所特有的研究内容. 在研究方法上,无穷组合论与有穷组合论有着明显的差异,无穷组合论通常只把基数、序数以及它们的子集作为最基本的研究对象,而不是把一般的无穷集合作为基本对象. 无穷组合论包括下列几个主要研究分支:

1. 基数理论. 研究基数的各种运算,共尾数、正规基数、奇异基数的性质、基数的闭无界子集、驻集的性质等,这些理论是无穷组合论研究的基础.

2. 分离性质. 除了传统的分离簇的概念外,在无穷组合论中引入了"几乎分离簇"的概念,有关这方面的研究成果在无穷组合论、力迫法以及集合论拓扑等领域中都有非常重要的应用.

3. 组合原则. 无穷组合论中,把某些具有重要意义且与 ZF(C)系统相容的组合论命题称为组合原则(参见"组合原则"). 组合原则一方面为解决许多重要的数学问题,如苏斯林假设、库雷巴假设以及为拓扑学中的重要问题提供了一种有力工具,另一方面也促进了可构造性理论、大基数理论、力迫法的发展.

4. 无穷树的理论. 是组合学中树的概念被推广到无穷的情形. 由于树可以看做序数的一种推广形式,因此,树已经成为研究序数、基数的一个强有力的工具. 另外,著名的苏斯林问题被表述成树的形式,更激发了人们对树的性质的研究. 目前关于无穷树的研究已成为无穷组合论最重要的分支之一,其研究主要集中于对苏斯林树、阿龙扎扬树、库雷巴树及它们的推广形式上.

5. 分划演算. 指研究无穷集合的分划性质. 目前的研究,主要集中于对拉姆齐问题的各种推广形式. 许多研究成果在大基数理论、拓扑学等方面有着重要的应用.

6. 马丁公理. 马丁公理(MA)的研究,源出于给连续统假设一个较弱的形式. 连续统假设(CH)断言,在 ω 与 2^ω 之间不存在基数,而马丁公理断言,若 $\neg$CH 成立,则任何小于 2^ω 的无穷基数 κ 具有类似于 ω 的一些性质. 以色列学者索洛韦(Solovay,R. M.)与特纳鲍姆(Tennenbaum,S.)证明马丁公理加连续统假设的否定与 ZFC 系统相容. 有些数学家认为马丁公理比连续统假设更"切合实际". 马丁公理不仅可以看成是连续统假设的减弱形式,它也常被用来作为证明某些命题相容性的工具,而避免直接用力迫法. 马丁公理有大量重要推论,它们在拓扑学、代数学中有非常广泛的应用.

组合集合论(combinational set theory)　即"无穷组合论".

树(tree)　无穷组合论中的重要概念及基本研究对象.是组合论中树的概念的推广.设$\langle T,<\rangle$为一个严格偏序结构,若对每个$x\in T$,集合$\{y\in T:y<x\}$均为偏序关系"$<$"下的良序集,则称$\langle T,<\rangle$为树,有时简称T为树.T的每个元素称为树中的节点.若$y<x$,则称y为x的前驱.对任何$x\in T$,$\{y:y<x\}$的序型称为x在树T中的高度,记为$\mathrm{ht}(x,T)$.对每个序数α,$\{x\in T:\mathrm{ht}(x,T)=\alpha\}$称为树$T$的第$\alpha$个水平,记为$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$.使$\mathrm{Lev}_\alpha(T)=0$的最小的序数$\alpha$称为树$T$的高度,记为$\mathrm{ht}(T)$.若$T'\subset T$,且$\forall x\in T'\forall y\in T(y<x\rightarrow y\in T')$,则称$\langle T',<\rangle$为$\langle T,<\rangle$的子树.若$C\subset T$,且$C$在"$<$"关系下为全序集,则称$C$为树$\langle T,<\rangle$中的一条链.$T$中的每条极大链称为树$\langle T,<\rangle$的一个分支,换句话说,$C$为$T$的一个分支,则不存在元素$x\in T$,使$x\notin C$且$C\cup\{x\}$为$T$中的链.若$C$为$T$中的一个分支且与每个水平的交不空,则称$C$为$T$的一条路径.若$A\subset T$,使$\forall x,y\in A(x\neq y\rightarrow(x\not\leq y\wedge y\not\leq x))$,则称$A$为树$\langle T,<\rangle$中的一条反链.序数是最简单的树,对每个序数$\alpha$,$\langle\alpha,\in\rangle$是一棵高度为$\alpha$的树,因此有人将树的概念看做是序数概念的推广.设$\alpha$为任意序数,$I$为任何非空集合,令$T={}^{<\alpha}I=\bigcup\{{}^{\sigma}I:\sigma<\alpha\}$,则$\langle T,\subset\rangle$为一棵树,称之为高度为$\alpha$的完全$I$元树.这时对任何$\sigma<\alpha$,$\mathrm{Lev}_\sigma(T)={}^{\sigma}I$,$\mathrm{ht}(T)=\alpha$.当$I=2$时,称$T={}^{<\alpha}2$为高度为$\alpha$的完全二元树或完全二叉树.

树的概念将诸多组合论问题推广到超穷情形提供了一个统一框架,也为研究序数与基数的性质提供了一个直观而有力的工具.在对树的研究中,人们通常关心的问题是对树的高度、水平的基数、链及反链的条数、分支及对路径的条数施加不同限制后的树所反映出的各种组合性质.通过对树的研究,获得许多有趣而重要的结果,特别是获得了大量相容或独立于ZF(C)系统的重要假设.其中最有成就的是对苏斯林树、阿龙扎扬树、库雷巴树等的研究.库雷巴(Kurepa,D.)于1935年最先对树进行了系统研究,他最先将"苏斯林假设"转换为一个等价的有关树的不存在性的命题,后来美国数学家米勒(Miller,E.)于1943年与波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński,W.)于1948年重新发现了这种等价关系.自此,树的概念得到广泛的重视,现在已经成为无穷组合论的重要研究对象之一.

柯尼希无穷引理(König's infinite lemma)　组合论的著名结论.该引理断言:设$\langle T,<\rangle$为一棵高度为ω的树,若T的每个水平均是有限集,则T有无穷多条分支.柯尼希(König,J.)于1926年给出这一结论.柯尼希无穷引理在数学的许多领域有着广泛应用.

苏斯林假设(Suslin hypothesis)　简称SH.独立于ZF公理系统的著名假设之一.若全序集$\langle X,<\rangle$满足:

1. X无端点;
2. X在序拓扑下连通;
3. X在序拓扑下可分;

则$\langle X,<\rangle$与实直线$\langle R,<\rangle$同构.1920年,俄国数学家苏斯林(Суслин,М.Я.)提出是否可将上列第三个条件改为"X在序拓扑下具有可数链条件".这一假想提出之后,在很长时间内未能得出肯定与否的回答,因此成为一个著名的数学问题.后人称之为苏斯林问题,并把这一问题的肯定叙述称为苏斯林假设,记为SH,亦即任何无端点、在序拓扑下连通且具有可数链条件的全序集与实直线同构.美国学者杰希(Jech,T.J.)于1967年与特纳鲍姆(Tennenbaum,S.)于1968年利用力迫法证明了若ZF系统相容,则ZFC+$\neg$SH相容,从而说明SH在ZF(C)系统中的不可证性.稍后,延森(Jensen,R.)、美国学者马丁(Martin,D.A.)与以色列学者索洛韦(Solovay,R.M.)等人证明了若ZF系统相容,则ZFC+SH也相容,从而最终说明SH独立于ZF(C)公理系统.

苏斯林假设有一些更简明的表述方式.通常将具有可数链条件但不可分的全序集称为苏斯林线.苏斯林假设等价于"不存在苏斯林线".库雷巴(Kurepa,G.)于1936年与美国数学家米勒(Miller,C.W.)于1943年将苏斯林假设转换为一种等价的组合论命题.这对解决苏斯林问题起到了关键性作用,也为将苏斯林问题推广到一般基数上提供了一种表述形式(参见"苏斯林树").设$\langle T,<\rangle$为一棵高度为ω_1,每条链及每条反链均可数的树,则称$\langle T,<\rangle$为苏斯林树,米勒于1943年证明苏斯林假设等价于"不存在苏斯林树".对苏斯林假设的研究在无穷组合论、力迫法、集合论拓扑等学科或分支的发展中起到了较大的推动作用,也得出了许多重要结论.下面是苏斯林假设与马丁公理、连续统假设、可构造性公理之间关系的一些主要研究成果:

1. 杰希(1967)与特纳鲍姆(Tennenbaum,S.)(1968)证明,若ZF系统相容,则ZFC+$\neg$SH+GCH相容.同时证明了,若ZF系统相容,则ZFC+$\neg$SH+$\neg$CH也相容.

2. 以色列学者索洛韦(Solovay,R.M.)与特纳鲍姆(1971)证明了在ZFC系统中,MA+$\neg$CH蕴含了苏斯林假设为真.

3. 延森(Jensen,R.)(1968,1972)证明可构造性公理蕴含了苏斯林假设为假,同时也证明了若ZF系统相容,则ZFC+GCH+SH也相容.

综合上列结论可以看出,SH不仅独立于ZFC

系统，而且独立于 CH.

苏斯林问题(Suslin problem)　见“苏斯林假设”.

苏斯林树(Suslin tree)　一种无穷树. 指高度为 ω_1，每条链及反链均可数的树. 研究苏斯林树的直接动机是解决苏斯林假设(参见“苏斯林假设”). 苏斯林树概念最先由库雷巴(Kurepa，D.)于 1936 年提出，他证明“存在苏斯林树”等价于“存在苏斯林线”(参见“苏斯林假设”)，后来，美国数学家米勒(Miller，D.)于 1943 年证明苏斯林假设等价于“不存在苏斯林树”. 美国学者杰希(Jech，T. J.)与延森(Jensen，R.)等人证明了“苏斯林树存在”相容且独立于 ZFC 公理系统(参见“苏斯林假设”). 苏斯林树的概念可以从 ω_1 推广到任意基数上. 设 κ 为一个无穷基数，若 $\langle T,<\rangle$ 为高度为 κ 且 T 中每条链及反链的基数均小于 κ，则称树 $\langle T,<\rangle$ 为一棵 κ 苏斯林树. 因此 ω_1 苏斯林树即为苏斯林树. 也有些文献将“不存在 κ 苏斯林树”称为广义苏斯林假设，记为 $SH(\kappa)$.

除了对 ω_1 苏斯林树的研究已经获得许多重要结果外，人们对一般的 κ 苏斯林树的研究也获得了许多有趣的结果

苏斯林线(Suslin line)　一种全序集. 指具有可数链条件但不可分的全序集(参见“苏斯林假设”). 苏斯林线经常被用在点集拓扑中，可以用它构造各种类型的不可分空间. 由于苏斯林线的存在性不能在 ZFC 系统中证明，因此这些拓扑空间的存在性通常也不能在 ZF 系统中证明.

阿龙扎扬树(Aronszajn tree)　苏斯林树的减弱形式. 是高度为 ω_1，每个水平、每条链均可数的树. 它对反链的长度没有限制，因此每个苏斯林树一定是阿龙扎扬树. 与苏斯林树不同，在 ZFC 系统中可以证明阿龙扎扬树存在. 阿龙扎扬树的概念可以从 ω_1 推广到一般基数上. 设 $\langle T,<\rangle$ 为一个高度为 κ 的树，若 T 的每个水平、每条链的基数均小于 κ，则称 T 为一个 κ 阿龙扎扬树. 因此 ω_1 阿龙扎扬树即为阿龙扎扬树. 柯尼希无穷引理说明 ω 阿龙扎扬树不存在. 对 $\kappa>\omega_1$，若 $\kappa=\lambda^+$，λ 为正规基数，且 $2^{<\lambda}=\lambda$，则在 ZFC 系统中可以证明 κ 阿龙扎扬树存在，因此在 ZFC+GCH 下，对任何正规基数 $\kappa\geqslant\omega_1$，只要 κ 不是奇异基数的后继或强不可达基数，则 κ 阿龙扎扬树总存在. 但若没有 GCH，则甚至 ω_2 阿龙扎扬树也可能不存在. 阿龙扎扬树的概念最初由阿龙扎扬(Aronszajn，N.)给出，后来鲍姆嘎特纳(Baumgartner，J.)给出了更严格的定义. 阿龙扎扬树的理论已被应用于公理集合论、模型论拓扑学等多种数学领域中.

库雷巴假设(Kurepas hypothesis)　简称 KH. 一个著名的组合论问题. 设 κ 为任意正规基数，$\langle T,<\rangle$ 为一棵高度为 κ 的树，若 T 的每个水平的基数均小于 κ，且 T 至少有 κ^+ 条路径，则称 $\langle T,<\rangle$ 为一棵 κ 库雷巴树，命题“存在 κ 库雷巴树”称为 κ 库雷巴假设，记为 $KH(\kappa)$. 所谓库雷巴假设是指存在 ω_1 库雷巴树，记为 KH，因此 KH 即为 $KH(\kappa)$. 相应地，ω_1 库雷巴树称为库雷巴树. 从直观上讲，如果对树中的每个水平的基数加以限制，则树中所含的路径的条数也受到了限制. 但当 $\kappa=\omega$ 时，高度为 ω 的完全二叉树有 2^ω 条路径，由 $2^\omega\geqslant\omega^+$，因此 ω 库雷巴树存在，即 $KH(\omega)$. 同理，当 κ 为强不可达基数时，高度为 κ 的完全二叉树也是一棵 κ 苏斯林树. 人们自然会问，当 $\kappa>\omega$ 且不是强不可达基数时，库雷巴树是否仍然成立？特别是当 $\kappa=\omega_1$ 时，是否存在 ω_1 库雷巴树？斯特瓦特(Stewart，I.)利用力迫法证明库雷巴假设相容于 ZFC 系统，但未公开发表其结果. 1971 年，他利用迭代力迫法证明了若 ZFC+“强不可达基数存在”相容，则 ZFC+$\neg$KH 也相容，从而证明了库雷巴假设在 ZFC 系统中不可证. 以色列学者索洛韦(Solovay，R. M.)于 1972 年利用延森(Jensen，R.)的结果证明了可构造性公理蕴含了库雷巴假设，从而最终证明库雷巴假设相容且独立于 ZFC 系统. 关于一般 κ 库雷巴树的存在性则相当复杂. 延森(Jessen，R.)与索洛韦证明若可构造性公理成立，则对每个正规基数 κ，“库雷巴树存在”等价于“κ 不是不可表达基数”. 西尔维(Silver，J.)于 1971 年证明对某些“非特别”的正规基数 κ，在 ZFC 系统中可以证明 κ^+ 库雷巴树存在.

$KH(\kappa)$ 有一种等价的纯组合论表述形式：设 κ 为正规基数，$\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(\kappa)$，若 $|\mathscr{L}|\geqslant\kappa^+$，且

$$\forall\alpha<\kappa(|\{A\cap\alpha:A\in\mathscr{L}\}|<\kappa).$$

则称 $\mathscr{F}$ 为一个 κ 库雷巴簇. 对任何正规基数 κ，存在 κ 库雷巴簇，等价于 $KH(\kappa)$. 库雷巴假设是库雷巴(Kurepa，D.)于 1935 年以库雷巴簇的形式提出的. 目前关于库雷巴树的研究不仅仍然是无穷组合论研究的课题之一，而且在许多数学领域得到了广泛的应用.

库雷巴树(Kurepa tree)　见“库雷巴假设”.

库雷巴簇(Kurepa family)　见“库雷巴假设”.

组合原则(combinational principle)　无穷组合论中一些应用广泛且与 ZFC 公理系统相容的组合论命题. 最重要的组合原则有 $\diamondsuit$ 原则及其推广形式 $\diamondsuit_\kappa(E)$，$\square$ 原则及其推广形式 $\square_\kappa(E)$，W 原则及其推广形式 $W(\kappa)$，E 原则及其推广形式 $E(\kappa)$，库雷巴假设及其推广形式 κ 库雷巴假设等. 另外如 $\diamondsuit^+$，$\clubsuit$ 等组合原则也有较广泛地应用. 如果 φ 是某个组合原则的推论，且这个组合原则与 ZFC 系统相容，则 φ 也与ZFC 系统相容，因此组合原则常用于证明某

些命题的相容性. 由于纯组合论命题含有较少领域的知识,因此它在许多数学领域具有广泛的应用潜力. 上面提到的一些重要组合原则已经在无穷组合论、集合论拓扑、分析学、代数学等方面得到了非常广泛的应用.

◇组合原则(◇ combinational principle) 亦称方块原则或延森原则. 无穷组合论的组合原则之一. 令◇代表下列组合命题:存在集合序列$\langle A_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$,使得对每个$\omega_1$的子集$A$,$\{\alpha<\omega_1:A\cap\alpha=A_\alpha\}$为$\omega_1$的驻集. 这时称序列$\langle A_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$为◇序列,命题◇称为◇组合原则. 直观上讲,◇原则是指存在一个基数为ω_1的序列,它"几乎"能枚举出ω_1的所有子集. 任一◇序列均可完全地枚举出ω的所有子集,因此,◇原则蕴含了连续统假设,即◇→CH. 由CH在ZFC系统中的不可证性即可以推出◇的不可证性. 延森(Jensen,R.)于1968年证明可构造性公理蕴含了◇原则,从而得出◇独立于ZFC系统.

◇蕴含CH,但反过来不成立. 延森于1968年证明若◇成立,则苏斯林树存在,即◇→┐SH,但CH甚至GCH不能得出苏斯林树存在,故CH不蕴含◇. ◇原则是延森于1968年在证明$V=L\to\neg$SH的过程中提出的. ◇原则在无穷组合论、集合论、拓扑学等领域有着广泛的应用,它常被用来构造一些相容于ZFC系统的命题. 利用◇原则仍不足以构造出库雷巴树. 为此,延森又提出了下列更强的假设——$◇^+$原则:存在序列$\langle\mathscr{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$,使得对所有$\alpha<\omega_1$,$\mathscr{A}_\alpha\subset\mathscr{P}(\alpha)$,$|\mathscr{A}|\leqslant\omega$,并且对每个$A\subset\omega_1$,存在一个$\omega_1$的闭无界子集$C$,使得:

1. $\forall\alpha\in C(A\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha)$.
2. $\forall\alpha\in C(C\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha)$.

序列$\langle\mathscr{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$称为$◇^+$序列. 可以证明$◇^+\to◇$,$◇^+\to$KH,$V=L\to◇^+$,因此,$◇^+$也独立于ZFC系统,它也是无穷组合论中重要的组合假设之一. ◇组合原则可以推广到一般不可数正规基数上. 设κ为一个不可数正规基数,$E\subset\kappa$为κ中的任意驻集,则$◇_\kappa(E)$表示下列命题:存在序列$\langle A_\alpha:\alpha\in E\rangle$,使$A_\alpha\subset\alpha$且对每个$\kappa$的子集$A$,集合$\{\alpha\in E:A\cap\alpha=A_\alpha\}$为$\kappa$中的驻集. 显然◇即为$◇_{\omega_1}(\omega_1)$. 延森证明对任意正规不可数基数$\kappa$及$\kappa$中的任意驻集$E$,$V=L-◇_\kappa(E)$. 因此$◇_\kappa(E)$与ZFC系统相容.

延森原则(Jensen principle) 即"◇组合原则".

□组合原则(squre combinational principle) 亦称方框原则或盒子原则. 无穷组合论的组合原则之一. 设κ为任意基数,$E\subseteq\kappa^+$,令$\square_\kappa(E)$表示下列命题:存在序列$\langle C_\lambda:\lambda<\kappa^+$且$\lambda$为极限序数$\rangle$,使得:

1. C_λ为λ的闭无界子集.
2. $cf(\lambda)<\kappa\to|C_\lambda|<\kappa$.
3. 若γ为C_λ的极限点(即$\gamma=\sup(\gamma\cap c_\lambda)$),则$r\notin E$,且$C_\gamma=\gamma\cap C_\lambda$.

$\square_\kappa(\varnothing)$通常记为$\square_\kappa$,$\square_{\omega_1}$记为□,称命题□为□组合原则. 延森(Jensen,R.)证明若可构造性公理成立,则对任何基数κ,存在一个κ^+的驻集E,使$\alpha\in E\to cf(\alpha)\omega$且$\square_\kappa(E)$成立. 特别地,$V=L\to\square_\kappa$及$V=L\to\square$. 因此$\square_\kappa$(包括□)与ZFC系统相容.

盒子原则(box principle) 即"□组合原则".

***W*组合原则**(W combinational principle) 亦称西尔维原则. 无穷组合论的组合原则之一. 设$\langle T,<\rangle$为一棵树,对任何$\alpha<\mathrm{ht}(T)$,记

$$T_{\geqslant\alpha}=\bigcup_{\beta\geqslant\alpha}\mathrm{Lev}_\beta(T).$$

设p_α为$T_{\geqslant\alpha}$到$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$的一个函数,由树的性质可知,对每个$t\in T_{\geqslant\alpha}$,存在惟一的元素$s\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$,使$s\leqslant t$,这时取$p_\alpha(t)=s$. 另外,令$[A]^\omega=\{x\subseteq A:|x|=\omega\}$. 设$\kappa$为无穷基数,令$W(\kappa)$表示下列命题:存在高度为$\omega_1+1$的树$\langle T,<\rangle$,满足:

1. $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)|=\kappa$,且对任何
$$\alpha<\omega_1,|\mathrm{Lev}_\alpha(T)|<\omega.$$
2. 若$s.t\in\mathrm{Lev}_{\omega_1}(T)$ $(s\neq t)$,则对任何
$$\alpha<\omega_1,p_\alpha(s)\neq p_\alpha(t).$$
3. 存在序列$\langle\omega_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$,使得每个$\alpha<\omega_1$,$\omega_\alpha$为$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$的可数无穷子集构成的集簇,且对每个$A\in(\mathrm{Lev}_\alpha(T))^\omega$,存在$\alpha<\omega_1$,若$\alpha_A\leqslant\alpha<\omega_1$,则
$$p_\alpha(A)\in w_\alpha.$$

令$W=W(\omega_2)$,称之为W组合原则. $W(\omega)$,$W(\omega_1)$等价于CH. W组合原则由西尔维(Silver,J.)提出并且证明了W与ZFC系统相容. W组合原则在拓扑学中有重要的应用.

西尔维原则(Silver principle) 即"W组合原则".

***E*组合原则**(E combinational principle) 无穷组合论的组合原则之一. 设κ为一个正规的不可数基数,令$E(\kappa)$表示下列命题:存在κ的子集E,使

1. $\alpha\in E\to cf(\alpha)=\omega$;
2. E为κ中的驻集;
3. 对每个$\alpha\in\kappa$,$E\cap\alpha$不是α中的驻集;

通常称$E(\kappa)$为E组合原则. $E(\omega_1)$为真,但$E(\omega_2)$在某些模型中为假. 延森(Jensen,R.)证明在可构造性公理下,$E(\kappa)$对"大多数"正规基数κ成立. E组合原则在拓扑学中有重要应用.

分划演算(partition calculus) 无穷组合论的分支之一. 主要研究无穷集合的各种分划性质. 组合论中最简单的分划性质是所谓的鸽巢原理. 设S为一个集合,$P=\{x_i\subseteq S:i\in I\}$为由$S$的子集构成的集簇,若

$$\bigcup_{i\in I} x_i = S,$$

对任意 $i,j\in I, i\neq j, x_i\cap x_j=\varnothing$，则称 P 为 S 的一个分划. 鸽巢原理可表示为：若 $|S|\geqslant n+1$，则对任意 S 的分划 $p=\{x_i:i\in I\}$，若 $|I|\leqslant n$，则必存在 $i\in I$，使 $|x_i|\geqslant 2$. 鸽巢原理在无穷集合上有多种推广形式，如若 S 为无穷集合，则对 S 的任何分划 $P=\{x_i:i\in I\}$，只要 I 有限，则一定存在 $i\in I$，使 x_i 为无穷集. 又如，若 $|S|$ 为一个正规基数 κ，则对任何 S 的分划 $P=\{x_i:i\in I\}$，只要 $|I|<\kappa$，则存在 $i\in I$，使 $|x_i|=\kappa$.

组合论的另一种重要的分划性质是所谓的拉姆齐原理. 设 A 为非空集合，$n>0$ 为自然数，记 $[A]^n=\{x\subseteq A:|x|=n\}$，若 $P=\{x_i:i\in I\}$ 为 $[A]^n$ 的一个分划，$|I|=\sigma$，则称 P 为将 $[A]^n$ 分成 σ 片的一个分划. 若对 $[A]^n$ 及它的一个分划 $P=\{x_i:i\in I\}$，存在一个集合 $H\subseteq A$ 及 $i\in I$，使得 $[H]^n\subseteq x_i$，则称 H 对 P 均匀齐次. 对任意基数 κ,λ,σ 及自然数 $n>0$，令 $\kappa\to(\lambda)^n_\sigma$ 表示下列分划性质：每个将 $[\kappa]^n$ 分成 σ 片的分划 P，存在对 P 的一个均匀集 $H\subseteq\kappa$，使 $|H|=\lambda$. 记号 $\kappa\to(\lambda)^n_\sigma$ 称为爱尔特希记号，或称为分划关系. 因此，拉姆齐问题可用爱尔特希记号表示为：对任何基数 κ，$6\leqslant\kappa<\omega$，$\kappa\to(3)^2_2$. 若 $\kappa'\geqslant\kappa,\lambda'\leqslant\lambda,\sigma'\leqslant\sigma,n'\leqslant n$，则 $\kappa\to(\lambda)^n_\sigma$ 蕴含着 $\kappa'\to(\lambda')^{n'}_{\sigma'}$. 在无穷组合论中，一般只考虑 κ 及 λ 为无穷基数的情形. 对不同的 κ,λ,σ 及 n，研究分划关系 $\kappa\to(\lambda)^n_\sigma$ 成立与否以及当其成立时 κ 可能有的最小值是分划演算的主要研究课题. 近几十年来，特别是力迫法产生之后，有关这一问题以及在此基础上的各种推广命题的研究取得了相当大的成就，许多结果在大基数理论、模型论、拓扑学及无穷组合论的其他分支领域中得到了广泛应用. 下面是关于分划关系的一些基本结论：

1. (拉姆齐定理)对任意自然数
$$m,n\ (m,n\neq 0),\ \aleph_0\to(\aleph_0)^n_m.$$
2. (爱尔特希-拉多分划定理) $\tau_n^+\to(\aleph_1)^{n+1}_{\aleph_0}$.
3. 对任意基数 κ,λ，$2^\kappa\to(\lambda)^2_\kappa$，$2^\kappa\to(\kappa^+)^2_2$.
4. $\kappa\to(\kappa)^2_2$ 且 $\kappa>\omega$，则 κ 为强不可达基数.
5. 若 $\kappa\to(\kappa)^2_2$，则不存在 κ 阿龙扎扬树.

分划关系 $\kappa\to(\lambda)^n_\sigma$ 有一些推广形式，如允许 λ 为一个极限序数以及将 $[\kappa]^n$ 扩充为

$$\bigcup_{n\in\omega}[\kappa]^n$$

的情况. 有关这些推广形式的研究与大基数理论及模型论有着非常密切的关系. 对分划演算的研究主要由匈牙利学者爱尔特希(Erdös, P.)等人发展起来，现已成为无穷组合论的一个重要分支.

爱尔特希记号(Erdös notation)　见“分划演算”.

Δ系统引理(Δ-system lemma)　无穷组合论的重要结论. 对任何由不可数个有限集构成的集簇 $\mathscr{A}$，总存在 $\mathscr{A}$ 的一个不可数子集 B 及一个有限集 S，使对任意 B 中的两个相异元 x,y，有 $x\cap y=S$. 称这里的 B 为 $\mathscr{A}$ 的 Δ 系统，S 称为 Δ 系统的根. 这一结论被称为 Δ 系统引理. 若 $\mathscr{A}$ 中的集合两两互不相交，则 $\mathscr{A}$ 即为它自身的 Δ 系统，这时，根为空集. 因此 Δ 系统可以看做分离概念的一种推广，故有时称 Δ 系统为准分离簇. Δ 系统引理在集合论、拓扑学等领域被经常引用.

准分离族(quasi disjoint family)　见“Δ 系统引理”.

几乎分离集簇(almost disjoint family)　简称 adf. 划分概念的推广. 设 A 为一个非空集合，$|A|=\kappa$，$P\subset P(A)$（$P(A)$ 表示 A 的幂集），若 $\forall X\in P(|X|=\kappa)$，且对任何 $X,Y\in P$，$|X\cap Y|<\kappa$，则称 P 为 A 的几乎分离集簇. 显然，若 P 中的元素两两分离且 $P=\bigcup A$，则 P 为 A 的一个划分. 若 P 为 A 的一个几乎分离集簇，且不存在 A 的一个几乎分离集簇 P' 真包含 P，则称 P 为 A 的最大几乎分离集簇，记为 madf. 几乎分离集簇的概念由波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński, W.)于 1928 年引入.

最大几乎分离集簇(maximum almost disjoint family)　见“几乎分离集簇”.

马丁公理(Martin axiom)　简称 MA. 独立于 ZFC 公理系统的著名假设之一. 是近代数学基础理论的重要论题. 设 κ 为任意基数，令 MA(κ) 表示下列命题：对任何满足可数链条件的偏序集 $\langle P,\leqslant\rangle$ 及由 P 的稠密子集组成的基数不大于 κ 的集簇 $\mathscr{G}$，存在 P 中的滤子 G，使得对任何 $D\in\mathscr{G}$，G 交 D 不空，即 $G\cap D\neq\varnothing$. MA(2^ω) 为假. 对任何 $\kappa'<\kappa$，MA(κ) $\to$ MA(κ')，MA(ω) 成立. 因此 MA(κ) $\to\kappa<2^\omega$. 马丁公理为：$\forall\kappa<2^\omega$，MA(κ). 记为 MA. 马丁公理由美国学者马丁(Martin, D. A.)与罗伯托姆(Rowbottom, F.)于 1970 年左右提出，以色列学者索洛韦(Solovay, R. M.)与特纳鲍姆(Tennenbaum, S.)于 1971 年利用迭代力迫法证明若 ZF 系统相容，则 ZFC+MA+$2^\omega>\omega_1$ 也相容，从而得出 MA+¬CH 与 ZFC 系统相容. 另一方面，若 ZF 系统相容，则 ZFC+¬MA 也相容. 因此 MA 相容且独立于 ZFC 系统. 由于 CH→MA，因此 MA 也独立于 CH. 美国数学家科恩(Cohen, P. J.)已经证明连续统假设在 ZFC 公理系统中不可证，法国数学家、工程师莱维(Lévy, A.)与索洛韦证明即使假设可测基数存在，也不能得出 CH 为真. 因此，许多集合论学家觉得连续统假设在“现实世界”中“不大可能”为真. 然而，连续统假设有许多推论很符合人们的直观，它还可以使许多概念或运算得以简化. 设计马丁公理的初衷在于减弱连续统假设的结论，使得某些由连续统假

设得出的结论在减弱的假设下仍然成立. 马丁与索洛韦于 1970 年证明下列连续统假设下成立的重要结论在马丁公理下仍然成立:对任何基数 $\kappa<2^{\omega}$,由马丁公理可以得出:

1. $2^{\kappa}=2^{\omega}$.

2. 每个基数为 κ 的几乎分离簇 $\mathscr{A}\subset P(\omega)$ 不可能为最大几乎分离簇.

3. κ 个实直线 R 上的勒贝格测度为 0 的子集的并的勒贝格测度仍为 0.

4. 实直线 R 上的 κ 个第一范畴子集的并仍为 R 上的第一范畴子集.

由上列结论可以看出,马丁公理并不是简单地否定在 ω 与 2^{ω} 之间不存在基数,而是断言,若在此间存在基数,这些基数具有类似于 ω 的一些性质. 事实上,有许多能由 CH 解决的传统数学问题也可以用 MA 解决. 由于 MA 独立于 CH,因此同样也有一些 CH 下为真的命题在 MA$+\neg$CH 下为假.

马丁公理除了偏序形式的定义之外,还有一些其他的等价表述形式,这些表述形式体现出马丁公理可以用于多种不同的数学领域中. 如马丁公理的拓扑形式可简单地表述为:若 X 为任何具有可数链条件的豪斯多夫空间,则 X 不能表示为小于 2^{ω} 个 X 的无处稠密子集的并. 马丁公理的布尔代数形式可表述为:若 B 为一个具有可数链条件的完备布尔代数,T 为基数小于的 B 的一个稠子集簇,则在 B^{ω} 上存在 T 超滤子.

马丁公理与 ZF 系统的公理不同,它不具备直觉上的自明性,因此,它实质上不是公理而是一种集合论假设. 然而,马丁公理在现代数学基础理论中占有相当重要的地位. 它有大量的推论,其中有一些已经成为打开许多数学难题的钥匙. 马丁公理还可以作为证明或发现某些相容或独立于 ZFC 系统的命题的一种工具. 由于 MA 与 ZF(C)系统相容,假如利用 MA 证明某命题 Φ 为真,则 Φ 与 ZF(C)系统相容,从而 $\neg\Phi$ 在ZF(C)系统中不可证. 有时能通过检查 MA$\rightarrow\Phi$ 的证明过程消去 MA 的使用,从而得出 Φ 为 ZF(C)系统的定理,或者发现 Φ 在 ZF(C)系统中也不可证,从而得出 Φ 独立于 ZF(C)系统. 例如,著名的苏斯林假设的相容性问题就是借助马丁公理才得以解决的. 索洛韦等人 1971 年证明 MA$+\neg$CH$\rightarrow$SH,由于 MA$+\neg$CH 相容,因此 SH 相容;美国学者杰希(Jech,T. J.)等人也已证明$\neg$SH相容,故 SH 独立于 ZFC 系统. 对马丁公理的研究主要集中于下列两个方面:一方面减弱或加强马丁公理的条件或结论,以寻求马丁公理更广泛的应用,如对偏序加适当限制等;另一方面对有关马丁公理的更大量的研究是马丁公理的应用研究,目前马丁公理已被应用到无穷组合论、模型论、拓扑学、测度论、函数论及代数学等众多数学领域,对马丁公理的研究已经成为许多学科中的独立研究分支.

中介公理集合论(medium axiomatic set theory)　一种公理集合论系统. 是以中介逻辑演算 ML 为逻辑推理工具的非经典的公理集合论系统(记为 MS). 它由 21 条非逻辑公理(模式)构成,其中以泛概括公理为核心. 在 MS 中,首先给出了有如

$$\text{模糊谓词}\ \overset{fuz}{\langle x_1,\cdots,x_n\rangle}\mathrm{P},$$

$$\text{清晰谓词}\ \overset{dis}{\langle x_1,\cdots,x_n\rangle}\mathrm{P},$$

$$\text{概集}\ A\overset{Com}{\underset{x}{}}\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{t}),$$

$$\text{恰集}\ A\overset{exa}{\underset{x}{}}\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{t})$$

等概念的形式定义,直至在数学基础理论意义下解决了模糊谓词的造集问题,因而在数学基础理论意义下完成了数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充. 其次,大家公认整个精确性经典数学可由 ZFC 系统之正则公理以外的九条公理推出,但这九条公理已被证明为 MS 中对谓词与个体在某种约束条件下的九条定理. 而且严格证明了任何一个经典的二值逻辑系统都是 ML 的子系统. 从而整个精确性经典数学可在 MS 中产生并奠基于 MS. 又各种近代公理集合论对于悖论的排除都涉及概括原则的修改,但在排除悖论的同时,又过多地限制了概括原则的合理内容. 因而,需要寻找一种如何修改概括原则的方案,使之既能排除悖论,又能最大限度地保留概括原则的合理内容. 这一问题在经典数学中不仅没有解决,而且几乎不可能在经典数学范围内解决. 但在 ML&MS 中,通过泛概括公理和泛概括定理证明了"任何正规清晰谓词都存在着一个该谓词的恰集",而 MS 意义下的一切正规清晰谓词又囊括了康托尔意义下的一切造集谓词. 这表明在 MS 中已完全保留了康托尔意义下的概括原则. 另一方面,对于历史上既经出现的种种逻辑数学悖论,以及在二值系统中无需解释的多值逻辑悖论与无穷值悖论等,均在 MS 中得到了合理的解释. 从而解决了如何修改概括原则的遗留问题. 中介公理集合论开辟了以非经典逻辑演算为配套逻辑工具的公理集合论的研究方向.

模　型　论

模型论(model theory)　数理逻辑的一个分支. 是研究形式语言和它的解释(模型或结构)之间关系的理论. 模型论与代数有密切联系. 在泛代数中也研究各种结构,但主要是自然语言及通常的数学论证. 而模型论中则主要使用形式语言及基于形式推演的论证来研究各种结构. 因而有人给出下列的

公式：泛代数＋逻辑＝模型论.

模型论可分为一阶模型论、高阶模型论、无穷长语言模型论、具有广义量词的模型论、模态模型论、多值模型论等. 由于数理逻辑中一阶逻辑发展最成熟，所以模型论也以一阶模型内容最为丰富，应用也最多. 模型论与数理逻辑的其他分支（逻辑演算、证明论、递归论、公理集合论等）有着密切的联系. 模型论与代数也有密切联系，近年来形成了“模型论代数”的研究方向. 模型论对分析数学也很有影响，以模型论为基础的“非标准分析”方法，近年来，在函数论、概率论、微分方程等分支中有不少应用. 此外，模型论在数论、拓扑及计算机科学中也有应用.

早在 20 世纪 20 年代，挪威数学家斯科朗（Skolem，A. T.）等人在数理逻辑研究中就得到了模型论性质的重要结果. 但作为较系统的理论，模型论的奠基人应推波兰学者塔尔斯基（Tarski，A.）. 随后，美籍德国数学家鲁宾孙（Robinson，A.）也对模型论做出很多贡献. 在这方面贡献较多的数学家主要还有：荷兰学者沃特（Vaught，R. L.）、俄国数学家马尔可夫（Марков，A. A.）、张辰中（Chang，C. C.）、基斯勒（Keisler，H. J.）、莫利（Morley，M.）、谢拉赫（Shelah，S.）、马钦泰尔（Macintyre，A.）等人.

形式语言（formal language）　模型论的一种语言. 它是由一些符号构成的集合. 按照模型论中的一种通行习惯，这些符号可分为三组（可以是空组），分别称为关系符号（谓词），函数符号（函数词）及（个体）常元符号. 每一关系符号 R 有一个确定的元数 $n\geqslant1$，称 R 为 n 元关系符号. 每一函数符号 F 有一个确定的元数 $m\geqslant1$，称 F 为 m 元函数符号. 这些符号称为非逻辑符号.

设 $\mathscr{L}$ 为一形式语言（简称语言），为了定义 $\mathscr{L}$ 中的（一阶）合式公式，引进下列逻辑符号：

1. 个体变元：$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$.
2. 逻辑联结词：$\neg$（非），$\wedge$（且）[$\vee$（或），$\rightarrow$（如果……则），$\leftrightarrow$（当且仅当）].
3. 量词：$\forall$（对所有）[$\exists$（存在）].
4. 括号：(，).

以及一个二元关系符号$\equiv$（等词）（人们约定，$\mathscr{L}$ 中不包含这些符号）. 语言 $\mathscr{L}$ 可由非逻辑符号具体表示为

$$\mathscr{L}=\{\{R\},\{F\},\{C\}\}.$$

这里用$\{R\}$，$\{F\}$，$\{C\}$分别表示 $\mathscr{L}$ 中的关系符号、函数符号、个体常元符号的集合. 例如 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\mathscr{L}=\{\leqslant,+,\cdot\}$，$\mathscr{L}=\{+,0\}$，$\mathscr{L}=\{+,\cdot,',0,1\}$，$\mathscr{L}=\{+,\cdot,S.0\}$等. 一般地，在模型论中所讨论的概念均在一阶（形式）语言意义下讨论. 这里所说的一阶语言，是指在一阶逻辑中使用的语言.

一阶语言（first order language）　见“形式语言”.

语言基数（cardinality of a language）　模型论的基本概念之一. 它是语言中全体逻辑符号的非逻辑符合集的基数. 语言 $\mathscr{L}$ 的基数记为 $\|\mathscr{L}\|$，定义如下：$\|\mathscr{L}\|=\omega\cup|\mathscr{L}|$，其中 ω 是自然数集的基数，$|\mathscr{L}|$表示在 $\mathscr{L}$ 中出现的非逻辑符号集合的基数. 例如，若 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,',0,1\}$，则 $|\mathscr{L}|=5$，$\|\mathscr{L}\|=\omega$. 如果 $\|\mathscr{L}\|$ 是可数的，称 $\mathscr{L}$ 为可数语言；如果 $\|\mathscr{L}\|$ 是不可数的，则称 $\mathscr{L}$ 为不可数语言.

可数语言（countability languages）　见“语言基数”.

不可数语言（uncountability language）　见“语言基数”.

语法（syntax）　模型论的基本概念之一. 它研究语言表达式的构造，表达式之间的关系. 研究语言的理论称为语法理论，又称语法学. 语法学是研究逻辑语言和描述该语言的纯形式方面的内容. 它研究系统的和谐性、完全性、独立性、可判定性、可证明性、可定义性等，且与证明论有关. 语法学只分析语言表达式之间的关系，不考虑语言的使用者表达式的所指以及和表达式的意义.

一个形式系统的语法包括如下几个重要部分：

1. 各种初始符号. 它是一个形式系统的字母库.
2. 形成规则. 规定什么样的符号串是一个合式公式，什么样的符号串不是合式公式.
3. 初始公式. 作为系统出发点的合式公式，经解释后是通常的公理.
4. 变形规则. 规定什么样的合式公式能推出什么样的公式，经解释后就是推理规则.

语言表达式间的语法推出关系用符号$\vdash$表示.

语义（semantics）　模型论的基本概念之一. 指语言表达式和表达式的意义之间的关系. 研究语义的理论称为语义理论，又称语义学. 语义学不像语法学那样只关心表达式的形式而不关心它们的意义. 而是充分地考虑这些语言表达式在自然语言中的意义以及它们之间的关系. 在语义学概念中，有真值、指派、可满足、有效模型等概念. 语义学研究系统中公式的意义、系统的解释，且与模型论相关.

语言表达式间的语义推论关系用符号$\vDash$表示.

合式公式（well formed formula）　一种形式语言表达式. 即形式系统中按一定规则构成的表达式. 按照模型论中一种通行习惯，语言 $\mathscr{F}$ 中的合式公式定义如下：

1. 原子公式是合式公式.
2. 若 φ 和 ψ 是合式公式，则$(\varphi\wedge\psi)$及$(\neg\varphi)$是合式公式.
3. 若 φ 是合式公式，而 x 是变元，则$(\forall x)\varphi$是合式公式.

4. 有限次地应用 1—3 所得到的符号序列是合式公式.

合式公式有时简称公式. 如果一个公式 φ 中的自由变元都属于集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 φ 也可以记为 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 不含量词、自由变元的合式公式，分别称为开公式和闭公式，后者又称语句. 例如 $R(x,y)$ 为开公式；$\forall xR(x)$ 是一个语句. 由原子公式及联结词 $\wedge$，$\vee$，$\forall$，$\exists$ 构成语句，称为正语句.

正语句(positive sentence)　见"合式公式".

语言膨胀(expansion of a language)　亦称语言扩充. 模型论的基本概念之一. 指增加新的非逻辑符号的语言. 设 $\mathscr{L}$ 及 $\mathscr{L}'$ 为两个形式语言，如果 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}'$ 的子集(这意味着，如果 R 是 $\mathscr{L}$ 中的 n 元关系符号，则 R 也是 $\mathscr{L}'$ 中的 n 元关系符号……)，则称 $\mathscr{L}'$ 为 $\mathscr{L}$ 的膨胀，称 $\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{L}'$ 的归约，记为 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$. 例如，语言 $\mathscr{L}=\{+,<,0\}$ 的一个膨胀语言为

$$\mathscr{L}'=\{+,\cdot,<,0,1\}.$$

语言归约(reduction of a language)　见"语言膨胀".

简单膨胀(simple expansion)　语言膨胀的一种. 设语言 $\mathscr{L}'$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的膨胀，即 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$. 如果 $\mathscr{L}'\backslash\mathscr{L}$ 中的符号都是常元符号，则称 $\mathscr{L}'$ 是 $\mathscr{L}$ 的简单膨胀. 简单膨胀又称字母膨胀或字母扩张.

字母膨胀(alphabetic expansion)　见"简单膨胀".

语言模型(model of a language)　亦称语言结构. 形式语言 $\mathscr{L}=\langle\{R\},\{F\},\{C\}\rangle$ 的解释. 设 A 是一个非空集合，如果对于 $\mathscr{L}$ 中每一个关系符号 R(设为 n 元的)，都有 A 中一个指定的关系 r(也是 n 元的)来解释它；对 $\mathscr{L}$ 中的每一个函数符号 F(设为 m 元的)，都有 A 上一个指定的函数 f(也是 m 元的)来解释它；对于 $\mathscr{L}$ 中的每个常元符号 c，都有 A 上一个指定元素来解释它；这样就构成了在 A 中对于 $\mathscr{L}$ 的一个解释 $\mathscr{F}$($\mathscr{F}$ 可以看做是由 $\mathscr{L}$ 中符号到 A 上的一些关系、函数及 A 中一些元素的映射. 注意不同符号可以有相同的解释). 将 $\mathscr{U}=\langle A,\mathscr{F}\rangle$ 称为语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型(或结构). A 称为 $\mathscr{U}$ 的论域、或个体域、或定义域. 一般将模型记为 $\mathscr{U},\mathscr{B},\mathscr{C},\cdots,\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2,\cdots$；论域分别记为 $A,B,C,\cdots,A_1,A_2,\cdots$ 模型 $\mathscr{U}$ 的论域 A 的基数 $|A|$ 称为模型 $\mathscr{U}$ 的基数. 又称为模型 $\mathscr{U}$ 的势.

语言结构(structure of a language)　即"语言模型".

模型基数(cardinal of a model)　见"语言模型".

模型的势(power of a model)　见"语言模型".

模型膨胀(expansion of a model)　模型论术语. 指两个模型间的一种关系. 设 $\mathscr{U}=\langle A,\mathscr{F}\rangle$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型. 如果将语言 $\mathscr{L}$ 膨胀为 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup X$，并在 $\mathscr{U}$ 中对 X 中的符号给出任意解释 $\mathscr{F}'$，则 $\mathscr{U}'=\langle A,\mathscr{F}\cup\mathscr{F}'\rangle$ 是膨胀语言 $\mathscr{L}'$ 的一个模型，称模型 $\mathscr{U}'$ 是模型 $\mathscr{U}$ 的膨胀. 此时也称模型 $\mathscr{U}$ 是模型 $\mathscr{U}'$ 的归约. 有时也用如下缩写：$\mathscr{U}'=\langle\mathscr{U},\mathscr{F}'\rangle$. 将 $\mathscr{L}$ 的模型膨胀为 $\mathscr{L}'$ 的模型可能有多个，而将 $\mathscr{L}'$ 的模型归约为 $\mathscr{L}$ 的模型则是惟一的. 设 $\mathscr{U}_1=\langle A,\mathscr{F}_1\rangle$ 是 $\mathscr{L}_1$ 的一个模型，且 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}_1$. 由 $\mathscr{F}_1$ 中略去对 $\mathscr{L}_1\backslash\mathscr{L}$ 表示集合差的符号解释后，可得一个对于 $\mathscr{L}$ 的解释. 称 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}=\langle A,\mathscr{F}\rangle$ 为 $\mathscr{U}_1$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约. 此时，$\mathscr{U}_1$ 为 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}_1$ 中的膨胀.

模型归约(reduct of a model)　见"模型膨胀".

同型模型(models of the same type)　两模型间的一种相似关系. 指具有同一语言的模型. 若模型 $\mathscr{U}=\langle A,\{r\},\{f\},\{c\}\rangle$ 中的 n 元关系、m 元函数及常元，能分别与模型 $\mathscr{U}'=\langle A',\{r'\},\{f'\},\{c'\}\rangle$ 中的 n 元关系、m 元函数及常元建立 1－1 对应(对应的关系元数相同，对应的函数也元数相同)，则称 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}'$ 是同型的模型. 例如 $\mathscr{U}=\langle Q-\{0\},=,\cdot,1\rangle$ 与 $\mathscr{U}'=\langle Z,=,+,0\rangle$ 是同型的模型. 而 $\mathscr{U}=\langle Z,+\rangle$ 与 $\mathscr{U}'=\langle R,+,\cdot\rangle$ 不是同型的模型.

子模型(submodel)　一种语言模型. 设语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型 $\mathscr{U}=\langle A,\{r\},\{f\},\{c\}\rangle$ 及 $\mathscr{U}'=\langle A',\{r'\},\{f'\},\{c'\}\rangle$，称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的子模型或子结构，也称 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{U}'$ 的扩张(模型)，记为 $\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{U}$，如果下列条件成立：

1. $A'\subseteq A$.

2. 对 $\mathscr{L}$ 中每个 n 元关系符号 R，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{U}'$ 中的解释分别为 r 及 r'，则对 A' 中每一 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，都有：$r'(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为真，当且仅当 $r(a_1,a_2,\cdots,a_n,)$ 为真. 即 $\mathscr{U}'$ 中的每个 n 元关系 r' 均是 $\mathscr{U}$ 中 n 元关系 r 在 A' 中的限制.

3. 对 $\mathscr{L}$ 中每一 m 元函数符号 F，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{U}'$ 中的解释分别为 f 及 f'，则对 A' 中每一 m 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，都有

$$f'(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

即 $\mathscr{U}'$ 中的每个 m 元函数 f' 均是 $\mathscr{U}$ 中 m 元函数 f 在 A' 中的限制.

4. 对 $\mathscr{L}$ 中的每个常元符号 C，设它在 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}'$ 中的解释分别为 c 及 c'，则有 $c=c'$.

子结构(substructure)　即"子模型".

模型同构(isomorphism of models)　模型论术语. 指两模型间的一种等价关系. 语言 $\mathscr{L}$ 中的模型 $\mathscr{U}=\langle A,\{r\},\{f\},\{c\}\rangle$ 和 $\mathscr{B}=\langle B,\{s\},\{g\},\{d\}\rangle$ 同构(记为 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$)，当且仅当存在一个双射 $h:A\rightarrow B$ 满足：

1. 对 $\mathscr{L}$ 中每一 n 元关系符号 R，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{B}$ 中的解释各为 r 及 s，则对 A 中每一 n 元组(指 n

元序列，序列中可以有重复的元）$a_1,a_2,\cdots,a_n$，都有 $r(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为真，当且仅当 $s(h(a_1),h(a_2),\cdots,h(a_n))$ 为真.

2. 对 $\mathscr{L}$ 中每一 m 元函数符号 F，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{B}$ 中的解释各为 f 及 g，则对 A 中每一 m 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，都有

$$h(f(a_1,a_2,\cdots,a_m))=g(h(a_1),h(a_2),\cdots,h(a_m)).$$

3. 对 $\mathscr{L}$ 中的每一常元符号 C，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{B}$ 中的解释各为 c 及 d，则有 $h(c)=d$. 称 h 为由 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 上的一个同构映射，记为 $h:\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$. 例如 $\mathscr{U}=\langle R^+,\cdot\rangle$，$\mathscr{B}=\langle R,+\rangle$，其中 R 为实数集，R^+ 为正实数集. 对任何 $a\in R^+$，令 $h(a)=\lg a\in R$，则对任何 $a,b\in R^+$ 都有

$$h(a,b)=\lg(a,b)=\lg a+\lg b=h(a)+h(b),$$

所以 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$.

模型同态（homomorphism of models） 模型论术语. 指两模型（结构）间的一种相似关系. 语言 $\mathscr{L}$ 中的模型 $\mathscr{U}=\langle A,\{r\},\{f\},\{c\}\rangle$ 和 $\mathscr{B}=\langle B,\{s\},\{g\},\{d\}\rangle$ 同态（记为 $\mathscr{U}\simeq\mathscr{B}$），称 h 为由 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 中的一个同态映射，记为 $h:\mathscr{U}\simeq\mathscr{B}$. 当且仅当存在一个映射 $h:A\to B$ 满足：

1. 对 $\mathscr{L}$ 中每一 n 元关系符号 R，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{B}$ 中的解释各为 r 及 s，则对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，若 $r(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为真，则 $s(h(a_1),h(a_2),\cdots,h(a_n))$ 为真.

2. 对 $\mathscr{L}$ 中每一 m 元函数符号 F，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{B}$ 中的解释各为 f 及 g，则对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in A$，若 $f(a_1,a_2,\cdots,a_m)=a$. 则 $g(h(a_1),h(a_2),\cdots,h(a_m))=h(a)$.

3. 对 $\mathscr{L}$ 中每一常元符号，设它在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{B}$ 中的解释各为 c 及 d，则有 $h(c)=d$.

例如，$\mathscr{U}=\langle Z,+,0\rangle$，$B=\langle Z_m,+,\bar{0}\rangle$，其中 Z 是整数集，Z_m 是整数集中以 m 为模的剩余类构成的集合. 对任何 $a\in Z$，令 $h(a)=\bar{a}\in Z_m$（$\bar{a}$ 为所在的剩余类），则对任何 $a,b\in Z$，都有 $h(a+b)=\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}=h(a)+h(b)$，且有 $h(0)=\bar{0}$. 所以 $h:\mathscr{U}\simeq\mathscr{B}$.

模型同构嵌入（isomorphic embedding of models） 一种特殊的子模型关系. 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，如果存在一个从 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个子模型 $\mathscr{C}$ 的同构映射 h，即 $h:\mathscr{U}\cong\mathscr{C}$，且 $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{B}$，则称模型 $\mathscr{U}$ 可以同构嵌入 $\mathscr{B}$ 中，此时也称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个同构扩张. 例如，令 $\mathscr{U}=\langle N,+,0\rangle$，$\mathscr{B}=\langle N,\cdot,1\rangle$，其中 N 为自然数集. 取映射 $h:n\to 2^n$（$n=0,1,2,\cdots$），并令 $C=\{2^n,n=0,1,\cdots\}\subseteq N$，$\mathscr{C}=\langle C,\cdot,1\rangle$，则有 $h:\mathscr{U}\cong\mathscr{C}$，所以 $\mathscr{U}$ 可以同构嵌入 $\mathscr{B}$ 中.

形式推演系统（formal deductive system） 一阶谓词演算系统. 是形式语言 $\mathscr{L}$ 中从公理出发的推演系统（简称形式系统）π.

其公理分为三组：

1. 命题公理. 如果 $\mathscr{L}$ 中的公式 φ 能看做由命题演算中的一个恒真公式把命题变元代换为 $\mathscr{L}$ 中公式得到的，则 φ 是 π 的一个命题公理.

2. 量词公理：

1）若 φ 和 ψ 是（$\mathscr{L}$ 中的）公式，而变量 x 不在 φ 中自由出现，则有 $(\forall x)(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to(\forall x)\psi)$.

2）若 φ 和 ψ 是（$\mathscr{L}$ 中的）公式，而 ψ 是用项自由地代换变元 x 在 φ 中的每一自由出现得到的（"自由地"代换是指：对每一个这样引入 ψ 中的 t 而言，t 中每一变元 y 在 ψ 中都是自由出现的）. 则有

$$(\forall x)\varphi\to\psi.$$

3. 等词公理. 设 x,y 是变元，$t(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是项，$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是原子公式，则有 π 的公理：

$$x\equiv x;$$

$$x\equiv y\to t(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)$$
$$\equiv t(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_n);$$

$$x\equiv y\to(\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)$$
$$\to\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_n)).$$

π 的推演规则有两条，即：

1. 分离规则. 由 φ 和 $\varphi\to\psi$ 推得 ψ.

2. 推广规则. 由 φ 推得 $(\forall x)\varphi$.

形式推演（formal deduction） 模型论的基本概念之一. 指在语言 $\mathscr{L}$ 中，从一个公式集合出发到一个公式的推演. 如果存在一个有限公式序列 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$，使得 $\varphi=\psi_n$，并且对每个公式 ψ_i，它或是一个逻辑公理，或属于 Σ，或能由次序在前的公式用分离规则或推广规则推得. 这时称公式 φ 可以由公式集合 Σ 推出，记为 $\Sigma\vdash\varphi$. 这样的公式序列 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 称为由 Σ 到 φ 的一个形式推演（简称推演）. 特别地，如果 φ 可以由空集推出，则称 φ 是一个形式定理，记为 $\vdash\varphi$.

形式定理（formal theorem） 见"形式推演".

项值（value of term） 模型论的基本概念之一. 指项在模型中的解释. 设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型. 对于 $\mathscr{L}$ 中的项 $t(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 A 中的 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，归纳地定义 t 在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 处的值 $t[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 为：

1. 若 $t=x_i$，则 $t[a_1,a_2,\cdots,a_n]=a_i$.

2. 若 t 是一个常元符号 c，则 $t[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 为 c 在 $\mathscr{U}$ 中的解释 a.

3. 若 $t=F(t_1,t_2,\cdots,t_m)$，而 F 在 $\mathscr{U}$ 中的解释为 f，则

$$t[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$
$$=f(t_1[a_1,a_2,\cdots,a_n],\cdots,t_m[a_1,a_2,\cdots,a_n]).$$

满足（satisfaction） 模型论的基本概念之一. 指公式在模型中取值为真. 设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的一个

模型. $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式，其自由变元及约束变元都在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 A 中的 n 元组. 归纳地定义“φ 在 $\mathscr{U}$ 中被 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足”(记为 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$)为：

1. 若 φ 为 $t_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv t_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当

$$t_1[a_1,a_2,\cdots,a_n]=t_2[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

2. φ 为 $R(t_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,t_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))$，则 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当

$$r[t_1(a_1,a_2,\cdots,a_n],\cdots,t_m[a_1,a_2,\cdots,a_n])$$

真(其中 r 为 R 在 $\mathscr{U}$ 中的解释).

3. 若 φ 为 $\neg\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则

$\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当 $\mathscr{U}\vDash\psi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$不成立.

4. 若 φ 为 $\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\wedge\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_2)$，则 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当 $\mathscr{U}\vDash\varphi_1[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，并且 $\mathscr{U}\vDash\varphi_2[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

5. 若 φ 为 $\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_2)\vee\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_2)$，则 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当 $\mathscr{U}\vDash\varphi_1[a_1,a_2,\cdots,a_n]$或 $\mathscr{U}\vDash\varphi_2[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

6. 若 φ 为 $\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_2)$，则 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当 $\mathscr{U}\vDash\neg\varphi_1[a_1,a_2,\cdots,a_n]$或 $\mathscr{U}\vDash\varphi_2[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

7. 若 φ 是 $\forall x_i\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i\leqslant n)$，则 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当对每个 $a\in A$，皆有 $\mathscr{U}\vDash\psi[a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a,a_{i+1},\cdots,a_n]$.

8. 若 φ 是 $\exists x_i\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i\leqslant n)$，则 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，当且仅当存在一个 $a\in A$，能使

$$\mathscr{U}\vDash\psi[a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a,a_{i+1},\cdots,a_n].$$

如果存在 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 及一个 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，能使 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则称 φ 是可满足的.

有效(validity)　模型论的基本概念之一. 指公式在模型中恒真. 设 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型. 如果对任意的 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，皆有 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则称 φ 在 $\mathscr{U}$ 中有效.

普遍有效公式(universally valid formula)　亦称永真公式或恒真公式. 一种基本公式. 指在任意模型中都恒真的公式. 设 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式，如果对 $\mathscr{L}$ 的每一模型 $\mathscr{U}$ 及任意的 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，皆有 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则称 φ 是普遍有效公式.

恒真公式(always true formula)　即“普遍有效公式”.

可驳公式(refutable formula)　一种基本公式. 指不恒真的公式. 设 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式，如果对 $\mathscr{L}$ 的某一个模型 $\mathscr{U}$，存在某个 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$. 使 $\mathscr{U}\vDash\neg\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则称 φ 是可驳的，即 φ 不是普遍有效的.

语句模型(model of a sentence)　一种语言模型. 设 $\mathscr{U}$ 为语言 $\mathscr{L}$ 的模型，σ 是 $\mathscr{L}$ 中的语句，如果 σ 在 $\mathscr{U}$ 中为真，则称 $\mathscr{U}$ 为语句 σ 的模型，记为

$$\mathscr{U}\vDash\sigma.$$

初等等价(elementarily equivalent)　模型论术语. 指两个模型间的一种关系. 设 $\mathscr{U},\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型. 如果对 $\mathscr{L}$ 中每一语句 σ 都有 $\mathscr{U}\vDash\sigma$，当且仅当 $\mathscr{B}\vDash\sigma$. 则称 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{B}$ 是初等等价的，记为 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. 即 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，当且仅当$\mathrm{Th}(\mathscr{U})=\mathrm{Th}(\mathscr{B})$，其中 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$表示在 $\mathscr{U}$ 中为真的语句集合，$\mathrm{Th}(\mathscr{B})$表示在 $\mathscr{B}$ 中为真的语句集合.

完全性定理(completeness theorem)　亦称哥德尔完全性定理. 模型论的基本定理之一. 该定理断言：语言 $\mathscr{L}$ 中的语句 φ 是一个形式定理，当且仅当 φ 是普遍有效的. 也即$\vdash\varphi$，当且仅当$\vDash\varphi$. 这一定理可推广为如下的广义完全性定理：设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 中的语句集合，则 Σ 是协调集，当且仅当 Σ 有一个模型.

完全性定理是美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)于 1930 年给出的. 广义完全性定理把语法上的协调性概念与语义上的模型概念紧密联系起来.

哥德尔完全性定理(Gödel completeness theorem)　即“完全性定理”.

广义完全性定理(generalized completeness theorem)　见“完全性定理”.

紧致性定理(compactness theorem)　模型论的基本定理之一. 该定理断言：语言 $\mathscr{L}$ 中的语句集合 Σ 有模型，当且仅当 Σ 的每个有限子集合有模型.

紧致性定理把无限语句集合同它的有限语句子集合紧密联系起来，这样可以由有限语句集合的协调性推断无限语句集合的协调性. 例如，美籍德国数学家鲁宾孙(Robinson,A.)建立的包含无限小元和无限大元的非标准分析模型就是紧致性定理的一个重要应用.

形式理论(formal theory)　一种语句集合. 由 $\mathscr{L}$ 中一些语句构成的集合称为 $\mathscr{L}$ 中的一个形式理论，简称理论. 以理论 T 为出发点，可以构成如下的(一阶)形式系统 π_T(参见“形式推演系统”)：

1. π_T 的公理有两类，一类是非逻辑公理，即 T 中的语句；一类是逻辑公理，包括命题公理、量词公理、等词公理.

2. π_T 的推理规则有分离规则和推广规则.

协调(consistent)　亦称和谐. 模型论的基本概

念之一. 设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 的一个理论，如果 $\mathscr{L}$ 中每一公式都能由 Σ 推出，则称理论 Σ 是不协调的，否则称 Σ 是协调的. 如果理论 Σ 是协调的，而 $\mathscr{L}$ 中任何真正包括 Σ 的理论都不再是协调的，则称 Σ 是极大协调的. $\mathscr{L}$ 中的协调理论 Σ 有如下一些性质：

1. Σ 是协调的，当且仅当 Σ 的每一有限子集是协调的.

2.（演绎定理）设 σ 是 $\mathscr{L}$ 中的语句，τ 是 $\mathscr{L}$ 中的公式，则 $\Sigma\cup\{\sigma\}\vdash\tau$，当且仅当 $\Sigma\vdash\sigma\rightarrow\tau$.

3. 设 σ 是 $\mathscr{L}$ 的语句，则 $\Sigma\cup\{\sigma\}$ 不协调，当且仅当 $\Sigma\vdash\neg\sigma$.

4. 若 Σ 是极大协调的，则对 $\mathscr{L}$ 中的任何语句 σ,τ 都有：$\Sigma\vdash\sigma$，当且仅当 $\sigma\in\Sigma$；$\sigma\wedge\tau\in\Sigma$，当且仅当 $\sigma\in\Sigma$ 且 $\tau\in\Sigma$；$\neg\sigma\in\Sigma$，当且仅当 $\sigma\notin\Sigma$.

5. $\mathscr{L}$ 中每一个协调的理论 Σ，都能扩张为一个极大协调的理论.

极大协调(maximal consistent)　见“协调”.

封闭理论(closed theory)　一种模型论理论. 它是一种推演封闭的句子集. 设 T 为语言 $\mathscr{L}$ 中的理论. 如果在 T 的形式系统 π_T 中所能推出的每一语句都属于 T，则称 T 为封闭理论.

子理论(subtheory)　一种模型论理论. 指理论的子集. 设 T 及 T' 都是 $\mathscr{L}$ 中的理论. 如果 $T'\subseteq T$，则称 T' 是 T 的子理论. 也称 T 是 T' 的扩张.

完全理论(complete theory)　一种模型论理论. 指其推论集合是极大协调集的理论. 对于 $\mathscr{L}$ 的任意模型 $\mathscr{U}$，可由在 $\mathscr{U}$ 中成立的全体真语句构成一个理论，记为 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$，即 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})=\{\sigma:\mathscr{U}\vDash\sigma$，且 σ 为 $\mathscr{L}$ 的语句$\}$. 则称该理论是一个完全理论. 关于理论 T 的完全性，常用下列两种等价的定义：

1. 若 $\mathscr{U},\mathscr{B}$ 是 T 的任意两个模型，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

2. 对 $\mathscr{L}$ 中的任意语句 σ，或

$$T\vdash\sigma \text{ 或 } T\vdash\neg\sigma.$$

形式理论的公理集合(set of axioms for a formal theory)　一种语句集合. 设 $\mathscr{L}$ 中的语句集合 S 与一个理论 T 有相同的推论，则称 S 为 T 的一个公理集合.

可有限公理化(finitely axiomatizable)　模型论术语. 若 $\mathscr{L}$ 中的理论 T 与 $\mathscr{L}$ 中一个有限语句集合有相同的推论，则称理论 T 是可有限公理化的.

可递归公理化(recursively axiomatizable)　模型论术语. 若 $\mathscr{L}$ 中的理论 T 与 $\mathscr{L}$ 中一个递归语句集合有相同的推论，则称理论 T 是可递归公理化的.

形式理论模型(model of a formal theory)　满足一个理论的模型. 设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型，T 是 $\mathscr{L}$ 中的理论（即 $\mathscr{L}$ 中的语句集合）. 如果对每个语句 $\sigma\in T$，$\mathscr{U}$ 都是 σ 的模型（即 $\mathscr{U}\vDash\sigma$），则称 $\mathscr{U}$ 为理论 T 的模型，记为 $\mathscr{U}\vDash T$.

形式化偏序理论(formal theory of partial order)　简称偏序理论. 满足偏序关系的形式系统. 设语言 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，其中 $\leqslant$ 是二元关系符号，由下列非逻辑公理：

$\Phi_1:\forall x(x\leqslant x)$；

$\Phi_2:\forall x\forall y\forall z(x\leqslant y\wedge y\leqslant z\rightarrow x\leqslant z)$；

$\Phi_3:\forall x\forall y(x\leqslant y\wedge y\leqslant x\rightarrow x\equiv y)$

为出发点所构成的形式系统，称为形式化偏序理论.

形式化单序理论(formal theory of simple order)　亦称线性序理论. 满足单序关系的形式系统. 设语言 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，其中 $\leqslant$ 是二元关系符号，由偏序公理 Φ_1,Φ_2,Φ_3（参见“形式化偏序理论”）加上公理

$$\Phi_4:\forall x\forall y(x\leqslant y\vee y\leqslant x).$$

为出发点所构成的形式系统，称为形式化单序理论，简称单序理论.

形式化群论(formal theory of groups)　满足群公理的形式系统. 设语言 $\mathscr{L}=\{+,0\}$，其中 $+$ 是二元运算符号，0 是常元符号. 由下列非逻辑公理：

$\Phi_1:\forall x\forall y\forall z((x+y)+z=x+(y+z))$（$+$ 的结合律）；

$\Phi_2:\forall x(x+0=x)$（$+$ 的右单位元）；

$\Phi_3:\forall x\exists y(x+y=0)$（关于 $+$ 存在右逆元）

为出发点所构成的形式系统，称为形式化群论.

形式化交换群论(formal theory of Abelian groups)　满足交换群公理的形式系统. 设语言 $\mathscr{L}=\{+,0\}$，由群论公理

Φ_1,Φ_2,Φ_3（参见“形式化群论”）加上公理

$\Phi_4:\forall x\forall y(x+y=y+x)$

为出发点所构成的形式系统，称为形式化交换群论.

形式化交换环论(formal theory of commutative rings)　满足交换环公理的形式系统. 设 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,0,1\}$，其中 $+,\cdot$，是二元关系符号，0,1 是常元符号. 由交换群公理 $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4$（参见“形式化交换群论”）加上公理：

$\Phi_5:\forall x(1\cdot x=x)$（$\cdot$ 的单位元）；

$\Phi_6:\forall x\forall y(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z)$（$\cdot$ 的结合律）；

$\Phi_7:\forall x\forall y(x\cdot y=y\cdot x)$（$\cdot$ 的交换律）；

$\Phi_8:\forall x\forall y\forall z(x\cdot(y+z))=x\cdot y+x\cdot z)$（$\cdot$ 对 $+$ 的分配律）

作为出发点所构成的形式系统，称为形式化交换环论. 由交换环公理 $\Phi_1-\Phi_8$ 加上公理：

$\Phi_9:0\neq 1$；

$\Phi_{10}:\forall x\forall y(x\cdot y=0\rightarrow(x=0\vee y=0))$（无零因子）

作为出发点所构成的形式系统，称为形式化整环

理论.

形式化域论(formal theory of fields)　满足域公理的形式系统. 设语言 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,0,1\}$ 由整环公理 $\Phi_1-\Phi_{10}$(参见"形式化交换环论")加上公理 $\Phi_{11}:\forall x(x\not\equiv 0\rightarrow\exists y(y\cdot x=1))$ (关于 · 存在逆元)作为出发点所构成的形式系统,称为形式化域论.

形式化数论(formal number theory)　亦称佩亚诺算术. 满足佩亚诺算术公理的形式化系统. 设 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$,其中+,·是二元函数符号,$s$ 为一元函数符号,0 为常元符号. 形式化数论是以下列的非逻辑公理(有无限多条)为出发点所构成的形式系统:

$\Phi_1:\forall x(0\not\equiv Sx)$ (0 没有前驱元);

$\Phi_2:\forall x\forall y(Sx\equiv Sy\rightarrow x=y)$ (s 是一对一的);

$\Phi_3:\forall x(x+0\equiv x)$;

$\Phi_4:\forall x\forall y(x+Sy\equiv S(x+y))$;

$\Phi_5:\forall x(x\cdot 0\equiv 0)$;

$\Phi_6:\forall x\forall y(x\cdot Sy\equiv x\cdot y+x)$.

另外,对 $\mathscr{L}$ 的每个公式 $\varphi(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有下列公理:

$$\Phi_{7\varphi}:\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_n((\varphi(0,x_1,x_2,\cdots,x_n)\wedge\forall x_0(\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)\rightarrow\varphi(Sx_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)))\rightarrow\forall x_0(\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)).$$

由于 φ 有无限多个,所以 $\Phi_{7\varphi}$ 是无限多条公理.

佩亚诺算术(Peano arithmetic)　即"形式化数论".

见证(witnesses)　模型论的基本概念之一. 即满足条件的常量集. 设 T 是语言 $\mathscr{L}$ 中的一个理论, C 是 $\mathscr{L}$ 中的一集常元符号,如果 C 适合下列条件,则称 C 为 T 在 $\mathscr{L}$ 中的一集见证. 条件是:对于 $\mathscr{L}$ 中每个只含一个自由变元 x 的公式 $\varphi(x)$,都存在 $c\in C$(c 与 $\varphi(x)$ 有关),能使

$$T\vdash(\exists x)\varphi(x)\rightarrow\varphi(c),$$

其中 $\varphi(c)$ 为在 $\varphi(x)$ 中将每个自由出现的 x 都换为 c 所得的语句.

图象(diagram)　刻画一个模型基本性质的句子集. 设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型. 对每一 $a\in A$(A 为 $\mathscr{U}$ 的论域),在 $\mathscr{L}$ 中都加入一个新常元符号 C_a,得到 $\mathscr{L}$ 的一个膨胀语言 $\mathscr{L}_A=\mathscr{L}\cup\{C_a:a\in A\}$,如果把每个新常元符号 C_a 用 a 去解释,则可以把 $\mathscr{U}$ 膨胀为 $\mathscr{L}_A$ 的一个模型,记为 $\mathscr{U}_A$ 或 $(\mathscr{U},a)_{a\in A}$. 令 $P_{\mathscr{U}}$ 为 $\mathscr{L}_A$ 中一切在 $\mathscr{U}_A$ 中成立的原子语句所成的集合, $N_{\mathscr{U}}$ 为 $\mathscr{L}_A$ 中一切在 $\mathscr{U}_A$ 中成立的原子语句的否定所成的集合,则称 $P_{\mathscr{U}}$ 为($\mathscr{L}$ 的)模型 $\mathscr{U}$ 的正图象,即 $P_{\mathscr{U}}=\{\sigma:(\mathscr{U},a)_{a\in A}\vDash\sigma,\sigma$ 为 $\mathscr{L}_A$ 的原子语句$\}$. 称 $\Delta_{\mathscr{U}}=P_{\mathscr{U}}\cup N_{\mathscr{U}}$ 为 $\mathscr{U}$ 的图象,即 $\Delta_{\mathscr{U}}=\{\sigma:(\mathscr{U},a)_{a\in A}\vDash\sigma,\sigma$ 为 $\mathscr{L}$ 的原子语句或原子语句的否定$\}$. 正图象也可记为 $\Delta_{\mathscr{U}}^+$. 模型的正图象是代数结构的运算表. 关系表在形式语言中的反映和推广,并起着类似地作用. 而图象则是进一步从反面补充列出那些不成立的等式或关系,因而能更清楚地刻画一个模型. 例如,语言 $\mathscr{L}=\{+,c_0\}$,模型 $\mathscr{U}=\langle Z_3,+,\bar{0}\rangle$,其中 Z_3 是整数模 3 的剩余类的集合, $Z_3=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$. 将语言膨胀为语言 $\mathscr{L}_A=\{+,c_0,c_1,c_2\}$, $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 膨胀为 $\mathscr{L}_A$ 的模型 $\mathscr{U}_A=\langle z_3,+,\bar{0},\bar{1},\bar{2}\rangle$, $\mathscr{U}$ 的图象可由下列原子语句及原子语句的否定给出. 即

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathscr{U}}=\\
\{&c_0+c_0=c_0,\quad \neg(c_0+c_0=c_1),\quad \neg(c_0+c_0=c_2),\\
&c_0+c_1=c_1,\quad \neg(c_0+c_1=c_2),\quad \neg(c_0+c_1=c_0),\\
&c_0+c_2=c_2,\quad \neg(c_0+c_2=c_0),\quad \neg(c_0+c_2=c_1),\\
&c_1+c_0=c_1,\quad \neg(c_1+c_0=c_2),\quad \neg(c_1+c_0=c_0),\\
&c_1+c_1=c_2,\quad \neg(c_1+c_1=c_0),\quad \neg(c_1+c_1=c_1),\\
&c_1+c_2=c_0,\quad \neg(c_1+c_2=c_1),\quad \neg(c_1+c_2=c_2),\\
&c_2+c_0=c_2,\quad \neg(c_2+c_0=c_0),\quad \neg(c_2+c_0=c_1),\\
&c_2+c_1=c_0,\quad \neg(c_2+c_1=c_1),\quad \neg(c_2+c_1=c_2),\\
&c_2+c_2=c_1,\quad \neg(c_2+c_2=c_2),\quad \neg(c_2+c_2=c_0)\}.\end{aligned}$$

正图象(positive diagram)　见"图象".

初等图象(elementary diagram)　完全刻画一个模型的句子集. 设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型, $\mathscr{L}$ 的膨胀语言 $\mathscr{L}_A=\mathscr{L}\cup\{C_a:a\in A\}$, $\mathscr{U}$ 的膨胀模型为 $\mathscr{U}_A=(\mathscr{U},a)_{a\in A}$,令 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_A)$ 为 $\mathscr{L}_A$ 中一切在 $\mathscr{U}_A$ 中成立的语句所构成的集合,称 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_A)$ 为($\mathscr{L}$ 的)模型 $\mathscr{U}$ 的初等图象,也可记为 $\Gamma_{\mathscr{U}}$. 即

$$\Gamma_{\mathscr{U}}=\{\sigma:\sigma\text{ 是 }\mathscr{L}_A\text{ 中的语句,并且}(\mathscr{U},a)_{a\in A}\vDash\sigma\}.$$

实现(realize)　模型论的基本概念之一. 指公式集在模型中被满足. 设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型, $\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的公式集合,其中自由变元都在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中,如果存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$,使对每一 $\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,都有

$$\mathscr{U}\vDash\sigma[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

(也可记为 $\mathscr{U}\vDash\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)[a_1,a_2,\cdots,a_n]$),则称 Σ 在 $\mathscr{U}$ 中可满足,或称 $\mathscr{U}$ 实现 Σ,记为

$$\mathscr{U}\vDash[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

否则称 $\mathscr{U}$ 省略 Σ.

省略(omit)　见"实现".

非标准算术模型(nonstandard model of peano arithmetic)　佩亚诺算术理论的一种模型. 指与自然数模型 N 初等等价,但不同构的模型. 设 T 是语言 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$ 上的佩亚诺算术理论,令 $\Sigma(x)=\{0\not\equiv x,S0\not\equiv x,SS0\not\equiv x,\cdots\}$,设 $\mathscr{U}$ 是 T 的一个模型,其论域为 A. 如果 A 的元素 a 能适合

$$\mathscr{U}\vDash\Sigma[a],$$

则称 a 为 $\mathscr{U}$ 的非标准元素. 当 A 中存在非标准元素时,称 $\mathscr{U}$ 为 T 的非标准模型,或称 $\mathscr{U}$ 为非标准

算术模型. 否则称 $\mathscr{U}$ 为 T 的标准模型.

协调公式集(consistent set of formulas)　一种可实现的公式集. 指不互相矛盾,能被实现的公式集. 设 $\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式集合. 其中自由变元都在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中. 如果存在 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 能实现 Σ,则称 Σ 为协调的公式集.

型(type)　一种协调公式集. 指极大协调的公式集. 设 $\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式集合. 如果 $\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是极大的协调公式集(即不能对 Σ 增添 $\mathscr{L}$ 中新的只含自由变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使 $\Sigma\cup\{\varphi\}$ 仍为和谐的公式集),则称 $\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一个完全型,简称型(有时,不具有极大性的协调公式集 $\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为型).

Σ 与 T 协调(Σ id consistent with T)　模型论的基本概念之一. 指存在模型既满足 T 又实现公式集 Σ. 设 T 是 $\mathscr{L}$ 中的一个理论. $\Sigma=\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的公式集,如果 T 有一个模型 $\mathscr{U}$ 实现 Σ,则称 Σ 是与 T 协调的. 判断 Σ 与 T 的协调性,有下列三个常用的等价条件:

1. T 有模型能实现 Σ.

2. Σ 的每个有限子集都能在 T 的一个模型中实现.

3. $T\cup\{(\exists x_1,x_2,\cdots,x_n)(\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\cdots\wedge\sigma_n):n<\omega;\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\in\Sigma\}$ 协调.

局部实现(locally realize)　公式集的一种相对协调性. 设 T 是 $\mathscr{L}$ 中的理论,$\Sigma=\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的公式集,$\varphi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式. 如果 $\{\varphi\}$ 与 T 协调,并且对每一 $\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,都有 $T\vDash(\forall x_1,x_2,\cdots,x_n)(\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n))$. 则称 T 局部实现 Σ. 就是说,在 T 的一个模型 $\mathscr{U}$ 中,每个满足 φ 的 n 元组 $a_1,a_2\cdots,a_n\in A$ 都实现 Σ. 如果 T 不局部实现 Σ,则称 T 局部省略 Σ. 也就说,对于每个与 T 协调的公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,都存在一个公式 $\sigma\in\Sigma$ 能使得 $\varphi\wedge\neg\sigma$ 与 T 协调.

局部省略(locally omit)　见"局部实现".

省略型定理(omitting types theorem)　构造可数模型的一个重要定理. 对于 $\mathscr{L}$ 上的完全理论 T,设 $\Sigma=\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathscr{L}$ 中的公式集合,首先给出:若 T 有一模型省略 Σ,则 T 局部省略 Σ. 对可数语言的任一协调理论,上述命题的逆也成立. 下面给出模型论中的重要定理. 省略型定理:设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 中的协调理论,$\Sigma=\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathscr{L}$ 中的公式集合,如果 T 局部省略 Σ,则 T 有一可数模型省略 Σ.

还有广义省略型定理:设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 中的协调理论,$\Sigma_r(x_1,x_2,\cdots,x_{n_r})$ 是 $\mathscr{L}$ 上的公式集合($r=1,2,3,\cdots$). 如果 T 局部省略每一 Σ_r,则 T 有一可数模型 $\mathscr{U}$ 省略每一 Σ_r.

广义省略型定理(general omitting type theorem)　见"省略型定理".

ω 模型(ω-model)　适合 ω 规则的模型. 设 $\mathscr{U}$ 为语言 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$ 的一个模型. 采用如下缩写:$1=S0,2=SS0,3=SSS0,\cdots$ 对语言中这些符号的解释也采用同样的记法. 如果 $\mathscr{U}$ 的定义域为 $A=\{0,1,2,\cdots\}$(也即,$\mathscr{U}$ 省略公式集合 $\Sigma(x)=\{x\neq0,x\neq1,x\neq2,\cdots\}$),则称 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{L}$ 的 ω 模型.

ω 协调(ω-consistent)　ω 逻辑的不矛盾性. 设 T 为 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$ 中的理论,如果在 $\mathscr{L}$ 中不存在公式 $\varphi(x)$,使得 $T\vDash\varphi(0),T\vDash\varphi(1),T\vDash\varphi(2),\cdots$,并且 $T\vDash\exists x(\neg\varphi(x))$. 则称 T 是 ω 协调的.

ω 完全(ω-complete)　ω 逻辑理论的一种性质. 设 T 为 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$ 中的理论,如果对 $\mathscr{L}$ 中每个公式 $\varphi(x)$,都有:若 $T\vDash\varphi(0),T\vDash\varphi(1),T\vDash\varphi(2),\cdots$,则 $T\vDash\forall x\varphi(x)$. 这时称 T 是 ω 完全的.

ω 规则(ω-rule)　ω 逻辑的一种推演规则. 设 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$. 下列的推演规则称为 ω 规则:对 $\mathscr{L}$ 中任何公式 $\varphi(x)$,都可由 $\varphi(0),\varphi(1),\varphi(2),\cdots$,推出 $\forall x\varphi(x)$.

ω 逻辑(ω-logic)　一种模型论逻辑. 指满足自然数理论的一种逻辑. 设 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$. 由 $\mathscr{L}$ 中的一阶逻辑公理和推理规则加上 ω 规则,并允许无限长的证明,这样构成的逻辑称为 ω 逻辑.

初等扩张(elementary extension)　模型之间的一种关系. 设 $\mathscr{U},\mathscr{B}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型,如果:

1. 模型 $\mathscr{B}$ 是模型 $\mathscr{U}$ 的扩张,即 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$;

2. 对 $\mathscr{L}$ 中的任意公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(其自由变元都在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中)及 A 中任意 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$,都有 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$,当且仅当

$$\mathscr{B}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n];$$

则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的初等扩张. 这时也称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{B}$ 的初等子模型,记为 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$(或 $\mathscr{B}\succ\mathscr{U}$). 与此等价的命题有:$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的初等扩张,当且仅当 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$,且 $(\mathscr{U}a)_{a\in A}\equiv(\mathscr{B},a)_{a\in A}$.

初等嵌入(elementary embedding)　模型之间的一种映射. 设 $\mathscr{U},\mathscr{B}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型,如果存在一个映射 $h:A\rightarrow B$,对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和对任意的 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 有 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$,当且仅当 $\mathscr{B}\vDash\varphi[ha_1,ha_2,\cdots,ha_n]$,则称映射 h 是从 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的初等嵌入. 并称 $\mathscr{U}$ 能初等嵌入 $\mathscr{B}$ 中. 这也就是说,$\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{B}$ 的一个初等子模型同构,即 $\mathscr{U}\cong h(\mathscr{U})\prec\mathscr{B}$.

正出现(positive occurrence) 符号公式出现的一种形式.考虑语言 $\mathscr{L}$ 中至多由 5 种联结词$\neg$, $\vee,\wedge,\forall,\exists$构成的公式.设 φ 是一个如上的语句,s 是 $\mathscr{L}$ 的一个符号,如果 s 在 φ 中有一出现是在偶数个否定号的辖域内,则称 s 在 φ 中正出现.如果 s 在 φ 中有一出现是在奇数个否定号的辖域内,则称 s 在 φ 中负出现.s 在 φ 中可以既有正出现,也有负出现.

负出现(negative occurrence) 见"正出现".

内插定理(interpolation theorem) 模型论的基本定理之一.这里给出两个内插定理:一个是克雷格(Craig)内插定理:设 φ,ψ 是语言 $\mathscr{L}$ 中的语句,使得 $\varphi\models\psi$,则存在一个语句 θ 能使:

1. $\varphi\models\theta$ 且 $\theta\models\psi$.

2. 在 θ 中出现的每一关系符号(等号除外),函数符号及常元符号都即在 φ 中出现,也在 ψ 中出现.

另一个是林顿(Lyndon)内插定理:设语言 $\mathscr{L}$ 不含函数符号或常元符号.如果 $\mathscr{L}$ 中的语句 φ,ψ 使得 $\varphi\models\psi$,则存在 $\mathscr{L}$ 中语句 θ 适合:

1. $\varphi\models\theta$ 且 $\theta\models\psi$.

2. 每个在 θ 中正出现的关系符号,也在 φ 及 ψ 中正出现.每个在 θ 中负出现的关系符号,也在 φ 及 ψ 中负出现.

克雷格内插定理(Craig interpolation theorem) 见"内插定理".

林顿内插定理(Lyndon interpolation theorem) 见"内插定理".

模型完全(model complete) 理论的一种模型论性质.当 $\mathscr{L}$ 的一个理论 T 适合下列条件时,称为模型完全的:对 T 的任何模型 $\mathscr{U},\mathscr{B}$,如果 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$,则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$.形式理论的完全性和模型完全性是两个不同的概念.不能由一个推出另一个.例如,有首元和末元的稠密线性序理论是完全的,但不是模型完全的.而代数闭域理论是模型完全的,但不是完全理论.

勒文海姆-斯科朗-塔尔斯基定理(Löwenheim-Skolem-Tarski theorem) 简称 LST 定理.模型论的基本定理之一.它有下列几种形式:

1. 上升 LST 定理.设 T 为语言 $\mathscr{L}$ 的理论.如果 T 有无限模型 $\mathscr{U}$,则对于任何基数 $\alpha\geqslant\|\mathscr{L}\|$,$T$ 都有基数为 α 的模型.

2. 下降 LST 定理.设 T 为语言 $\mathscr{L}$ 的理论.如果 T 有基数为 $\alpha\geqslant\|\mathscr{L}\|$ 的模型,则对于任何基数 β 之适合 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\|\mathscr{L}\|$ 者,T 都有基数为 β 的模型.

3. 加强的上升 LST 定理.设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的无限模型,其基数 $\alpha\geqslant\|\mathscr{L}\|$,则对于任何基数 $\beta\geqslant\alpha$,都存在基数为 β 的模型 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的初等扩张.

4. 加强的下降 LST 定理.设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的无限模型,其基数 α 适合 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\|\mathscr{L}\|$.则 $\mathscr{U}$ 是有基数为 β 的初等子模型,并且对 A 的任何基数不超过 β 的子集 X,$\mathscr{U}$ 都具有基数为 β 的初等子模型 $\mathscr{B}$ 能使 $X\subseteq B$.

素模型(prime model) 一种特殊的模型.设 $\mathscr{U}$ 为可数语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型,如果 $\mathscr{U}$ 能初等嵌入 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$的每一模型中,则称 $\mathscr{U}$ 为一素模型.

完全公式(complete formula) 亦称孤立公式.能确定一个型的公式.设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 中的完全理论,$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 的公式.如果对 $\mathscr{L}$ 中的每个公式 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,在 $T\models(\forall x_1,x_2,\cdots,x_n)(\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 及 $T\models(\forall x_1,x_2,\cdots,x_n)(\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow\neg\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n))$中都恰有一条成立.则称 φ 为对 T 完全的.简称 φ 为完全公式.

可完全化公式(completable formula) 与某个完全公式协调的公式.设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 中的完全理论,$\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中的公式.如果存在一个对 T 完全的公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,能有

$$T\models(\forall x_1,x_2,\cdots,x_n)(\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)),$$

则称 θ 为对 T 可完全化的.简称 θ 是可完全化公式.

原子模型(atomic model) 一种形式语言模型.设 $\mathscr{U}$ 是可数语言 $\mathscr{L}$ 的模型,如果 $\mathscr{U}$ 中每一 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都满足 $\mathscr{L}$ 中一个对 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$完全的公式 $\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)(n=1,2,3,\cdots)$,则称 $\mathscr{U}$ 为一原子模型.

原子理论(atomic theory) 具有原子模型的理论.设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 中的完全理论,如果 $\mathscr{L}$ 中每一与 T 协调的公式都是对 T 可完全化的,则称 T 为原子理论.

饱和模型(saturated model) 一种形式语言模型.设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型,如果对于 A 的每一个有限子集 Y.$\mathscr{L}_Y=\mathscr{L}\cup\{C_a:a\in Y\}$中每一个与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}r)$ 协调的公式集 $\Gamma(x)$都能在 $\mathscr{U}_Y$ 中实现,则称 $\mathscr{U}$ 为 ω 饱和的.如果 $\mathscr{U}$ 为可数且为 ω 饱和的,则称 $\mathscr{U}$ 为可数饱和的.设 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{L}$ 的模型,α 为一基数,对 $\mathscr{U}$ 中 A 的每个集合 $X\subseteq A$,$|X|<\alpha$,$\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}_X=\mathscr{L}\cup\{C_a:a\in X\}$中的膨胀 $\mathscr{U}_X=(\mathscr{U},a)_{a\in X}$能实现 $\mathscr{L}_X$ 中每一个与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}x)$协调的型 $\Sigma(x)$,则称 $\mathscr{U}$ 为 α 饱和的.如果 $\mathscr{U}$ 是$|A|$饱和的,则称 $\mathscr{U}$ 为饱和模型.

可数饱和模型(denumerable saturated model) 见"饱和模型".

齐次模型(homogeneous model) 一种形式语言模型.对 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 中 A 的任意两个有限序列 $a_1,\cdots,a_n,a_{n+1}$和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,如果

$$(\mathscr{U},a_1,a_2,\cdots,a_n)\equiv(\mathscr{U},b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

则存在一个 $b_{n+1}\in A$，能使

$$(\mathscr{U},a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1})\equiv(\mathscr{U},b_1,b_2,\cdots,b_n,b_{n+1}),$$

这时称模型 $\mathscr{U}$ 为 ω 齐次的. 如果 $\mathscr{U}$ 是可数的且 ω 齐次的. 则称模型 $\mathscr{U}$ 是可数齐次的. 一般地，对 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 和对每一序数 $\zeta<\alpha$（α 是一个无限基数）及任何 $a\in{}^{\zeta}A,b\in{}^{\zeta}B$ 及 $c\in A$，如果

$$(\mathscr{U},a_\eta)_{\eta<\zeta}\equiv(\mathscr{U},b_\eta)_{\eta<\zeta},$$

则存在 $d\in A$，使得

$$(\mathscr{U},a_\eta,c)_{\eta<\zeta}\equiv(\mathscr{U},b_\eta,d)_{\eta<\zeta},$$

这时称模型 $\mathscr{U}$ 是 α 齐次的. 如果 $\mathscr{U}$ 是 $|A|$ 齐次的，则称模型 $\mathscr{U}$ 是齐次的.

可数齐次模型（denumerable homogeneous model） 见“齐次模型”.

范畴性（categoricity） 理论的某个基数的模型都同构的一种特性. 设 $\mathscr{L}$ 为一可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 中的完全理论. 如果 T 恰有一个可数模型（在同构意义下），则称 T 为 ω 范畴的. 下列条件是等价的：

1. T 是 ω 范畴的.
2. T 有一模型 $\mathscr{U}$，它既是可数饱和模型，又是可数素模型.
3. 对每一正整数 n，$\mathscr{L}$ 中每一个与 T 协调的型 $\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中都含有对 T 完全的公式.
4. 对每一正整数 n，$\mathscr{L}$ 中只有有限多个与 T 协调的型 $\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.
5. 对每一正整数 n，在 T 下只有有限多个互不等价的公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.
6. T 的每一模型都是原子模型.

设有语言 $\mathscr{L}$ 的理论 T，如果某个基数 α 的所有模型都是同构的，则称该理论为 α 范畴的. 如果一个理论 T 的所有模型都是同构的，则称该理论为范畴的. 从范畴性的角度讨论，存在四类理论：

1. 对每个无限基数都是范畴的.
2. ω 范畴而对任意不可数基数 k，非 k 范畴.
3. 对每一不可数基数范畴而非 ω 范畴.
4. 对每个无限基数都不是范畴的.

如果 T 是一个范畴理论，则 T 只可能有有限模型，范畴理论必为完全理论.

模型链（chain of models） 一种特殊序列. 指模型的递增序列. 即 $\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{U}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{U}_\beta\subseteq\cdots$ $(\beta<\alpha)$ 称为一个模型链. 模型链的长度为序数 α. 模型链的并

$$\mathscr{U}=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$$

的定义如下：

1. $\mathscr{U}$ 的论域是集合 $A=\bigcup_{\beta<\alpha}A_\beta$.
2. $\mathscr{U}$ 的每个关系 r 是 $\mathscr{U}_\beta$ 的对应关系 r_β 的并
$$r=\bigcup_{\beta<\alpha}r_\beta.$$
3. $\mathscr{U}$ 的每个函数 f 是 $\mathscr{U}_\beta$ 的对应函数 f_β 的并
$$f=\bigcup_{\beta<\alpha}f_\beta.$$
4. $\mathscr{U}$ 的常元与 $\mathscr{U}_\beta$ 的常元相同.

模型链的并（union of chains of models） 见“模型链”.

T 扩张（T-extension） 理论 T 的模型之间的一种关系. 若 $\mathscr{U},\mathscr{B}$ 都是理论 T 的模型，并且 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个 T 扩张.

代数封闭模型（algebraically closed model） 一种类似于代数闭域的模型. 设 $\mathscr{U}$ 是理论 T 的模型，如果对 $\mathscr{U}$ 的每一个 T 扩张 $\mathscr{B}$，一切在 $\mathscr{B}_A$ 中成立的存在语句也都在 $\mathscr{U}_A$ 中成立，则称 $\mathscr{U}$ 为代数封闭模型.

Σ_n^0 公式（Σ_n^0-formulas） 一类基本公式. 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，φ 是 Σ_0^0 公式，当且仅当 φ 是无量词公式. φ 是 Σ_1^0 公式，当且仅当 φ 为 $(\exists x_1,x_2,\cdots,x_m)\psi$ 形状，ψ 是无量词公式. 例如，存在命题是 Σ_1^0 命题. φ 是 Σ_2^0 公式，当且仅当 φ 为 $(\exists x_1,x_2,\cdots,x_m)(\forall y_1,y_2,\cdots,y_n)\psi$ 形状，其中 ψ 是无量词公式. 例如，存在全称命题是 Σ_2^0 命题. 一般地，φ 是 Σ_{n+1}^0 公式，当且仅当 φ 为 $(\exists x_1,x_2,\cdots,x_m)\psi$ 形状，其中 ψ 是 Π_n^0 公式 .

Π_n^0 公式（Π_n^0-formulas） 一类基本公式. 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，φ 是 Σ_0^0 公式，当且仅当 φ 是无量词公式. φ 是 Π_1^0 公式 ，当且仅当 φ 为 $(\forall x_1,x_2,\cdots,x_m)\psi$ 形状，其中 φ 是无量词公式. 例如，全称命题是 Π_1^0 命题. φ 是 Π_2^0 公式，当且仅当 φ 为 $(\forall x_1,x_2,\cdots,x_m)(\exists y_1,y_2,\cdots,y_n)\psi$ 形状，其中 ψ 是无量词公式. 例如，全称存在命题是 Π_2^0 命题. 一般地，φ 是 Π_{n+1}^0 公式，当且仅当 φ 为 $(\forall x_1,x_2,\cdots,x_m)\psi$ 形状，其中 ψ 是 Σ_n^0 公式.

Σ_n^0 扩张（Σ_n^0-extension） 一种特殊的模型链. 设 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，如果对 $\mathscr{L}$ 中所有 Σ_n^0 公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 和所有 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in A$，都有：若 $\mathscr{U}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_m]$，则 $\mathscr{B}\vDash\varphi[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，这时称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个 Σ_n^0 扩张.

Σ_n^0 模型链（Σ_n^0-chain of models） 一种特殊的模型链. 一个模型链 $\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{U}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{U}_\beta\cdots(\beta<\alpha)$，如果对每个 $\gamma<\beta<\alpha$，$\mathscr{U}_\beta$ 都是 $\mathscr{U}_\gamma$ 的 Σ_n^0 扩充，则称该模型链为 Σ_n^0 模型链.

初等链（elementary chain） 初等扩充模型构成的链. 一个模型链 $\mathscr{U}_0\subseteq\mathscr{U}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{U}_\beta\subseteq\cdots$ $(\beta<\alpha)$，如果对任何 $\gamma<\beta<\alpha$，$\mathscr{U}_\gamma$ 都是 $\mathscr{U}_\beta$ 的初等子模型，则称此模型链为初等链. 可记为

$$\mathscr{U}_0\prec\mathscr{U}_1\prec\cdots\prec\mathscr{U}_\beta\prec\cdots\ (\beta<\alpha).$$

例如，对每个 $n<\omega$，若 $\mathscr{U}_n$ 是一个特征为零 的代数闭域，并且 $\mathscr{U}_{n+1}$ 在 $\mathscr{U}_n$ 上的超越度为 1，则

$$\mathscr{U}_0\subseteq\mathscr{U}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{U}_n\subseteq\cdots\ (n<\omega)$$

是一个初等链.

万有模型(universal model)　一种可数语言模型.设$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的可数模型.如果Th($\mathscr{U}$)的每一可数模型$\mathscr{B}$都能初等嵌入$\mathscr{U}$中,则称$\mathscr{U}$为可数万有的.设$\mathscr{U}$为$\mathscr{L}$的模型,α为一基数.如果Th($\mathscr{U}$)的每一个基数小于α的模型$\mathscr{B}$都能初等嵌入$\mathscr{U}$中,则称$\mathscr{U}$为α万有的.如果$\mathscr{U}$是$|A|$万有的,则称$\mathscr{U}$为万有模型.

可数万有模型(denumerable universal model)见"万有模型".

特殊模型(special model)　一种模型链的并.如果一个模型$\mathscr{U}$是一个初等链

$\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_1 \prec \cdots \prec \mathscr{U}_\beta \prec \cdots \ (\beta < |A|)$

的并,其中β是基数,每一个$\mathscr{U}_\beta$都是β^+饱和的模型,则称$\mathscr{U}$是特殊模型.有限模型是特殊模型,饱和模型也是特殊模型.

对子模型保持(preserved under submodels)　理论的一种模型论性质.如果$\mathscr{L}$中的理论T的任一模型的任一子模型仍为T的模型,即如果$B \vDash T$且$\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$,则$\mathscr{U} \vDash T$,这时称理论$T$为对子模型保持.$\mathscr{L}$中的理论$T$对子模型保持的充分必要条件是:$T$有一集全称语句(也称$\Pi_1^0$语句)公理.

对扩张保持(preserved under extensions)　理论的一种模型论性质.如果$\mathscr{L}$中的理论T的任意模型的任意扩张仍是T的一个模型,即如果$\mathscr{U} \vDash T$且$\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$,则$\mathscr{B} \vDash T$,这时称理论$T$为对扩张保持.$\mathscr{L}$中的理论$T$对扩张保持的充分必要条件是:$T$有一集存在语句($\Sigma_1^0$语句)公理.

对链的并保持(preserved under unions of chains)　理论的一种模型论性质.如果$\mathscr{L}$中的理论T的任何模型链的并仍是T的模型,则称理论T为对链的并保持.$\mathscr{L}$中的理论T对链的并保持的充分必要条件是:T有一集全称存在语句(也称Π_2^0语句)公理.

对同态保持(preserved under homomorphisms)　理论的一种模型论性质.如果$\mathscr{L}$中的理论T的任一模型的任一同态象仍是T的模型.则称理论T为对同态保持.$\mathscr{L}$中协调理论T对同态保持的充分必要条件是:T有一集正语句公理.

集合超积(ultraproduct of sets)　由一个集合族构成的集合.设I为一非空集合,D是I上一个真滤子,$A_i(i \in I)$为一族非空集合.令$C=\{f: f$为I上的函数且对每个$i \in I, f(i) \in A_i\}$为诸A_i的卡氏积.记为

$$C = \prod_{i \in I} Ai,$$

对于C上的任意两个函数f,g,如果$\{i \in I: f(i) = g(i)\} \in D$,则称$f$和$g$是$D$等价的,记为$f =_D g$.容易看出,$=_D$是集合$C$上的一个等价关系.设$f_D$是$f$所在的等价类$f_D = \{g \in C: f =_D g\}$.把关于$=_D$所有等价类的集合称为诸$A_i$的以$D$为模的归约积,记为$\prod_D A_i$.于是

$$\prod_D A_i = \{f_D: f \in \prod_{i \in I} A_i\}.$$

特别地,如果D是I上的一个超滤子,则称归约积$\prod_D A_i$为超积.

集合归约积(reduced product of sets)　见"集合超积".

模型归约积(reduced product of models)　以归约积为论域的一种模型.设I为一非空集合,D是I上一个真滤子,$\mathscr{U}_i(i \in I)$为语言$\mathscr{L}$的一族模型.对每个$i \in I$,以A_i记$\mathscr{U}_i$的论域.诸$\mathscr{U}_i$以D为模的归约积(记为$\prod_D \mathscr{U}_\lambda$)定义如下:

1. $\prod_D \mathscr{U}_i$的论域为$\prod_D A_i$;

2. 设R为$\mathscr{L}$中一个n元关系符号,在$\prod_D A_i$上如下定义一个n元关系r作为对R的解释:$r(f_D^1, f_D^2, \cdots, f_D^n)$,当且仅当$\{i \in I: r_i(f^1(i), f^2(i), \cdots, f^n(i))\} \in D$其中,$r_i$为$\mathscr{U}_i$中对$R$的解释;

3. 设F为$\mathscr{L}$中一个n元函数符号,在$\prod_D A_i$上如下定义一个n元函数h作为对F的解释:$h(f_D^1, f_D^2, \cdots, f_D^n) = g_D$,其中$g(i) = h_i(f^1(i), f^2(i), \cdots, f^n(i))(i \in I)$,$h_i$为$\mathscr{U}_i$中对$F$的解释;

4. 设c为$\mathscr{L}$中的一个常元符号,在$\prod_D A_i$中取下列元素作为对c的解释:g_D:其中$g(i) = a_i$,a_i为$\mathscr{U}_i$中对c的解释.

这样,以$\prod_D A_i$为论域,定义了与$\mathscr{L}$中符号相应的关系、函数及常元,使归约积成为$\mathscr{L}$的一个模型,称为诸模型$\mathscr{U}_i$的以D为模的归纳积.

当D为I上的超滤子时,称归约积$\prod_D \mathscr{U}_i$为超积.如果模型的归约积$\Pi \mathscr{U}_i$中所的$\mathscr{U}_i$都相同,譬如$\mathscr{U}_i = \mathscr{U}(i \in I)$,则称归约积

$$\prod_D \mathscr{U}_i = \prod_D \mathscr{U}$$

为$\mathscr{U}$的以D为模的归约幂.如果D是I上的超滤子,则称归约幂$\prod_D \mathscr{U}$为$\mathscr{U}$以D为模的超幂.

模型超积(ultraproduct of models)　见"模型归约积".

模型超幂(ultrapower of models)　见"模型归约积".

超积基本定理(fundamental theorem of ultraproducts)　超积模型的性质定理.设I是指标集,D是I上的超滤子,$\mathscr{U}_i(i \in I)$是$\mathscr{L}$的模型族,令$\mathscr{B}$为超积$\prod_D \mathscr{U}_i$,其全域为B,则:

1. 对$\mathscr{L}$中的任何公式$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$及任意元素$f_D^1, f_D^2, \cdots, f_D^n \in B$,有$\mathscr{B} \vDash \varphi[f_D^1, f_D^2, \cdots, f_D^n]$,

当且仅当

$$\{i\in I:\mathscr{U}_i\models\varphi[f^1(i),f^2(i),\cdots,f^n(i)]\}\in D.$$

2. 对 $\mathscr{L}$ 的任意语句 σ，$\mathscr{B}\models\sigma$，当且仅当

$$\{i\in I:\mathscr{U}_i\models\sigma\}\in D.$$

初等类(elementary class)　一个理论的模型组成的模型类. 设 K 是语言 $\mathscr{L}$ 的一族模型(同构的模型只算作一个)，如果存在 $\mathscr{L}$ 中的一个理论 T，使 K 恰由 T 的一切模型组成，则称 K 为一个初等类. 如果存在 $\mathscr{L}$ 中的一个语句 σ，使 K 恰由 σ 的一切模型组成，则称 K 为一个基本初等类

基本初等类(basic elementary class)　见“初等类”.

局部系统(local system)　一个模型的一组特殊的子模型. 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\{\mathscr{U}_i:i\in I\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一组子模型，如果有

$$A=\bigcup_{i\in I}A_i,$$

并对任何 $i,j\in I$，都存在 $k\in I$ 能使 $A_i\cup A_j\in A_k$，则称 $\{\mathscr{U}_i:i\in I\}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个局部系统.

语言的斯科朗膨胀(Skolem expansion of a languages)　一个特殊的膨胀语言. 设 $\mathscr{L}$ 为任一语言. 由 $\mathscr{L}$ 作一个膨胀语言 $\mathscr{L}^*(\supseteq\mathscr{L})$ 如下：对 $\mathscr{L}$ 中每个如下形状的公式

$$\psi=(\exists x)\varphi(x,x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (n\in\omega)$$

写出一个新的 n 元函数符号 F_ψ；令

$$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}\cup\{F_\psi:\psi=(\exists x)\varphi\text{为}\mathscr{L}\text{中公式}\}.$$

称 $\mathscr{L}^*$ 为 $\mathscr{L}$ 的一个斯科朗膨胀(语言). 且

$$\|\mathscr{L}^*\|=\|\mathscr{L}\|.$$

语言的斯科朗理论(Skolem theory of a language)　斯科朗膨胀语言的一种理论. 设 $\mathscr{L}$ 为一语言，作其斯科朗膨胀语言 $\mathscr{L}^*$ 中的理论 $\Sigma_{\mathscr{L}}$ 如下：对 $\mathscr{L}$ 中每个形状为 $(\exists x)\varphi(x,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的公式 ψ，任取一组不在 ψ 中出现的变元 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，作 $\mathscr{L}^*$ 中的语句 σ_ψ 为

$$(\forall y_1,y_2,\cdots,y_n)(\psi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$\rightarrow\varphi(F_\psi(y_1,y_2,\cdots,y_n),y_1,y_2,\cdots,y_n)),$$

令 $\Sigma_{\mathscr{L}}=\{\sigma_\psi:\psi=(\exists x)\varphi$ 为 $\mathscr{L}$ 中公式$\}$ 称 $\Sigma_{\mathscr{L}}$ 为 $\mathscr{L}$ 的斯科朗理论. F_ψ 称为斯科朗函数，它一般不在 $\mathscr{L}$ 中出现.

斯科朗函数(Skolem function)　见“语言的斯科朗理论”.

模型的斯科朗膨胀(Skolem expansion of a model)　满足斯科朗理论的膨胀模型. 设 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{L}$ 的任一模型，$\mathscr{U}^*$ 为 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}$ 的斯科朗膨胀语言 $\mathscr{L}^*$ 中的一个膨胀. 如果有 $\mathscr{U}^*\models\Sigma_{\mathscr{L}}$，其中 $\Sigma_{\mathscr{L}}$ 为 $\mathscr{L}$ 的斯科朗理论，则称 $\mathscr{U}^*$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个斯科朗膨胀(模型).

理论的斯科朗膨胀(Skolem expansion of a theory)　理论和斯科朗理论的并. 设 T 为 $\mathscr{L}$ 中任一理论. 令 $T^*=T\cup\Sigma_{\mathscr{L}}$，其中 $\Sigma_{\mathscr{L}}$ 为 $\mathscr{L}$ 的斯科朗理论. 称 T^* 为 T 的斯科朗膨胀(理论).

内在的斯科朗函数(built-in Skolem functions)　语言中自身可定义的斯科朗函数. 设 T 为 $\mathscr{L}$ 中的理论. 如果对 $\mathscr{L}$ 中每一形状为 $(\exists x)\varphi(x,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的公式 ψ，都存在 $\mathscr{L}$ 中一个项 $t_\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，能使

$$T\vdash(\forall y_1,y_2,\cdots,y_n)(\psi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$\rightarrow\varphi(t_\psi(y_1,y_2,\cdots,y_n),y_1,y_2,\cdots,y_n))$$

(其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 不在 ψ 及 $t_\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中出现)，则称 T 有内在的斯科朗函数.

斯科朗闭包(Skolem closure)　模型论域的一种封闭子集. 设 $\mathscr{U}^*$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个斯科朗膨胀. 并设 $X\subseteq A$，X 在 $\mathscr{U}^*$ 中生成一个子模型 $\mathscr{S}(X)^0$，它在 $\mathscr{L}$ 中的归约 $\mathscr{S}(X)$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个子模型，其论域 $H(X)$ 称为 X 在 $\mathscr{U}^*$ 中的斯科朗闭包.

不可辨元(indiscernible elements)　论域中不能用一阶公式区分的子集. 设 $\mathscr{U}$ 为语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型，X 是其论域 A 的一个子集，在 X 上有一个顺序关系 $<$ 使 X 成为有序集(全序集)，但 $<$ 未必是 $\mathscr{U}$ 中的关系. 如果对 X 的任何两个同长度的有限子序列 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 及 $y_1<y_2<\cdots<y_n$，都有

$$(\mathscr{U},x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv(\mathscr{U},y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

(此式两端都看做一个膨胀语言 $\mathscr{L}\cup\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 的模型)，则称 X 是 $\mathscr{U}$ 中一集(对于 $<$ 而言的)不可辨元.

模型论力迫(model theoretic forcing)　借鉴于力迫法而得到的一类构作模型的方法. 这里只介绍其中较简单的有限力迫的概念. 设语言 $\mathscr{L}$ 可数语言. T 为为 $\mathscr{L}$ 中的协调理论，令 $\mathscr{L}_c=\mathscr{L}\cup C$，其中 C 为一可数无限的新常元集. 设 S 是由 $\mathscr{L}_C$ 中有限原子语句或原子语句的否定所成的集合，如果 $T\cup S$ 协调. 则称 S 是一个 T 条件(注意：空集是 T 条件). 设 P 是一个 T 条件，对于 $\mathscr{L}_C$ 中的语句 φ，按其结构如下归纳地定义概念“P 力迫 φ”，记为 $P\vdash\varphi$(或必要时记为 $P\vdash_T\varphi$)：

1. 若 φ 为原子语句，则 $P\Vdash\varphi$，当且仅当 $\varphi\in P$.

2. $P\Vdash\neg\varphi$，当且仅当不存在 T 条件 $q\supseteq p$，使 $q\Vdash\varphi$.

3. $P\Vdash(\varphi\vee\psi)$，当且仅当“$P\models\varphi$ 或 $P\models\psi$”.

4. $P\Vdash(\exists x)\varphi(x)$，当且仅当存在 $c\in C$，使 $P\Vdash\varphi(c)$.

T 脱殊集(T-generic set)　一种特别的力迫条件集. 在模型论力迫中，设 G 是由 $\mathscr{L}_C$ 中一些原子语句或原子语句的否定组成的集合. 当适合下列两条件时，称为一个 T 脱殊集(也称 T 兼纳集)：

1. G 的每一有限子集都是一个 T 条件.

2. 对 $\mathscr{L}_C$ 中每语句 φ,都存在一个 T 条件

$$p\subseteq G,使 p\Vdash\varphi 或 p\Vdash\neg\varphi.$$

基本霍恩公式(basic Horn formula) 一种简单形式的公式. 如果 $\mathscr{L}$ 的公式 φ 是诸公式 θ_i 的析取,即 $\varphi=\theta_1\vee\theta_2\vee\cdots\vee\theta_n$,其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 中至多有一个原子公式,其余是原子公式的否定,则称公式 φ 为基本霍恩公式. 由基本霍恩公式通过 $\wedge$,$\forall$ 和 $\exists$ 构成的公式称为霍恩公式.

霍恩公式(Horn formula) 见"基本霍恩公式".

归约积语句(reduced product sentence) 一种霍恩语句. 指在归约积下保持的语句 φ. φ 是归约积语句,当且仅当 φ 等价于一个霍恩语句.

归约幂语句(reduced power sentence) 一种霍恩语句. 指在归约幂下保持的语句. φ 为归约幂语句,当且仅当只在 φ 等价于若干霍恩语句的析取.

有限直积语句(finite direct product sentence) 一种全称霍恩语句. 指在有限直积下保持的语句. 设 φ 是一个全称语句,则 φ 是一个(有限)直积语句,当且仅当 φ 等价于一个全称霍恩语句. 设 φ 是一个存在语句,则 φ 是一个(有限)直积语句,当且仅当 φ 等价于一个存在霍恩语句.

α 完全滤子(α-complete filter) 一种保持少于 α 个元素的交的滤子. 设 α 是一个无限基数,D 是 I 上的一个滤子,如果 D 中任意少于 α 个元素的交仍属于 D(即若 $E\subseteq D$,且 $|E|<\alpha$,则 $\bigcap E\in D$),这时称滤子 D 是 α 完全的.

可数不完全滤子(countably incomplete filter) 不保持可数个元素的交的滤子. 设 D 为非空集 I 上的滤子,如果存在一个可数子集 $E\subseteq D$,能使 $\bigcap E\notin D$,则称 D 为可数不完全的.

α 正则滤子(α-regular filter) 一种具有正则性质的滤子. 设 α 是一个基数,D 是非空集 I 的一个真滤子,如果存在一个基数为 α 的集合 $E\subseteq D$,能使对每个 $i\in I$,仅有有限多个 $e\in E$ 含有 i,则称滤子 D 为 α 正则的. I 上的滤子 D 是 ω 正则的,当且仅当 D 中存在一个可数递降链 $I=I_0\supseteq I_1\supseteq\cdots\supseteq I_n\supseteq\cdots$ $(n<\omega)$ 能使

$$\bigcap_n I_n=\varnothing.$$

每个元素(是 I 的子集)都有相同的基数 $|I|$ 的滤子,称为一致滤子.

一致滤子(uniform filter) 见"α 正则滤子".

(α,β) 模型((α,β)-model) 一种双基数模型. 设语言 $\mathscr{L}$ 有一个一元关系符号 U,令 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型,V 是 $\mathscr{U}$ 中对 U 的解释($\mathscr{U}$ 可记为 $\mathscr{U}=\langle A,V,\cdots\rangle$). 设 $|A|=\alpha$, $|V|=\beta$, 称 $\mathscr{U}$ 是一个 (α,β) 模型. 若 T 为 $\mathscr{L}$ 中的理论,如果 T 具有 (α,β) 模型,则称 T 为容许基数对 (α,β).

基斯勒-谢拉赫同构定理(Keisler-Shelah isomorphism theorem) 初等等价模型的代数判定定理. 设 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型,则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 的充分必要条件是:存在一非空足码集 I 及 I 上的超滤子 D,使 $\prod_D\mathscr{U}\cong\prod_D\mathscr{B}$. 该定理把两个模型的"初等等价"的模型论概念转化为其超幂的同构的代数概念,因而有助于模型论问题与代数问题的沟通.

莫利范畴性定理(Morley categoricity theorem) 模型论的基本定理之一. 设 T 为可数语言 $\mathscr{L}$ 中的完全理论. 如果 T 对某一不可数基数 α 是 α 范畴的,则 T 对每一不可数基数 β 都是 β 范畴的. 莫利(Morley,M.)的这一定理及有关研究,开辟模型论中关于形式理论的范畴性及稳定性的新的研究方向. 随后,谢拉赫(Shelah,S.)把这一定理推广到不可数语言的情况. 谢拉赫等人并在稳定性研究方面作了大量工作,深入发展了模型论中的稳定性理论.

证 明 论

证明论(proof theory) 亦称元数学. 数理逻辑的一个分支. 它是以数学中的证明为研究对象的理论. 对证明的研究,在哲学上可以追溯到古希腊哲学家、科学家亚里士多德(Aristotle). 但近代证明论却始于 1900 年德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)在巴黎数学家大会上的讲演,可以说证明论是希尔伯特创立的. 希尔伯特提出能否用有穷方法解决数学系统的协调性(无矛盾性)的问题. 希尔伯特原来设想,从证明公理化算术的协调性开始,然后证明数学分析、集合论等的协调性. 数学当然离不开证明,而证明的正确与否和数学系统的协调性分不开. 因此,证明论实际上以整个数学为研究对象的.

对协调性问题的研究与对欧几里得(Euclid)《几何原本》第五公设的研究分不开. 很多人想用《几何原本》中的其他公设证明第五公设,但大量努力都不成功,结果反而创立了非欧几何——第五公设不成立的几何. 而且后来证明,如果欧几里得几何是协调的,那么非欧几里得几何也是协调的. 当然,这并不能令人完全满意,因为这不过是协调性的转移(这种方法通常称为归约方法,所得到的结果称为相对协调性),并不知道欧几里得几何是否协调,后来又把欧几里得几何的协调性归约到实数理论的协调性,然后再把实数理论的协调性归约到自然数系统的协调性,最后把自然数系统的协调性归约到集合论的协调性. 但是,集合中出现了最大序数及最大基数悖论,特别是发现了罗素悖论,使人们大吃一惊,

原来数学的基础并不牢固．这些矛盾对数学来说是十分严重的．例如，数学证明中常用的反证法，为要证明命题“如果 A，那么 B”，假设结论 B 不成立，由此设法推出前提 A 不成立，这样得出矛盾，从而断言 B 成立．设想，如果这个矛盾是由于数学本身的不协调所引起的，而不是由于 B 不成立所引起的，那么问题就严重了，反证法就不能使用了，整个数学就将失去一个强有力的证明方法．所以，希望直接证明数学系统的协调性，而不仅是相对协调性．1931年，美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)证明了不完全性定理(参见“哥德尔不完全性定理”)，这是证明论迄今为止的最重要成果．哥德尔第一不完全性定理表明，当一个形式语言有充分的表达能力(至少可以表达形式算术)时，总有该语言中的一个句子存在，使得这个句子在这个理论中既不能被否定，也不能被证明．哥德尔第二不完全定理还表明，一个形式系统的协调性是不能在这个系统内证明的．这就否定了希尔伯特关于证明论的主要设想，但却加深了对公理化方法的认识——任何一个形式系统都不是万能的．同时也促进了递归论的发展．有穷方法行不通，就要放宽条件，有限制地承认实无穷的存在，1935年，根岑(Gentzen，G.)用超穷归纳法证明了初等数论系统的协调性．后来竹内外史于1967年证明了分析的一个子系统的协调性．起初证明论只侧重于系统协调性的研究，这个限制显然是不必要的．

20世纪60年代开始了关于证明的结构和复杂度的研究，并得到了不少结果，这些结果与计算复杂性相结合，有可能在计算机科学中得到应用．在数理逻辑的研究中，有些人主张增加公理的数量，减少推演法则的数量，因而更多地使用分离规则．对于证明论学者来说，这是不方便的，认为这样势必会出现由复杂到简单的证明．这就导致了增加推演法则的数量，从而得到了很多切割定理在其中成立的形式系统．构造主义逻辑主张自然数及其某些规律，特别是数学归纳法是最可信的出发点，其他一切数必须能从自然数构造出来，因而证明论学者有的不承认排中律，这是20世纪初由荷兰数学家布劳威尔(Brouwer，L. E. J.)提出的．20世纪40年代以后，发现这方面与某些数学分支有出人意料的联系，如力迫理论．

有限简单类型理论是为克服循环论证带来的矛盾而产生的，从而导致了高阶语言证明论的研究．由于高阶语言的表达能力更强，故可以处理更复杂的问题，如对分析的子系统协调性的证明就使用了高阶语言．另外也有人研究无限语言的证明论，目的也是为了加强语言的表达能力，其研究也得到一些结果．近年来，证明论中关于初等数论中某些不可判定问题的研究引起了人们的注意，有人猜测数论中某些问题可以表示成$\forall nR(n)$的形式，其中 $R(n)$是一个递归谓词，这些问题是不可判定的，并且不能是假的，因而必然是真的．20世纪70年代，英国数学家帕里斯(Paris，J.)发现了初等数论中一个不可判定的纯组合问题．这一发现除给哥德尔不完全定理增加一个实例外，也有可能对人们企图判定其他数论难题给出一个否定性信号，对于它的研究，有可能构成证明论的一个新方向．

元数学(metamathematics)　即“证明论”．

哥德尔第一不完全性定理(Gödel first incompleteness theorem)　数理逻辑的重要定理之一，也是证明论的主要定理．指1931年，美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)证明的下列定理：设 T 是一个包含佩亚诺算术的理论，那么存在一个语句 φ，使得

1. 如果 T 是协调的，那么 $T\nvdash\varphi$.

2. 如果 T 是 ω 协调的，那么 $T\nvdash\neg\varphi$.

事实上如果 T 是 PA(佩亚诺算术)，那么存在一个语句 φ，使得 $T\nvdash\varphi$ 且 $T\nvdash\neg\varphi$. PA 的协调性是由根岑(Gentzen，G.)于1935年证明的．φ是系统 PA 的一个语句，但不可证，而且又是一个真的语句．这说明 PA 是不完全的．这个定理说明直观的算术理论不可能完全形式化，从而，表明形式系统有其固有的局限性．

哥德尔第二不完全性定理(Gödel second incompleteness theorem)　数理逻辑的重要定理之一，也是证明论的主要定理．即美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)证明的不完全性定理：设 T 是一个包含佩亚诺算术的理论，如果 T 是协调的，那么 $T\nvdash Con_T$，其中 Con_T 是一个表示 T 是协调的语句．该定理表明，一个形式系统的协调性是不能在这个系统内部证明的．换句话说，要想证明它的协调性，必须找一个更强的形式系统．德国数学家希尔伯特(Hilbert，D.)原打算用有穷方法证明古典数学的无矛盾性，但后来哥德尔得到了不完全性定理，它表明只用有穷方法不能得到无矛盾性的证明．这对希尔伯特的设想是一个很大的打击，后来只得放宽对证明的要求．

反射原理(reflection principle)　亦称勒伯定理．阐明一个句子可证明性的原理．哥德尔第一不完全性定理断言：对于相当广泛的理论 T，存在一个句子 φ，使得 $T\nvdash\neg\varphi$ 且 $T\nvdash\varphi$. 并且，只要对理论 T 加上一些不强的条件，φ 就是一个真的句子．是什么东西使 φ 断言自己不能在 T 中被证明的呢？这就导致了下面的重要定理——可证明性的反射原理(勒伯定理)：设 φ 是一个句子，T 是一个理论，那么 $T\vdash Pr_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$，当且仅当 $T\vdash\varphi$. 其中$\ulcorner\varphi\urcorner$ 表示 φ 的哥德尔数，$P_{rov_T}(x,y)$表示 x 是 y 的一个证明，$Pr_T(y)$表

示$\exists x P_{rov_T}(x,y)$. 反射原理解决了一个句子根据什么断言自己的可证性的问题. 因此又导致了对下列反射原理的研究：

1. 局部反射原理 $Rf_n: Pr_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\rightarrow\varphi$, φ是句子.

2. 第一一致反射原理 RFN(T)：

$$\forall x Pr_T(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner) \rightarrow \forall x\varphi(x),$$

φ只有自由变元 x.

3. 第二一致反射原理 RFN′(T)：

$$\forall x[Pr_T(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner) \rightarrow \varphi x],$$

φ只有自由变元 x.

其中$\ulcorner\varphi\urcorner$表示$\varphi$的哥德尔数，$x$是数值变元，$\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner=S(\ulcorner\varphi x\urcorner,y)$，$S(x,y)$是适合下列条件的替换函数：如果 φx 仅有自由变元 x，t 是值为 n 的项，那么 $S(\ulcorner\varphi x\urcorner,t)=\ulcorner\varphi\urcorner$ (φ等价于 φn).

反射原理表明每一个可证公式是真的. 利用反射原理，不完全定理可重述为：

第一不完全定理：存在一个真的不可证句子 φ，使得 $T\nvdash Pr_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\rightarrow\varphi$.

第二不完全定理：对任意可驳公式 φ

$$T\nvdash Pr_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi.$$

由于对任意可驳公式 φ,

$$Pr_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi, \neg Pr_T(\ulcorner\varphi\urcorner),$$

Con_T(T 协调)彼此等价，因此，理论 T 的协调性等价于某种形式下的反射原理. 反射理论是与反射原理相关的. 设 T 是一个理论，PC 是 T 的语言上的谓词演算，如果 $T\vdash$RFN(PC)，则称 T 是反射理论. PA(佩亚诺算术)、ZF(集合论)是反射理论.

实质无界定理：设 n 是一个给定的正整数，T 是包含 PA 的理论. U 是 T 的语言的一个递归可枚举理论. 如果 $T\vdash$ RFN(U)，那么不存在 U 的一个协调扩充 $U\cup\Delta$，使得 $\Delta\subseteq\Sigma_n$，并且 $U\cup\Delta$ 可推演出 T 的全部定理. 实质无界定理是由克莱斯勒(Kreisel, G.)证明的，后来法国数学家、工程师莱维(Lévy, A.)又做了改进. 是证明论的一个有用工具.

勒伯定理(Löb's theorem)　见“反射原理”.

实质无界定理(material unbounded theorem)　即“反射原理”.

简单类型论(simple type theory)　谓词分层的形式系统. 它是英国数理逻辑学家罗素(Russell, B. A. W.)提出的. 推理中的循环论证(或称自己证自己)将导致自相矛盾. 为了排除这种错误，罗素提出了类型论. 类型论分为简单类型论和分支类型论两种. 简单类型论是把谓词分为不同的类型，即把谓词分层(或称分阶)，这就导致了对高阶谓词演算的研究：

1. 简单类型论的语言(高阶语言)：

1) 常元：

①个体常元 $c_0,c_1,c_2,\cdots$.

②i 元函数常元：$f_0^i,f_1^i,\cdots(i=1,2,\cdots)$.

③型为 $\tau(\neq0)$的谓词常元：$R_0^\tau,R_1^\tau,R_2^\tau,\cdots$.

2) 变元：

①对每一个型 τ 有相应的自由变元

$$a_0^\tau,a_1^\tau,a_2^\tau,\cdots.$$

②对每一个型 τ 有相应的约束变元

$$x_0^\tau,x_1^\tau,x_2^\tau,\cdots.$$

3) 逻辑符号：$\neg$(非)，$\wedge$(合取)，$\vee$(析取)，$\rightarrow$(蕴涵)，$\forall$(一切)，$\exists$(存在).

4) 辅助符号(,)，[,]，{,}.

2. 简单类型论的项和公式：

1) 个体常元是型为 0 的项.

2) 型为 τ 的自由变元是型为 τ 的项.

3) 如果 f 是 i 元函数常元，$t_1,t_2,\cdots,t_i$ 为型为 0 的项，那么 $f(t_1,t_2,\cdots,t_i)$是型为 0 的项.

4) 型为 τ 的谓词常元是型为 τ 的项.

5) 如果 A 是一个公式，$a_0^{\tau_0},a_1^{\tau_1},\cdots,a_k^{\tau_k}$ 是不同的自由变元，$x_0^{\tau_0},x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}$ 是不同的约束变元，且不在 A 中出现，设 A'是在 A 中同时用 $x_0^{\tau_0},x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}$ 替换 $a_0^{\tau_0},a_1^{\tau_0},\cdots,a_k^{\tau_k}$ 的结果，那么 A'是一个项(也称一个 k 元抽象).

6) 如果 α 是一个型为$[\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k]$的谓词常元或自由变元，$t_1,t_2,\cdots,t_k$ 分别是型为 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k$ 的项. 那么 $\alpha[t_1,t_2,\cdots,t_k]$是一个公式，且称其为原子公式.

7) 如果 A 及 B 是公式，那么$(\neg A)$，$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\supset B)$也是公式.

8) 如果 A 是一个公式，a^τ 是一个自由变元，x^τ 是一个约束变元(与 a^τ 同型，且不出现于 A 中)，A' 是用 x^τ 代替 a^τ 在 A 中的所有出现的结果. 那么 $\forall x^\tau A'$ 及$\exists x^\tau A'$也是公式.

3. 简单类型论的型. 此处的型实际是阶. 简单类型论的型归纳定义为：

1) 0 是一个型.

2) 如果 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k$ 是型，那么$[\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k]$也是一个型. 实际情况是：

①个体常元的型为 0.

②型为 τ 的自由变元的型为 τ.

③如果 f 是一个 n 元函数符号，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是型为 0 的项，则 $f|t_1,t_2,\cdots,t_k|$的型也为 0.

④型为 τ 的谓词符号的型为 τ.

⑤如果 A 是一个公式，$a_0^{\tau_0},a_1^{\tau_1},\cdots,a_k^{\tau_k}$ 是型分别为 $\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_k$ 的自由变元，$x_0^{\tau_0},x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}$ 是型分别为 $\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_k$ 的约束变元，且它们不出现于 A 中. 那么$\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}A[x_0^{\tau_0},x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}]$是型为$[\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_k]$的抽象. 其中 $A[x_0^{\tau_0},x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}]$表示用 $x_0^{\tau_0}$,

$x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}$ 分别替换 A 中 $a_0^{\tau_0},a_1^{\tau_1},\cdots,a_k^{\tau_k}$ 的结果，$\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}A[x_0^{\tau_0},x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}]$表示一个 $k+1$ 抽象.

4. 型的高度. 型 τ 的高度 $h(\tau)$归纳定义为：

1) $h(0)=0$.

2) $h([\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k])$
$=\max\{h(\tau_1),h(\tau_2),\cdots,h(\tau_k)\}+1$.

一个项 t 的高度是指它的型的高度.

5. 简单类型论的结构：

1) 一个简单类型论的结构 φ 是集合的一个 ω 序列，可记为 $\varphi=(s_0,s_1,s_2,\cdots)$：

① s_0 是一个非空集合.

② s_{i+1}是 s_i 的幂集 $P(s_i)$的一个子集.

2) φ 的一个指派 Φ 是如下的一个映射：对每一个型为 i 的元 x(自由的或约束的)，$\Phi(x)\in S_i$，由 φ 和它的一个指派 Φ 构成一个解释 $I=(\varphi,\Phi)$.

3) 给定一个解释，就可以定义半公式及半项的解释(半公式、半项定义见"半公式"、"半项")如下：如果 A 是一个半公式或半项，则用 $\Phi(A)$表示它的解释；如果 A 是一个型为 i 的半项，那么 $\Phi(A)$是 S_i 的一个子集.

按照 A 的复杂性其他公式的解释定义为：

① $\Phi(\alpha[\omega])=T$，当且仅当 $\Phi(\omega)\in\Phi(\alpha)$.

② $\Phi(\forall xA(x))=T$，当且仅当对每指派 Φ'，$\Phi'(A(x))=T$，其中 x 是任意型的变元，Φ'与 Φ 除在 x 处外，是相同的指派.

③ $\Phi(\{x\}A(x))=\{s\mid s\in S_i$ 且

$$\Phi\binom{x}{s}(A(x))=T\Big\},$$

其中 x 的型为 i，

$$\Phi\binom{x}{s}$$

表示把指派 Φ 中对 x 的指派换为 s，$\{x\}A(x)$表示一个抽象(参见"抽象").

④ $\Phi(A\wedge B)$，当且仅当 $\Phi(A)=T$，且 $\Phi(B)=T$.

⑤ $\Phi(\neg A)=T$，当且仅当 $\Phi(A)=F$.

设 $S:A_1,A_2,\cdots,A_m\rightarrow B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是相继式(参见"相继式")，那么 $\Phi(S)=\Phi(\neg(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_m)\vee B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n)$.

6. 亨金结构. 如果对 φ 的每一个指派 Φ 和每一个型为 i 的抽象 U^i(参见"抽象")$(i=1,2,\cdots)$，$\Phi(U^i)\in S_i$，则称结构 φ 为一个亨金结构. 假设 φ 是一个亨金结构，且 Φ 是 φ 的一个指派，如果相继式 p 在系统 S 中可以证明，那么 $\Phi(p)=T$.

抽象(abstract)　类型论的基本概念之一. 设 A 是一个公式，$a_0^{\tau_0},a_1^{\tau_1},\cdots,a_k^{\tau_k}$ 是不同的自由变元，$x_0^{\tau_0}$，$x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}$ 是不同的约束变元，且不出现于 A 中，把 A 中 $a_0^{\tau_0},a_1^{\tau_1},\cdots,a_k^{\tau_k}$ 的诸出现分别用 $x_0^{\tau_0},x_1^{\tau_1},\cdots,x_k^{\tau_k}$ 替换得 A'. 那么称$\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}A'$是一个项，且称此项为 A 的一个抽象.

半项(semi-term)　类型论的基本概念之一. 半项定义为：

1. 个体常元和个体变元(自由的或约束的)是半项.

2. 如果 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是半项，f 是 n 元函数常元，那么 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是半项.

半公式(semi-formula)　类型论的基本概念之一. 半公式定义为：

1. 设 α 是一个型为$[\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k]$的谓词常元或变元(自由或约束)，$t_1,t_2,\cdots,t_k$ 是型分别为 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k$ 的半项，那么 $\alpha[t_1,t_2,\cdots,t_k]$是半公式. $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 中的约束变元自由出现于 $\alpha[t_1,t_2,\cdots,t_k]$中，如果 α 是约束变元，则 α 自由出现于 $\alpha[t_1,t_2,\cdots,t_k]$中.

2. 如果 A,B 是半公式，那么$(\neg A)$，$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\supset B)$是半公式.

约束变元在$(A\wedge B)$中的自由出现是指约束变元在 A 或 B 中的自由出现. 仿此定义约束变元在$(\neg A)$，$(A\vee B)$，$(A\supset B)$中的自由出现.

3. 如果 A 是半公式，a^τ 是自由变元，x^τ 约束变元且不出现于 A 中，A'表示把 A 中 a^τ 皆换为 x^τ，则 $\forall x^\tau A'$ 及$\exists x^\tau A'$为半公式. 约束变元在$\forall x^\tau A'$中的自由出现是指 A 中约束变元的自由出现.

外延半赋值(semi-valuation with extensionality)　一种指派. 对公式的外延半赋值 v 是指满足如下条件的一个指派：

1. 如果$v(\neg A)=T$，那么 $v(A)=F$；如果 $v(\neg A)=F$，那么$v(A)=T$.

2. 如果 $v(A\wedge B)=T$，那么 $v(A)=T$，并且 $v(B)=T$；如果 $v(A\wedge B)=F$，那么 $v(A)=F$ 或 $v(B)=F$.

3. 如果 $v(\forall xA(x))=T$，那么对每一个与 x 同型的项 t，$v(A(t))=T$；如果 $v(\forall xA(x))=F$，那么存在一个与 x 同型的自由变元 a 使得 $v(A(a))=F$.

4. 如果 A 是 B 的一个字母变式(参见"字母变式")，那么 $v(A)=v(B)$.

5. 设 α 是一个型>1的自由变元，如果 $v(\alpha(U_1))=T$，并且 $v(\alpha[U_2])=F$，那么存在一个适当型的自由变元 a，使得 $v(U_1[a])=T$，并且 $v(U_2[a])=F$，或者 $v(U_1[a])=F$，并且 $v(U_2[a])=T$. 其中 U_1,U_2 是抽象(参见"抽象").

字母变式(alphabetical variant)　表达式的字母代换式. 设 A,B 是两个表示式(语言的符号的有

限串). 如果 A 与 B 的差别仅仅是某些约束变元的不同,即如果一个非约束变元符号 x 出现于 A 中,那么 x 也必出现于 B 中,并且 x 在 B 中出现的次数及位置与在 A 中的出现情况相同. 则 A,B 互称字母变式.

外延公理(axiom of extensionality)　证明论的重要公理之一. 即指下列形式的公式:

$$\forall x(V_1(x)=V_2(x))\supset\forall\varphi(\varphi[V_1]=\varphi[V_2]),$$

其中 V_1 及 V_2 是任意同型的外延抽象. 在简单类型论中,外延公理等价于下面的推演法则(外延法则):

$$\frac{V_1(a),\Gamma\rightarrow\Delta,V_2(a);\ V_2(a),\Gamma\rightarrow\Delta,V_1(a)}{\alpha[V_1],\Gamma\rightarrow\Delta,\alpha[V_2]}.$$

其中 a 不出现于下相继式(参见"相继式")中. 对于外延公理成立的简单类型论,切割消除定理成立(参见"切割消除定理").

概括公理(comprehension axiom)　证明论的重要公理之一. 设 $A(b_1,b_2,\cdots,b_m,c_1,c_2,\cdots,c_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$ 是一个公式. A 的所有自由变元皆在 $b_1,b_2,\cdots,b_m,c_1,c_2,\cdots,c_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 中(这些变元不必真在 A 中出现),那么下列句子称为一个概括公理:

$$\forall z_1\forall z_2\cdots\forall z_n\forall\psi_1\forall\psi_2\cdots\forall\psi_k$$
$$\exists\varphi\forall y_1\forall y_2\cdots\forall y_m(\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$
$$=A(y_1,y_2,\cdots,y_m,z_1,z_2,\cdots,z_n,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k)).$$

设 V 是抽象(参见"抽象"),

$$\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}A(y_1,y_2,\cdots,y_m,c_1,c_2,\cdots,c_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k),$$

那么概括公理也可表为

$$\forall z_1\cdots\forall z_n\forall\psi_1\cdots\forall\psi_k$$
$$\exists\varphi\forall y_1 y_2\cdots\forall y_m(\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$
$$=U(y_1,y_2,\cdots,y_m)),$$

其中 U 是把 V 中的 $c_1,c_2,\cdots,c_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 分别换为 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k$ 而得.

形式系统(formal system)　数理逻辑的重要概念之一. 一个形式系统 Σ 一般可定义为:

Σ1. 规定某些符号(一般的有可数多个)作为原始符号.

Σ2. 规定某些原始符号的特殊有限串称为公式,项(通常用归纳方法定义).

Σ3. 把某些特殊的公式规定为公理(一般由公理模式给出).

Σ4. 规定某些形如

$$A_1,A_2,\cdots,A_n\vdash B$$

的推演法则,其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B$ 为公式. 由 Σ1—Σ4 就可导出 Σ 的定理.

形式命题演算与一阶谓词演算是应用最广泛的形式系统,人们可以根据需要建立各种形式系统. 例如,为研究可计算性建立的波斯特系统,为证明协调性建立的各种系统等. 形式系统不但在数学理论中有应用,在计算机科学中也起着重要作用.

命题形式(sentential form)　一种命题公式. 命题形式可归纳地定义如下:

1. 每一命题变元是一个命题形式.

2. 每一零元连结词(指 T 或 F)是一个命题形式.

3. 如果 Φ 是一个 n 元连结词($n\geqslant1$),并且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是命题形式,那么 $\Phi(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 也是一个命题形式.

其中,零连结词实际上是 T(真)及 F(假)这两个特殊的命题. 通常的命题连结词有$\neg$(非),$\rightarrow$(蕴涵),$\vee$(析取),$\wedge$(合取),$\leftrightarrow$(等价).

肯定形式(positive form)　一种命题形式. 在命题演算中,肯定形式及否定形式可归纳地定义如下:

1. $*_1$ 是一个肯定形式,其中 $*_1$ 是考虑的系统以外的一个符号(实际上起变元的作用).

2. 如果 $\mathscr{P}$ 是一个肯定形式,并且 B 是一个公式. 那么 $\mathscr{P}[(*_1\vee B)]$,$\mathscr{P}[(B\vee *_1]$及 $\mathscr{P}[(B\rightarrow *_1]$是肯定形式,$\mathscr{P}[\neg *_1]$及 $\mathscr{P}[(*_1\rightarrow B)]$是否定形式.

3. 如果 $\mathscr{N}$ 是一个否定形式,并且 B 是一个公式,那么 $\mathscr{N}[\neg *_1]$及 $\mathscr{N}[(*_1\rightarrow F)]$是肯定形式;$\mathscr{N}[(*_1\wedge B)]$及 $\mathscr{N}[(B\wedge *_1)]$是否定形式,其中 F 表示恒假命题符号.

肯定形式与否定形式是为研究命题演算的语法与语义关系引进的概念. 由定义知,没有一个肯定形式是否定形式.

否定形式(negative form)　见"肯定形式".

NP 形式(NP-form)　一种特殊的二元命题连结词. α 称为 NP 形式,指对每一个公式 B,$\alpha[*_1,B]$是否定形式,并且 $\alpha[B,*_1]$是肯定形式. 肯定形式、否定形式及 $*_1$ 的意义见"肯定形式".

肯定部分(positive part)　公式中特定的一部分. 设 F 是一个公式,F 的肯定(否定)部分可如下归纳地定义:

1. F 是 F 的肯定部分.

2. 如果$\neg A$ 是 F 的一个肯定(否定)部分,那么 A 是 F 的否定(肯定)部分.

3. 如果$(A\vee B)$是 F 的肯定部分,那么 A 与 B 皆为 F 的肯定部分.

4. 如果$(A\wedge B)$是 F 的否定部分,那么 A 及 B 皆为 F 的否定部分.

5. 如果$(A\rightarrow B)$是 F 的肯定部分,那么 A 是 F 的否定部分,B 是 F 的肯定部分.

6. 如果$(A\rightarrow\bot)$是 F 的否定部分,那么 A 是 F 的肯定部分,其中$\bot$表示假.

否定部分(negative part)　见“肯定部分”.

可推断(deductibility)　有关形式系统的概念. 在一个形式系统 Σ 中,可推断公式可如下归纳定义:

1. Σ 的任一条公理,是可推断公式.

2. 如果存在 Σ 中的可推断公式 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 及一个推演法则,使得 $A_1,A_2,\cdots,A_n\vdash A$,则 A 是可推断公式.

如果公式 A 在 Σ 中可推断,则称 A 是 Σ 的一个定理. 公式 A 可推断的一个证明称为 A 的一个演绎.

演绎(deduction)　见“可推断”.

演绎的阶(order of deduction)　可推断公式推断复杂性的度量. 对于形式系统 Σ 的一个可推断公式,它的一个演绎的阶可如下归纳定义:

1. 如果 A 是 Σ 的一条公理,则规定其演绎的阶为 0.

2. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant1)$ 是可推断的,其演绎的阶分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$,并且存在一个推演法则 $A_1,A_2,\cdots,A_n\vdash A$,则规定 A 的该演绎的阶为

$$\max\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}+1.$$

一个可推断公式 A,可能有不同的演绎的阶,但总可假定它有某一固定的阶.

可容许推演法则(permissible inference)　由可推断性导出的法则. 假设公式 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B$ 适合:如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 皆为形式系统 Σ 的可推断公式,那么 B 也是 Σ 中的可推断公式,这时就称

$$A_1,A_2,\cdots,A_n\vdash B$$

是一个可容许推演法则. 使用可容许推演法则可以简化证明的过程.

弱推演法则(weak inference)　一种特殊的可容许推演法则. 假定 $A\vdash B$ 是一个可容许推演法则(参见“可容许推演法则”). 如果 A 的一个演绎的阶大于或等于 B 的一个演绎的阶,则称 $A\vdash B$ 是一个弱推演法则.

纯数论理论(pure number theory)　纯数论形式系统. 设语言 L 含 $0,',+,\cdot,=$;L 中的其他符号与普通形式语言相同. 称 L 上由如下公理和推演法则决定的理论为纯数论形式系统 PN:

1. PN 的公理系统为:

1) $A\to A$.

2) $(\forall x)F(x)\to F(t)$(项 t 中自由变元不在 $F(x)$ 中约束出现).

3) $u'=0\to A$.

4) $u'=v'\to u=v$.

5) $u+0=u$.

6) $u+v'=(u+v)'$.

7) $u\cdot0=0$.

8) $u\cdot v'=u\cdot v+v$.

2. PN 的推演法则有:

1) $B\vdash A\to B$.

2) $A\to B\to C\to D\vdash A\to C\to B\to D$.

3) $A\to B\to C,C\to D\vdash A\to B\to D$.

4) $A\to A\to B\vdash A\to B$.

5) $u=u\to A\vdash A$.

6) $F(s)\vdash s=t\to F(t)$.

7) $A\to F(u)\vdash A\to\forall xF(x)$(自由变元 u 不出现于 $A\to(\forall x)F(x)$ 中).

8) $F(0),F(u)\to F(u')\vdash F(t)$(自由变元 u 不出现于 F 中,项 t 中自由变元都不在 F 中约束出现).

形式系统 PN 包含了佩亚诺公理,它的协调性也可通过在系统 EN 内的嵌入,利用切割定理证明. 这就是通常所说的初等数论无矛盾. 1936 年,根岑(Gentzen,G.)首先证明了纯数论理论的一个形式系统是协调的. 纯数论形式系统 PN 与根岑的系统等价. 1958 年,美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)通过 PN 在形式系统 FT 中的解释,证明了 PN 的协调性.

形式系统FT (formal system FT)　一种形式系统. 指用于证明纯数论理论形式系统的协调性的形式系统. FT 是一个协调的形式系统,该系统的语言与简单类型相同.

1. 型归纳定义:

1) 符号 0 是一个型(表示自然数的型).

2) 如果 σ 和 τ 是型,那么 $(\sigma)\tau$ 也是型($(\sigma)\tau$ 表示由型 σ 的集合到型 τ 的集合内的一个映射). 以下把 $(\sigma)\tau$ 记为 $\sigma\tau$.

由上可知,每一个不同于 0 的型,其形如 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n0\ (n\geqslant1)$.

2. 项:

1) 本原项:

① 每个变元是一个本原项.

② 0 和后继函数 φ 是本原项.

③组合子 $K_{\sigma\tau}$ 和 $S_{\rho\sigma\tau}$(对所有的型)是本原项.

④对每一个型 τ,J_τ 是一个本原项.

2) 项:

① 每个型为 τ 的变元是一个型为 τ 的项.

② 0 是型为 0 的项.

③ φ 是型为 00 的项.

④ $K_{\sigma\tau}$ 是型为 $\tau\sigma\tau$ 的项.

⑤ $S_{\rho\sigma\tau}$ 是型为 $(\rho\sigma\tau)(\rho\sigma)\rho\tau$ 的项.

⑥ J_τ 是型为 $0(\tau\tau)\tau\tau$ 的项.

⑦ 如果 $a^{\sigma\tau}$ 及 b^σ 是型为 $\sigma\tau$ 及 σ 的项,那么 $a^{\sigma\tau}(b^\sigma)$ 是型为 τ 的项.

3) FT 的公理:

①$K_{\sigma\tau}a^{\tau}b^{\sigma}=a^{\tau}$.

②$S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}c^{\rho}=a^{\rho\sigma\tau}c^{\rho}(b^{\rho\sigma}c^{\rho})$.

③$J_{\tau}0b^{\tau\tau}c^{\tau}=c^{\tau}$.

④$J_{\tau}(\varphi a^{\sigma})b^{\tau\tau}c^{\tau}=b^{\tau\tau}(J_{\tau}a^{\sigma}b^{\tau\tau}c^{\tau})$.

⑤$a^{\tau}=b^{\tau}\to F[a^{\tau}]\to F[b^{\tau}]$.

4）FT 的推演法则：

①$\Gamma\to B\vdash\Delta\to B$（如果 $\Gamma\subseteq\Delta$）.

②$\Gamma\to A, A\to B\vdash\Gamma\to B$.

③$F[0], F[x^0]\to F[\varphi x^0]\vdash F[a^0]$.

其中变元 x^0 不出现于 F 中.

埃尔布朗定理(Herbrand theorem)　证明论的重要定理.在某些一阶形式系统中，如果 $d\vdash(\exists x)\varphi(x)$，则存在一个推演 d_0 和项 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，使得 $d_0\vdash\varphi(s_1)\vee\varphi(s_2)\vee\cdots\vee\varphi(s_n)$.这儿 d 是 $(\exists x)\varphi(x)$ 的一个推演，$\varphi(x)$ 不含量词.埃尔布朗定理的作用在于把公式 $(\exists x)\varphi(x)$ 的可证性问题，归结到某个能行构成的无量词公式 $\varphi(s_1)\vee\varphi(s_2)\vee,\cdots,\vee\varphi(s_n)$ 的可证性问题.它是机器证明的理论基础之一.

证明算法(algorithm of proof)　一种算法.指可用于证明某些命题的成立与否的算法.有些命题的真假是可以通过一个算法来判断的.例如，命题演算中，命题的真假即可通过一个算法机械地判定.

Δ_1^1 分析形式系统(formal system of Δ_1^1-analysis)　一种可以定义实数的形式系统.称由下列语言、公式、公理系统、推演法则等决定的理论为 Δ_1^1 分析形式系统（记为 DA）：

1. DA 的语言：

1）可数个自由变元，可数个约束变元，可数个一元自由谓词变元及可数个一元约束谓词变元.

2）符号 0，'，F，→，∀及 λ.

3）n 元可计算算术函数符号和 n 元可判定算术谓词符号（$n\geqslant1$）.

4）括号及逗点.

2. DA 的项：

1）符号 0 是项.

2）每个自由变元是项.

3）如果 f 是 n 元可计算函数符号（$n\geqslant1$），$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，那么 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 也是项.

4）如果 t 是项，那么 t' 也是项.

不含自由变元的项称为数值项.

3. DA 的素公式：

1）F 是一个素公式（F 表示假）.

2）$B(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是一个素公式，其中 B 是一个 n 元可判定算术谓词，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项.

不含自由变元的素公式称为常（素公）式.

4. DA 的公式及谓词：

1）每一个素公式是一个公式.

2）每一个自由谓词变元是一个谓词.

3）如果 P 是一个谓词，t 是一个项，那么 $P(t)$ 是一个公式.

4）如果 A 及 B 是公式，那么 $(A\to B)$ 也是公式.

5）如果 $F[0]$ 是一个公式，x 不是出现于 F 中的约束变元，那么 $\forall xF[x]$ 是一个公式，并且 $\lambda xF[x]$ 是一个谓词.

6）如果 U 是一个自由谓词变元，$F[U]$ 是一个公式，X 是一个不出现于 F 中的约束谓词变元，那么 $\forall xF[x]$ 是一个公式.

如果一个公式不为 $(A\to B)$ 形，则称其为单的.不含约束谓词变元的谓词称初等的.公式中含→，∀及 λ 的个数称公式的长度.

5. DA 的数值项的值：

1）项 0 的值为 0.

2）如果项 t 的值为 m，则 t' 的值为 m'.

3）如果 f 是一个 n 元可计算函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的值分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，那么 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 的值为 $f(m_1, m_2, \cdots, m_n)$.

6. DA 常素公式的真值：

1）公式 F 有假值.

2）如果 B 是一个 n 元可判定算术谓词符号（$n\geqslant1$），$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是数值项，且其值分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，那么 $B(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 的真值依照 $B(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 的真或假，分别为真或假.如果 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别与 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是数值相等的项，则称公式 $F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 与 $F(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 等价.

7. DA 的公理系统：

1）如果 $\mathscr{P}$ 是一个肯定形式（参见"肯定形式"），A 是一个真的常素公式，那么 $\mathscr{P}[A]$ 是 DA 的公理.

2）如果 $\mathscr{N}$ 是否定形式，A 是一个假的常素公式，那么 $\mathscr{N}[A]$ 是 DA 的一条公理.

3）如果 $\mathscr{L}$ 是 NP 形式，A 与 B 是长为 0 的等价公式，那么 $\mathscr{L}[A, B]$ 是 DA 的一条公理.

4）如果对一个 n 元数组 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$，$F(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 是上述公理 1 至公理 3 所给出的公理之一，那么 $F[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 也是 DA 的公理，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是变元.

8. DA 的基本推演法则：

1）$\mathscr{N}(\neg A), \mathscr{N}[B]\vdash\mathscr{N}[A\to B]$，其中 B 不为 F，$\mathscr{N}$ 是否定形式.

2）$\mathscr{P}[F(a)]\vdash\mathscr{P}[\forall xF(x)]$，$\mathscr{P}$ 是肯定形式，a 是不出现于结论中的自由变元；

$\mathscr{P}[F(U)]\vdash\mathscr{P}[\forall xF(x)]$，$\mathscr{P}$ 是肯定形式，U 是不出现于结论中的自由谓词变元.

3）$F[t]\to\mathscr{N}[\forall xF(x)]\vdash\mathscr{N}[\forall xF(x)]$，其中

$\mathscr{N}$是否定形式；

$F[p]\to\mathscr{N}[\forall xF(x)]\vdash\mathscr{N}[\forall xF(x)]$，其中$P$是初等谓词，$\mathscr{N}$是否定形式；

$$\begin{cases}\forall x(\forall yA[X,Y]\leftrightarrow\exists YB[x,Y])\\F[\lambda x\forall YA[x,Y]]\to\mathscr{N}[\forall xF[x]]\vdash\mathscr{N}[\forall xF(x)]\end{cases}$$

其中$\mathscr{N}$是否定形式，A及B中没有约束谓词变元.

4) $\varepsilon[F[t]]\vdash\varepsilon[\lambda xF[x](t)]$，$\varepsilon$是肯定或不定形式.

5) $\mathscr{P}[A],A\to B\vdash C$，如果$\mathscr{P}[B]\overset{S}{\vdash}C$成立，其中$\mathscr{P}[B]\overset{S}{\vdash}C$表示$\mathscr{P}[B]$的极小肯定部分，也是$C$的肯定部分，并且$C$的极小否定部分也是$\mathscr{P}[B]$的否定部分，$\mathscr{P}$是肯定形式.

6) $F[0],F[a]\to F[a']\vdash F[t]$，其中$a$为不出现于$F$中的自由变元，项$t$中自由变元不在$F[0]$中约束出现.

在系统DA中，佩亚诺公理成立，并且可以定义实数.

切割消除定理(cut-elimination theorem)　关于形式系统推演的定理.该定理断言：如果Σ可以推出A，那么由Σ可以不用切割消除推理法则，即可推出A.如果适当选择推理法则和公理，则谓词演算适合切割消除定理，由切割消除定理，对任意$d\vdash\Gamma$，可以找到一个d^*，使得$d^*\vdash\Gamma$，并且d^*只含Γ中公式的子公式.

相继式(sequent)　一种条件蕴含式.设Γ,Δ是有穷公式序列.那么$\Gamma\to\Delta$称为一个相继式.Γ和Δ分别称为这个相继式的前项和后项.如果Γ为$A_1,A_2,\cdots,A_m$；Δ为$B_1,B_2,\cdots,B_n(m,n\geqslant1)$，那么$\Gamma\to\Delta$(即$A_1,A_2,\cdots,A_m\to B_1,B_2,\cdots,B_n$)表示若$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_m$成立，则$B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n$成立.$A_1,A_2,\cdots,A_m\to$意义为$A_1\wedge A_2\wedge,\cdots,\wedge A_m$是恒假式；$\to B_1,B_2,\cdots,B_n$意义为$B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n$是恒真式.

初始相继式(initial sequent)　一种条件蕴含式.指形如$A\to A$的相继式.其中A是一个公式.在佩亚诺算术中，下列式子也称初始相继式(又称数学初始相继式)：

$$t'=s'\to s=t;$$
$$s'=0\to;$$
$$\to s+0=s;$$
$$\to s+t'=(s+t)';$$
$$\to s\cdot 0=0;$$
$$\to s\cdot t'=s\cdot t+s.$$

其中$s\cdot t$是项.初始相继式实际上是根岑系统的公理.$\to A$表示A为恒真式，$A\to$表示A为恒假式.

根岑系统(Gentzen's system)　一阶逻辑的一个公理化形式系统.称由下列语言、公式、推演法则等决定的理论为根岑系统.为叙述方便，此系统记为LK：

1. LK的语言：

1) 常元：

①个体常元：$k_0,k_1,\cdots,k_j\cdots(j=0,1,2,\cdots)$.

②函数常元：i元函数常元$(i=1,2,\cdots)$

$f_0^i,f_1^i,\cdots,f_j^i,\cdots\ (j=0,1,2,\cdots)$.

③i元谓词常元$(i=1,2,\cdots)$

$R_0^i,R_1^i,\cdots,R_j^i,\cdots\ (j=0,1,2,\cdots)$.

2) 变元：

①自由变元：$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots(i=0,1,\cdots)$.

②约束变元：$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots(i=0,1,\cdots)$.

3) 逻辑符号$\neg,\wedge,\vee,\supset,\forall,\exists$.

4) 辅助符号：(，)，逗号，.

2. LK的项：

1) 每个个体常元是一个项.

2) 每个自由变元是一个项.

3) 如果f是i元函数常元，$t_1,t_2,\cdots,t_i$是项，那么$f(t_1,t_2,\cdots,t_i)$是一个项.

3. LK的公式：

1) 如R是i元谓词常元，$t_1,t_2,\cdots,t_i$是项，那么$R(t_1,t_2,\cdots,t_i)$是(原子)公式.

2) 如果A,B是公式，那么$(\neg A),(A\wedge B),(A\vee B)$及$(A\supset B)$是公式.

3) 如果A是公式，a是一个自由变元，x是不出现于A中的约束变元，那么$(\forall xA(x),(\exists x)A(x)$是公式.其中$A(x)$表示把$A$中的$a$换为$x$.

4. LK的推演法则如下形式的表示式

$$\frac{s_1}{s}\text{或}\frac{s_1;s_2}{s}$$

称为一个推演法则，其意义为：如果s_1(s_1和s_2)已断定，那么可断定s.s称下相继式，s_1,s_2称为上相继式.LK的推演法则有：

1) 结构法则：

①弱法则：左形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta}{D,\Gamma\to\Delta}$；右形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,D}$；式中$D$称为弱公式，此二法则称为弱法则.

②凝缩推理法则：

左形式$\dfrac{D,D,\Gamma\to\Delta}{D,\Gamma\to\Delta}$；右形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,D,D}{\Gamma\to\Delta,D}$.

③换位推演法则：

左形式$\dfrac{\Gamma,C,D,\pi\to\Delta}{\Gamma,D,C,\pi\to\Delta}$；右形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,C,D,\Lambda}{\Gamma\to\Delta,D,C,\Lambda}$.

④切割消除推演法则：

$$\frac{\Gamma\to\Delta,D;D,\pi\to\Lambda}{\Gamma,\pi\to\Delta,\Lambda},$$

称D为此推演法则的切割消除公式.法则①—③称为弱推演法则.①—④中的$\Gamma,\Delta,\pi,\Lambda$是公式的有限序列，$A,B,C,D$是公式.

2) 逻辑法则：

①¬推演法则：

左形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,D}{\neg D,\Gamma\to\Delta}$；右形式$\dfrac{D,\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\neg D}$.

其中D和$\neg D$分别称为此法则的辅助公式和主公式.Γ,Δ是有限公式序列,D是公式.

②∧推演法则：

左形式$\dfrac{C,\Gamma\to\Delta}{C\wedge D,\Gamma\to\Delta}$及$\dfrac{D,\Gamma\to\Delta}{C\wedge D,\Gamma\to\Delta}$；

右形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,C;\Gamma\to\Delta,D}{\Gamma\to\Delta,C\wedge D}$.

其中Γ,Δ是有限公式序列,C,D是公式,称$C\wedge D$为此法则的主公式.

③∨推演法则：

左形式$\dfrac{C,\Gamma\to\Delta;D,\Gamma\to\Delta}{C\vee D,\Gamma\to\Delta}$；

右形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,C}{\Gamma\to\Delta,C\vee D}$及$\dfrac{\Gamma\to\Delta,D}{\Gamma\to\Delta,C\vee D}$；

C,D称为此法则的辅助公式.$C\vee D$称为此法则的主公式,Γ,Δ是有限公式序列.

④⊃推演法则：

左形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,C;D,\pi\to\Lambda}{C\supset D,\Gamma,\pi\to\Delta,\Lambda}$；

右形式$\dfrac{C,\Gamma\to\Delta,D}{\Gamma\to\Delta,C\supset D}$；

C,D称为该法则的辅助公式,$C\supset D$称为该法则的主公式,Γ,Δ,π是有限公式序列,C,D是公式.①—④称为命题推演法则.

⑤∀推演法测：

左形式$\dfrac{F(t),\Gamma\to\Delta}{(\forall x)F(x),\Gamma\to\Delta}$；

右形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,F(a)}{\Gamma\to\Delta,(\forall x)F(x)}$；

其中t是任意项,a不出现于下相继式中,$F(t)$,$F(a)$称为此法则的辅助公式,$(\forall x)F(x)$称为此法则的主公式,a称为该法则的本征变元,F是一个公式,Γ,Δ是有限公式序列.

⑥∃推演法则：

左形式$\dfrac{F(a),\Gamma\to\Delta}{(\exists x)F(x),\Gamma\to\Delta}$；

右形式$\dfrac{\Gamma\to\Delta,F(t)}{T\to\Delta,(\exists x)F(x)}$；

其中a不出现于下相继式中.t是任意项,F是一个公式,$(\exists x)F(x)$称为该法则的主公式,$F(a)$,$F(t)$称为该法则的辅助公式,a称为该法则的本征变元,Γ,Δ是有限公式序列.

5.LK中的形式证明.LK中的一个形式证明P是由相继式构成的一棵树,且满足下列条件：

1）P的最上面的相继式是一个初始相继式.

2）在P中除去最下边的相继式外,每一个相继式是某一推演法则的上相继式;同时除去最上边的相继式外,每一个相继式是一个推演法则的下相继式.一个证明P中的最下相继式又称末端相继式.如果公式A是证明P的末端相继式,那么称A是在LK中可证明的.如果一个证明P中不出现切割消除推演法则,则称P是切割自由的.

6.LK中的正则证明.LK中的一个证明称为正则的,如果：

1）P中的所有本征变元是互不相同的.

2）如果一个自由变元a以本征变元形式出现于相继式s中,那么a仅出现于s中.

在LK中切割消除定理成立,LK是协调的、完备的.

克里普克结构(Kripke structure)　形式系统的一种结构.是语言L满足如下条件的一个有序三元组$\langle P,U,\varphi\rangle$：

1.$P=\langle O,\leqslant\rangle$是一个偏序结构.

2.U是一个集合,有一个定义在O上且取值于U的子集的映射α,使得如果$p,q\in O$且$p\leqslant q$,那么$\alpha(p)=U_p\subseteq\alpha(q)=Uq\subseteq U$(此处的包含关系是指集合的包含关系).

3.φ是一个二元函数$\varphi(R,p)$,其中R是L的谓词的符号,且$p\in O$,φ满足如下条件：

1）假定R是零元谓词,那么$\varphi(R,p)$为F或T;如果$\varphi(R,p)=T$,并且$p\leqslant q$,那么$\varphi(R,q)=T$.

2）假如R是一个n元谓词$(n\geqslant 1)$,那么$\varphi(R,p)$是

$$U_p^n=\underbrace{U_r\times\cdots\times U_r}_{n\text{个}}$$

的一个子集,并且当$p\leqslant q$时,$\varphi(R,p)\subseteq\varphi(R,q)$.令$U=\bigcup_{p\in O}U_p$,则可把$U$视为结构(或模型)的全域.

假定存在一个指派,使得L的每个自由变元a_i对应U的一个元素c_i,设$F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是一个自由变元皆在$a_1,a_2,\cdots,a_n$中的公式.$F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在p(步)$(p\in O)$相应于上面的指派的解释$\varphi(F(x_1,x_2,\cdots,x_n),p)$,可归纳地定义如下：

1.$\varphi(R(c_1,c_2,\cdots,c_n),p)=T$,当且仅当$(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in\varphi(R,p)$.其中$R$是一个$n$元谓词符号,且$n>0$.

2.$\varphi(A\wedge B,p)=T$,当且仅当$\varphi(A,p)=T$,且$\varphi(B,p)=T$.

3.$\varphi(A\vee B,p)=T$,当且仅当$\varphi(A,p)=T$,或$\varphi(B,p)=T$.

4.$\varphi(A\supset B,p)=T$,当且仅当对所有$q\geqslant p$,或$\varphi(A,q)=F$,或$\varphi(B,q)=T$.

5.$\varphi(\neg A,p)=T$,当且仅当对所有$q\geqslant p$,$\varphi(A,q)=F$.

6.$\varphi(\exists xA(c_1,c_2,\cdots,c_n,x),p)=T$,当且仅当存在$c\in U_p$,使得$\varphi(A(c_1,c_2,\cdots,c_n,c),p)=T$.

7.$\varphi(\forall xF(c_1,c_2,\cdots,c_n,c),p)=T$,当且仅当对

所有 $q \geqslant p$ 及所有

$$c \in U_q, \varphi(F(c_1, c_2, \cdots, c_n, c), q) = T.$$

8. 设 $\Gamma \to \Delta$ 是一个相继式，那么 $\varphi(\Gamma \to \Delta, p) = T$，当且仅当对所有 $q \geqslant p$，或 $\varphi(A, q) = F$（对 Γ 中某一公式 A），或 $\varphi(B, q) = T$（对 Δ 中某一公式 B）.

克里普克结构对于讨论系统内公式可证性和系统的完全性都是很有用的.

海丁代数(Heyting algebra) 基于格的一种代数. 指满足如下条件的一个格 H：H 上定义了一个运算⊃满足 $p \wedge q \leqslant r$，当且仅当 $q \leqslant (p \supset r)$，则称 H 是海丁代数，其中 p⊃r 表示

$$\bigcup \{b \in H \mid p \wedge b \leqslant r\}.$$

完备海丁代数(complete Heyting algebra) 一种特殊的完备格. 一个满足如下条件的完备格 Ω：

$$p \wedge \bigvee_{i \in I} q_i = \bigvee_{i \in I} (p \wedge q_i),$$

其中 p 是 Ω 的任意元素，$\{q_i \mid i \in I\}$ 是 Ω 的任意子集. 完备海丁代数对讨论直觉主义逻辑是一个有用的工具. 一个完备布尔代数是一个完备海丁代数.

完备海丁代数值结构(complete Heyting algebra-valued structure) 形式系统的一种赋值结构. 设 L 是一个不含函数符号的语言，Ω 是一个完备海丁代数. 称满足如下条件 的 $\langle D, \varphi \rangle$ 为语言 L 的一个 Ω 值结构（完备海丁代数值结构）：

1. D 是一个非空子集.

2. φ 是以 $L(D)$ 为定义域的一个映射.

3. 如果 k 是一个个体常元，那么 $\varphi(k)$ 是 D 的一个元素.

4. 如果 d 是 D 的一个元素，那么 $\varphi(\bar{d}) = d$.

5. 如果 R 是 L 的一个 n 元谓词符号，那么 $\varphi(R)$ 是一个 D^n 到 Ω 中的映射.

设 A 是一个 $L(D)$ 语句，由 Ω 值结构 $\langle D, \varphi \rangle$ 可决定 A 的值 $[A]$ 如下：

1. 如果 R 是一个 n 元谓词符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是常元，那么 $[R(t_1, t_2, \cdots, t_n)]$ 是

$$(\varphi R)(\varphi(t_1), \varphi(t_2), \cdots, \varphi(t_n)).$$

2. 如果 A 是一个语句，那么根据以下原则决定 $[A]$：

1) $[\neg A] = \neg [A]$

$$[A \wedge B] = [A] \wedge [B]$$

$$[A \vee B] = [A] \vee [B]$$

$$[A \supset B] = [A] \supset [B].$$

2) $[(\forall x) A(x)] = \bigwedge_{d \in D} [A(\bar{d})]$,

$$[(\exists x) A(x)] = \bigvee_{d \in D} [A(\bar{d})].$$

利用这种值结构可以讨论形式系统中公式的可证性等.

归纳推演法则(inductive inference) 一种推演法则. 下述推演法则称为归纳推演法则：

$$\frac{F(a), \Gamma \to \Delta, F(a')}{F(0), \Gamma \to \Delta, F(s)} \quad (1)$$

其中 a 不在 $F(0), \Gamma, \Delta$ 中出现，S 是任意项，a 称为这个推演法则的本征变元. 式(1)这种表现形式主要见于根岑系统中（参见“根岑系统”）.

归纳推演法则可表示为

$$F(0), F(a) \to F(a') \vdash F(t). \quad (2)$$

其中 a 不出现于 F 中，t 是任意项，此种表现形式可应用于各种系统中.

不完全系统(incomplete system) 不具有完备性的系统. 指一个形式系统中存在一个句子 A，使得 A 和 $\neg A$ 在其中皆不能证明的系统. 不完全性还有其他说法，例如，如果在一个系统 Σ 中，有一个真的句子 φ，使得 $\Sigma \nvdash \varphi$，则称 Σ 是不完全的. 不完全性是证明论乃至数理逻辑的一个重要概念. 哥德尔的不完全定理使德国数学家希尔伯特(Hilbert, D.)关于证明论的设想无法实现，不得不放宽对证明的要求.

Π_1^1 分析系统(system of Π_1^1 aralysis) 用二阶算术语言描述的分析系统. 本系统（记为 GPA）所用语言与 Δ_1^1 系统（参见“Δ_1^1 分析形式系统”）相同，为二阶算术语言，以下仅列出其公理、推演法则等的定义.

1. 公理：

1) $\mathscr{P}[A]$. 这里 A 是任一个真的常素公式.

2) $\mathscr{N}[A]$. 这里 A 是任一个假的常素公式.

3) $\mathscr{L}[A, B]$. 这里 A 与 B 是等价的单纯公式.

4) 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不出现于 F 中，并且 $F[m_1, m_2, \cdots, m_n]$ 是上述公理 1 至公理 3 所给出的公理之一（对所有 $m_1, m_2, \cdots, m_n$），则

$$F[a_1, a_2, \cdots, a_n] (n \geqslant 1).$$

2. 推演法则：

1) $\mathscr{N}[\neg A] \vdash \mathscr{N}[A \to B]$，其中 B 不是 F.

2) 如果其中 a 不出现于结论中，则

$$\mathscr{P}[F[A]] \vdash \mathscr{P}[\forall x F(x)].$$

3) $\mathscr{P}[F[U]] \vdash \mathscr{P}[\forall x F(x)]$，这里 U 不出现于结论中.

4) $F[t] \vdash \mathscr{N}[\forall x F(x)] \vdash \mathscr{N}[\forall x F(x)]$.

5) 如果 p 是一弱谓词或者 $\forall x F(x)$ 是一个弱公式，则 $F[p] \vdash \mathscr{N}[\forall x F(x)] \vdash \mathscr{N}[\forall x F(x)]$.

6) $\varepsilon[F(t)] \vdash \varepsilon[\lambda x F(x)(t)]$.

7) 如果 $\mathscr{P}[\mathscr{N}(c) \vdash B]$，则

$$\mathscr{P}(A), \mathscr{N}(A) \vdash B.$$

8) 如果 a 不出现于 F 中，则

$$F(0), F(a) \to F(a') \vdash F(t).$$

9) 如果 $F \vdash' G$，则 $F \vdash G$.

Π_1^1 系统是分析的一个子系统. 它是协调的，它的证明是基于序数的某些性质.

帕里斯结果(result of Paris) 关于自然数的

一个命题. 它是真的,但在佩亚诺算术中不能证明. 它也是此方面的第一个例子. 首先由帕里斯(Paris, J.)和柯比(Kirby, L.)证明,后来哈林顿(Harrington, L.)发现这是有限拉姆齐定理的一个简单扩充. 该定理是证明论中近年来最重要的成果,引起人们的注意.

设 H 是自然数集的一个有限子集,如果 H 所含自然数的个数 $\mathrm{Card}(H)\geqslant\min(H)$,就说 H 是相对大的. 给定自然数 e,r,k 和集合 M,令

$$M \underset{*}{\rightarrow} (k)^e_r.$$

上式表示对每一个分割 $P:[M]^e\rightarrow r$,存在自然数集的一个相对大的有限子集 $H\subseteq M$,使得 P 对 H 是齐次的,并且 H 至少含有 k 个自然数,其中 $[M]^e=\{F\subseteq M \mid |F|=e\}$,如果 P 在 $[H]^e$ 上是一个常数,则称 P 相对于 H 是齐次的.

1. 对所有自然数 e,r,k,存在一个集合 M 使得 $M\underset{*}{\rightarrow}(k)^e_r$. 该结果的证明用到无限拉姆齐定理,可表示为佩亚诺算术中的一个命题.

2. 由结果 1 确定的组合原则在佩亚诺算术中不可证明.

递 归 论

递归论(recursion theory) 亦称递归函数论或可计算性理论. 经典数学的一部分,它是介于数论和分析之间的一种数学理论. 主要研究对象是自然数集上的函数. 它区别于其他经典数学分支的一个重要特征是能行性或可计算性.

最早出现的递归函数是原始递归函数(参见"原始递归函数"),原始递归函数是利用原始递归式定义的一类递归函数. 原始递归式是德国数学家戴德金(Dedekind, (J. W.)R.)于 1888 年为研究自然数的性质时提出的. 1923 年,挪威数学家斯科朗(Skolem, A. T.)曾宣称所有初等数论中的数论函数都可以用原始递归式来定义. 1931 年,在哥德尔不完全定理的证明中,原始递归函数起了关键作用,受到了人们的重视,极大地推动了递归论的研究. 值得指出的是,原始递归函数起初被称为递归函数,它的一个重要特征是能行可计算的. 在直觉上,一个函数是能行可计算的(简称可计算的),是指存在一个计算该函数的算法. 算法的概念由来已久. 在古代中国,人们早就知道了求两个正整数的最大公约数的算法;求一元二次方程根的算法也是人们早就熟知的. 到了 16 世纪,人们又相继发现了三次方程和四次方程的求根公式. 但是,在此以后 3 个世纪的漫长岁月中,人们始终未能找到五次方程的求根公式. 直到 1824 年,挪威数学家阿贝尔(Abel, N. H.)证明了这样的求根公式不存在以后,人们才停止了这样的探索. 阿贝尔的结果说明,对有些函数是没有能行算法的. 也就是说,存在直觉上不可计算的函数. 在原始递归函数类出现以后,人们自然地提出了一个问题,是否所有直觉上可计算的函数都是原始递归函数呢? 1928 年,德国数学家和逻辑学家阿克曼(Ackermann, W.)首先构造出一个后来被称之为阿克曼函数(参见"阿克曼函数")的函数. 阿克曼函数是直觉上能行可计算的,但是它的增长速度超过任何一个原始递归函数,因此是非原始递归函数. 阿克曼函数的出现促使人们去寻找更大的可计算函数类,或等价地说,给出可计算函数的形式化定义. 在其后的二三十年中,人们提出了各种各样的可计算函数的形式化定义,其中最著名的有:

1. 美国数学家、逻辑学家丘奇(Church, A.)、美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)和法国数学家埃尔布朗(Herbrand, J.)提出的一般递归函数.

2. 丘奇得出的 λ 可定义的函数.

3. 美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.)提出的 μ 递归函数.

4. 英国数学家图灵(Turing, A. M.)提出的图灵可计算函数.

5. 马尔可夫算法可计算的函数.

6. 无界寄存器可定义的函数.

这么多不同的可计算函数类中,究竟哪一个是与直觉上可计算的函数类相一致的呢? 1936 年,丘奇颇有先见之明地提出了一个被称之为丘奇论题的著名论断:一个函数是直觉上可计算的,当且仅当它是 λ 可定义的. 开始人们对丘奇论题是颇不以为然的. 当然这个论断在数学上是无法证明的,因为直觉上可计算的函数本身不是一个精确的数学定义. 但是人们后来惊奇地发现,他们所给出的各种各样的定义虽然表现形式差异很大,但却都是等价的. 也就是说,他们定义的是同一类函数. 这个有趣的发现使人们认识到丘奇论题的正确性,从而丘奇论题慢慢地被人们普遍地接受了. 因为一般递归函数论是与 λ 可定义函数类等价的,因此,丘奇论题可表达为一个函数是直觉上可计算的,当且仅当它是一般递归的. 人们通常将可计算的函数称为递归函数. 为了加以区别,将以前定义的那种递归类称为原始递归函数类.

1944 年,波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post, E. L.)在美国数学会作的一次演讲中提出了著名的波斯特问题(参见"波斯特问题"). 随后,他又提出了解决波斯特问题的设想——波斯特规划(参见"波斯特规划"). 波斯特问题分别由弗里德贝格(Friedberg, R. M.)于 1957 年和穆切尼克(Mučnik, A. A.)于 1956 年独立地解决,并创造了有穷损伤优先

方法(又称 o' 方法)这一有力的研究工具.而波斯特规划最终于1990年由哈林顿(Harrington,L.)和索尔(Soare,R.I.)解决.波斯特问题解决后,递归论的发展进入了一个新的阶段.1970年,经过马蒂雅塞维奇(Matijasevich,A.)、美国女数学家鲁宾孙(Robinson,J.B.)、美国学者戴维斯(Davis,M.D.)等人的努力,终于用递归论为工具解决了著名的希尔伯特第10问题.近20多年来,由于计算机科学的迅速发展,能行性的概念越来越受到人们的重视,递归论发展更加迅速,现在已经发展成具有多个分支的独立学科.目前,递归论的主要分支有:

1. 不可解问题.
2. 可判定理论.
3. 不可解度理论.
4. α 递归论.
5. 高型递归论.
6. 描述集合论等.

由于某些分支的研究对象已不局限于自然数集上的函数,例如,α 递归论研究序数上的函数,因此,人们又将研究自然数集上函数的那部分递归理论称之为经典递归论.递归论在其他科学理论中有着广泛的应用.它在计算机科学中的应用是众所周知的,递归论中的图灵机是现代计算机的理论原型,在计算机上可以计算的函数均是递归函数,因此计算机科学与递归论一样十分重视递归性.计算机中所使用的PASCAL,C,LISP,PROLOG以及COBOL等语言无不与递归性密切相连.从利用递归论作为工具研究算法的实际可计算性开始,现在此项研究已经产生了理论计算机科学中的一个崭新的分支——计算复杂性.其次,对递归论的研究可以说起源于数论.如上面所说,戴德金正是在研究自然数时创造了原始递归式.然而,现代递归论对数论研究产生的影响也是不容忽视的,其最典型的例子就是希尔伯特第10问题的解决.目前,利用递归论来研究数论是一个重要的研究方向.递归论中分层理论应用于集合论产生了一个新的分支——描述集合论.此外,能行性的概念已经渗透到数学的其他分支以及其他科学理论中,并对这些学科产生越来越大的影响,可构造数学已经是一个不可忽视的研究方向.

递归函数论(recursive function theory) 即“递归论”

可计算性理论(computability theory) 即“递归论”.

经典递归论(classical recursion theory) 即“递归论”.

前驱(predecessor) 递归论术语.指定义在自然数上的一种一元运算.自然数0没有前驱.前驱运算可由前驱函数 D 来刻画.即对任何自然数 $n>0$,$D(n)=n-1$.为了保证 D 为全函数,常约定

$$D(0)=0.$$

前驱函数(predecessor function) 见“前驱”.

后继(successor) 递归论术语.指定义在自然数上的一种一元运算.后继运算由后继函数 S 来刻画.对任意自然数 n,$S(n)=n+1$.

后继函数(successor function) 见“后继”.

数学归纳法(mathematical induction) 简称归纳法.一种重要的证明方法.其依据是下列的归纳原理:对任何自然数集 X,若 $0\in X$,并且对任何 n,只要 $n\in X$,必定有 $n'\in X$.那么所有自然数都在 X 中.用一阶语言,归纳法原理可表成:$(P(0)\ \&\ \forall n(P(n)\rightarrow P(n'))\rightarrow\forall nP(n))$.其中 P 为任一数论谓词.在实际运用时,首先证明 $P(0)$(称为奠基),对任何自然数 n,先假定 $P(n)$ 成立(归纳假设),并由此推出 $P(n')$ 也成立(归纳推步),即可断言 $P(n)$ 对任何自然数 n 都成立.值得注意的是,与形式逻辑中的归纳推理不同,数学归纳法所证明的结论是必然地真的.此外,由于数学归纳法原理有许多等价或加强的形式,相应地,数学归纳法也有一些变种或加强形式(参见“完全归纳法”,“超穷归纳法”,“二重归纳法”和“良序结构上的归纳法”).

完全归纳法(complete induction) 亦称数学归纳法,简称归纳法.与数学归纳法等价的一种证明方法,指对任何自然数 x,只要假定小于 x 的任何 t 都满足 $P(t)$,就可推出 $P(x)$ 成立;那么可以断言,对任何自然数 x,$P(x)$ 都成立.即有 $\forall x(\forall t<xP(t)\rightarrow P(x))\rightarrow\forall xP(x)$.上式常称为完全归纳原理.在用完全归纳法证明 $\forall x\,P(x)$ 时,一般先假定小于 x 的 t 都满足 $P(t)$(称为完全归纳假设),然后设法证明 $P(x)$ 也真(此过程为归纳推步)即可.此证明过程常称为关于 x 进行完全归纳证明,x 则称为归纳变元.

完全归纳原理(complete induction principle) 见“完全归纳法”.

归纳变元(inductive variable) 见“完全归纳法”.

最小数原理(the least number principle) 自然数所具有的一种基本性质.即任何非空的自然数集中都有最小的自然数.它实际上与归纳法原理等价.在一阶语言中,最小数原理可用下列公式(模式)来表示:$\exists xP(x)\rightarrow\exists x(P(x)\ \&\ \forall y<x(\neg P(y)))$ 其中 P 为任何数论谓词.此式与一阶的完全归纳法原理是等价的.自然数的最小数原理推广到一般的关系上,便导出了良基关系的概念:关系“$\leqslant$”称为(在 A 上)良基的,是指 A 的任何非空子集都有 $\leqslant$ 最小元,特别地,当“$\leqslant$”是线性序,又是良基关系时,它便是一个良序.因此,对良序结构 $(A,\leqslant)$ 也有其最

小数(元)原理.

递归定义(definition by recursion) 定义数论函数的一种隐式定义方法. 指递归定义函数 f 时, 先指定 f 在某些自变元值处的取值, 如 $f(0)$. 对其他自变元值 n 处 f 的值 $f(n)$, 则可依某种确定的方法, 并利用已定义好的 f 的值定义出来. 例如, 加法函数 $f(x,y)=x+y$ 就可以通过下列两式递归定义出来:

$$\begin{cases} f(x,0)=x, \\ f(x,y')=(f(x,y))', \end{cases}$$

其中, $f(x,y')$ 之值的定义就用到了(已定义好的) $f(x,y)$ 之值, 这样逐步往前"递归", 就可利用 $f(x,0)$ 之值确定出 $f(x,y')$ 之值. 当然, 一般的递归定义形式可能远比上面的例子复杂得多, 但其基本思想都是一样的(参见"原始递归式"、"一般递归式"等). 递归定义的方法还可推广到超穷序数或其他良序结构之上去.

一阶算术(first order arithmetics) 递归论研究的内容之一. 是刻画初等数论的一阶形式理论. 表述这种理论的语言为一阶算术语言 $\mathscr{L}$. 它除了含有通常一阶语言的内容外, 还含有等词 $=$, 个体常元 0 (零), 一元常函数 S(后继)及两个二元常函词 $+$ (加)和 $\times$(乘). 设 $\mathfrak{N}$ 为通常的自然数结构, 则 $\mathscr{L}$ 可以在 $\mathfrak{N}$ 中得到自然的解释. 在这个解释之下为真的全体一阶算术语句(即 $\mathscr{L}$ 语句)构成一个理论 Ω, 即 $\Omega=\{\varphi|\mathfrak{N}\vDash\varphi \,\&\, \varphi \text{为} \mathscr{L} \text{语句}\}$, 此理论 Ω 称为一阶算术理论, 简称一阶算术. 一阶算术 Ω 由直观上为真的全体一阶算术语句所组成, 因此, 它是一个协调的、完备的理论(这与佩亚诺算术 PA 大不一样). 但是, Ω 是不可公理化的, 即无法从 Ω 中挑选出一个递归可枚举的语句集合作为公理, 从而把 Ω 中的其他语句全部推出来. 因而也不存在一个能行的过程, 把 Ω 的全体语句能行地列举出来.

二阶算术(second order arithmetics) 递归论研究的内容之一. 是刻画自然数理论的二阶形式理论. 所使用的语言是二阶算术语言 $\mathscr{L}_2$. 它是在一阶算术语言 $\mathscr{L}$ 的基础上, 增加二阶变元(即取值于函数或谓词的变量)及相应的量词而得. 这种二阶语言在自然数结构 $\mathfrak{N}$ 上也有其自然的解释. 在这种解释之下为真的 $\mathscr{L}_2$ 语句组成一个理论 Ω_2, 即 $\Omega_2=\{\varphi|\mathfrak{N}\vDash\varphi \text{为} \mathscr{L}_2 \text{语句}\}$. Ω_2 称为二阶算术理论, 简称二阶算术. 类似地, 其他高阶算术也可仿此定义.

标准算术结构(standard structure of arithmetics) 亦称标准算术模型. 一阶算术的模型. 常用古代印刷体德文字母 $\mathfrak{N}$ 表示, 设 $\mathscr{L}=\{0,S,+,\times\}$ 为一阶算术语言, 则 $\mathfrak{N}$ 为一个 $\mathscr{L}$ 结构, 其域为全体自然数之集合 N, $\mathscr{L}$ 符号 $0,S,+,\times$ 则在其中分别解释为自然数零 0, 后继函数 $\lambda x(x+1)$, 加法函数 $\lambda xy(x+y)$ 和乘法函数 $\lambda xy(x\times y)$. 由此可见, 标准算术模型就是把一阶算术语言按自然的方式解释到通常的自然数结构中. 而一个 $\mathscr{L}$ 语句 φ 为真的, 就是指它在 $\mathfrak{N}$ 中为真, 即 $\mathfrak{N}\vDash\varphi$. 通常, 若 $\mathscr{L}$ 结构 $\mathfrak{N}^*$ 与 $\mathfrak{N}$ 同构, 也称 $\mathfrak{N}^*$ 是标准算术结构或模型.

标准算术模型(standard arithmetic model) 即"标准算术结构".

算术性(arithmeticity) 递归论术语. 反映数论谓词(关系)能否由一阶算术理论来表示的性质. 数论谓词 P 具有算术性(即称 P 为算术谓词、或算术关系), 是指存在一个一阶算术公式 φ 在 Ω 中表示 P, 即对任何自然数 n, $P(n)$ 成立, 当且仅当

$$\varphi(\bar{n}) \quad (\bar{n} \text{ 为} \underbrace{SS\cdots S}_{n\text{个}}0)$$

是 Ω 中的真语句. 所有丢番图关系都是算术关系, 从而由马蒂雅塞维奇(Matijasevich, A.)-鲁宾孙(Robinson, J. B.)-戴维斯(Davis, M. D.)-普特南(Putnam, H.)关于希尔伯特第 10 问题的解答知, 所有递归关系都是算术关系. 实际上, 所有算术关系都是由递归关系出发经过逻辑运算而得到的. 关于算术性的最引人注目的结论是波兰学者塔尔斯基(Tarski, A.)于 1933 年证明的定理: 算术的真假性不是算术的. 即不存在一个算术公式 φ, 使 $\varphi(\bar{x})\in\Omega$, 当且仅当(在某种确定的编码之下)以 x 为编码的算术公式 β 是算术地真的(即 $\beta\in\Omega$).

算术关系(arithmetical relation) 见"算术性".

算术化(arithmetization) 亦称哥德尔编码技巧. 一种证明方法. 它是美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)在证明不完备性定理时首先明确使用的. 根据这种方法, 可以把形式系统中的讨论对象(符号、项、公式、证明等)转化为算术对象进行讨论. 具体地, 如果形式系统 S 中只有可数个原始符号 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 则可对它们进行编码, 如 $\ulcorner a_i\urcorner=2i+1$ (形式符号(串) α 的码号用 $\ulcorner\alpha\urcorner$ 表示). 然后, 对 S 中的任何符号串(如公式, 项等) $\alpha=a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_n}$ 进行编号: $\ulcorner\alpha\urcorner=2^{\ulcorner a_{i_0}\urcorner+1}\cdot 3^{\ulcorner a_{i_1}\urcorner+1}\cdot\cdots\cdot P_n^{\ulcorner a_{i_n}\urcorner+1}$ (其中 P_n 为第 n 个质数). 类似地, S 中的任何符号串序列(如证明过程等) $\Gamma=\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 也可进行编号

$$\ulcorner\Gamma\urcorner=\prod_{i=0}^{n}P_i^{\ulcorner\alpha_i\urcorner+1}.$$

在这样处理之后, 对 S 的讨论就可转化为关于算术对象的讨论. 因为所论及的公式的证明可对应于某些自然数(即它们的编码), 而这些公式的证明所满足的条件可由一个数论谓词来刻画. 从而, 形式系统 S(在哥德尔编码之后)变成了一种算术系统. 哥德尔编码的具体方法不限于上述一种. 但是, 无论在哪一种方法之下, 形式对象 α 的码 $\ulcorner\alpha\urcorner$ 都称为 α 的哥德

尔码或哥德尔数.

哥德尔码(Gödel coding) 见"算术化".

哥德尔数(Gödel coefficient) 见"算术化".

复合(composition) 函数的一种运算. 设 f,g 都是一元函数,对它们进行复合运算,可得函数 h,使之满足 $h(x)=f(g(x))$. 此时 h 称为(f,g 的)复合函数,并记为 $f\circ g$,一般地,函数的复合还包括下列各种情形:

1. 多处代入. 设 f 为 n 元函数,$h_1,h_2,\cdots,h_k$ 为 $k(\leqslant n)$个函数. $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$为 f 的 k 个自变元. 在 f 中自变元 x_{i_j}处均用 h_j 替代,得新函数 h,即

$$h(\bar{x}_i,\bar{x}_i^1,\cdots,\bar{x}_i^k)=f(x_1,x_2,\cdots,$$
$$h_1(x_1^1,x_2^1\cdots x_{k_1}^1),\cdots,h_k(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_{k_k}^k),\cdots,x_n)$$

(其中 $\bar{x}_i$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中除 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$外的变元,而 $\bar{x}_i^j$ 则表示 h_j 的全体自变元 $x_1^j,x_2^j,\cdots,x_{k_j}^j$). h 称为由 f 以 $h_1,h_2,\cdots,h_k$ 作 k 处代入而得的函数.

2. 变元混同. 由函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$而得新函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$.

3. 变元对调. 由函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$而得新函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$.

4. 一处特化. 由函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$而得新函数 $f(x_1,x_2,\cdots,c,\cdots,x_n)$. 其中 c 为某常元.

5. 引入哑变元. 由函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$而得新函数 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 其中 y_i 称为哑变元.

若利用本原函数,则上述各种形式的复合运算可以化归为(m,n)叠置(参见"(m,n)叠置").

(m,n)叠置((m,n)-composition) 亦称叠置. 一种特殊的复合运算. 给定一个 m 元函数 f 和 m 个 n 元函数 $g_1,g_2,\cdots,g_m$,由它们经叠置运算可得一个 n 元新函数 h,使 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))$. 函数 h 称为 $f,g_1,g_2,\cdots,g_m$ 的(m,n)叠置,记为 $f(g_1,g_2,\cdots,g_m)$. f 称为该叠置的外函数,而诸 g_i 称为内函数. 注意到利用投影函数 $I_{mn}(I_{mn}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=x_n,n\leqslant m)$. 可以由$(m,n)$叠置,把 $n(\leqslant m)$元函数 f 看成 m 元函数 $\lambda x_1x_2\cdots x_m f(Im_1(x_1,x_2,\cdots,x_m),\cdots,I_{mn}(x_1,x_2,\cdots,x_m))$,把诸内函数看成具有相同的变元数. 因此,$(m,n)$叠置中对诸 g_i 的变元数要求并不是至关重要的. 此外,若允许使用常值函数及广义幺函数,则任何复合运算都可以化归为(m,n)叠置(参见"复合").

内函数(interal function) 见"(m,n)叠置".

外函数(exterior function) 见"(m,n)叠置".

配对函数(pairing function) 一种特殊的数论函数. 利用它可以建立二元自然数对与自然数之间的一种对应,并由此可以把多元函数的讨论变为对一元函数的讨论. 设 P 为二元函数,R,L 为一元函数,若它们满足下列配对条件:$RP(x,y)=y\ \&\ LP(x,y)=x$. 则称 P,R,L 为一个配对函数组,P 称为配对合函数或配对函数,R,L 分别为右函数和左函数. 设 P 为配对函数,则可以把 $P(x,y)$之值看成对二元对$\langle x,y\rangle$的一种编码. 特别地,当 P 之值域为 ω 时,P 建立了 $\omega\times\omega$ 与 ω 之间的一一对应,此时 P 称为一一配对函数. 例如

$$P(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+2xy+3x+y)$$

就是一个一一配对函数(它称为 Cantor 编码函数). 配对函数概念可以推广到多元情形. 一个 n 元函数 P_n 及 n 个一元函数 $K_1,K_2,\cdots,K_n$,若满足 n 元配对条件:$K_iP_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i$(对任何 $i\leqslant n$),则称之为 n 元配对函数组. P_n 则可特称为 n 元配对函数.

数论函数(number-theoretic function) 一种特殊函数. 指自变元和函数值均取值于自然数的函数. 若 f 为 n 元函数,并且

$$\mathrm{dom}\ (f)=\omega^n\ \&\ rang\ (f)\subseteq\omega,$$

则称 f 为 n 元数论函数. 若 φ 为 n 元部分函数,而且

$$\mathrm{dom}(\varphi)\subseteq\omega^n\ \&\ rang(\varphi)\subseteq\omega,$$

则称 φ 为部分数论函数;当 $\mathrm{dom}(\varphi)=\omega^n$ 时,特称为全数论函数. 类似地,若 n 元谓词 P 的定义域是 ω^n 之子集时,称 P 为数论谓词.

部分数论函数(partial number-theoretic function) 见"数论函数".

全数论函数(all number-theoretic function) 见"数论函数".

数论谓词(number-theoretic predicate) 见"数论函数".

特征函数(characteristic function) 一种特殊函数. 设 P 为 n 元谓词,若函数 f 满足:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}1 & (P(x_1,x_2,\cdots,x_n)),\\0 & (\text{其他})\end{cases}$$

(有些文献中把上述 1 与 0 互转). 则称 f 为 P 的特征函数. 不难看出,P 的特征函数 f 很好地刻画了 P 的性质,因此,在许多情况下,对 P 的讨论可以由对 f 的讨论替代. 此外,若 A 为一个集合,则谓词 $x\in A$ 的特征函数 f 也称为 A 的特征函数,即

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\0 & (\text{其他}).\end{cases}$$

通常,集合 A 的特征函数(在不致引起混淆的情况下)常用 A 表示. 即有$(A(x)=1\leftrightarrow x\in A)\ \&\ (A(x)=0\leftrightarrow x\notin A)$. 由于谓词(集合)与其特征函数之间有一一对应关系,而且它们的基本性质在这种对应关系之下保持. 因此,当某谓词 P(或集合 A)具性质 Q,也称它们的特征函数具性质 Q,反之亦然. 例如,

谓词 P(或集合 A)是递归的,是指其特征函数为递归的.

凑合定义(definition by conditions) 定义函数的一种方式. 设 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 为 m 个互不可兼(即不能同时为真)的 n 元谓词,$g_1,g_2,\cdots,g_{m+1}$ 为 $m+1$ 个已知函数,则如下定义函数 f 的方法称为凑合定义:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) & (P_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)),\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) & (P_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)),\\ g_{m+1}(x_1,x_2,\cdots x_n) & (\text{其他}).\end{cases}$$

若令 $\bar{P}_i$ 为 P_i 的特征函数,则上述凑合定义的函数 f 可以表成

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ &=g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\times \bar{P}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots\\ &\quad+g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\times \bar{P}_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ &\quad+g_{m+1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)N(\bar{P}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots\\ &\quad+\bar{P}_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))\end{aligned}$$

可见凑合定义(借助于加法、乘法及 N 函数)可以化归为叠置.

算术差(arithmetical difference) 一种数论函数. 对任何两个自然数 x,y,它们之差可能是负数. 因此,通常的差函数 $\lambda xy(x-y)$ 并不是数论函数. 但是,差函数的下列修改形式是一个数论函数:

$$x\dot{-}y=\begin{cases}x-y & (x\geqslant y),\\ 0 & (\text{其他}).\end{cases}$$

此函数称为算术差或点减. 与通常的差函数相应的另一个数论函数是绝对差 $x\dot{-}\!\!\dot{}\,y$,它表示自然数 x,y 之差的绝对值,即 $x\dot{-}\!\!\dot{}\,y=|x-y|$. 因此

$$x\dot{-}\!\!\dot{}\,y=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x).$$

前驱函数可用算术差表示出来: $Dx=x\dot{-}1$. 反之,算术差 $x\dot{-}y$ 可定义为 x 的第 y 个前驱. 也可以用原始递归式(实为原始复迭式)定义出来:

$$\begin{cases}x\dot{-}0=x,\\ x\dot{-}Sy=D(x\dot{-}y).\end{cases}$$

绝对差(absolute difference) 见"算术差".

算术商(arithmetical quotient) 亦称整商. 一种数论函数. 是与通常的商函数 $\lambda xy(x/y)$ 相应的数论函数. 即

$$\lambda xy[x/y],$$

其中 $[u]$ 表示不超过 u 的最大整数. 为了处理上的方便,约定 $[x/0]=0$. 如果以 rs 表示剩余函数,则有恒等式

$$x=y\cdot\left[\frac{x}{y}\right]+rs(x,y).$$

利用 N 函数、加、乘及算术差函数,算术商可以由原始递归定义如下:

$$\begin{cases}\left[\dfrac{0}{y}\right]=0,\\ \left[\dfrac{sx}{y}\right]=\left[\dfrac{x}{y}\right]+N\left(sx\dot{-}y\cdot S\left[\dfrac{x}{y}\right]\right).\end{cases}$$

整商(integral quotient) 即"算术商".

剩余函数(residual function) 二元数论函数. 对任何自然数 $x,y(y\neq 0)$,以 y 除 x 后所得之剩余记为 $rs(x,y)$,称 rs 为剩余函数. 为方便起见,约定 $rs(x,0)=x$. 因此,rs 便成为一个全的数论函数. 用算术商、乘及点减函数,剩余函数可表为

$$rs(x,y)=x\dot{-}y\cdot\left[\frac{x}{y}\right].$$

此外,剩余函数还可由原始递归定义如下:

$$\begin{cases}rs(0,y)=0,\\ rs(Sx,y)=Srs(x,y)N(y\dot{-}Srs(x,y)).\end{cases}$$

N 函数(N-function) 一种数论函数. 它的性质与逻辑连结词"非"很相似,其定义为

$$\begin{cases}N0=1,\\ NSx=0.\end{cases}$$

N 函数值是否为零,正好与自变元值是否为零相反(N 取自于 Negation 的首字母). 若令 $N^2x=NNx$,则 N^2x 之值将视 x 是否为零而取 0 或 1. 所以函数 N^2 称为符号函数由一元 N 函数可以导出下列的二元 N 函数(亦称退化乘)$\lambda xy(xNy)$,其定义为

$$\begin{cases}xN0=x,\\ xNSy=0.\end{cases}$$

exp 函数(exp-function) 一种数论函数. 依算术基本定理,任何一个自然数 n 都可惟一地分解成一些质数方幂的乘积形式,在第 a 个质数 p_a 上的方幂数记为 $\exp_a(n)$. 例如 $\exp_1(9)=2,\exp_3(9)=0$等. 函数 $\lambda x\exp_a(x)$ 称为一元 exp 函数,而 $\lambda xy\exp_x(y)$ 则称为二元 exp 函数. 利用 exp 函数,算术基本定理可以表述成

$$n=\prod_{i\leqslant n}p_i^{\exp_i(n)}N^2n.$$

二元 exp 函数常记为 $\exp(x,y)=\exp_x(y)$. 由最小数算子,exp 函数可定义为

$$\exp_a(x)=\mu y(Nrs(x,p_a^y)=0).$$

整方根函数(integer square root function) 一种特殊函数. 若以 $\sqrt{x}$ 表示 x 的算术平方根,则函数 $\lambda x([\sqrt{x}])$ 便称为整方根函数,其中 $[a]$ 表示 a 之最大整数部分. 用原始递归式,整式方根函数可定义为

$$\begin{cases}[\sqrt{0}]=0,\\ [\sqrt{Sx}]=[\sqrt{x}]+N(Sx\dot{-}(S[\sqrt{x}])^2).\end{cases}$$

一般地,对 n 次方根 $\sqrt[n]{x}$,也有相应的 n 次整方

根函数 $\lambda x([\sqrt[n]{x}])$. 注意到 $[\sqrt{x}]^2$ 是不大于 x 的最大平方数，由 $Ex=x\dot{-}[\sqrt{x}]^2$ 定义的函数 E 称为平方剩余函数. 任一自然数 x 都可表成不超过 x 的最大平方数及平方剩余之和，即

$$x=[\sqrt{x}]^2+Ex.$$

平方剩余函数(square residual function)　见“整方根函数”.

本原函数(fundamental functions)　一类基本的数论函数. 它包括后继函数 S、零函数 0 及投影函数 I_{mn}(亦称广义幺函数). 由于这些函数是最基本、最简单而又可以直接定义的函数，因此，在递归论中所讨论的每一个非平凡的函数类都包含这些函数，并常以它们作为开始函数(参见“递归生成函数类”). 虽然只有三种本原函数，但却有无穷多个函数，这是因为投影函数有无穷多个.

次递归函数(subrecursive function)　一类可计算函数. 其特点是这种函数的计算复杂性可预先估计. 例如，斐波那契函数 $f(f(0)=f(1)=1, f(x+2)=f(x)+f(x+1))$ 在 $x(\geqslant 2)$ 处的值可用 $x-1$ 次加法运算而得，因此称 f 为次递归函数. 此外，原始递归函数、初等函数、多项式时间可计算函数等都是次递归函数. 由于次递归函数要比一般的递归函数具有较低的计算复杂性，有着十分重要的应用价值和理论意义，因此，对次递归函数的研究已成为递归论中的非常活跃的研究分支.

初等函数(elementary function)　一类数论函数. 它是由卡尔马(Kalmár, L.)首先引进的. 初等函数类常用 ε 表示. 它是从本原函数、加法函数、乘法函数和算术差函数等函数出发，经过叠置、叠加($\sum\limits_{t\leqslant n}$)和迭乘($\prod\limits_{t\leqslant n}$)运算而得的函数类. 在初等数论中常见的数论函数都是初等函数. 但是函数

$$f(x,y)=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{y}}}}}}\Big\}x\text{个}$$

(即 $f(0,y)=y, f(Sx,y)=2^{f(x,y)}$)却是 ε 的控制函数而不是初等函数. 初等函数类有许多等价的定义方法. 例如，以本原函数及 $x+y, x^y$ 为开始函数，由受限原始递归式或受限最小数算子同样能得到初等函数类 ε. 特别地，律庭(Rödding, D.)于 1964 年证明了 ε 可由有限多个函数出发，单用复合运算而生成，即 ε 是一个复合集，而 $\{x\dot{-}1, [x\cdot y], 2^{x+y}, \sigma(x)\}$ 及 $\{x+1, [x/y], x^y, \exp_0(x)\}$ 都是 ε 的一个基. 其中 $\sigma(x)$ 之值为 x 的二进展式中 1 的个数. 此外，ε 恰好是格才高尔契克分层中的第 3 层 ε_3.

初等谓词(elementary predicate)　一种数论谓词. 若数论谓词 P 的特征函数为初等函数，则称 P 为初等谓词，若一个集合 A 的特征函数为初等函数，则称 A 为初等递归集，简称初等集.

初等递归集(elementary recursive set)　见“初等谓词”.

最小数算子(the least number operator)　一种特殊算子. 指基于自然数的最小数原理引进的. 由数论谓词定义数论函数的一种运算子. 设 P 为 $n+1$ 元数论谓词，对任何 $\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$)，使 $P(\boldsymbol{x},y)$ 成立之最小的 y(如存在的话)记为 $\min\limits_y P(\boldsymbol{x},y)$，其值当然依赖于 $\boldsymbol{x}$，因此可以看成 $\boldsymbol{x}$ 的一个函数

$$g(\boldsymbol{x})=\min_y P(\boldsymbol{x},y),$$

并约定当 $\neg\exists yP(\boldsymbol{x},y)$ 时，

$$\min_y P(\boldsymbol{x},y)$$

无定义. 此时，部分函数 g 称为由谓词 P 经最小数算子作用而得的函数. 最小数算子称为 min 算子. 最小数算子还有一种受限形式，即受限最小数算子 $\min\limits_{y\to z}$，其定义如下：

$$\min_{y\to z}P(\boldsymbol{x},y)=\begin{cases}\min\limits_y(P(\boldsymbol{x},y)\,\&\,y<z) & (\exists\, y<zP(\boldsymbol{x},y)),\\ z & (\text{其他}).\end{cases}$$

因此，对 P 施以受限最小数算子，得一个 $n+1$ 元函数

$$g(\boldsymbol{x},z)=\min_{y\to z}P(\boldsymbol{x},y).$$

它是一个全函数. 注意，只要不与 μ 算子相混淆，

$$\min_y P(\boldsymbol{x},y)$$

或 $\min\limits_{y\to z}P(\boldsymbol{x},y)$ 记为 $\mu yP(\boldsymbol{x},y)$ 和 $\mu y<zP(\boldsymbol{x},y)$.

受限最小数算子(bounded least number operator)　见“最小数算子”.

最小根算子(the least root operator)　一种特殊算子. 指由最小数算子导出的作用在数论函数上产生新的数论函数的一种算子 $\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}$. 设 f 为 $n+1$ 元函数，f 经 rti 作用得新函数

$$g(\boldsymbol{u})=\underset{t}{\mathrm{rti}}\,f(\boldsymbol{u},t)=\min_t(f(\boldsymbol{u},t)=0).$$

此时，$g(\boldsymbol{u},x)$ 可能是部分函数. 最小根算子也有其受限形式，即受限最小根算子 $\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}$，其定义为

$$\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}\,g(\boldsymbol{u},t)=\begin{cases}\underset{t}{\mathrm{rti}}\ g(\boldsymbol{u},t) & (\exists\, t<x(g(\boldsymbol{u},t)=0)),\\ x & (\text{其他}).\end{cases}$$

就定义函数的力量而言，受限最小根算子与受限原始递归式相当. 而 $\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}$ 可由叠加与迭乘表示为

$$\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}\,g(\boldsymbol{u},t)=\sum_{t\to x}\prod_{i\to t}N^2g(\boldsymbol{u},i).$$

它也可由受限原始递归式表示为

$$\begin{cases}\underset{t\to 0}{\mathrm{rti}}\ g(\boldsymbol{u},t)=0,\\ \underset{t\to Sx}{\mathrm{rti}}\,g(\boldsymbol{u},t)=\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}\ g(\boldsymbol{u},t)+N^2g(\boldsymbol{u},\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}\ g(\boldsymbol{u},t)),\\ \underset{t\to 0}{\mathrm{rti}}\ g(\boldsymbol{u},t)\leqslant x.\end{cases}$$

受限最小根算子(bounded least root operator) 见"最小根算子".

μ 算子(μ-operator) 亦称 μ 递归. 最小数算子的一种改进形式. 对最小数算子 min 而言,若 f 为能行可计算函数,而

$$g(\boldsymbol{x}) = \min_y(f(\boldsymbol{x},y) = 0),$$

则 g 可能不是能行可计算的. μ 算子的引进正是为了克服这种缺点,其定义如下:

$$h(\boldsymbol{x})=\mu y(f(\boldsymbol{x},y)=0)$$
$$=\begin{cases}\min\limits_y(f(\boldsymbol{x},y)=0) & (\exists z(f(\boldsymbol{x},z)=0\ \&,\\ & \forall u<z(f(\boldsymbol{x},u)\downarrow\neq 0))),\\ \uparrow & (\text{其他}).\end{cases}$$

其中 $f(\boldsymbol{x},u)\downarrow\neq 0$ 表示 $f(\boldsymbol{x},u)$ 有定义且其值大于零. 由定义可知,只要 f 是能行可计算的(即部分递归)函数. 则 $\mu y(f(\boldsymbol{x},y)=0)$ 也是能行可计算的,其值可以通过依次计算 $f(\boldsymbol{x},0)$,$f(\boldsymbol{x},1)$,…之值求出. 若有某个 y 使 $f(\boldsymbol{x},y)$ 无定义或对任何 y,$f(\boldsymbol{x},y)$ 均不取 0 值,则 $\mu y(f(\boldsymbol{x},y)=0)$ 便无定义. 因此,μ 算子常被称为最小搜寻算子. μ 算子也有其受限形式,即受限 μ 算子,它实际上与受限最小数算子相同,即

$$\mu y<z(f(\boldsymbol{x},y)=0)=\min_{y\to z}(f(\boldsymbol{x},y)=0).$$

值得指出的是,μ 算子是仅作用于函数的,对一般的谓词 P,$\mu yP(\boldsymbol{x},y)$ 则是指一般的最小数算子作用 $\min\limits_y P(\boldsymbol{x},y)$.

μ 递归(μ-recursion) 即"μ 算子".

最小搜寻算子(the least search operator) 见"μ 算子".

迭函算子(function-iteration operator) 一类迭代算子. 设 A 为一个二元函数,把它看成一个二元运算并进行复迭运算,便可得到迭 A 算子 $\underset{t\to x}{A}$,其递归定义为:

$$\begin{cases}\underset{t\to t,0}{A}f(\boldsymbol{u},t) = u,\\ \underset{t\to u,Sx}{A}f(\boldsymbol{u},t) = A(\underset{t\to u,x}{A}f(\boldsymbol{u},t),f(u,x)).\end{cases}$$

所有迭 A 算子统称为迭函算子. 常见的迭函算子有:

叠加算子 $\sum\limits_{t\to x}f(\boldsymbol{u},t) = \underset{t\to 0,x}{+}f(\boldsymbol{u},t)$,

迭乘算子 $\prod\limits_{t\to x}f(\boldsymbol{u},t) = \underset{t\to 1,x}{\times}f(\boldsymbol{u},t)$,

迭大算子 $\max\limits_{t\to x}f(\boldsymbol{u},t)=\max\limits_{t\to 0,n}f(\boldsymbol{u},t)$,

迭小算子 $\min\limits_{t\to x}f(\boldsymbol{u},t)=\min\limits_{t\to f(0),n}f(\boldsymbol{u},t)$.

值得注意的是,迭小算子 $\min\limits_{t\to x}$ 是作用于函数,而最小数算子 $\min\limits_{t\to x}$ 则是作用于谓词的.

原始递归模式(primitive recursion schema) 递归论术语. 指定义函数的一种方法. 给定一个 n 元函数 g 和 $n+2$ 元函数 h,由下式可以定义一个 $n+1$ 元新函数 f:

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{x},0) = g(\boldsymbol{x}),\\ f(\boldsymbol{x},Sy) = h(\boldsymbol{x},y,f(\boldsymbol{x},y)).\end{cases}$$

上式称为原递归式或原始递归模式. 其中 y 称为递归变元,$\boldsymbol{x}$ 称为参数. 此时,函数 f 称由 g,h 经原始递归定义的函数,或称 f 是原始递归于 g,h 的. 原始递归模式定义函数的特点是:直接指定函数在 $y=0$ 处的值,而对其在 $y+1$ 处的值则利用一些已知函数及新函数在 y 处的值来确定. 因此,新函数的值可依递归变元逐步减小而逐步递推求得. 这正是递归一词的来源. 此外,又由于这种递推的过程是比较简单的(相对于一般递归而言),因此,特称为原始递归. 这个名称最初是由挪威数学家斯科朗(Skolem, A. T.)于 1936 年引进的. 就定义函数的能力而言,原始递归式有许多等价形式,它们都是原始递归式的变种(参见"原始复迭式"、"串值递归式"、"联立递归式"、"参数变异递归式"、"嵌套递归式"、"多重递归式"等).

原始复迭式(primitive iteration schema) 递归论术语. 指由函数叠置引申出来的一种函数定义模式. 设 g 为一元函数,则由 g 关于自复合可得

$$g(x),g(g(x)),\cdots,\underbrace{g(\cdots g(x)\cdots)}_{n\text{次}}$$
$$(\text{记为 } g^{(n)}(x)),\cdots$$

若约定 $g^0(x)=x$,则可得一个二元函数 f,使 $f(x,y)=g^{(y)}(x)$. 此时,f 满足:

$$\begin{cases}f(x,0) = x,\\ f(x,Sy) = g(f(x,y)).\end{cases}\tag{1}$$

一般地,给定 h,g,可定义函数 f 为

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{x},0)=g(\boldsymbol{x}),\\ f(\boldsymbol{x},Sy)=h(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x},y)).\end{cases}\tag{2}$$

(2)式称为原始复迭(模)式. y 为递归变元,$\boldsymbol{x}$ 为参数. 原始复迭式是原始递归式的一种特例,其特征是在第二式中递归变元不独立出现.

串值递归式(course of value recursion schema) 原始递归式的一种推广形式. 其基本思想是:在定义某个数论函数 f 时,先直接定义其在 0(或其他若干处)的值 $f(0)$,然后,对任何非零自然数 n,在定义 f 在 n 处的值 $f(n)$ 时,可以利用所有(或某些)$f(0)$, $f(1)$,…,$f(n-1)$之值. 例如,斐波那契函数 F 的定义就是一个串值递归式:

$$\begin{cases}f(0) = 1,\quad F(1) = 1,\\ F(n+2) = F(n+1) + F(n).\end{cases}$$

一般地,若利用序列算子,并令

$$f^*(x) = \underset{t\to x}{\mathrm{Seq}}f(t) = \prod_{t\leqslant x}P_t^{f(t)},$$

则串值递归式的一般形式为

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x},0) = g(\boldsymbol{x}), \\ f(\boldsymbol{x},Sy) = h(\boldsymbol{x},y,f^*(\boldsymbol{x},y)), \end{cases}$$

其中 y 为递归变元，$\boldsymbol{x}$ 为参数. 当 $h(\boldsymbol{x},y,z)$ 形如 $h_1(\boldsymbol{x},y,\exp(z,y))$ 时，串值递归式即成为原始递归式，即原始递归式是串值递归式的特例. 另一方面，串值递归式可以化归为原始递归式.

算子化归(reduction of operators)　递归论术语. 反映算子间定义函数能力强弱的一种关系. 设 α,β 都是算子，若 α 定义函数的能力不超出 β 定义函数的能力，即任何由 α 从函数集 C 出发可以定义的函数，亦可以由 β 从 C 出发并借助于若干个常函数及复合运算而定义出来，则称 α 可以化归到 β. 而刻画由 β 定义所有由 α 定义函数的过程称为 α 到 β 的化归. 若 Γ,Δ 为算子集，且 Γ 中任何算子可以化归到 Δ 中某个或某几个算子，则称 Γ 可化归到 Δ. 例如，由于

$$\underset{t\to x}{\mathrm{rti}} f(t) = \sum_{t\to x} \prod_{i\to t} N^2 f(i),$$

故 rti 可以化归到 Σ 和 Π.

联立递归式(simultaneous recursion schema)　原始递归式的一种推广形式. 指同时定义多个函数而又不能独立开来的一种函数定义方式. 例如，给定函数 A,B,C,D，由下列同时定义的函数 f,g：

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x},0)=A(\boldsymbol{x}), \\ g(\boldsymbol{x},0)=B(\boldsymbol{x}), \\ f(\boldsymbol{x},Sy)=C(\boldsymbol{x},y,f(\boldsymbol{x},y),g(\boldsymbol{x},y)), \\ g(\boldsymbol{x},Sy)=D(\boldsymbol{x},y,f(\boldsymbol{x},y),g(\boldsymbol{x},y)). \end{cases}$$

就是一个二重的联立递归式. 一般地，多重联立递归式与此类似，只是形式上略为复杂一些. 当 $A=B,C=D$ 时，上述联立递归式蜕化为原始递归式. 另一方面，一般的联立递归式都可化归为原始递归式.

多重递归式(multiple recursion schema)　原始递归式的一种等价形式. 指具有多个递归变元的递归定义函数的模式. 当递归变元个数为 n 时，称为 n 重递归式，简称 n 递归. 以二重递归为例，首先考虑二元数对的字典排列次序 $\prec$，即 $\langle x,y\rangle \prec \langle u,v\rangle$ 指 $x<u$ 或 $x=u$ & $y<v$. 二重递归是关于次序 $\prec$ 进行递归定义，即在定义 f 于 $\langle x,y\rangle$ 处的值 $f(x,y)$ 时，允许利用满足 $\langle u,v\rangle \prec \langle x,y\rangle$ 的 $\langle u,v\rangle$ 处的值 $f(u,v)$. 以下是一种(带参数的)二重递归形式：

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u},0,0)=A_1(\boldsymbol{u}), \\ f(\boldsymbol{u},0,x_2+1)=A_2(\boldsymbol{u},x_2,f(\boldsymbol{u},o,\widetilde{x}_2)), \\ f(\boldsymbol{u},x_1+1,0)=A_3(\boldsymbol{u},x_1,f(\boldsymbol{u},\widetilde{x}_1,\hat{x}_2)), \\ f(\boldsymbol{u},x_1+1,x_2+1)=A_4(\boldsymbol{u},x_1,x_2,f(\boldsymbol{u},\widetilde{x}_1,\hat{x}_2), \\ \qquad\qquad f(\boldsymbol{u},x_1+1,\widetilde{x}_2)), \end{cases}$$

其中 $\widetilde{x}_i \leqslant x_i$，$\hat{x}_i$ 取值没有限制，而它们本身又可以是 $\boldsymbol{u},x_1,x_2$ 的函数，并且不同的出现可以是不同的函数. 若在 $\hat{x}_i$ 表达式中仍含有新函数 f 的出现，则称为嵌套的二重递归，否则便是无嵌套的. 例如，下列的阿克曼函数定义式便是一个嵌套的二重递归式：

$$\begin{cases} A(0,n)=n+1, \\ A(m+1,0)=A(m,1), \\ A(m+1,n+1)=A(m,A(m+1,n)). \end{cases}$$

对一般的 n 重递归式也有嵌套和无嵌套之分. 若 n 重递归式是无嵌套的，则它可化归到原始递归式. 而嵌套的多重递归式则不然. 例如，上述函数 A 就不是原始递归的. 一般地，彼得(Peter,R.)证明了 n 重递归式都可化归成正规 n 重递归式：

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \ (x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n=0), \\ f(x_1+1,\cdots,x_{n+1})=A(x_1,\cdots,x_n,f_1,\cdots,f_n). \end{cases}$$

其中　$f_i=f(x_1+1,\cdots,x_{i-1}+1,x_i,$

$B_1^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1+1,\cdots,x_{n-1}+1,x_n)),\cdots,$

$B_{n-i}^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1+1,\cdots,x_{n-1}+1,x_n)))$

$(i=1,2,\cdots,n),$

A,B 均为已知函数.

正规 n 重递归式(regular n-recursion schema)　见“多重递归式”.

控制函数(dominating function)　一种特殊函数. 是递归证明中常用的一种函数. 若对某个 $\boldsymbol{a}$ 和任何 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{a}$，均有 $g(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{x})$，则称 f 为 g 的控制函数(或称 f 控制 g，或 f 强于 g). 如果 Δ 为一个函数集合，g 为一个二元函数，若对任何 $f\in\Delta$，存在 t 和 a，使得当 $u=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant a$ 时，均有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<g(t,u)$. 则称 g 为 Δ 的控制函数. 直观上，g 为 Δ 的控制函数指 g“控制”Δ 中的每一个函数，因而，Δ 的控制函数 g 必定不属于 Δ，证明 g 是 Δ 的控制函数，是证明 g 不属于 Δ 的一种常用方法.

通用函数(universal function)　递归证明中常用的一种函数. 设 Δ_n 为一个 n 元函数集合. 若 $n+1$ 元函数 g 满足下列两个条件：

1. 对任何 t，$\lambda x_1,x_2,\cdots,x_n g(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 Δ_n 的函数；

2. 对任何 $f\in\Delta_n$，存在 t，使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(t,x_1,x_2,\cdots,x_n);$$

则称 g 为 Δ_n 的一个通用函数. 若 Δ 是一般的函数集，g 是一个二元函数并满足下列条件：

1. 对任何 t 和 n，$\lambda x_1x_2\cdots x_n g(t,\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle)$ 是 Δ 的函数，其中 $\langle,\cdots,\rangle$ 为某个确定的(n 元)配对函数；

2. 对任何 n 和任何 n 元函数 $f\in\Delta$，存在 t，使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(t,\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle);$$

则称 g 为 Δ 的通用函数. 设 g 为 Δ 的通用函数，则 $\Delta=\{\lambda x_1 x_2\cdots x_n g(t,\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle) \mid t,n\in w\}$. Δ 中的任何函数都可由其通用函数表示出来. 正因为如此，Δ 的通用函数也称为 Δ 的枚举函数.

枚举函数(enumerating function)　见“通用函

数”.

递归生成函数类(inductively generated class of function)　一种函数类.指从给定的函数出发，经过复合及一些递归算子运算而得的全体函数组成的类.特别地，当生成算子集为空集时，又称为复合集.若它的初始函数为有穷个，那么称这些初始函数为基.设 C 为递归生成函数类.则对任何 $f\in C$，都有一个从初始函数出发经生成算子及复合运算而逐步生成 f 的过程.即若存在一个函数列：$f_0,f_1,\cdots,f_n$ 满足下列条件，则称此函数列为 f 的定义过程或生成过程.

1. $f_n=f$.

2. 对任何 $i\leqslant n$，f_i 或是初始函数，或者由某些 $f_j(j<i)$ 经生成算子或复合运算而得.

对递归生成函数类 C，常可用下列方法证明 C 中任何函数具有性质 P：先证 C 的初始函数都具有性质 P；再证 C 中具有性质 P 的函数经复合和生成算子作用而得的新函数仍具有性质 P.上述证明过程为关于 C 中函数定义过程的长度归纳证明.是一种很方便的证明方法.另外，若 F 为递归生成函数集 C 的初始函数集，Q 为其生成算子集，则 C 为满足下列条件的最小函数类 C：$F\subseteq C\ \&\ C$ 关于 Q 中算子及复合运算封闭.

函数的生成过程(derivation of function)　见“递归生成函数类”.

阿克曼函数(Ackermann function)　一种特殊函数.是一种重要的非原始递归函数.1928 年，德国数学家和逻辑学家阿克曼(Ackermann，W.)为了证明存在一个非原始递归但可计算的过程，定义了一个三元函数 A 如下：

$$A(u,0,n)=u+n,$$

$$A(u,1,n)=u\cdot n,$$

$$A(u,2,n)=u^n,$$

$$\begin{cases}A(u,m+1,0)=u,\\ A(u,m+1,n+1)=\overline{A(u,m,A(u,m+1,n))}\end{cases}\quad(m\geqslant 2),$$

并证明了 A 是可计算的非原始递归函数.1935 年，彼得(Peter，R.)把 A 简化成下列函数 f：

$$\begin{cases}f(0,n)=2n+1,\\ f(m+1,0)=f(m,1),\\ f(m+1,n+1)=f(m,f(m+1,n)).\end{cases}$$

1948 年，美国数学家鲁宾孙(Robinson，R. M.)又把上述第一式改为 $f(0,n)=n+1$，而且它们都是可计算的非原始递归函数.实际上，f 是原始递归函数类的控制函数.习惯上，上述的函数 A 以及经彼得和鲁宾孙修改后的两个函数 f 都称为阿克曼函数.有时，为了明确起见，修改过的 f 也称为阿克曼—彼得—鲁宾孙函数.

原始递归函数(primitive recursive function)　递归函数的一个子类.从本原函数出发经过复合和原始递归式作用而得的函数称为原始递归函数.即原始递归函数类是以本原函数为开始函数，以原始递归算子为生成算子的递归生成函数类.原始递归函数类是一个很大的函数类，它几乎包含了所有在数论中讨论到的函数.此外，原始递归函数都是能行可计算的.但是，并非任何能行可计算的函数都是原始递归的(参见“阿克曼函数”).原始递归函数类有许多等价的定义方式，例如以本原函数为开始函数，以原始复迭式(或原始复迭算子)为生成算子，可以得到原始递归函数类.但若用从零起的原始复迭算子 $\underset{t\to 0,x}{\mathrm{itr}}$(即在通常的原始复迭算子中限定初值只能取 0)为生成算子时，需要本原函数及绝对差函数 $\lambda xy(x\dot{-}y)$才能生成原始递归函数类.另一方面，许多在形式上比原始递归式强的算术，如串值递归式、联立递归式、(无嵌套的)多重递归式、(无嵌套的)参数变异递归式等，关于原始递归式仍是封闭的.

原始递归谓词(primitive recursive predicate)　一类数论谓词.若数论谓词 P 的特征函数是一个原始递归函数，则称 P 为原始递归谓词.

序列算子(sequence operator)　一种特殊算子.对于一个有穷数列$\langle x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle$，可以看成定义在自然数截段 $n=\{0,1,\cdots,n-1\}$上取值满足 $f(i)=x_i$(对任何 $i<n$)的有穷函数 f，进而，f 又可以看成某数论函数 g 在 n 上的限制 $f=g\upharpoonright n$.因此，对$\langle x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle$的编码可以看成某个算子 seq 对函数 g 作用后在 n 处的取值$\underset{t\to n}{\mathrm{seq}}\,g(t)$.例如

$$\underset{t\to n}{\mathrm{seq}}\,g(t)=\prod_{t\to n}P_t^{(g(t)+1)}$$

(其中 P_t 为第 t 个质数)就是这样的一种算子.它对有穷序列$\langle g(0),g(1),\cdots g(n-1)\rangle$的编码为 $2^{g(0)+1}3^{g(1)+1}\cdots P_{n-1}^{g(n-1)+1}$，一般地，若一个算子 seq 及二元函数 tm 满足下列堆积条件：对任何 n，

$$\forall x<n(tm(x,\underset{t\to n}{\mathrm{seq}}\,g(t)))=g(x),$$

则称 seq 为一个序列算子，而 tm 称为与之相应的求项函数.上例中的求项函数就是函数 $\lambda xy\exp_x(y)$.

求项函数(term function)　见“序列算子”.

哥德尔函数(Gödel's function)　一种特殊函数.是用于哥德尔编码的一种函数.美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)于 1934 年为了算术地处理有穷数列引进的一个三元函数，其定义为：

$$\beta(x,y,z)=rs(1+(z+1)y,x).$$

其中 rs 为剩余函数.此函数具有下列基本性质：

1. $\beta(x,y,z)=v$ 为一个算术关系.

2. 对任何有穷自然数序列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 可以找到两个自然数 c,d，使得对任何 $i\leqslant n$，$\beta(c,d,i)=a_i$.

由性质 2 可见，可以把数对 $\langle c,d\rangle$ 作为序列 a_0，$a_1,\cdots,a_n$ 的一个编码，而利用 β 函数则又可从 $\langle c,d\rangle$ 把诸 a_i 求出来. 因此，引进 β 函数起到与序列算子类似的作用，而 β 函数的定义仅依赖于较为简单的函数.

嵌套递归式(nested recursion schema)　递归论术语. 指一种递归定义函数的模式. 在递归定义函数 f 时，为了确定 f 在某处的值(如 $f(\boldsymbol{u},x+1)$)，可以利用在它"之前"的一些 f 之值(例如 $f(\boldsymbol{u},x)$ 等)，假若这些 f 值本身又依赖于 f 的其他一些"在前"的 f 值，则这种 f 的递归定义方式称为嵌套的. 例如：

$$\begin{cases} f(u,0)=u, \\ f(u,Sx)=h(u,x,f(u,x),f(f(u,x),x\dot{-}f(u,x))) \end{cases}$$

就是一个具二重嵌套的嵌套递归式. 多重嵌套的情形类似，只是形式更复杂一些. 此外，对具多个递归变元的递归定义式的含义也与此相仿. 一般地，嵌套的多重递归式不能化归到原始递归式.

有序递归式(ordinal recursion schema)　原始递归式的一种推广形式. 设 $<$ 为自然数的一种(严格)良序关系，不妨假定 0 为 $<$ 最小元. 若函数 θ 满足条件 $\theta(0)=0\ \&\ \forall x\in\omega(x>0\rightarrow\theta(x)<x)$，则称 θ 为($<$)前驱函数. 设 θ 为序前驱函数，g,h 为已知函数，若函数满足：

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u},0)=g(\boldsymbol{u}), \\ y>0\rightarrow f(\boldsymbol{u},y)=h(\boldsymbol{u},y,f(\boldsymbol{u},\theta(\boldsymbol{u},y))), \end{cases}$$

则称 f 为在序"$<$"上依序递归定义的函数，上述称为(关于序 $<$ 的)有序递归式. 当 $<$ 即为通常的自然数序 $<$，而 $\theta(\boldsymbol{u},x)=D(x)$ 时，上式就是通常的原始递归式. 但是，一般的有序递归式未必能化归到原始递归式. 此外，对原始递归式的各种加强形式，同样可以引进到有序递归式上来.

受限原始递归式(limited primitive recursion schema)　原始递归式的一种限制形式. 给定函数 g,h,j，如果函数 f 满足：

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u},0)=g(\boldsymbol{u}), \\ f(\boldsymbol{u},x+1)=h(\boldsymbol{u},x,f(\boldsymbol{u},x)), \\ f(\boldsymbol{u},x)\leqslant j(\boldsymbol{u},x), \end{cases}$$

则称函数 f 为(从 g,h,j 出发)经受限原始递归定义的函数，上式称为受限原始递归式. 注意到前两式实际上就是原始递归式，因此，由受限原始递归式定义的函数就是由原始递归式定义的函数，只是它进一步要求新函数值不超过某个预先给定的函数 j 的相应值罢了. 受限原始递归式的这种限制，使得它定义函数的能力远远弱于一般的原始递归式(参见"格才高尔契克分层").

复合类(composition class)　一类特殊函数. 指单用复合运算而不借助于其他算子所生成的函数. 设 F 为一个有穷函数类，若由 F 中函数出发仅用复合运算得到的函数类记为 $C(F)$，则称 $C(F)$ 为一个复合类，而 F 则称为它的一个基. 注意到若允许使用所有的常值函数及广义幺函数，则复合可以化归叠置. 因此，若存在一个有穷函数集 F，使得从 F 中函数及常值函数和广义幺函数出发经叠置可生成函数类 C，则 C 是复合类，但此时 C 的基仍是 F 而不包括常值函数和广义幺函数. 这是由复合运算与叠置运算定义函数类时的一点区别.

格才高尔契克分层(Grzegorczyk hierarchy)　递归论的基本概念之一. 是格才高尔契克(Grzegorczyk，A.)于 1953 年引进的对原始递归函数类的一种分层，简称"格氏分层"或"G 分层". 格氏首先定义了下列函数列(称为"格才高尔契克函数列")：

$$\begin{cases} f_0(x,y)=y+1, \\ f_1(x,y)=x+y, \\ f_2(x,y)=(x+1)(y+1), \\ f_{n+1}(0,y)=f_n(y+1,y+1), \\ f_{n+1}(x+1,y)=f_{n+1}(x,f_{n+1}(x,y))\quad(n\geqslant 2). \end{cases}$$

然后，定义 ε_n 为以本原函数及 f_n 为开始函数，以受限原始递归式为生成算子的递归生成函数类. 进而格氏证明了

$$\forall n\in\omega(\varepsilon_n\subset\varepsilon_{n+1})\ \&\ \bigcup_{n\in\omega}\varepsilon_n=PR$$

(PR 表示全体原始递归函数类)，即 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\omega}$ 构成 PR 的一个不塌方的分层. 1963 年，里奇(Ritchie，R. W.)证明了 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\omega}$ 定义中的格氏函数列可以改用下列更自然的阿克曼型函数列：

$$\begin{cases} g_0(x,y)=y+1, \\ g_1(x,y)=x+y, \\ g_{n+1}(0,y)=1, \\ g_{n+1}(x+1,y)=g_n(g_{n+1}(x,y),y)\quad(n\geqslant 1). \end{cases}$$

在 G 分层中，ε_3 恰好是初等函数类. 而 ε_0 则是相当简单的函数类，它以 $\lambda xy(x+y)$ 为控制函数. 但是，格氏证明了任何递归函数 f 都可表成下列范式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A(\mu y(B(x,x_1,x_2,\cdots,x_n)=0)),$$

其中 $A,B\in\varepsilon_0$. 此外，律庭(Rödding，D.)和马琴科夫(Marchenkov，S. S.)分别于 1964 年和 1969 年证明了 $\varepsilon_n(n\geqslant 3)$ 和 ε_2 都是复合集，即可由有限个开始函数经复合运算而生成. 但 $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ 是否也是复合集则尚不可知. 若以 C^* 表示函数类 C 中的 $\{0,1\}$ 值函数之集，则 $\{\varepsilon_n^*\}_{n\in\omega}$ 是一个十分有意义的函数类序列. 据格才高尔契克与里奇的工作，对任何 $n\geqslant 2$，有 $\varepsilon_n^*\subset\varepsilon_{n+1}^*$. 但 $\varepsilon_0^*\subseteq\varepsilon_1^*\subseteq\varepsilon_2^*$ 之包含关系是否也是严格的则尚不清楚. 由于 ε_2^* 与图灵机在线性空间内所接受的关系类 LISPACE 相同. 因此，上述问题亦是计算复杂性理论中的一个重要的未解决问题. 另外，G 分层还有许多形式的延伸，它们构成某个真扩张原始

递归函数类的函数类的一种分层.

格才高尔契克函数列(Grzegorczyk sequence of functions) 见"格才高尔契克分层".

等式演算(equation calculus) 一种形式系统.它最初是由美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)于1934年为定义一般递归函数类引进并加以讨论的.在这种形式系统 F 中,以等式为研究对象.基本符号有:等号=、常元0(表示数0)、常函词 S(表示后继)、数变元 $x_0,x_1,\cdots$、函词符号 $f_0^n,f_1^n,\cdots(n\in\omega$, f_i^n 表示 n 元函词).F 的项是指由常元0、变元 x_i、或零元函词 f_i^0 及其经过函数 S 和其他函数递归生成的合式表达式.特别地,由0出发,经 S 作用逐步生成的项 $0,S0,SS0,\cdots$ 称为数字.它们可分别记为 $\bar{0}$, $\bar{1},\bar{2},\cdots$ 若 t,s 为 F 的项,且 t 形如 $f_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)$(其中 $n,i\in\omega,t_1,t_2,\cdots,t_n$ 为不含 S 之外的任何函词的项,f_i^n 为 n 元函词),则称 $t=s$ 为 F 的一个等式,F 中等式组成的有穷集 ε 称为一个等式系.当等式系 ε 中诸等式内所出现的全体函词为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 所出现的全体变元为 $\boldsymbol{Z}$ 时,ε 可特记为

$$\varepsilon(f_1,f_2,\cdots,f_n,\boldsymbol{Z}).$$

等式演算 F 的规则仅有下列两条:

1. 代入规则.把某个等式中某个变量的所有出现都用某一个数字作代入.

2. 替换规则.若已有 $f_j^m(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_m)=\bar{c}$,则可以把某个等式中右边形如 $f_j^m(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_m)$ 的项用 $\bar{c}$ 来替换.

等式演算 F,实际上就是基于上述两条规则得到的关于等式的推导系统.可以利用它定义可计算函数(参见"埃尔布朗-哥德尔可计算函数"、"有穷可定义函数").

等式系(system of equations) 一种有穷集合.指由等式演算系统中的等式组成的集合(参见"等式演算").是美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)为寻找"最一般的递归过程"引进的.一般的原始递归式及其加强形式乃至多重递归式,都是通过有限个等式来定义函数的,例如,由

$$\{f(u,0)=u,f(u,Sx)=Sf(u,x)\}$$

就定义了一个函数 $f(u,x)=u+x$.而等式系则可以含任何有限个"等式",这种等式的左边必须形如 $f_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,其中 f_i^n 为一个 n 元函词,而 t_i 为一些项,且其中除了 S 之外不含其他函词.上述的递归式以及一般的多重递归式都由具有这种形状的递归式所组成.若等式系 ε 所含的全体函词和自由变元为 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 及 $\boldsymbol{Z}$,则 ε 记为

$$\varepsilon(f_0,f_1,\cdots,f_n,\boldsymbol{Z}).$$

有穷可定义函数(finitely definable function) 亦称等式系有穷可定义函数.一种由等式系定义的函数.用等式系定义函数的想法最初是由法国数学家埃尔布朗(Herbrand,J.)于1931年提出的.他称等式系 $\varepsilon(f_1,f_2,\cdots f_n,\boldsymbol{Z})$ 定义函数 f,指的是下列两个条件成立:

1. 存在函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$,满足 $\varepsilon(f_1,f_2,\cdots,f_n,\boldsymbol{Z})$ 中所有等式,即 $\exists f_1,\exists f_2,\cdots,\exists f_n\forall\boldsymbol{Z}(\varepsilon(f_1,f_2,\cdots,f_n;\boldsymbol{Z}))$.

2. 若 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 满足 ε 的每个等式,则 $f_1=f$.即 $\forall\boldsymbol{Z}\varepsilon(f_1,f_2,\cdots,f_n,\boldsymbol{Z})\rightarrow\forall\boldsymbol{x}(f_1(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}))$.也即,由 ε 可惟一地刻画函数 $f_1(=f)$.

但是,由于上述条件2缺乏能行性,因此,埃尔布朗的方法不能用以刻画全体能行可计算函数,实际上,卡尔马(Kalmár,L.)于1955年证明了埃尔布朗的等式系可定义函数(即有等式系 ε 来定义的函数)恰好与所谓超算术函数一致,这些函数已大大超出了递归函数范围.克莱瑟(Kreisel,G.)和泰特(Tait,W.W.)于1961年对埃尔布朗的定义进行了改进,把上述条件2改为下列条件:

2′. 对每个 $\boldsymbol{x}$,存在有限个 $\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Z}_2,\cdots,\boldsymbol{Z}_p$,使得只要把它们对 ε 中等式实施代入运算,便可确定 $f(\boldsymbol{x})$ 之值.即对每个 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\varepsilon(f_1,f_2,\cdots,f_n,\boldsymbol{Z}_1)\ \&\ \cdots\&\ \varepsilon(f_1,f_2,\cdots,f_n,\boldsymbol{Z}_p)\rightarrow f_1(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$.

此时,称 f 为由 ε 而有穷定义的函数.若存在等式系 ε(有穷)定义函数 f,则称 f 为(有穷)可定义函数,更明确地称为等式系(有穷)可定义函数.克莱瑟和泰特还证明了有穷可定义函数恰好为递归函数.等式系(有穷)可定义函数的概念,可以很容易推广到部分函数情况,此时称为等式系(有穷)可定义的部分函数,或简称(有穷)可定义部分函数.

等式系可定义函数(definable function by equation system) 见"有穷可定义函数".

等式系可定义部分函数(definable partial function by equation system) 见"有穷可定义函数".

埃尔布朗-哥德尔可计算函数(Herbrand-Gödel computable function) 亦称一般递归函数.一种等式系可定义函数.是美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)根据法国数学家埃尔布朗(Herbrand,J.)的暗示提出的刻画直观能行可计算函数的一类函数.设 f 为 n 元函数,ε 为有穷等式系(参见"等式系")中最后一个等式最左边的函数 f_i^n.若对任何自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 有:$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=b$,当且仅当从 ε 中的等式出发,借助于代入规则和替换规则可以导出 $f_i^n(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n)=\bar{b}$(参见"等式演算"),则称 ε(关于函词 f_i^n)定义了函数 f.若有 ε 定义 f,则称 f 为等式系可定义函数或埃尔布朗-哥德尔可计算函数.例如 $\varepsilon=\{f_1(x_1,0)=x_1,f_1(x_1,Sx_2)=Sf_1(x_1,x_2),f_2(x_1,0)=0,\ f_2(x_1,Sx_2)=f_1(x_1,f_2(x_1,x_2))\}$,则 ε 关于 f_1 定义函数 $f(x,y)=x+y$,

e 关于 f_2 定义函数

$$f(x,y)=x\cdot y.$$

原始递归函数、多重递归函数都是埃尔布朗-哥德尔可计算函数.实际上,埃尔布朗-哥德尔可计算函数恰好是依一般递归式定义的一般递归函数.埃尔布朗-哥德尔可计算函数简称 HG 可计算函数.若在定义中允许部分函数,则可以把此概念推广到 HG 部分可计算函数,它与部分递归函数一致.

埃尔布朗-哥德尔部分可计算函数(Herbrand-Gödel partial computable function) 见"埃尔布朗-哥德尔可计算函数".

μ 递归函数(μ-recursive function) 一类埃尔布朗-哥德尔可计算函数.是由美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)于 1936 年首先定义的一类函数.它是由本原函数出发,经过叠置,原始递归及 μ 递归(即 μ 算子)作用而得的函数.严格地讲,μ 递归函数类是满足下列条件的最小(全)函数类 C:

1. 本原函数在 C 中.
2. C 关于叠置封闭.
3. C 关于原始递归式封闭.
4. C 关于 μ 算子封闭.

μ 递归函数恰好为 HG 可计算函数,它们都是直观上能行可计算的函数,在上述定义中,若允许部分函数,便得到部分递归函数.此外,只要在上述定义中再增加新的开始函数 $\lambda xy(x+y)$,$\lambda xy(x\cdot y)$ 及 $eq\,(x=y\rightarrow eq\,(x,y)=1,\ x\neq y\rightarrow eq\ (x,y)=0)$,则条件 3 可以去掉.

由克林定义的 μ 递归函数.简称递归函数.递归函数有许多种等价定义形式:埃尔布朗-哥德尔一般递归函数(即 HG 可计算函数)、由一般递归式定义的一般递归函数、图灵可计算全函数等.递归函数类是原始递归函数类乃至多重递归函数类的真扩张,又是部分递归类的真子类.但是与其他几个函数类不同,递归函数类是不可能行地列举出来的.

一般递归模式(general recursive schema) 原始递归式的推广.是递归定义函数的一种最一般的方式.给定函数 g,h,k,如果函数 f 满足:

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{u},0)=g(\boldsymbol{u}),\\ f(\boldsymbol{u},Sx)=h(\boldsymbol{u},x,f(\boldsymbol{u},k(\boldsymbol{u},Sx)))\end{cases}\tag{1}$$

则称 f 是由 g,h,k 依一般递归式定义的函数.上式称为一般递归式,其中 x 为递归变元,$\boldsymbol{u}$ 为参数,k 为相函数.值得指出,当 g,h,k 都是全函数时,由(1)定义的函数却未必是全函数.实际上,对任何 $x\neq0$,$f(\boldsymbol{u},x)$有定义,当且仅当存在 n,使当 k 关于 x 的 n 次复迭 $k^n(\boldsymbol{u},x)=0$.但是,一旦 $f(\boldsymbol{u},x)$有定义,并且 g,h,k 都是能行可计算的,则 $f(\boldsymbol{u},x)$之值必可能行地求出.另外,由(1)式确定 $f(\boldsymbol{u},x)$之值时,它是逐步求出 $f(\boldsymbol{u},k(\boldsymbol{u},x)),f(\boldsymbol{u},k^2(\boldsymbol{u},x)),\cdots$ 直到有某个 n 使 $k^n(\boldsymbol{u},x)=0$,而归约到 $f(\boldsymbol{u},k^n(\boldsymbol{u},x))=f(\boldsymbol{u},0)=g(\boldsymbol{u})$.这种确定是一种递归过程.又由于(1)式可以定义出所有哥德尔一般递归函数,因此(1)式正是美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)所期望的最一般的递归模式.故可称之为一般递归式.而一般递归函数的概念应用一般递归式来定义较为合理.此外,从形式上看,一般递归式是原始递归式的一种自然推广,在一般递归式中令相函数 $k(\boldsymbol{u},x)=Dx$,便成为原始递归式.

一般递归算子(general recursion operator) 一种算子.指由一般递归式导出的算子.设 h,k 为两个函数,则算子 reg 作用到 h,k 后可得函数 f,即

$$f(\boldsymbol{v},u,x)=\underset{t_1,t_2\rightarrow u,x}{\mathrm{reg}}\{h(\boldsymbol{v},t_1,t_2),k(\boldsymbol{v},t_1)\}$$

它满足下式:

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{v},u,0)=u,\\ f(\boldsymbol{v},u,Sx)=h(\boldsymbol{v},x,f(\boldsymbol{v},u,k(\boldsymbol{v},Sx)).\end{cases}$$

一般递归算子 reg 定义函数的能力与一般递归式是相当的.

一般复迭式(general iteration schema) 原始复迭式的一种推广.一般递归式的一个特例.函数 f 经一般复迭式由 g,h,k 定义,是指 f 满足:

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{x},0)=g(\boldsymbol{x}),\\ f(\boldsymbol{x},Sy)=h(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x},k(\boldsymbol{x},Sy))).\end{cases}$$

上式称为一般复迭式,其特点是在第二式右边递归变元 y 不单独出现.但实际上,一般递归式可以化归到一般复迭式.由一般复迭式也可定义一个一般复迭算子 itg,它由下式定义:

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{x},u,0)=u,\\ f(\boldsymbol{x},u,Sy)=h(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x},u,k(\boldsymbol{x},Sy))).\end{cases}$$

并记为 $f(\boldsymbol{x},u,y)=\underset{t_1,t_2\rightarrow u,y}{\mathrm{itg}}\{h(\boldsymbol{x},t_2),k(\boldsymbol{x},t_1)\}$.

一般复迭算子(general iteration operator) 见"一般复迭式".

归宿步数式(return to zero schema) 一般递归式的一个特例.设 f 为数论函数,若它在 x 处自身复迭 m 次后取零值,即

$$f^m(x)=\underset{t\rightarrow x,m}{\mathrm{itr}}f(t)=0,$$

则称 f 在 x 处归宿于 0,而上面的这个数

$$m(=\mu n\ \underset{t\rightarrow x,n}{\mathrm{itr}}f(t)=0)$$

称为 f 在 x 处的归宿步数,记为

$$\underset{t\rightarrow x}{\mathrm{stp}}f(t).$$

它是 x 的一个函数,称之为 f 的归宿步数函数.这样,由 f 求其归宿步数函数的过程是由一个算子 stp 实现的,称此算子为归宿算子.若约定 $f^0(x)=x$,则 f 在 0 处的归宿步数为 0.因此,归宿算子 stp 对 f 作用而得的新函数

$$m(x)=\underset{t\rightarrow x}{\mathrm{stp}}f(t)$$

满足：

$$\begin{cases} m(0)=0, \\ m(x+1)=Sm(f(x+1)). \end{cases}$$

称此式为归宿步数式. 另一方面，一般递归式又可以化归到归宿步数式. 实际上，一般递归函数可由本原函数 $\lambda xy(x \dot{-} y)$，$\lambda xy([x/y])$ 作为开始函数，经叠置和归宿算子 stp 作用而生成.

归宿算子(return to zero operator) 见“归宿步数式”.

一般递归函数(general recursive function) 亦称递归函数. 一类具有能行可计算的全数论函数. 不仅如此，现在一般认为，能行可计算的全数论函数恰好就是一般递归函数(参见“丘奇论题”). 一般递归函数的概念最初是由美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel，K.)于 1934 年定义的，也就是现在所谓的埃尔布朗-哥德尔可计算函数. 即若一个数论函数可由某个等式系 ε 定义，则哥德尔称 f 为一般递归的. 1936 年，美国逻辑学家、数学家克林(Kleene，S. C.)引进了 μ 递归函数的概念，并进而证明了它恰好与哥德尔的一般递归函数类一致. 此后，一般递归函数的概念便经常用 μ 递归的形式给出. 莫绍揆于 1965 年利用一般递归式的概念提出了一般递归函数的另一种等价定义形式：从本原函数出发，经叠置和一般递归式作用而生成的函数称为一般递归式. 注意到，比起等式系或 μ 算子来，一般递归式更好地体现了一般递归的意义. 因此，利用一般递归式引入一般递归函数概念当是最为合理的. 而且也是原始递归函数概念的一种自然推广. 此外，一般递归函数恰好是部分递归函数中的全函数. 不过与全体部分递归函数不一样，全体一般递归函数不是能行可列的.

部分递归函数(partial recursive function) 一般递归函数概念对部分函数的一种自然推广. 它是具有能行可计算性的一类部分(数论)函数. 部分递归函数概念最初是由美国逻辑学家、数学家克林(Kleene，S. C.)于 1936 年引进的，是指由本原函数出发，经叠置、原始递归和 μ 算子作用生成的部分函数. 等价地部分递归函数类可定义为以本原函数为开始函数、以一般递归算子 reg 为生成算子的递归生成函数类. 一般地，在 λ 可定义函数、HG 可定义函数、有穷可定义函数等的定义中允许出现函数，便可得到一般递归函数的一种等价定义. 若依一般递归算子定义部分递归函数为例讨论，则对任何一个部分递归函数 φ，都有其导出过程：$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$. 即 $\varphi_n=\varphi$，并且对任何 $i \leqslant n$，φ_i 或是本原函数，或是由某些 $\varphi_j(j<n)$ 经代入或一般递归作用而得. 这个序列也称为 φ 的递归描述. 从而，任何部分递归函数都有其递归描述. 利用哥德尔编码技巧，对任何递归描述都可进行能行编码. 相应地，全体部分递归函数也可能行编码. 由此可以给出全体部分递归函数的一种能行枚举. 通常以 $\{f_e^{(n)}\}_{e \in w}$ 表示全体 n 元部分递归函数的一种能行枚举. e 称为 $\varphi_e^{(n)}$ 的下标. 在元数不必明指的情形下，φ_e^n 常简记为 φ_e. 按丘奇论题，部分递归函数类恰好是全体能行可计算的部分(数论)函数类. 其中的全函数恰好是全体递归函数(参见“丘奇论题”). 值得指出的是，部分递归函数类关于最小数算子是不封闭的.

递归描述(recursive description) 见“部分递归函数”.

部分递归函数范式(normal form for partial recursive function) 亦称克林范式或克林标准形. 部分递归函数的一种表达式. 它是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene，S. C.)于 1938 年给出的部分递归函数的一致性表示形式. 他证明了(部分递归函数的)克林范式定理：存在原始递归函数 u 和原始递归谓词 T_n(对任何 n)，使得任何 n 元部分递归函数 φ 可表成：

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=u(\mu y T_n(e, x_1, x_2, \cdots, x_n, y)) \quad (1)$$

式中 e 为某个常数. 当(1)式成立时，部分递归函数 φ 常记为 $\varphi_e^{(n)}$ 或 $\{e\}^{(n)}$，或(在不致引起混淆的情形)简记为 φ_e 或 $\{e\}$. 这样，$\{\varphi_e^{(n)}\}_{e \in w}$ 便是全体 n 元部分递归函数的一种能行枚举. 与此相关，还有下列常见记号：

$$\varphi_{e,s}^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} \varphi_e^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \qquad (\exists\, y<s) T_n(e, x_1, x_2, \cdots, x_n, y), \\ \uparrow \qquad (\text{其他}). \end{cases} \quad (2)$$

(2)式称为部分递归函数的克林范式. 其中的谓词 T_n 称为克林谓词. $\varphi_{e,s}$ 称为 φ_e 的 s 步有穷逼近.

克林范式(Kleene normal form) 即“部分递归函数范式”.

部分递归函数范式定理(normal form theorem for partial recursive function) 亦称克林范式定理. 简称范式定理. 关于证明部分递归函数范式存在性的一个重要定理. 它是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene，S. C.)于 1938 年证明的一个结果：存在原始递归函数 u 和(对 $n \geqslant 1$)原始递归谓词 T_n，使对任何 n 元部分递归函数 φ，都存在数 e(称为 φ 之下标)使得下列两式成立：

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \downarrow \leftrightarrow \exists y T_n(e, x_1, x_2, \cdots, x_n, y),$$

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \simeq u(\mu y T_n(e, x_1, x_2, \cdots, x_n, y)).$$

其中“$\simeq$”表示两边均有定义且值相等，或两边均无定义. 通常，$\simeq$ 也直接用 $=$ 表示. 由此，任何 n 元部分递归函数都可表成 $u(\mu y T_n(e, x_1, x_2, \cdots, x_n, y))$ 之形，此即为克林范式.

克林范式定理(Kleene normal form theorem) 即“部分递归函数范式定理”.

克林谓词(Kleene predicate) 一种原始递归谓词. 它是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)在讨论部分递归函数的范式时引进的. 直观上,克林谓词 $T_n(e,x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$为真,指以 e 为编号的能行算法在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$处的计算收敛,并且该计算过程以 y 为编码. 若以 $u(y)$表示以 y 为编码的计算过程的计算结果. 则以 e 为编码的能行算法所确定的 n 元部分递归函数为 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u(\mu yT_n(e,x_1,x_2,\cdots,x_n,y))$. 进而,克林还证明了 u 和 T_n 都可以是原始递归的,从而得到了著名的克林范式定理. 此外,T_n 关于 n 是一致的,即是把 n 也看成变元后,T_n 仍是($(n+3)$元的)原始递归谓词.

部分递归函数枚举定理(enumeration theorem for partial recursive function) 简称枚举定理或通用函数定理. 反映部分递归函数类基本性质的一个重要定理:存在一个函数列$\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$满足下列条件:

1. 对任何 e,φ_e 是 n 元部分递归函数.

2. 若 ψ 为 n 元部分递归函数,则存在 e,使得 $\psi=\varphi_e$.

3. 存在 $n+1$ 元部分递归函数 φ(称为$\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$之通用函数),使对任何 $\boldsymbol{x}$,$\varphi(e,\boldsymbol{x})=\varphi_e(\boldsymbol{x})$.

满足上述条件的$\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$称为 n 元部分递归函数的部分递归枚举或能行枚举. 枚举定理可由克林范式定理直接推出. 不仅如此,由克林谓词 T_n 关于 n 的一致性,可以证明,存在全体部分递归函数的通用函数 φ,即对任何 n,e 和 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,

$$\varphi(e,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi_e^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

值得指出的是,n 元部分递归函数的部分递归枚举并不惟一. 但是,递归论中关于部分递归函数的讨论并不依赖于任何一种具体枚举的特殊性质. 因此,通常固定一种能行枚举开展各种讨论,这并不妨碍讨论的一般性.

通用函数定理(universal function theorem) 即"部分递归函数枚举定理".

smn **定理**(smn-theorem) 亦称参数定理. 反映部分递归函数及其能行枚举基本性质的一个重要定理,它是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)于 1938 年证明的. 具体叙述如下:设$\{\varphi_e^{(n)}\}_{e\in\omega}$为 n 元部分递归函数的一种能行枚举(对任何 n). 则对 m,n,存在一个一一递归的 $n+1$ 元原始递归函数 S_n^m,满足

$$\begin{aligned}&\varphi^{(m)}_{S_n^m(e,x_1,x_2,\cdots,x_n)}(y_1,y_2,\cdots,y_m)\\&=\varphi_e^{(n+m)}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m).\end{aligned}$$

smn 定理有时也记为 S_n^m 定理,它表明当把一个 $n+m$ 元部分递归函数 $\varphi_e^{(n+m)}$ 中 n 个变元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$看成参数后所得的 n 元部分函数

$$\lambda y_1y_2\cdots y_m\varphi_e^{(n+m)}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

仍是一个部分递归函数,而且其下标(即 $S_n^m(e,x_1,x_2,\cdots,x_n)$)可以由 e 以及参数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 经某个一一(原始)递归的函数而求出.

参数定理(parameter theorem) 即"smn 定理".

部分递归函数的下标(index of partial recursive function) 全体部分递归函数的一种编号. 若$\{\varphi_e^{(n)}\}_{e\in\omega}$为 n 元部分递归函数的一种能行枚举,则称 e 为部分递归函数 $\varphi_e^{(n)}$ 关于该枚举的下标,简称下标(参见"部分递归函数范式定理"、"下标集").

下标集(index set) 由一些下标构成的递归函数集. 设$\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$为部分递归函数的能行枚举,若存在一个部分递归函数集 $\mathscr{A}$,使 $A=\{x\in\omega\mid\varphi_x\in\mathscr{A}\}$,则称 A 为下标集. 于是,对下标集 A,若它含有某个部分递归函数的某个下标,则它也含有该函数的所有的下标. 即 A 为下标集,当且仅当

$$\forall x\forall y(x\in A\ \&\ \varphi_x=\varphi_y\rightarrow y\in A).$$

由垫衬引理可知,每个部分函数在下标集中枚举无穷多次. 若 A 为下标集,则 A 为空集或是一个无穷集,不仅如此,非平凡的下标集必定不是递归的(参见"赖斯定理").

递归定理(recursion theorem) 亦称不动点定理. 反映部分递归函数类基本性质的重要定理. 最初是由美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)于 1938 年证明的. 克林所给的递归定理的原始形式为(特称为第二递归定理):若 ψ 为部分递归函数,则存在 e,使 $\varphi_e(\boldsymbol{x})=\psi(e,\boldsymbol{x})$. 与第二递归定理等价的是下列不动点定理:对任何递归函数 f,存在自然数 n(称为 f 的不动点),使 $\varphi_n=\varphi_{f(n)}$. 不动点定理有一些推广的形式:

1. 带参数的递归定理. 若 f 为 $n+1$ 元递归函数,则存在一一的 n 元递归函数 h,使

$$\varphi_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n,h(x_1,x_2,\cdots,x_n))}=\varphi_{h(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

2. 二重递归定理. 对递归函数 f,g,存在自然数 a,b,使得:$\varphi_a=\varphi_{f(a,b)}\ \&\ \varphi_b=\varphi_{g(a,b)}$.

对一个递归函数 f,其不动点不仅存在,而且一定有无穷多个,它们所组成的集合可能是递归集,也可能是非递归的. 值得指出的是,对部分递归函数,其不动点定理与第二递归定理是等价的,但两者的证明所需要的基础并不一样. 前者依赖于 S_m^n 定理和枚举定理,而后者则仅依赖于 S_m^n 定理. 因此,若一个函数类具有 S_m^n 性质但不具有枚举性(如原始递归函数类),则第二递归定理对它也成立,而不动点定理则不然. 与第二递归定理相对应的是关于部分递归泛函的第一不动点定理(美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.),于 1952 年证明的):设 $F(\alpha,x)$为部分递归泛函,则存在一个部分递归函数

α,使得:

1. $\forall x(\alpha(x)=F(\alpha,x))$;

2. $\forall x(\beta(x)=F(\beta,x))\rightarrow\alpha\subseteq\beta$;

此时 α 称为 F 的最小不动点.第一和第二不动点定理之名称纯粹是由克林的经典著作《元数学导论》中表述的先后次序而定的,别无他意.此外,在许多文献中,上述的(第二)不动点定理也称为递归定理而不加区分.

最小不动点(minimal fixed point) 见“递归定理”.

不动点定理(fixed point theorem) 各种形式的不动点定理的总称.关于部分递归函数的不动点定理常称为递归定理,而关于部分递归泛函的不动点定理则称为第二不动点定理(参见“递归定理”).

垫衬引理(Padding lemma) 反映部分递归函数能行枚举 $\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$ 基本性质的一个引理:设 φ_e 为任何部分递归函数,其下标为 e,则必定可以能行地找到 φ_e 的无穷多个不同的下标,故 $\exists^{\infty}x(\varphi_e=\varphi_x)$.因此,在能行枚举 $\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$ 中,任何部分递归函数必定出现无穷多次,即任何部分递归函数必有无穷多个下标.不仅如此,由赖斯定理知,任何部分递归函数 φ_e 的全体下标组成之集 $\theta(e)=\{x\in\omega\mid\varphi_e=\varphi_x\}$ 必定是非递归集合.

下标系统(system of index) 全体部分递归函数的一种编码方法.设 ψ 为从 ω 到全体 n 元部分递归函数的一个满射,$\psi=\{\psi^{(n)}\mid n\in\omega\}$,则 ψ 称为部分递归函数的一个下标系.约定 $\psi_e^{(n)}$ 表示 $\psi^{(n)}(e)$,并称 e 为 $\psi_e^{(n)}$ 的下标.若对任何 n,存在 a,使

$$\psi_a^{(n+1)}(e,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\psi_e^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则称 ψ 具有枚举性.若对任何 n 和 m,存在全的递归函数 S,满足

$$\begin{aligned}&\psi_{S(e,x_1,x_2,\cdots,x_n)}^{(m)}(y_1,y_2,\cdots,y_m)\\&=\psi_e^{(n+m)}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m),\end{aligned}$$

则称 ψ 可参数化.$\{\varphi_e^{(n)}\}_{e\in\omega}$ 给出了一种具有枚举性并且可参数化的下标系,该下标系特称为标准系.一般地,若下标系 ψ 与标准系能行可互换,即存在递归函数 f 和 g,使对任何 n 和 e,$\varphi_e^{(n)}=\psi_{f(e)}^{(n)}\ \&\ \psi_e^{(n)}=\varphi_{g(e)}^{(n)}$.则称下标系 ψ 为可接受的.美国数学家罗杰斯(Rogers,H.)证明了一个下标系 ψ 为可接受的,当且仅当 ψ 同时具枚举性和可参数化性质,也当且仅当存在递归置换 h,使对任何 e 和 n,$\psi_e^{(n)}=\varphi_{h(e)}^{(n)}$.对于一个可接受的下标系 ψ 来说,相应的枚举定理、参数定理、递归定理、垫衬引理都成立.从而递归论的基本内容也可相应地发展出来.因此,从某种意义上讲,递归论的讨论是不依赖于任何一种(可接受的)下标系统的.

递归集(recursive set) 具有能行可计算的自然数集.设 A 为自然数集合,若其特征函数 C_A 是递归函数,则称 A 为递归集.对递归集合 A,为了判定某个自然数 n 是否属于 A,只要计算其特征函数 C_A 在 n 处的值 $C_A(n)$ 即可.由于 C_A 的递归性,上述过程可能行地完成,从而 n 是否属于 A 是能行可判定的.$\varnothing,N$ 都是递归集,而且任何有穷集也都是递归的.此外,递归集类关于集合的交、并、补运算都是封闭的.

递归关系(recursive relation) 以递归函数为特征函数的关系.设 A 为一个自然数上的 n 元关系,即 $A\subseteq\omega^n$.$\langle\cdot,\cdots,\cdot\rangle$ 为一个 n 元递归配对函数.若 $\widetilde{A}=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\mid(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A\}$ 是一个递归集,则称 A 为 n 元递归关系.等价地,若令 f 为 A 的特征函数,即:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}0 & ((x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin A),\\1 & (\text{其他}).\end{cases}$$

则 A 为 n 元递归关系,当且仅当 f 为 n 元递归函数.若 A 为 n 元递归函数,则可能行地判知任何 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是否属于 A.

联运算(join operation) 定义在自然数集合上的一种运算.设 A,B 为两个自然数集合,集合

$$A\oplus B=\{2x\mid x\in A\}\cup\{2x+1\mid x\in B\}$$

称为 A 和 B 的联运算.值得注意的是,$A\oplus B$ 包含了 A 和 B 的信息.换言之,只要知道了 $A\oplus B$,也就知道了 A 和 B.因为要判定 $x\in A$ 和 $y\in B$,只要判定 $2x\in A\oplus B$ 和 $2y+1\in A\oplus B$ 即可.这种性质是通常的“并”运算所不具备的.因此,在通常的化归意义下(一一化归除外)$A\oplus B$ 是 A,B 的上确界.即 $A,B\leqslant_r A\oplus B\ \&\ \forall C(C\leqslant_r A\ \&\ C\leqslant_r B\rightarrow C\leqslant_r A\oplus B)$.由于这个原因,通常 r 度 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的上确界 $\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之联运算.

联运算还有一种推广形式:设 $I\subseteq\omega$,$\{A_n\}_{n\in I}$ 为自然数集簇,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是一个递归的配对函数.则集合 $\bigoplus_{n\in I}A_n=\{\langle n,x\rangle\mid x\in A_n\ \&\ n\in I\}$ 称为 $\{A_n\}_{n\in I}$ 的(广义)联运算.

广义联运算(generalized join operation) 见“联运算”.

丘奇论题(Church thesis) 亦称丘奇论点.递归论的基本论点.它断言了直观能行可计算性与递归性之间的一致性.它是由美国数学家、逻辑学家丘奇(Church,A.)最初提出的.按照现在通常的叙述,丘奇论题可以表述为:一个部分函数为直观能行可计算的,当且仅当它是部分递归函数.由此,对“能行可计算性”就可以展开严格的讨论,而作为研究“能行可计算性”的递归论便成为一门严格的数学分支.但是,丘奇论题是无法严格证明的.尽管可以对每个部分递归函数给出其算法,从而“证明”它们都是能行可计算的.但是,由于“能行可计算性”不是一个精

确定义的概念，从而无法证明每个“能行可计算”的函数都是部分递归的. 不过，下列几点，就有充分理由承认丘奇论题：

1. 人们对能行可计算函数的各种完全不同的刻画，最终都得到了与部分递归函数类相同的函数类. 这表明“部分递归性”是具有稳定性的概念. 这些不同的刻画中常见的有：

1）丘奇的 λ 可定义函数.

2）图灵可计算函数.

3）埃尔布朗哥德尔可计算函数.

4）一般递归函数.

5）克林的 μ 递归函数.

6）波斯特系统可定义函数.

7）马尔可夫正规算法可计算函数.

8）乔姆斯基文法系统可定义函数.

9）无穷存贮机可计算函数.

上述几种函数类（其中有些原定义限于全函数，但可很自然地推广到部分函数）以及它们的各种形式的变种都刻画了同一种函数类，即部分递归函数类.

2. 部分递归函数确实是能行可计算的. 由于部分递归函数都是图灵可计算的，而对图灵可计算函数 φ_e 而言，其值的计算只要执行图灵机 M_e 的操作即可. 而这种操作是能行的.

3. 至今为止，尚未发现有任何能行可计算函数不是部分递归的.

4. 从对图灵机的详细讨论所取得的经验表明，如果一个函数 φ 可由一个直观算法计算，一般都可由此算法构作一个图灵机来计算 φ. 也就是说，几乎否定了构作丘奇论题反例的可能性.

基于上述几点，人们基本上都接受丘奇论题，并把它作为递归论研究的基本出发点. 只有承认了丘奇论题，才可能讨论并证明某些函数的不能行性. 例如，只要证明 φ 不是部分递归函数，便可断言 φ 不是能行可计算的. 另一方面，由于承认了丘奇论题，在证明某个函数 φ 为部分递归函数时，常常可以不必具体给出其冗长的导出（定义）过程，只要给出一种计算 φ 的直观的能行算法即可. 这种证明方法称为依丘奇论题证明.

顺便指出，丘奇论题的原始叙述（1935 年）是关于全函数的，但一些构造主义者批评它会导致恶性循环. 而丘奇又无法给出令人信服的解释. 后来，美国逻辑学家、数学家克林（Kleene，S. C. ）于 1938 年给出了基本部分函数的丘奇论题（也即现在通行的说法），才避开了构造主义的责难.

函数能行可计算性（effective computability of the function） 递归论术语. 函数的能行可计算性通常包含两种含义，一种是指在某种精确化基础上所定义的精确概念，如图灵可计算函数、λ 可定义函数、递归函数等就是对应于某种精确定义的可计算性的. 另一种是指基于直观概念且多少有些模糊的概念. 即直观意义下的可计算性. 但是，根据丘奇论题，这两种概念可以认为是一致的. 因此，在递归论中，只要不至于引起概念混淆，常常不加明确区分地使用这两种可计算性，或者在使用可计算性概念时，是兼指这两种含义.

直观可计算函数（intuitively computable function） 一种数论函数. 函数 f 称为直观可计算的，是指存在一个算法，依这个算法，可以机械地求出函数 f 在各个自变数 $\boldsymbol{x}$ 处的函数值 $f(\boldsymbol{x})$. 例如，用通常的欧几里得算法，可以机械地求出任何两个自然数 n 和 m 的最大公因子 $d(n,m)$. 从而，函数 $\lambda xyd(x,y)$ 就是一个直观可计算的函数. 值得指出的是，由于这里的“算法”、“机械的”等都不是严格定义的概念，因此，函数的“直观可计算性”概念并不是精确定义的概念. 此外，一个函数 f 是直观可计算的，只要求存在一个计算 f 的算法，并不要求已具体给出这种算法（在许多情形，往往比证明其存在性要困难得多）. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & （哥德巴赫猜想成立），\\ 1 & （哥德巴赫猜想不成立）.\end{cases}$$

目前尚不知道计算函数 f 的算法，但由于哥德巴赫猜想总是成立（此时 f 恒取 0 值）或不成立（此时 f 总取 1 值），因此 f 是一个常值函数，因此，计算 f 的算法总是有的. 从而 f 是一个直观可计算函数. 但真正要找到计算 f 的算法，必须解决哥德巴赫猜想问题.

半可计算函数（semi-computable function） 亦称部分可计算函数. 一种部分数论函数. 设 f 为一个部分数论函数，如果存在一个能行算法，使对任何自变元 $\boldsymbol{x}$ 的取值，只要 $f(\boldsymbol{x})$ 有定义，那么 $f(\boldsymbol{x})$ 之值便可依上述算法能行地求出，称 f 为半可计算函数. 直观可计算函数都是半可计算的. 注意到函数的半可计算性，只对使其有定义的自变元值处有能行可计算的要求，而对 $\boldsymbol{x}$ 是否使 $f(\boldsymbol{x})$ 有定义，则没有要求预先可以能行地判知. 实际上，对有些半可计算函数 f 而言，并不能能行判定在任何 $\boldsymbol{x}$ 处 $f(\boldsymbol{x})$ 是否有定义（参见“停机问题”）.

部分可计算函数（partial computable function） 即“半可计算函数”.

图灵机（Turing machine） 一种理想计算机. 它是由英国数学家图灵（Turing，A. M. ）于 1936 年发明的. 图灵对某个机械的演算过程进行分析后发现，计算员所实施的操作可以分解成下列的基本动作：认出某个符号，抹去某个符号，写出某个符号，转移观察点并更改记忆内容. 由此，他设计了一种理想装置 M（即图灵机），它由一个双向无穷长的纸带和

一个读头组成. 纸带被分划成无穷多个两两相符的单元，每个单元中可以是空白的(记为 B)，也可写上取自某个确定的字母表 $\mathscr{A}$ 中的一个字母. 通常约定 B 亦在 $\mathscr{A}$ 中，并称 $\mathscr{A}$ 为 M 的字母表. 读头在任何时刻都对准(或称注视)纸带上的一个单元. 也可以在纸带上向左(记为 L)或向右(记为 R)移动一个单元. M 还有一个内部状态集合 $Q=\{q_0,q_1,\cdots,q_n\}$，并且读头总是处在某个内部状态 $q_i(q_i\in Q)$之下. 图灵机 M 的运行由一个给定的有穷指令集合 P 所确定，P 称为 M 的程序，其中的指令形如 $q_is_jq_Rs_lX$，其中 $q_i,q_R\in Q,s_j,s_l\in\mathscr{A},X\in\{R,L\}$. 其含义为：当机器 M 的内部状态为 q_i，读头注视单元内的符号为 s_j 时，M 取新的内部状态 q_R，再把 s_j 用 s_l 替代，并且读头左移(当 $X=L$ 时)或右移(当 $X=R$ 时)一个单元. 这样一来，只要在纸带上给定一个 $\mathscr{A}$ 上的串 σ 作为输入，再约定 M 在开始时取内部状态 q_0(称为初始状态)，而读头注视纸带上最左的非空单元，那么图灵机 M 便可依 P 中指令运行，直到在某一时刻机器取内部状态 q_n(称之为终止状态)为止，此时 M 便停机，纸带上的内容便是输出. 若 M 一直取不到终止状态，则 M 将永远运行下去，此时 M 在输入 σ 后为发散的.

在上面描述中，M 从开始运行到停机为止的整个过程称为计算过程，其中每用一次指令都称为计算的一步，整个计算过程的步数又称计算的长度. 由上可知，在一定的约定之下，图灵机 M 被它的程序 P 所惟一确定. 因此，给出 M，实际上只要给出 P 即可，当然还要求 P 满足相容性条件：若 P 中两指令的第一、二分量相同，则它们必为同一条指令.

上述图灵机的运行是被输入惟一确定的，称为简单图灵机. 此外还有其他形式的图灵机(参见"带外部信息源的图灵机"). 另外，在保持计算能力不变的条件下，图灵机也还有许多不同的表述形式，例如具多纸带、多读头等. 用哥德尔编码技巧，全体图灵机可以能行地排成一列：$M_0,M_1,\cdots,M_e$. 其中 e 可称为 M_e 的哥德尔码或下标.

图灵可计算函数(Turing computable function) 简称 T 可计算函数. 可用图灵机来计算的一类函数. 设 φ 为一个(部分)数论函数，如果 M 为图灵机，并且对任何自然数 n，若以纸带上连续的 $n+1$ 个 1 (记为 $\bar{n}$ 或 1^{n+1})作为 M 的输入后，M 会停机，当且仅当 $\varphi(n)$有定义，而且当 M 停机时的输出中恰好有 $\varphi(n)$个"1". 则称 M 计算 φ. 一般地，若 φ 为 k 元函数，则 M 计算 φ 时，要以形如 $\bar{x}_1B\bar{x}_2\cdots B\bar{x}_k$ 的串作为与$(x_1,x_2,\cdots,x_k)$相应的输入，此时，其输出(若有的话)中的 1 的个数恰好为 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_k)$. 若存在一个图灵机来计算 φ，则称 φ 为图灵机可计算的. 设 $\{M_e\}_{e\in\omega}$为全体图灵机的一种能行枚举，若 M_e 所计算的 n 元(部分)函数记为 $\varphi_e^{(n)}$，则$\{\varphi_e^{(n)}\}_{e\in\omega}$便是全体 n 元 T 可计算函数的一种能行枚举. 此时，e 称为 $\varphi_e^{(n)}$ 的下标，在许多场合，$\varphi_e^{(n)}$ 常可简写成 φ_e. T 可计算的函数一定是直观能行可计算的，而依丘奇论题，直观能行可计算函数恰好是全体 T 可计算函数. 从这个意义上说，T 可计算函数给出了直观能行可计算函数这个概念的一个精确刻画.

确定型图灵机(deterministic Turing machine) 一种图灵机. 指每一步都惟一确定的图灵机. 设 M 为一个图灵机，则只要给 M 一个输入，M 便会以一种惟一确定的方式进行运行. 即对 M 的同一个输入，只有一种计算过程与之相应. 这一点是由图灵机程序的相容性条件所确定的(参见"图灵机")，这种图灵机特称为确定型图灵机(参见"非确定型图灵机").

非确定型图灵机(non-deterministic Turing machine) 确定型图灵机的一种推广. 设 P 为一个由图灵机指令组成的有穷集合，P 不一定满足相容性条件，如果把 P 作为程序，依类似于确定型图灵机的模式进行运行，则可能会在某个时刻有两条或更多的指令可以用，而它们所规定的动作又不一致. 例如 P 中含有 q_0Bq_1BR 和 q_0Bq_1BL 两条指令. 则当内部状态为 q_0 且所指单元为空白时，这两条指令都可用，但一个要右移，另一个则要左移. 此时，如果约定可以按其任意一条进行操作，那么以这种 P 为程序的图灵机便称为非确定型图灵机. 对不确定型图灵机 M 来说，对同一个输入可能有不同的运行过程. 与确定型图灵机一样，全体非确定型图灵机可以能行地排成一列：$\mathrm{NM}_0,\mathrm{NM}_1,\mathrm{NM}_2,\cdots,\mathrm{NM}_e,\cdots$称之为非确定型图灵机的能行枚举. 其 e 称为 NM_e 的下标.

波斯特机(Post machine) 图灵机的一种等价表述形式. 其指令为形如 $q_is_jRq_k,q_is_jLq_k$ 及 $q_is_js_lq_k$ 的四元组. 其含义表示当内部状态为 q_i，所指单元内容为 s_j 时，分别进行右移、左移及把 s_j 改为 s_l，同时都取新的内部状态为 q_k. 另外，通常约定 q_0 为初始状态，而不指定终止状态，当没有任何指令可用时，便自动停机. 其余的详细描述参见"图灵机". 这种理想计算机称为波斯特机. 由于波斯特机与图灵机完全等价，有时也称为图灵机.

通用图灵机(universal Turing machine) 一种具有通用功能的特殊图灵机. 由于一般的图灵机只是一个程序，当给它一个输入 x 后，可以计算出的 $\varphi(x)$作为输出. 它只相当于一个(计算 φ 的)专用机. 为了克服这种弱点，英国数学家图灵(Turing, A. M.)引进了通用图灵机的概念. 这种图灵机 u 具

有这样的功能：输入一个数对$\langle t,x\rangle$后，u 可以先找到以 t 为下标的图灵机 M_t，然后模仿 M_t 输入 x 后的运行过程. 这样一来，u 所计算的二元函数 φ_u 便满足下列条件：对任何 x 和 y，$\varphi_u(x,y)=\varphi_x(y)$. 其中 φ_u 称通用函数. 图灵于 1936 年最早证明了这种通用图灵机的存在性. 从某种意义上说，通用图灵机具有所有图灵机的功能. 这种想法与十年后(1946)美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann，J.)所设计的存贮程序计算机是非常相像的. 这是理论先于实际的一个有趣例子. 上述的通用图灵机与通用函数的概念可以很容易地推广到多元的情形.

图灵机接受语言(language accepted by Turing machine)　图灵机接受字的集合. 设 M 为以 $\mathscr{A}$ 为字母表的图灵机，在 M 的内部状态集 Q 中指定一个子集 $Y\subseteq Q$，Y 中的内部状态 q_Y 为接受状态. 对 $\mathscr{A}$ 上的任何字 σ，若 M 在输入 σ 后会在有穷步内停机，并且停机时最终的内部状态是一个接受状态(此时也称停机于接受状态)，则称 M 接受 σ，否则便称 M 拒绝 σ. 如果 M 是确定型图灵机，则 M 接受 σ 的计算过程是惟一的. 相反，当 M 为非确定型图灵机时，输入 σ 之后，它可能有好几种计算过程. 此时，只要其中有一条计算路径会停机于接受状态，就称 M 接受 σ. 实际上，还可能有此计算路径并不停机或即使停机也不停机于接受状态的. 这是确定型与非确定型图灵机之间的重大差别. 注意到当 M 接受字 σ 时，总可在有穷步内能行地判定. 但当 M 拒绝 σ 的情形，未必有一个能行的方法在有穷步内加以验证. 因此，M 是否接受字 σ 是一个半可判定的问题，而图灵机 M 接受的语言是一个递归可枚举集合.

停机问题(halting problem)　一类特殊的判定问题. 它们源于下列一般的图灵机停机问题 $H(n,x)$：对以 n 为下标的图灵机 M_n 输入 x 后，其运行是否会在有限步内停机？即是否有 $M_n(x)\downarrow$. 英国数学家图灵(Turing，A. M.)于 1936 年用对角化方法证明了上述判定问题是不可判定的，即不存在一个能行的方法来判定 $M_n(x)$是否会停机. 此外，还有图灵机对角化停机问题 $H(x)$：$M_x(x)$是否停机，以及特殊图灵机停机问题 $H_i(x)$：对图灵机 M_i，判定 $M_i(x)$是否会停机. 前者为不可判定的，后者的判定性则依赖于所给的图灵机 M_i. 不仅如此，对应于每一种刻画能行过程的方法，都有其相应的停机问题. 以部分递归函数为例，有一般停机问题 $K_0(x,y)$：$\varphi_x(y)\downarrow$？对角化停机问题 $K(x)$：$\varphi_x(x)\downarrow$？和特殊函数停机问题 $W_i(x)$：$\varphi_i(x)\downarrow$？. 其中$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$为部分递归函数的能行枚举(参见"部分递归函数"). 这些停机问题常用一个集合来表示. 例如，上述三个停机问题分别可用 $K_0=\{\langle x,y\rangle\mid\varphi_x(y)\downarrow\}$，$K=\{x\mid\varphi_x(x)\downarrow\}$和 $W_i=\{x\mid\varphi_i(x)\downarrow\}$来表示. 其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$为某个递归的配对函数. 停机问题是一类最重要和最基本的不可判定问题，许多问题的不可判定性常可由它们推出(参见"化归").

波斯特有穷组合过程(Post's finite combinatory process)　一种计算模型. 它是波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post，E. L.)提出的. 独立于英国数学家图灵(Turing，A. M.)的工作，波斯特于 1936 年提出了另一种刻画能行过程的计算模型——有穷组合过程. 这种模型有一个双向无穷并分割成两两相等的单元的纸带(波斯特称之为符号空间)及一个读写头. 读写头每次对准一个纸带单元，并可进行下列基本操作：

1. 当所指单元为空时(记为 0)，在其中写上符号 1，此操作记为 m.

2. 当所指单元中有符号 1 时，将其抹去，此操作记为 e.

3. 左移一个单元，记为 l.

4. 右移一个单元，记为 r.

5. 判定单元中是否有"1"，记为 t.

读头的操作由一个指令集合控制. 其中每条指令都有一个固定的编号，并具有下列三种形式之一：

1. $\alpha j(\alpha\in\{e,m,r,l\})$. 意指执行 α 操作，并且接下去执行第 j 条指令.

2. tjk. 意指先执行操作 t，如单元中有 1，则下面再执行第 j 条指令，否则下面执行第 k 条 指令.

3. s. 意指停止.

波斯特有穷组合过程与图灵机的思想是十分相似的，实际上它们是对能行过程的两种完全等价的刻画.

W 机(W-machine)　一种计算模型. 它是王浩(Wang，H.)于 1957 年提出的. 其基本构造与图灵机类似. W 机的字母表限定为$\{0,1\}$，其指令集中，每条指令都有一个固定的编号，并且具有下列 6 种形式之一：

1. e. 把单元中符号 1 抹去改成 0.

2. m. 在单元中写上符号 1.

3. r. 右移一个单元.

4. l. 左移一个单元.

5. $t(j)$. 当单元中有符号 1 时执行第 j 条指令，否则执行下一条指令.

6. s. 停止.

W 机的计算能力与图灵机等价. 不仅如此，如果限定不用指令"e"(这种机器称为不消符机器)后，还与图灵机等价.

无界存贮机(unlimited register machine)　简称 URM 机. 一种理想计算机. 它是由谢泼德森(Shepherdson，J. C.)和斯图吉思(Sturgis，H. E.)于 1963 年提出的. 它具有无穷多个存贮器：R_0，R_1，R_2

…每个存贮器中可写上一个自然数,并且该数可依 URM 机的指令作必要的改变.约定 R_n 中的数用 r_n 表示.URM 的程序由有限条带编号的指令组成.每条指令具有下列形式中的一种:

1.$P(n)$.把 R_n 中的数加 1(后继指令).

2.$D(n)$.把 R_n 中的数减 1(前驱指令).

3.$O(n)$.把 R_n 中的数变为 0(零指令).

4.$C(n,m)$.用 R_n 中的数代替 R_m 中的数(转移指令).

5.$J(i)$.执行第 i 条指令(无条件跳跃指令).

6.$J(n,i)$.若 R_n 中数为 0,则执行第 j 条指令(条件跳跃指令).

7.S.停止(停机指令).

除了跳跃指令外,所有指令的执行都按其编号的大小依次进行.即在执行完第 i 条指令后(如不受跳跃指令影响),再接着执行第 $i+1$ 条指令.谢泼德森和斯图吉思证明了 URM 机的计算能力与图灵机等价.不仅如此,URM 机的指令还可改成下列 4 种而不影响其计算能力:

8.零指令 $Z(n)$.$r_n:=0$.

9.后继指令 $P(n)$.$r_n:=r_n+1$.

10.转移指令 $T(m,n)$.$r_n:=r_m$.

11.跳跃指令 $J(m,n,q)$.如 $r_m=r_n$,则执行第 q 条指令,否则执行下一条指令.

马尔可夫算法(Markov algorithm)　亦称正规算法.一种刻画能行过程的算法.它是俄国数学家马尔可夫(Марков,A.A.)于 1954 年提出的.它由一个字母表 Σ 和关于 Σ^*(Σ 上的字组成之集)的有穷条规则:$\alpha_1\to\beta_1,\alpha_2\to\beta_2,\cdots,\alpha_m\to\beta_m$(其中 $\alpha_i,\beta_i\in\Sigma^*$)所组成.这些规则中有一条是终止规则(特记为 $\alpha_i\to\beta_i$).诸规则的运用必须按照所给定的优先次序进行.即对某个字 σ,如有两条规则 $\alpha_i\to\beta_i$ 和 $\alpha_j\to\beta_j$($i<j$)都可运用,则必须运用优先性高的规则 $\alpha_i\to\beta_i$.这种运用实际上就是把 σ 中的诸 α_i 出现用 β_i 替代.若碰到运用了终止规则,则在运用完该规则之后不再运用任何规则,运算结束.若已没有任何规则可用时,运算也会结束(这称为自然结束).马尔可夫算法的计算能力与图灵机等价.

正规算法(normal algorithm)　即"马尔可夫算法".

波斯特系统(Post system)　亦称波斯特正规系统或组合系统.一种形式系统.它是由波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post,E.L.)于 20 世纪 20 年代研究并在 1943 年发表的,它在形式上与逻辑中的形式系统十分相像.具体地,所谓波斯特系统 PS,包括一个字母表 Σ(其中的常元和变元分别组成 Σ_c 和 Σ_v,且 $\Sigma=\Sigma_c\cup\Sigma_v$),$\Sigma_c$ 上的字组成的有穷公理集 S(S 中字也称原始假设)和一个有穷的产生程序 P.P 中的元素为形如$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha)$的 n 元产生式(n 为某个自然数).其中 α_i 都是 Σ 上的字.这种产生式记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\to\alpha$.在运用此产生式时,先把诸 α 中的变元都用 Σ_c 中的字一致地替代(即同一变元用相同的字替代),这样便得到 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n,\tilde{\alpha}$.此时可依产生式$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha)$由 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n$,推出 $\tilde{\alpha}$.若 $\sigma\in\Sigma_c^*$,并且从 PS 的公理 S 出发,有穷多次运用 P 中的产生式可以推出 σ,则称 σ 为 PS 的一个定理.PS 的全体定理组成波斯特系统 PS 产生的语言 L(PS).一个语言 L 可以被某个波斯特系统产生,当且仅当 L 为递归可枚举的.

实际上,在波斯特系统中,可以限定所有的产生式都形如 $uA\to Aw$,其中 A 为变元,$u,w\in\Sigma_c^*$,并约定只有一条初始假设,它们仍能产生所有递归可枚举的语言.即对波斯特系统的这种限制并没有减弱波斯特系统的力量.因此,在许多情形,波斯特系统被定义成这种受限制的形式.这种系统称为正规系统.它们实际上是由布契(Buchi,J.R.)于 1964 年首先引进的.但是,如果进一步把产生式限制到形如:$uA\to wA$(称为右正则的)或限制到 $Au\to Aw$(称为左正则的)时,就只能产生出正规语言类(参见"乔姆斯基分层"),而不能产生出全体递归可枚举语言来.此时,它们的力量仅与有穷自动机相当.

波斯特正规系统(Post normal system)　即"波斯特系统".

组合系统(combinatorial system)　即"波斯特系统".

泰格系统(Tag system)　一种特殊的波斯特正规系统.它是由波斯特(Post,E.L.)于 20 世纪 20 年代首先研究的.这种系统以{0,1}为字母表,其产生式都是形如 $\alpha_i\to\beta_i$ 的一元产生式,并且同一个泰格系统中所有产生式之前提都具有相同的长度.不仅如此,其产生式被前提中的第一个字母所确定,即当两个产生式 $\alpha_i\to\beta_i$ 和 $\alpha_j\to\beta_j$ 中前提 α_i,α_j 的第一个字母相同时,必有 $\alpha_i=\alpha_j$ 和 $\beta_i=\beta_j$.闵斯基(Minsky,M.L.)于 1961 年证明了任何递归函数都可用某个泰格系统来计算.这种限制极强的系统与图灵机有相同的计算能力.1921 年,波斯特提出了一个与泰格系统相关的问题:设泰格系统 T 的产生式为 $0abx\to x00$ 和 $1abx\to x1101$,其中 $a,b\in\{0,1\}$,x 为变量,则对 $\sigma\in\{0,1\}^*$,在 T 中从 σ 出发的产生过程是否会进行无穷循环.此问题至今尚未解决.

半图埃系统(semi-Thue system)　亦称重写系统.一种组合系统.它包括一个有穷字母表 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$($n\geqslant1$)和 S 上的有穷产生式的集 P,因此,可记为 $\mathscr{S}=\langle S,P\rangle$.$P$ 中的元素为形如(α_i,β_i)($i=1,2,\cdots,m$)的有序对,它们称为 $\mathscr{S}$ 的定义关系或(半图埃)产生式.设 u,v 为 S 上的字,(α_i,β_i)为 P

中的产生式. 若 $W_1=u\alpha_i v$, $W_2=u\beta_i v$, 则称 W_2 是 W_1(在 S 中的)直接结论或称 W_1 直接产生 W_2. 记为 $W_1\Rightarrow_S W_2$. 若存在 S 上的字 $W_0,W_1,\cdots,W_k$, 使 $W_0\Rightarrow_S W_1\Rightarrow_S W_2\cdots\Rightarrow_S W_k$, 则称 W_k 为 W_0 的结论. 记为 $W_0\Rightarrow^* W_k$, 半图埃系统作为一种符号变换系统, 其计算能力与图灵机相当. 对半图埃系统来说, 最引人关心的问题之一是判定任给两个字 W_1,W_2, 能否由 W_1 产生出 W_2, 即是否有 $W_1\Rightarrow^* W_2$. 此即半图埃系统的字问题. 此问题对群而言, 最初是由挪威数学家图埃(Thue, A.)提出的, 半图埃系统因此得名. 半图埃系统的字问题是不可解的.

重写系统(rewriting system) 即"半图埃系统".

图埃系统(Thue system) 一种特殊的半图埃系统. 设 $\mathscr{S}=\langle S,P\rangle$ 为一个半图埃系统, 如果 P 是对称的, 即只要 $(\alpha,\beta)\in P$, 一定有 $(\beta,\alpha)\in P$. 那么 $\mathscr{S}$ 便被称为图埃系统. 作为一种计算模型, 图埃系统与半图埃系统一样, 都与图灵机具有相同的计算能力. 另外, 图埃系统的字问题也是不可判定的.

有穷自动机(finite automata) 一种有穷计算模型. 它由一个读头和一条有穷长的纸带所组成. 纸带被分割成有限个同样大小的单元, 每个单元中可以是空的, 或写有取自有穷字母表 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上的一个字母. 读头在每一时刻都对准一个单元, 并具有一个确定的内部状态, 这些内部状态构成一个有穷集 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$. 其中指定一个(比如 q_1)为初始状态, 另外, 指定一个 $F\subseteq Q$ 作为终止状态(或接受状态)集. 读头每次只能向右移动一单元(而不能写或抹), 并且每次都必须向右移动. 读头所取的内部状态将由一个转换函数 δ 所确定. 具体地说, 在一个有穷自动机 $\mathscr{A}$ 工作时, 当读头所指单元内符号为 a_i, 内部状态为 q_j 时, 读头将向右移一单元并取新的内部状态 $\delta(a_i,q_j)$. 于是, 有穷自动机 $\mathscr{A}$ 可以形式地看成由字母表 A, 内部状态集 Q、开始状态 q_1、终止状态集 F 及转换函数 δ 所组成的一个五元组 $\mathscr{A}=\langle A,Q,q_1,F,\delta\rangle$. 在纸带上给定 A 上的一个字 σ, 如约定读头指向 σ 最左边的符号且以 q_1 为开始状态, $\mathscr{A}$ 便可开始运行. 当 $\mathscr{A}$ 读完 σ 的读头所取的内部状态为接受状态, 则称 $\mathscr{A}$ 接受 σ, 否则便拒绝 σ. 所有被 $\mathscr{A}$ 所接受的字组成 $\mathscr{A}$ 所接受的语言 $L(\mathscr{A})=\{\sigma\in A^*\mid \mathscr{A}$ 接受 $\sigma\}$. 美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.)证明了一个语言可被某有穷自动机接受, 当且仅当它为正规的(参见"正规语言"), 这个结论称为克林刻画. 上述的有穷自动机的每一步操作都是确定的, 因此可称为确定型有穷自动机. 如果允许在每一步上读头的内部状态可在几个状态中任取, 即 δ 之值为内部状态之集合(而不是一个内部状态), 这样便得到非确定型有穷自动机. 但是这两类自动机接受的语言类是一致的.

确定型有穷自动机(deterministic finite automata) 见"有穷自动机".

非确定型有穷自动机(non-deterministic finite automata) 见"有穷自动机".

正规语言(regular language) 一种有穷自动机可接受的语言. 是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.)于 1956 年引进的一种语言. 设 Σ 为一个有穷字母表. Σ^* 表示 Σ 上全体字的集合. 对 $x,y\in\Sigma^*$, 以 xy 表示其毗连, 对 $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ 定义 L_1 与 L_2 的毗连为 $L_1L_2=\{xy\mid x\in L_1\ \&\ y\in L_2\}$. 一般地, 对 $L\subseteq\Sigma^*$, 定义 $L^0=\{\Lambda\}$(Λ 为空字), $L^{n+1}=L^nL$, 而

$$L^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}L^n$$

则称为 L 的克林闭包. Σ 上的正规表达式及其表示的语言可递归定义如下:

1. $\varnothing,\Lambda$ 是正规表达式, 并分别表示语言 $\varnothing$ 和 $\{\Lambda\}$, 其中 $\varnothing$ 为空集, Λ 为空字.

2. 对 $a\in\Sigma$, a 为正规表达式, 它表示的语言是 $\{a\}$.

3. 如 r,s 分别为表示语言 R,S 的正规表达式, 则 $(r+s)$, (rs), (r^*) 也是正规表达式, 且分别表示语言 $R\cup S$, RS 和 R^*.

若语言 $L(\subseteq\Sigma^*)$ 可由 Σ 上的某个正规表达式表示, 则称 L 为正规语言. 克林证明了正规语言恰好就是可由某个有穷自动机接受的语言.

正规表达式(regular expression) 见"正规语言".

上下文无关语言(context-free language) 一类借助于上下文无关的文法来刻画的语言. 它是乔姆斯基(Chomsky, N.)于 1956 年引进的. 所谓上下文无关的文法, 是指一个四元组 $G=(V,T,P,s)$, 其中 V 为有穷的变量集合, T 为有穷的终止符集合, P 为有穷的产生式集合, s 为 V 中一个指定的开始符. $V\cup T$ 称为 G 的字母表. P 中的产生式形如 $x\to\alpha$, 其中 $x\in V$, $\alpha\in(V\cup T)^*$. 对 $\alpha_1,\alpha_2\in(V\cup T)^*$, 若存在 $\alpha\beta\in(V\cup T)^*$, 使 $\alpha_1=\alpha x\beta$, $\alpha_2=\alpha\gamma\beta$, 而 $x\to\gamma$ 又是 P 中的产生式, 则称 α_1 直接推出 α_2, 并记为 $\alpha_1\Rightarrow_G\alpha_2$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in(V\cup T)^*$ 使 $\alpha_1\Rightarrow_G\alpha_2\Rightarrow_G\cdots\Rightarrow_G\alpha_n$, 则称 α_1 推出 α_n 并记为 $\alpha_1\Rightarrow_G^*\alpha_n$. 全体由开始符 s 推出的 T 上的字组成之集合 $L(G)=\{\sigma\in T^*\mid s\Rightarrow_G^*\sigma\}$ 称为 G 所生成的语言. 可由某个上下文无关的文法 G 所生成的语言称为上下文无关的语言. 乔姆斯基证明了, 任何一个不含空字 Λ 的上下文无关语言都可以用一种特殊的上下文无关语法 G 来生成, G 中的产生式限定为形如 $x\to yz$ 或 $x\to a$ 者, 其

中 x,y,z 为变量，a 为终止符. 这种文法称为乔姆斯基范式. 格雷巴赫(Greibach, S. A.)于 1965 年又证明了，上述两种产生式也可改为形如 $x\to a\alpha$ 的，其中 x 为变元，a 为终止符，α 为变量组成之串. 称这种文法为格雷巴赫范式.

上下文无关文法(context-free grammar)　见"上下文无关语言".

乔姆斯基范式(Chomsky normal form)　见"上下文无关语言".

格雷巴赫范式(Greibach normal form)　见"上下文无关语言".

正规文法(regular grammar)　一种特殊的上下文无关文法(参见"上下文无关语言")，设 G 为一个上下文无关文法. 若 G 的产生式都形如 $x\to\alpha y$，$x\to y$ 或 $x\to y\alpha$(x,y 为变量，α 为终止符串)，则称 G 为正规文法. 乔姆斯基(Chomsky, N.)和美国数学家米勒(Miller, G. A.)于 1958 年证明了由正规文法所生成的语言类恰好就是正规语言类，从而使正规文法与有穷自动机等价(参见"正规语言"、"有穷自动机").

短语结构文法(phrase structure grammar)　亦称无限制文法和半图埃文法. 上下文无关文法的一种推广. 它是乔姆斯基(Chomsky, N.)于 1959 年引进的. 这种文法 G 由一个有穷变量集 V. 有穷终止集 T，有穷产生式集 P 及初始符 $s(\in V)$所构成. 因此 G 也可写成(V,T,P,s). P 中的产生式形如 $\alpha\to\beta$，其中 α,β 均是 $V\cup T$ 上的字. 运用产生式 $\alpha\to\beta$，可以由 $\gamma\alpha\delta$ 直接产生 $\gamma\beta\delta$(记为 $\gamma\alpha\delta\Rightarrow_G\gamma\beta\delta$)，其中 $\gamma,\delta\in(V\cup T)^*$. 若有 $\gamma_1\Rightarrow_G\gamma_2\Rightarrow_G\cdots\Rightarrow_G\gamma_n$，则称 γ_1 可产生 γ_n，并记为 $\gamma_1\Rightarrow_G^*\gamma_n$. $L(G)=\{\sigma\in T^*\mid S\Rightarrow_G^*\sigma\}$称为由 G 生成的语言. 乔姆斯基证明了一个语言 L 可由某个短语结构文法产生，当且仅当 L 为递归可枚举的.

无限制文法(unrestricted grammar)　即"短语结构文法".

半图埃文法(Semi-Thue grammar)　即"短语结构文法".

上下文相关文法(context-sensitive language)　一种短语结构文法. 是乔姆斯基(Chomsky, N.)引进的. 设 $G=(V,T,P,s)$为一个短语结构文法，若限定 P 中的所有产生式 $\alpha\to\beta$ 都满足下列条件：β 的长度不小于 α 之长度. 则称 G 为上下文相关文法. 由上下文相关文法产生的语言称为上下文相关语言. 上下文相关语言都是递归的，但反之不然.

上下文相关语言(context-sensitive language)　见"上下文相关文法".

乔姆斯基分层(Chomsky hierarchy)　一种语言类分层. 是乔姆斯基(Chomsky, N.)引进的. 令 C_0 为短语结构语言类、C_1 为上下文相关的语言类、C_2 为上下文无关语言类、C_3 为正规语言类. 乔姆斯基称这四种语言分别为 0-型、1-型、2-型和 3-型语言类，并且他证明了 $C_3\subset C_2$ & $C_1\subset C_0$ & $C'_2\subset C_1$，其中 C'_2 表示 C_2 中不含空字的语言类. 此结果称为乔姆斯基分层定理. 而$\{C_i\}_{i\leqslant 3}$则称为乔姆斯基分层. 由于这些语言类都是乔姆斯基最早系统研究的，因此，称之为乔姆斯基文法语言，相应的文法则称为乔姆斯基文法或乔姆斯基文法系统. 顺便指出，C_0 恰好为递归可枚举语言类，而递归语言类则严格介于 C_0 和 C_1 之间.

乔姆斯基文法系统(Chomsky grammar systems)　一类文法系统的总称. 简称乔姆斯基文法. 它包括短语结构文法、上下文相关文法、上下文无关文法和正规文法四种(参见"乔姆斯基分层").

递归可枚举集(recursively enumerable set)　亦称半递归集. 简称 *re* 集. 一种自然数集合. 设 A 为一个自然数集合，若存在一个能行过程把 A 的所有元素能行地列举出来，则称 A 为递归可枚举的. 等价地，A 为 *re* 集，当且仅当 $A=\varnothing$，或存在递归函数 f，使 $A=rang\ (f)$. 在后一种情形，f 称为 A 的枚举函数. 若 A 是 *re* 集，则对 $n\in A$，总可以在有限步内能行地判定. 因为只要用 A 的枚举函数 f 能行地枚举出 $f(0),f(1),f(2),\cdots$，必定会有某个 m，使 $f(m)=n$. 从这个意义上说，*re* 集只具有半可判定性. 但是，当 A 的余集 $\overline{A}$ 也是 *re* 集时，A 一定是递归的. 从而是全可判定的. 另一方面，因为 A 为递归集，当且仅当 A 和 $\overline{A}$ 都是 *re* 集. 所以，递归集都是 *re* 集.

此外，*re* 集有许多等价定义形式(参见"*re* 集标准形"，"*re* 集枚举函数").

***re* 集**(*re* set)　递归可枚举集的简称.

半递归集(semi-recursive set)　即"递归可枚举集".

***re* 集标准形**(normal form of *re* sets)　*re* 集的一种表示方法. 若 A 为一个 *re* 集，则存在递归关系 R，使得 $A=\{x\mid\exists yR(x,y)\}$. *re* 集 A 的这种表示方式称为其标准形式 Σ_1 形. 由此可以推出，A 为 *re* 集，当且仅当 A 为某个部分递归函数的值域(即 $\exists e(A=rang\ (\varphi_e))$)，也当且仅当 A 为某部分递归函数之定义域(即 $\exists e(A=\mathrm{dom}\ (\varphi_e))$). 当 $A=\mathrm{dom}\ (\varphi_e)$时，$A$ 记为 W_e，即 $W_e=\mathrm{dom}\ (\varphi_e)$，并称 e 为 W_e 的下标. 因此，$\{W_e\}_{e\in\omega}$是全体 *re* 集的一种能行枚举. 此外 $W_{e,s}=\mathrm{dom}\ (\varphi_{e,s})$也是一个常用的记号. $W_{e,s}$实际上是一个递归集，而且，$\{W_{e,s}\}$为 *re* 集 W_e 的一个递归逼近序列.

***re* 集枚举函数**(enumeration function for *re* set)　以 *re* 集为值域的函数. 若函数 f 满足 $A=$

rang(f)，则称 f 为 A 的枚举函数. 而当 f 为严格递增函数时，称之为 A 的主函数或主枚举函数，并记为 P_A. 当 A 有递归的枚举函数时，A 就是 *re* 集. 不仅如此，格才高尔契克(Grzegorczyk，A.)于 1954 年还证明了：若 A 为非空 *re* 集，则一定存在函数 $f\in\varepsilon_0$ (G 分层之第一层)，使 $A=rang(f)$. 从而可知，*re* 集都有 ε_3 的、初等的和原始递归的枚举函数.

一般地，如果 f 为 *re* 集 A 的递归枚举函数，则 f 并不一定是一一的，即 f 对 A 的枚举不一定是"无重复"的. 但实际上，任何无穷 *re* 集都有一一递归的枚举函数，即任何 *re* 集都可无重复地能行枚举. 关于枚举函数的单调性有：

1. A 有单调递归的递归枚举函数，当且仅当 A 为无穷递归集.

2. A 有不减的递归枚举函数，当且仅当 A 为非空递归集.

此外，如 f 为 A 的枚举函数，则 $f(0),f(1),\cdots$ 给出了 A 的一种枚举方法，因此，枚举函数确定了 A 的一种枚举方式. 从而 A 的枚举函数也可称为 A 的一种枚举. 不过，此时更多的记为 $\{f(n)\}_{n\in\omega}$.

***re* 集主函数**(principal function of *re* sets)　见"*re* 集的枚举函数".

***re* 集主枚举函数**(principal enumeration function for *re* set)　见"*re* 集枚举函数".

递归可枚举关系(recursively enumerable relation)　简称 *re* 关系. *re* 集概念的一种推广. 设 P 是 n 元数论关系，如果存在 $n+1$ 元递归关系 R，使得 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leftrightarrow\exists yR(y,x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 则称 P 为 n 元递归可枚举关系. 与 *re* 集类似地，P 为 n 元 *re* 关系，当且仅当存在 n 元部分递归函数 φ_e，使 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leftrightarrow\varphi_e(x_1,x_2,\cdots,x_n)\downarrow$. *re* 关系都是半可判定的，即对 *re* 关系 P，只要 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为真，总可在有限步内能行地判知. 因此，*re* 关系也称为半递归关系.

***re* 关系**(*re*-relation)　递归可枚举关系的简称.

半递归关系(semi-recursive relation)　即"递归可枚举关系".

递归集下标(index for a recursive set)　递归论的基本概念之一. 指全体递归集的编码. 递归集可以用不同的方法加以编码，从而也有不同的下标. 主要有下列三种：

1. *re* 下标. 由于递归集都是 *re* 集，因此，它有作为 *re* 集时的下标，这种下标便称为 *re* 下标，也称为 Σ_1 下标. 若 A 为递归集，则有 e 使 $A=W_e$，此 e 便是 A 之 *re* 下标.

2. 特征下标. 设 A 为递归集，其特征函数 C_A 为递归函数，从而有 e 使 $C_A=\varphi_e$. 此时便称 e 为 A 的特征下标或 Δ_0 下标，并记 A 为 C_e.

3. 互补下标. 若 A 为递归集，则 $A,\overline{A}$ 均为 *re* 集. 从而有 a,b，使 $A=W_a$ & $\overline{A}=W_b$. 此时称 $e=\langle a,b\rangle$ 为 A 的互补下标或 Δ_1 下标. 同时可把 A 记为 R_e. 其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为某个固定的递归配对函数.

特征下标和互补下标是等价的，即从其中一个便可能行地找到另一个. 另外，由递归集的特征下标(或互补下标)可以能行地找到其 *re* 下标，但反之不然. 递归集的特征下标与互补下标反映了该集合相同的信息. 而且它们都比 *re* 下标反映的信息多.

***re* 下标**(*re*-index)　见"递归集下标".

特征下标(characteristic index)　见"递归集下标".

互补下标(complemented index)　见"递归集的下标".

有穷集下标(index for a finite set)　递归论的基本概念之一. 指有穷集的编码. 有穷集作为递归集，自然可以有它的 *re* 下标和特征下标(参见"递归集下标"). 但互补下标用来刻画有穷集则不大合适，因为有穷集之补并不是有穷集. 不过，有穷集还可有另一种重要的下标，即典则下标. 设有穷集 $A=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$. 令 $e=2^{x_0}+2^{x_1}+\cdots+2^{x_n}$，则称 e 为 A 的典则下标. 并记 A 为 D_e. 例如 $D_{77}=\{0,2,3,6\}$. 美国数学家罗杰斯(Rogers，H.)证明了：由有穷集 A 之典则下标可以能行地找到其特征下标，由特征下标又可能行地找到其 *re* 下标. 但它们之逆均不成立. 由此可见，有穷集的典则下标反映其集合的信息最多，特征下标次之，而 *re* 下标最小.

典则下标(canonical index)　见"有穷集下标".

有穷集阵列(array of finite sets)　递归论的基本概念之一. 有穷集合的任何序列都称为有穷集的阵列. 特别地，设 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ 为一个有穷集序列，则

1. 若存在递归函数 f，使 $\forall n\in\omega(F_n=W_{f(n)})$，则称 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ 为一个弱阵列. 其中 W_e 以 e 为 *re* 下标.

2. 若存在递归函数 f，使 $\forall n\in\omega(F_n=D_{f(n)})$，则称 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ 为一个强阵列. 其中 D_e 以 e 为典则下标.

3. 若对任何 $m\neq n$，都有 $F_n\cap F_m=\varnothing$，则称 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ 为不相交阵列.

强阵列都是弱阵列，但反之不然.

弱阵列(weak array)　见"有穷集阵列".

强阵列(strong array)　见"有穷集阵列".

图定理(graph theorem)　反映部分函数的能行性与其图的能行性之间关系的一个重要定理. 该定理断言：设 φ 为部分函数，f 为全函数，图 $G(\varphi)$ 指集合 $\{\langle\boldsymbol{x},y\rangle\mid\varphi(\boldsymbol{x})=y\}$. 则有下列结论：

1. φ 为部分递归函数，当且仅当 φ 之图 $G(\varphi)$ 为 *re* 集.

2. f 为递归函数，当且仅当其图 $G(f)$ 为递归集.

另一方面，一个部分函数 φ 之图为递归，当且仅当存在递归关系 R，使 $\varphi(\boldsymbol{x})=\mu yR(\boldsymbol{x},y)$. 若取 $W_e\neq\omega$，则 $\varphi(x)=\mu s(x\in W_{e,s})$ 是具递归图的非全的部分递归函数. 此外，有些部分递归函数之图可以不是递归集.

一致化性质(uniformization property) 递归论术语. 反映部分递归函数与 *re* 关系之间关系的一种性质：若 P 为 *re* 关系，则存在部分递归函数 φ，使得：

1. $\exists yP(\boldsymbol{x},y)\leftrightarrow\varphi(\boldsymbol{x})\downarrow$.

2. $\exists yP(\boldsymbol{x},y)\leftrightarrow P(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))$.

此时，φ 称为 P 的选择函数或一致化函数. 特别地，当 P 为正规的(即 $\forall\boldsymbol{x}\exists yP(\boldsymbol{x},y)$)*re* 关系时，它必定存在递归的选择函数.

一致化函数(uniformization function) 见“一致化性质”.

化归原理(reduction principle) 反映 *re* 集性质的一个基本原理. 该原理断言：任何两个 *re* 集之并都可化归为两个不相交 *re* 集之并. 具体地，对任何 *re* 集 A,B，存在 *re* 集 $A_1\subseteq A,B_1\subseteq B$，使

$$A_1\cap B_1=\varnothing\ \&\ A_1\cup B_1=A\cup B.$$

递归不可分集合(recursively inseparable sets) 一种递归可枚举集对. 指不能用一个递归集划分的两个集合. 集合 A,B 称为递归可分的，是指存在递归集合 C，使得 $A\subseteq C\ \&\ B\subseteq\overline{C}$. 否则 A,B 便称为递归不可分的. 1936 年，美国学者罗塞(Rosser, J. B.)最早证明了存在递归不可分的 *re* 集对. 休恩菲尔德(Shoenfield, J. R.)于 1958 年还证明了在任何非递归的 *reT* 度中，都存在递归不可分的 *re* 集对.

递归可分集合(recursively separable sets) 见“递归不可分集合”.

能行不可分集合(effectively inseparable sets) 一种特殊的递归不可分集合. 设 A,B 为任何两个不相交的自然数集. 如果存在递归函数 f，使对任何 x,y 均有

$$A\subseteq W_x\ \&\ B\subseteq W_y\ \&\ W_x\cap W_y=\varnothing\rightarrow f(x,y)\in\overline{W_x\cup W_y},$$

则称 A,B 为能行不可分的. 否则 A,B 便称为能行可分的. 任何能行不可分的集对必定是递归不可分的，但反之不然.

能行可分集合(effectively separable sets) 见“能行不可分集合”.

回归集(regressive set) *re* 集的一种推广. 设 A 为自然数集合，$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 为 A 的一种无重复枚举. 若存在部分递归函数 φ，使得 $\varphi(a_0)=a_0\ \&\ \forall n\in\omega\ (\varphi(a_{n+1})=a_n)$，则称 A 为关于这种枚举的由 φ 回归的集合，并称 φ 为 A 的回归函数. 若存在 A 的一种无重复枚举和一个部分递归函数 φ，使得 A 为关于该枚举由 φ 回归的，则称 A 为回归集. 德克尔(Dekker, J.)和迈希尔(Myhill, J.)证明了：若 A 为 *re* 集，则 A 一定是回归集. 反之，若 A 是回归集，则 A 必定是 *re* 集或禁集. 另外，阿佩尔(Appel, K. I.)和马克劳林(Mclaughlin, T. G.)证明了：若 $A,\overline{A}$ 都是回归集，则 A 和 $\overline{A}$ 中至少有一个是 *re* 集.

注意到若 A 是 *re* 集，则一定存在一种(能行的)无重复枚举 $A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$，并且总存在部分递归函数 φ，使 $\forall n\in\omega(\varphi(a_n)=a_{n+1})$. 集合的回归性是由递归可枚举性导出的一个概念.

回归函数(regressive function) 见“回归集”.

回溯集(retraceable set) 一种回归集. 设 A 为自然数集，$a_0<a_1<a_2\cdots$ 为 A 依自然大小次序给出的枚举. 若存在部分递归函数 φ，使 A 关于这种枚举由 φ 回归的，即

$$\varphi(a_0)=a_0\ \&\ \forall n\in\omega(\varphi(a_{n+1})=a_n).$$

则称 A 为回溯集. 回溯集一定是回归的. 注意到若 A 为无穷的递归集，则 A 总有一种(能行的)递增枚举：$a_0<a_1<a_2,\cdots$ 并且存在部分递归函数 φ，使 $\forall n(\varphi(a_{n+1})=a_n)$. 回溯集的概念是由递归集的这种性质导出的. 德克尔(Dekker, J.)和迈希尔(Myhill, J.)证明了：若 A 为递归集，则 A 为回溯集. 反之，若 A 为回溯集，则 A 必为递归或禁集. 另外，曼斯费尔德(Mansfield, R.)证明了：若 $A,\overline{A}$ 都是回溯集，则 A 一定是递归集. 此外，与递归集不同的是，每一个 T 度中都含有回溯集，从而有 $2^{\aleph_0}$ 个回溯集. 回溯集之补不一定是回溯集，当 $A,\overline{A}$ 都是回归集时，A 也未必是回溯集.

枚举亏格集(deficiency set for the enumeration) 反映 *re* 集的一种枚举性质的集合. 设 A 为自然数集. f 为 A 的一一枚举函数，即 f 为一一的，且 $rang\ (f)=A$. 如果集合 $B=\{x\mid\exists y>x(f(y)<f(x))\}$，则称 B 为集合 A 关于枚举 f 的亏格集. 对任何自然数 x，若 $x\notin B$，则称 x 为(关于枚举 f 的)非亏格步骤或真步骤. 若 x 是 A 关于 f 的真步骤，则有

$$\{f(0),f(1),\cdots,f(x)\}\upharpoonright(f(x)+1)=A\upharpoonright(f(x)+1).$$

此时，若要检查某个元 $y(\leqslant f(x))$ 是否属于 A，只要检查它是否在 $f(0),f(1),\cdots,f(x)$ 之中即可.

禁集(immune set) 一种非 *re* 集. 若自然数集 A 是无穷的，且 A 不包含任何无穷的 *re* 子集，则称 A 为禁集. 禁集一定不是 *re* 集. 禁集是存在的，不仅如此，甚至有些集合 A，使 A 和 $\overline{A}$ 都是禁集. 这种集合称为双禁集，且这种集合有 $2^{\aleph_0}$ 个. 禁集概念还有一些加强形式：

1. 能行禁集. 若 A 为无穷的，且存在部分递归

函数 ψ，使得

$\forall e\in\omega(W_e\subseteq A\rightarrow\psi(e)\downarrow\&\ |W_e|\leqslant\psi(e))$，

则称 A 为能行禁集.

2. 强能行禁集. 若 A 为无穷的，且有部分递归函数 ψ，使得

$\forall e\in\omega(W_e\subseteq A\rightarrow\psi(e)\downarrow\&\ \max W_e\leqslant\psi(e))$，

则称 A 为强能行禁集.

3. 构造禁集. 若存在部分递归函数 φ，使得

$\forall e\in\omega(W_e$ 无穷$\rightarrow\varphi(e)\downarrow\&\varphi(e)\in W_e\cap\overline{A})$，

则称 A 为构造禁集.

能行禁集与构造禁集概念是互相独立的. 此外，能行双禁的集合是存在的. 但是，若 A 为强能行禁集或构造禁集时，$\overline{A}$ 一定不是禁集，从而也不可能是强能行禁集或构造禁集.

双禁集(bi-immune set)　见“禁集”.

能行禁集(effectively immune set)　见“禁集”.

强能行禁集(strongly effectively immune set)　见“禁集”.

构造禁集(constructively immune set)　见“禁集”.

超禁集(hyperimmune set)　亦称 h 禁集. 禁集概念的一种加强. 设 A 为无穷自然数集，若不存在任何不相交的强阵列，使其每个成员均与 A 相交，即不存在递归函数 f，使之满足：

1. $x\neq y\rightarrow D_{f(x)}\cap D_{f(y)}=\varnothing$；

2. $\forall x\in\omega(D_{f(x)}\cap A\neq\varnothing)$；

则称 A 为超禁集. 超禁集一定是禁集，但反之不然.

A 为超禁集还有下列三种等价刻画：

3. 不存在递归函数 f，满足下列条件：

1) $x\neq y\rightarrow D_{f(x)}\cap D_{f(y)}=\varnothing$.

2) $\forall x\in\omega(D_{f(x)}\cap A\neq\varnothing)$.

3) $\bigcup_{x\in\omega}D_{f(x)}\supseteq A$.

4. 不存在递归函数 f，使$\forall n(|A\upharpoonright f(n)|\geqslant n)$.

5. 如 $a_0<a_1<a_2\cdots$为 A 的一种递增枚举，则不存在递归函数 f，使$\forall n(a_n\leqslant f(n))$.

直观上，超禁集 A 的元素是非常稀疏的，因为不论递归函数 f 的增长有多快，f 都不能控制 A 的主函数. 超禁集是存在的，实际上，每个非递归的 T 度中都有超禁集. 在超禁集的定义中，把“强阵列”改成“弱阵列”便得到超超禁集(也称 hh 禁集)的定义. 同样，每个非递归的 T 度中也都有 hh 禁集，此外，任同 hh 禁集都是 h 禁集，但反之不然.

超超禁集(hyperhyperimmune set)　见“超禁集”.

内聚集(cohesive set)　一种超超禁集. 如果 A 是无穷集合，并且不能被任何 re 集分成两个无穷的部分. 即对任何 re 集 W_e，$W_e\cap A$ 和$\overline{W_e}\cap A$ 中至少有一个是有穷集. 则称 A 为内聚集. 内聚集是存在的，实际上，任何无穷集都含有内聚集. 因此，有 $2^{\aleph_0}$ 个内聚集. 此外，内聚集一定是 hh 禁集. 又当 A 为内聚集时，$\overline{A}$ 必不是内聚集.

单纯集(simple set)　一种 re 集. 它是由波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post, E. L.)为解决波斯特问题引进的. 设 A 为 re 集，若 A 的补集 $\overline{A}$ 是禁集，则称 A 为单纯集. 于是，单纯集必定是非递归的. 波斯特最早证明了单纯集的存在性，并且证明了单纯集一定不是 m 完全的. 因此，如令 A 为单纯集，便有 $R<_mA<_m\varnothing'$(其中 R 为非平凡递归集). 此即肯定地回答了关于 m 化归的波斯特问题. 但是德克尔(Dekker, J.)证明了，任何非递归 reT 度中都含有单纯集，因此，上述方法尚不足以解决关于 T 化归的波斯特问题. 俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)曾给出一个“自然的”单纯集例子. 令 $K(x)=\mu e(\varphi_e(0)=x)$(此函数 K 称为柯尔菲郭洛夫复杂性)，如果 $x\leqslant K(x)$，则称 x 为随机数. 那么全体非随机数之集 $A=\{x\,|\,K(x)<x\}$便是一个单纯集.

能行单纯集(effectively simple set)　一种特殊的单纯集. 它是对单纯集概念的一种能行化. 它是斯缪杨(Smullyan, R. M.)于 1964 年引进的. 设 A 为 re集，若 $\overline{A}$ 是能行禁集，即存 在部分递归函数 φ，使 $\forall e\in\omega(W_e\subseteq\overline{A}\rightarrow\varphi(e)\downarrow\ \&\ |W_e|\leqslant\varphi(e))$，并且 $\overline{A}$ 无穷，则称 A 为能行单纯的. 美国学者马丁(Martin, D. A.)证明了任何能行单纯集都是 T 完全的. 另外，任何能行单纯集都是单纯集. 但反之不然. 此外，斯缪杨证明了停机问题集合 K 的亏格集 B 是能行单纯集. 即如果 f 为一一递归函数，且 $\mathrm{rang}(f)=K(=\{x\,|\varphi_x(x)\downarrow\})$. 而 $B=\{x\,|\,\exists y>x(F(y)<f(x))\}$为其亏格集，则 B 一定是能行单纯集.

超单纯集(hypersimple set)　亦称 h 单纯集. 是单纯集概念的一种加强. 设 A 为 re 集，而 $\overline{A}$ 为超禁集，则 A 称为超单纯集. 波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post, E. L.)最早引进了超单纯集概念，并证明了其存在性. 而且他还证明了超单纯集一定不是 tt 完全的. 因此，对超单纯集 A，必有$\varnothing<_{tt}A<_{tt}\varnothing'$. 也就是说，超单纯集的存在给出了波斯特问题关于 tt 化归情形的一个肯定回答. 但是，德克尔(Dekker, J.)证明了任何非递归 reT 度中都有 h 单纯集. 因此，用超单纯集仍不足以解决关于 T 化归的波斯特问题. 此外，从定义可知，h 单纯集一定是单纯的，但反之不然. 实际上，任何非递归 reT，度中都含有非 h 单纯集.

超超单纯集(hyperhypersimple set)　亦称 hh 单纯集. 一种特殊集合. 是波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post, E. L.)为解决其波斯特问题引进的一种集合，也是对 h 单纯集概念的进一步加强. 设 A

为re集,若$\overline{A}$为hh禁集,则称A为hh单纯集.当A为hh单纯集时,A一定是h单纯集,但反之不然.实际上,任何非递归reT度中都含有非hh单纯的h单纯集.另外,由于存在T完全的hh单纯集(参见"极大集"),因此,用hh单纯集仍不足以解决波斯特问题.不过,苏罗维夫(Soloviev,V.D.)于1974年证明了,如果A为hh单纯的,则A一定是非Q完全的,从而

$$\varnothing <_Q A <_Q \varnothing'.$$

极大集(maximal set) 余集为内聚集的re集.若A为re集,而$\overline{A}$是内聚集,则A称为极大集.re集A为极大的,当且仅当$\overline{A}$是无穷的,并且对任何re集,$B \supseteq A$,$\overline{B}$或$B-A$是有穷的.即A为re集格ε^*中关于$\subseteq$关系的极大元(参见"re集格"),极大集之名正是由此而得.弗里德贝格(Friedberg,R.M.)于1958年证明了极大集的存在性,并证明了极大集都是hh单纯集.因而,极大集概念是hh单纯集的进一步加强.而耶茨(Yates,C.E.M.)于1965年证明了存在一个T完全的极大集.极大集的存在不足以肯定回答波斯特问题.注意到从单纯集、h单纯集、hh单纯集到极大集,它们补集的元素越来越"稀疏".而极大集之补的元素已是最稀疏的了.但这仍不足以保证其非T完全性.即用限制其补集元素之"稀疏性"的办法是无法解决波斯特问题的.实际上,波斯特问题的解决是由弗里德贝格和穆切尼克(Mučnik,A.A.)用有穷损伤优先方法解决的.

产生集(productive set) 一种非re集.若集合A不是re的,则A的任何re子集W_e一定是A的真子集,从而有$a \in A-W_e$.若这种a可以由e能行地求出,即若存在递归函数f,使$\forall x \in \omega(W_x \subseteq A \rightarrow f(x) \in A-W_x)$,则称A为产生集.而函数f称为A的产生函数.集合$\overline{K}=\{x \mid \varphi_x(x)\uparrow\}$是一个产生集,且其产生函数为幺函数.任何产生集A都有一个一一递归的产生函数.另外,若存在部分递归函数φ,使$\forall x \in \omega(W_x \subseteq A \rightarrow \varphi(x)\downarrow \ \& \ \varphi(x) \in A-W_x)$,则A一定也是产生集.此时$\varphi$称为A的(部分)产生函数.

产生集不仅存在,而且很多.若A为非平凡的下标集,并含有空函数的下标,则A一定是产生集.另外,若A是产生集,则满足$A \leqslant_m B$的任何集合B也都是产生集.产生集有$2^{\aleph_0}$.不仅如此,对产生集A来说,$A \oplus \overline{A}$及$\overline{A \oplus \overline{A}}$都是产生集,这种其本身和补集都是产生集的集合称双产生集.产生集还有一个重要性质:任何产生集都含有无穷的re子集.因此,产生集一定不是禁集.

产生函数(productive function) 见"产生集".

双产生集(bi-productive set) 见"产生集".

完全产生集(completely productive set) 一种产生集.若存在递归函数f,使$\forall x(f(x) \in \overline{A} \leftrightarrow f(x) \in W_x)$,则称A为完全产生集.完全产生集是产生集概念的一种形式加强.实际上,迈希尔(Myhill,J.)于1955年证明了A为完全产生集,当且仅当A是产生集.另外,如果A为re集,而$\overline{A}$是完全产生集时,德克尔(Dekker,J.)称之为能行非递归集.从而据迈希尔的结果,A为能行非递归的,当且仅当A为m完全集.

反产生集(contraproductive set) 与产生集等价的一个概念.设A为任何自然数集,若存在递归函数f,使得$\forall x(A \subseteq W_x \rightarrow f(x) \in W_x - A)$,则称A为反产生集合.穆切尼克(Mučnik,A.A.)证明了:A为反产生集,当且仅当A为产生集.从而反产生集与产生集实为等价的概念.

创造集(creative set) 亦称能行非递归集(参见"完全产生集").余集为产生集的re集.设A为re集,若$\overline{A}$是产生集,则称A为创造集.例如$K=\{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\}$就是一个创造集.关于创造集的最重要的结果是迈希尔(Myhill,J.)证明的:A为创造集,当且仅当A为一一完全的,又当且仅当A为m完全的.若A为创造集,则A既非递归集,也非单纯集.但是递归集、创造集和单纯集并没有穷尽全部的re集,德克尔(Dekker,J.)证明了存在一个非递归、非单纯又非创造集的re集.并称这种集合为中间集.不仅如此,还证明了任何非递归reT度中都有中间集.

中间集(medial set) 见"创造集".

能行非递归集(effectively nonrecursive set) 原指其补集为完全产生集的re集(参见"完全产生集"),但由于完全产生集就是产生集,因此,能行非递归集也即创造集(参见"创造集").

递归集布尔代数(Boolean algebra of recursive sets) 全体递归集组成的布尔代数.设R为全体递归集组成之集,则在集合包含关系"$\subseteq$"之下,$(R,\subseteq)$组成一个布尔代数,它被称为递归集布尔代数,记为R.若以$A=^*B$表示A,B两集合之间至多相差有限多个元素.而以$A^*=\{B \subseteq \omega \mid A=^*B\}$表示由"$=^*$"导出的等价类.则商结构$R^*=R/=^*$也是一个布尔代数.R和$R^*$都称为递归集结构,它们都是无原子的布尔代数.下面是这两个结构的一些基本性质:

1. 齐性性质:

1) 设$A,B \in R$,且$A \subseteq B$.令$[A,B]=\{C \in R \mid A \subseteq C \subseteq B\}$,则$[A,B]$同构于R,当且仅当$A \neq B$.

2) 设$A^*,B^* \in R^*$,且$A \subseteq^* B$(即$A-B$为有穷集),则$[A^*,B^*]=\{X^* \in R^* \mid A \subseteq^* X \subseteq^* B\}$与$R^*$同构,当且仅当$A^* \neq B^*$.

2. 自同构性:

1）R，R^*都有 $2^{\aleph_0}$个自同构，且均可由递归置换导出.

2）R 的每个自同构可导出 R^* 的一个自同构，且 R^* 的每个自同构均由 R 的自同构导出.

3. 可定义性：

1）R 中任何非平凡的理想、滤子及 R 元素的有穷和余有穷集均是不可定义的.

2）R^* 中任何非平凡集都是不可定义的.

4. 可判定性：R 和 R^* 都是可判定的.

递归集结构（structure of recursive set） 见“递归集布尔代数”.

极大子集（maximal subset） *re* 集的极大 *re* 子集. 设 A 为 *re* 集，B 为 A 的 *re* 子集. 如果 $A-B$ 是内聚集，则称 B 为 A 的极大子集，或称 B 在 A 中是极大的. 于是，当 B 为 A 的极大子集时，对任何 *re* 集 C，如果 $B\subseteq C\subseteq A$，必有 $B=^*C$ 或 $C=^*A$. 即如果 C 是 B 的无穷 *re* 扩张，且 $C\subseteq A$，则 $C=^*A$. 任何无穷 *re* 集都有极大子集.

主子集（major subset） *re* 集的一种子集. 设 A，B 都是 *re* 集，B 是 A 的子集，且 $A-B$ 无穷，如果 $\forall e\in\omega(\overline{A}\subseteq W_e\rightarrow\overline{B}\subseteq^* W_e)$，则称 B 为 A 的主子集，记为 $B\subset_m A$. 等价地，如果 A，B 为 *re* 集，且 $B\subseteq A$ & $(A-B)$无穷，则 B 是 A 的主子集，当且仅当不存在递归集 R 满足 $R\subseteq A$ & $R\cap(R-B)$无穷. 拉克伦（Lachlan，A. H.）证明了，任何一个非递归的 *re* 集都有主子集，并且 *re* 集的任何子集都不可能同时是主子集和极大子集.

***re* 集格**（lattice of *re* sets） 递归论的基本概念之一. 指全体 *re* 集组成的格. 设 ε 为全体 *re* 集之集合，则 ε 在集合包含关系“$\subseteq$”之下构成一个可分配格$(\varepsilon,\subseteq)$，此格称为 *re* 集格，并用 ε 表示. 此外，如 $A=^*B$ 表示$(A-B)\cup(B-A)$为有穷集，则 ε 关于$=^*$之商结构 $\varepsilon/=^*$ 也是一个格，此格记为 ε^*. 如果 A 为 *re* 集，则 $L(A)=\{B\in\varepsilon\mid A\subseteq B\}$为 ε 的主滤子，而 $I(A)=\{B\in\varepsilon\mid B\subseteq A\}$则是 ε 的主理想，它们关于“$=^*$”的商结构分别记为$L^*(A)$和$I^*(A)$. 关于上述的 *re* 集结构，有下列基本性质：

1. 齐性性质：

1）ε 的向下齐性. 如果 A 为无穷 *re* 集，$I(A)$为由 A 生成的主理想，则 $I(A)$与 ε 同构.

2）如果 A 为 *hh* 单纯集，则 $L(A)$为一个布尔代数，从而它不与 ε 同构. 但是也存在 *re* 集 A，使 $L(A)$与 ε 同构.

2. 自同构性质：ε 和 ε^* 都有 $2^{\aleph_0}$个自同构.

3. 可定义性：

1）设 P 是关于 *re* 集的一个性质，并且 P 在有穷差之下不变，则 P 在 ε^* 中可定义，当且仅当 P 在 ε 中可定义.

2）下列性质在 ε 中可定义：A 为有（无）穷集、A 为递归集、A 为单纯集、A 为 *hh* 单纯集、A 为 r 极大集、A 为极大集、A 为创造集. 但是，A 为 h 单纯集在 ε 中不可定义.

4. 可判定性：哈林顿（Harrington，L.）和赫尔曼（Herrmann，E.）证明了 ε 和 ε^* 的理论都是不可判定的. 但是，ε^* 的二量词理论是可判定的. 关于三量词的判定性目前尚不清楚.

即时单纯集（promptly simple set） 一种特殊的单纯集. 设 A 为余无穷的 *re* 集，如果存在递归函数 f 以及 A 的一个递归枚举$\{A_s\}_{s\in w}$，使得$\forall e\in\omega(W_e$ 无穷$\rightarrow\exists s\exists x(x\in A_{f(x)}\cap(W_{e,s+1}-W_{e,s}))$. 则称 A 为即时单纯集. 注意到余无穷 *re* 集 A 为单纯的，要求$\forall e\in\omega(W_e$ 无穷$\rightarrow A\cap W_e\neq\varnothing)$，因此，即时单纯性是单纯性的一种加强. 如果 T 度 $\boldsymbol{a}$ 中含有即时单纯集，则称 $\boldsymbol{a}$ 为即时单纯度. 全体即时单纯度组成之集记为 PS. PS 恰好是全体不可交度之集 *NC*.

带外部信息源的图灵机（oracle Turing machine） 简单图灵机的一种推广. 它在简单图灵机的基础上增加了一个外部信息源. 由于增加了这个外部信息源，这种推广了的图灵机可以计算一些简单图灵机无法计算的函数. 形式地，带外部信息源的图灵机是在简单图灵机的基础上增加了一个可处理某一特定的自然数集合 A（称为外部信息源）的解算装置，对任意 n，该装置可对问题“$n\in A$?”给出正确的回答，回答的结果可能影响计算的过程. 而对该装置的内部结构则不予考虑，即把该装置看做一个黑箱，因此 A 可以是非递归集. 一个带外部信息源的图灵机的程序，是在简单图灵机程序所具有的三种指令基础上增加一种指令：$q_1aq_2q_3$. 它表示当机器在状态 q_1 时，若读头在工作带上读到的符号为 a，则判断“$n\in A$?”，其中 n 为此时工作带上符号“1”的个数. 若 $n\in A$，则下一步机器的状态为 q_2，否则为 q_3. 由于增加了一个解算装置，该机器的计算能力大大加强. 当 A 为非递归集时，该机器就能计算简单图灵机无法计算的函数. 与标准图灵机一样，带外部信息源的图灵机可以进行能行编码，用 φ_e^A 表示编码为 e 的带外部信息源 A 的图灵机所计算的函数.

相对可计算性（relative computability） 可计算性概念的推广. 若在给定一个集合 A 的信息后，就可能行地计算一个部分函数 f 或集合 B 的特征函数，则称 f 或 B 是相对于 A 可计算的. 正如 T 可计算性很好地刻画了直观可计算性一样，相对可计算性也可以用带外部信息源的图灵机进行刻画. 即如果一个部分递归函数 f 可由一带有外部信息源 A 的图灵机进行计算（$\exists e(f=\Phi_e^A)$），则称 f 相对于 A 可计算. 若集合 B 的特征函数相对于 A 可计算，则称 B 相对于 A 可计算（记为 $B\leqslant_T A$），亦称 B 是 A

可计算的. 这样一来,B 是 A 可计算与 BT 可化归到 A 实际上是一致的.

一个部分递归函数 f 相对 A 可计算,当且仅当 f 相对部分递归于 A. 一集合 B 相对于 A 可计算,当且仅当 B 递归于 A(参见"带外部信息源的图灵机","相对部分递归性").

相对部分递归性(relative partial recursiveness) 部分可计算性概念的推广. 若一个函数 f 可由本原函数及集合 A 的特征函数出发,经过有穷次叠置与一般递归得到,则称 f 相对部分递归于 A,或称 f 为 A 部分递归的. 形式地,可定义相对部分递归于 A 的函数类为满足以下 4 个条件的最小函数类 $\widetilde{A}$:

1. $\widetilde{A}$ 包含本原函数.
2. $\widetilde{A}$ 包含 A 的特征函数.
3. $\widetilde{A}$ 关于叠置封闭.
4. $\widetilde{A}$ 关于一般递归式封闭.

若函数 f 在 $\widetilde{A}$ 中,则称 f 相对部分递归于 A. 特别地,如果 f 又是全函数,则称 f 相对递归于 A,或称 f 为 A 递归的,如果集合 B 的特征函数相对递归于 A,则称 B 相对递归于 A.

函数 f 相对部分递归于 A,当且仅当 f 相对 A 可计算;集合 B 相对递归于 A,当且仅当 B 相对 A 可计算. 所有 A 部分递归函数可能行枚举,并记为 $\{\varphi_e^A\}_{e\in\omega}$(参见"相对可计算性").

相对递归性(relative recursiveness) 见"相对部分递归性".

相对递归可枚举性(relative recursive enumerability) 递归可枚举性概念的推广. 若在得知集合 A 的信息后,集合 B 的全体元素可以被能行地枚举出来,则称集合 B 相对于 A 递归可枚举,或称 B 为 A 递归可枚举的. 形式地,B 相对于 A 递归可枚举,当且仅当 $B=\varnothing$,或存在一 A 递归函数 f,使得 $B=rang\, f$. 与递归可枚举集的情形相似,一个集合 B 为 A 递归可枚举的,当且仅当有一个 A 部分递归函数 φ_e^A,使 $B=\mathrm{rang}\ (\varphi_e^A)$. 亦当且仅当有一个 A 部分递归函数 φ_e^A,使 $B=\mathrm{dom}\ (\varphi_e^A)$. 因此,全体 A 递归可枚举集可以能行枚举成 $\{W_e^A\}_{e\in\omega}$,或 $\{E_e^A\}_{e\in\omega}$,其中 $W_e^A=\mathrm{dom}\ (\varphi_e^A)$,$E_e^A=rang\ (\varphi_e^A)$(参见"递归可枚举集").

此外,B 是 A 递归的,当且仅当 B 和 $\overline{B}$ 都是 A 递归可枚举的.

曼希尔完备性定理(Myhill completeness theorem) 揭示创造集与完备集之间关系的定理. 该定理断言:任何创造集一定是 m 完备的(因此也是 1-完备的),由此可推知,A 为创造集,当且仅当 A 为 1-完备的,亦当且仅当 A 为 m 完备的. 该定理是曼希尔(Myhill,J.)于 1955 年证明的.

曼希尔同构定理(Myhill isomorphism theorem) 递归论的一个重要定理. 它揭示了递归同构与 1-化归间的关系. 即:集合 A,B 递归同构,当且仅当 $A\equiv_1 B$. 曼希尔同构定理是曼希尔(Myhill,J.)于 1955 年证明的,其内容类似于集合论中的康托尔-施罗德-伯恩施坦定理.

完备集(complete set) 一种 re 集. 指 re 集相应于某一化归关系 $\leqslant r$ 的最大元. 即一集合为 r 完备集,当且仅当它满足以下两个条件:

1. A 为 re 集.
2. $\forall B$(B 为 re 集$\rightarrow B\leqslant rA$).

包含完备集的度称为完备度,一般用 $\mathbf{0}_r'$ 表示. 在不指明具体 r 的情况下,所谓完备集即指 T 完备集,完备度即指 T 完备度. 若 r_1,r_2 是两种化归,且 r_1 化归强于 r_2 化归,则 r_1 完备集一定也是 r_2 完备集. 但即使 r_1 不强于 r_2,r_1 完备集也可能都是 r_2 完备的. 例如 m 完备集也一定是 1 完备集(也一定是创造集). 各种完备集还有以下性质:

1. 一集合为准创造集,当且仅当它为 d 完备.
2. 一集合为次创造集,当且仅当它为 Q 完备.
3. 能行单纯集都是 T 完备,但可能不是 Q 完备,或 wtt 完备.
4. 强能行单纯集是 Q 完备,但可能不是 wtt 完备.
5. 单纯集一定不是 d 完备,因此也一定不是 btt 完备,但可能是 C 完备.
6. 超单纯集一定不是 wtt 完备,但可能是 Q 完备.
7. 超超单纯集一定不是 Q 完备,但可能是 T 完备.
8. 半递归集一定不是 P 完备,但可能是 Q 完备或 tt 完备.

完备度(complete degree) 见"完备集".

递归置换(recursive permutation) 数论中置换概念的一种推广. 具体地,递归置换是指从 ω 到 ω 的 1—1 对应递归函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\text{ 为偶数}),\\ x-1 & (x\text{ 为奇数}),\end{cases}$$

即为递归置换. $I(x)=x$ 亦为递归置换. 直观上,递归置换实际上是把全体自然数能行地重新排列. 由于递归论的研究,主要关心自然数集合的能行性,而不涉及每个自然数的特殊性(这是与通常数论的关键不同之处),因此,递归论中的绝大多数结论都不依赖于自然数以怎样的方式排列. 或者更明确地说,这些结论在递归置换下是不会改变的(参见"递归不变性").

递归不变性(recursively invariance) 自然数

集合的一种性质.指自然数集合在任何递归置换下不变的性质.形式地,若对具某种性质的任意集合 A 和任何递归置换 P,$P(A)$ 亦具有该性质,则称该性质为递归不变的.例如:性质"A 为 re 集"及"A 的基数为 n"即有递归不变性,而涉及一些具体的自然数的特有的性质,如"$A=\{0,1,2\}$","A 为偶数的集合"等则没有递归不变性.递归论中主要研究的性质都是具有递归不变性的.

递归等价(recursive equivalence) 递归论的基本概念之一.指自然数集在递归意义下的等价关系.若 A,B 为自然数集,并且存在一一的部分递归函数 φ,使得 $A\subseteq \mathrm{dom}\,\varphi$,并且 $\varphi(A)=B$,则称 A,B 递归等价.由递归等价关系定义的(自然数集的)等价类,称为递归等价型.递归等价关系类似于集合论中的等势关系.递归等价型则类似于集合论中的基数概念.递归等价关系的概念是德克尔(Dekker,J.)于 1955 年引入的.

递归等价型(recursive equivalence type) 见"递归等价".

可化归性(reducibility) 递归论术语.指反映函数之间可计算性相对难易程度的一个概念.直观地说,如果在使用了函数 f 的信息后,就可以能行地计算另一个函数 g,则称 g 可化归到 f(记为 $g\leqslant_r f$).如果自然数集合 A 的特征函数可化归到自然数集合 B 的特征函数,则称 A 可化归到 B(记为 $A\leqslant_r B$).对此直观概念的不同的形式化便定义出相应的严格的化归概念.如真值表化归,图灵化归等.虽然这些化归有许多不同的特性,但它们也有以下一些共同点.首先,可化归关系都具有自反性与可传性,因此由可化归关系 $\leqslant_r$ 可导出等价关系"$\equiv_r$"($A\equiv_r B \underset{df}{\leftrightarrow} A\leqslant_r B\wedge B\leqslant_r A$).其次,任何可化归到递归集的集合都是递归集,并且在大部分情况下(除一一化归和多一化归),递归集可化归到任何集合,这表明,在化归关系"$\leqslant_r$"之下,递归集是最"小"的,这正好反映了递归集具有最低的不可解程度.此外,所有可化归关系还具有递归不变性,即若 A,B 递归同构则 $A\equiv_r B$.如果 $\leqslant_{r_1}$,$\leqslant_{r_2}$ 是两种化归关系,则若对任何集合 A,B,都有 $A\leqslant_{r_1}B\rightarrow A\leqslant_{r_2}B$,便称 $\leqslant_{r_1}$ 比 $\leqslant_{r_2}$ 强.

多一化归(many-one reducibility) 一种较强的化归关系.对任意两个自然数集 A,B,若存在递归函数 f,使对所有 x,$x\in A\leftrightarrow f(x)\in B$.则称 A 可多一化归到 B,记为 $A\leqslant_m B$.特别地,若 f 还是一一的函数,则称 A 可一一化归到 B,记为 $B\leqslant_1 B$.所谓 A 多一化归到 B,实际上是在判定"$x\in A$?"时,只要用到一次 B 的信息($f(x)\in B$?),而对一一化归,则进一步要求每次使用的信息不同.一一化归和多一化归是递归论中常见的化归关系中最强的.

如果 $A\leqslant_m B$,且 $B\leqslant_m A$,则称 A,B m 等价,记为 $A\equiv_m B$.类似地,若 $A\leqslant_1 B$ 且 $B\leqslant_1 A$,则称 A,B 为 1 等价,并记为 $A\equiv_1 B$.除了在"可化归性"条目中提到的各种 P 化归共有的性质外,多一化归和一一化归还有一些特殊的性质,如递归集不一定能化归到其他集合;能够多一或一一化归到递归可枚举集的集合,也一定是递归可枚举的,并且 $A\leqslant_m\overline{A}$ 与 $A\leqslant_1\overline{A}$ 并不普遍成立.此外,一一等价的集合一定是递归同构的.由此还可推得若 $A\equiv_1 B$,则 $|A|=|B|$.多一化归与一一化归的概念是波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post,E.L.)于 1944 年引入的.

一一化归(one-one reducibility) 见"多一化归".

不可解度(degree of unsolvability) 递归论术语.反映集合不可判定的复杂程度的一个概念.若 $\leqslant_r$ 是一种化归关系,则集合 A 的 r 度(即由 r 化归导出的不可解度)为全体与 A r 等价之集合所组成的类:$deg_r(A)=\{B\mid A\equiv_r B\}$.在不至引起混淆的情况下,$r$ 度就可称为度,常用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 表示度.由定义在集合上的关系 $\leqslant_r$,也可导出度之上相应的化归关系:若存在 $A\in\boldsymbol{a}$,$B\in\boldsymbol{b}$,且 $A\leqslant_r B$,则称 r 度 $\boldsymbol{a}$ 可化归到 $\boldsymbol{b}$,并记为 $\boldsymbol{a}\leqslant_r\boldsymbol{b}$,或简记为 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$.对全体 r 度在"$\leqslant$"之下的结构的讨论,是 r 度理论讨论的内容.通常,在不指明哪种 r 化归时,不可解度就是指图灵度(参见"图灵度"),因此通常 $\deg(A)$ 即指 $deg_T(A)$.常用 $\mathscr{D}_r$ 表示 r 度的结构,特别地,用 $\mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{D}_r$.$\mathscr{D}_r(P)$ 表示具有性质 P 的 r 度的结构,如 $\mathscr{D}_m(\geqslant_m\boldsymbol{a})$ 表示 $\geqslant_m\boldsymbol{a}$ 的所有 m 度的结构.

***m* 度**(m-degree) 由 m 化归导出的等价类.m 度与 1 度有非常特殊的性质,例如它们都有不止一个递归度(包含递归集的度).此外它们还有以下性质:m 度(在 $\leqslant_m$ 之下)形成可分配的上半格,但不形成格.包含递归集的 m 度有三个:$\{\varnothing\}$,$\{\omega\}$ 与 $\mathbf{0}_m$,其中 $\mathbf{0}_m$ 为除 $\varnothing$ 与 ω 外的所有递归集.为了处理方便,常约定 $\mathbf{0}_m$ 为最小的 m 度.1 度的性质更为特殊,它不但不形成格,甚至也不形成上半格;它有无穷多个递归度,并且这些递归度有如下结构(左边的度可化归到右边的,反之不然):

$$\begin{matrix}\boldsymbol{a}_0-\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2-\cdots & \\ & \mathbf{0}_1\\ \boldsymbol{b}_0-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2-\cdots & \end{matrix}$$

其中 a_m 为一切 m 元自然数集的类,b_m 为一切补集为 m 元的自然数集,$\mathbf{0}_1$ 为其他一切递归集的类.m 度与 1 度的其他主要性质还有:

1.m 度不是稠密的,但 rem 度是向上稠密的,即若 $\boldsymbol{c}$ 为 rem 度,且 $\boldsymbol{c}<_m\mathbf{0}'_m$,则存在 rem 度 $\boldsymbol{a}$,使得 $\boldsymbol{c}<_m\boldsymbol{a}<_m\mathbf{0}'_m$.

2.$r.e.$ 的 m 度中只包含 re 集.

3. 对任何 m 度 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$\mathscr{D}_m(\geqslant_m\boldsymbol{a})$ 与 $\mathscr{D}(\geqslant_m\boldsymbol{b})$ 同构.

4. $\mathscr{D}_m$ 的一阶理论是不可判定与不可公理化的.

5. 任何 m 度包含一个最大的 1 度，但不一定包含最小的 1 度.

6. 任何 m 度或者只包含一个 1 度，或者包含无穷多个 1 度.

7. $\mathscr{D}_m$ 与 $\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_{tt},\mathscr{D}_{\rm wtt},\mathscr{T}$ 都不初等等价.

真值表条件(truth－table condition)　亦称 *tt* 条件. 递归论术语. 它是为定义真值表化归与受界真值表化归定义的. 一个 k 范数 *tt* 条件是指序偶：$\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_k\rangle,\alpha\rangle$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 为自然数，α 为 k 元布尔函数. A 满足 *tt* 条件 $\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_k\rangle,\alpha\rangle$，是指 $\alpha(C_A(x_1),C_A(x_2),\cdots,C_A(x_k))=1$，其中 C_A 为 A 的特征函数.

布尔函数一般可看成真值表，真值表条件与真值表化归由此得名. 所有(各个元数的)*tt* 条件可以被能行编码，因此，在具体应用时，"*tt* 条件 x"一般指编码为 x 的 *tt* 条件.

***tt* 条件**(*tt*-condition)　即"真值表条件".

真值表可化归性(truth-table reducibility)　m 化归的一种推广. 直观地，对任意自然数集 A 和 B，A 可真值表化归到 B 记为 $A\leqslant_{tt}B$，是指对任意 x，可能行地求解一系列问题"$y_1\in B$?"，"$y_2\in B$?"，…，"$y_n\in B$?"，若这些回答在一个(可由 x 能行计算出的)真值表中对应真值，则 $x\in A$，否则 $x\notin A$. 而 m 化归只能提一个问题，且真值表中，真只对应真，假只对应假. 形式地，对自然数集 A,B，若存在递归函数 f，使得对所有 x，$x\in A$，当且仅当 B 满足 *tt* 条件 $f(x)$，则称 A 可真值表化归到 B，记为 $A\leqslant_{tt}B$(参见"真值表条件"). 真值表可化归性也可等价定义为：对自然数集 A,B，若存在递归函数 f,g，使得 $x\in A$，当且仅当对某个 $y\in D_{g(x)}$，$B\upharpoonright f(x)=D_y$，则称 A 可真值表化归到 B. 其中 D_x 表示典则下标为 x 的有穷集. 若 $A\leqslant_{tt}B$ & $B\leqslant_{tt}A$，则称 A 与 B *tt*等价，记为

$$A\equiv_{tt}B.$$

真值表化归弱于 m 化归与 btt 化归，但强于 wtt 化归与 T 化归. 对 *tt* 化归而言，所有递归集之间都可互相化归，且对一切自然数集 A，$A\leqslant_{tt}\overline{A}$. *tt* 化归是波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post，E. L.)于 1944 年引入的.

***tt* 度**(*tt*-degree)　真值表可化归度. 它是由 *tt* 化归性导出的度. $\mathscr{D}_{tt}$和 R_{tt}分别表示全体 *tt* 度和全体 *re* 的 *tt* 度的类. *tt* 度的主要性质有：

1. $\mathscr{D}_{tt}$不是稠密的，但 $\mathscr{D}_{tt}(\geqslant\overset{0'}{\sim}_{tt})$ 是稠密的.

2. $A\leqslant_{tt}B$，当且仅当存在 e，对所有 X，φ_e^X 是全函数，且 $A=\varphi_e^B$.

3. 任何非递归 *tt* 度包含无穷多个 m 度；任何 *tt* 度中都有最大 m 度；任何非递归 *tt* 度都不包含最小 m 度.

4. $\mathscr{D}_{tt}$与 $\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_m,\mathscr{D}$ 不初等等价，但 $\mathscr{D}_{tt}(\geqslant\overset{0'}{\sim}_{tt})$ 与 $\mathscr{D}_{\rm wtt}(\geqslant\overset{0'}{\sim}_{\rm wtt})$ 同构.

受界真值表可化归性(bounded truth-table reducibility)　一种加限制的可化归性. 对自然数集合 A 和 B，若 $A\leqslant_{tt}B$，且为判断 $x\in A$ 而向 B 提问的次数少于一个常数 m(m 与 x 无关)，则称 A 可受界真值表化归到 B 记为 $A\leqslant_{btt}B$. 形式地，对自然数集 A 和 B，若存在递归函数 f 和常数 m，使得对一切 x，$f(x)$为范数小于 m 的 *tt* 条件，且 $x\in A$，当且仅当 B 满足 *tt* 条件 $f(x)$，则称 A 可受界真值表化归到 B，记为 $A\leqslant_{\rm btt}B$. 以上定义也可等价表述为：对自然数集 A,B，若存在常数 n(称为该化归的范数)和递归函数 f,g，使得对一切 x，

1. $|D_{f(x)}|\leqslant n$；

2. $x\in A$，当且仅当对某个 $y\in D_{g(x)}$，有

$$B\cap D_{f(x)}=D_y;$$

则称 A 可受界真值表化归到 B. 其中 D_x 表示典则下标为 x 的有穷集. 若 $A\leqslant_{btt}B$，且 $B\leqslant_{btt}A$，则称 A，B 为 *btt* 等价，记为 $A\equiv_{btt}B$.

btt 化归强于 *tt* 化归，但弱于 m 化归. 递归集可 *btt* 化归到任何集合，任何可 *btt* 化归到递归集的集合也一定是递归集. 对任何自然数集 A，$A\leqslant b_{btt}\overline{A}$. 由 *btt* 化归关系导出的度称为 *btt* 度. $\mathscr{D}_{btt}$在度化归关系 $\leqslant b_{tt}$之下形成上半格. *btt* 化归的概念是波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post，E. L.)于 1944 年引入的.

***btt* 度**(*btt*-degree)　见"受界真值表可化归性".

弱真值表可化归性(weak truth-table reducibility)　一种可化归性概念. 若一自然数集合 B 的特征函数可由一带外部信息源 A 的图灵机计算，并且存在一递归函数 f，使得对任意 x，该机器在计算 $C_B(x)$(B 的特征函数)时，只使用 $A\upharpoonright f(x)$ 中的信息，即只对小于 $f(x)$的 n 提问"$n\in A$?"，则称 B 可弱真值表化归到 A，记为 $B\leqslant_{\rm wtt}A$，有时亦记为"$B\leqslant_{w}A$". 弱真值表化归也称为受界图灵化归，并用"$B\leqslant_{\rm bT}A$"表示.

对于 *tt* 化归，若 $B\leqslant_{tt}A$，则存在递归函数 f，使得在判断"$x\in B$?"时，只用到 $A\upharpoonright f(x)$中的信息. 因此，*wtt* 化归弱于 *tt* 化归，这也是其名称的由来.

wtt 化归的概念是由弗里德贝格(Friedberg，R. M.)和美国数学家罗杰斯(Rogers，H.)于 1959 年提出的. 由 *wtt* 可化归性导出的度称为 *wtt* 度. *wtt* 度的很多性质与 *tt* 度相似. 肖尔(Shore，R. A.)于 1982 年证明了 $\mathscr{D}_{wtt}(\geqslant\mathbf{0}'_{wtt})$ 与 $\mathscr{D}_{tt}(\geqslant\mathbf{0}'_{tt})$ 同构. 此

外，$\mathscr{D}_{wtt}(\geqslant \mathbf{0}'_{wtt})$是稠密的. 但是$\mathscr{D}_{wtt}$是否与$\mathscr{D}_{tt}$初等等价还不知道.

wtt 度(*wtt*-degree)　见“弱真值表可化归性”.

图灵机可化归性(Turing reducibility)　一种可化归性概念. 它是由英国数学家图灵(Turing, A. M.)于1939年引进的. 具体地，对自然数集A和B，A可T化归到B(记为$A\leqslant_T B$)，是指A相对于B可计算，即A的特征函数可由一带外部信息源B的图灵机计算. 由于用图灵机可以很好地刻画直观可计算性概念(参见“丘奇论题”)，因此，可以说图灵可化归性已很好地刻画了直观可化归概念(参见“可化归性”)，也就是说，A是直观上可化归到B，当且仅当$A\leqslant_T B$. 当然，同能行可计算性一样，T可化归性的概念也有许多种等价的刻画.

T 度(*T*-degree)　亦称图灵度. 递归论的基本概念之一. 它是由图灵可化归关系导出的度. 集合A所在的图灵度定义为：$deg_T(A)=\{B\mid A\equiv_T B\}$. 由于$T$可化归关系很好地刻画了直观的可化归概念，因此，用$T$度来刻画一个集合(函数)的复杂程度是合适的，所以通常不可解度指的就是T度，而不可解度理论就是以T度作为主要研究对象的一门分支学科. 虽然图灵度的概念是用图灵可化归性定义的，但图灵度概念的明确定义则是由波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post, E. L.)于1944年给出的. 因此，按通常的说法，关于不可解度的研究是由波斯特开创的.

图灵度(Turing degree)　即“T度”.

受界图灵可化归性(bounded Turing reducibility)　一种可化归性概念. 受界图灵化归在不同文献中有两种不同的含义，这两种定义都是对T化归加以适当限制后提出的. 第一种定义是指*wtt*化归(参见“弱真值表化归”)，第二种定义与第一种定义完全不同(不只在定义上不同，它们也不等价)，主要是针对*re*集进行研究. 若A,B为*re*集，则$A\leqslant_T B$，当且仅当对所有x：$x\in\overline{A}\leftrightarrow(\exists u)(D_u\subseteq\overline{B}\wedge u\in W_{f(x)})$(关于$D$与$W$的含义参见“典则下标”与“*re*集”). 若将以上条件加强为

$$(\exists n)(\forall x)(x\in\overline{A}\leftrightarrow(\exists u)(D_u\subseteq\overline{B}\wedge u\in W_{f(x)}\wedge|W_{f(x)}|<n)).$$

则称A可bT化归到B. 记为“$A\leqslant_{bT}B$”. 对*re*集，bT化归强于T化归，它对T化归所加的限制类似于*btt*化归对*tt*化归所加的限制.

Q 可化归性(*Q*-reducibility)　一种可化归性概念. 对任意自然数集合A,B，若存在递归函数f，使得$x\in A$，当且仅当$W_{f(x)}\subseteq B$，则称A为Q可化归到B，记为$A\leqslant_Q B$(W_x的定义参见“递归可枚举集”). Q化归的概念主要是为了解决波斯特问题引入的. 与通常的化归不同，即使$A\leqslant_Q B$，A也未必递归于B. 人们所能知道的仅仅是$\overline{A}$ *re*于B. 但若A为*re*(或*re*于B)，则$A\leqslant_Q B\rightarrow A\leqslant_T B$. 因此，对$Q$化归的研究一般限于*re*集(度). Q化归在直观上有些类似合取化归. 如果把Q化归定义中的递归可枚举集$W_{f(x)}$换为有穷集$D_{f(x)}$，就得到了C化归的定义.

Q化归具有自反性与可传性. 在*re*集上，它弱于m化归而强于T化归，但它与*btt*化归、*tt*化归及*wtt*化归均不可比较. 任何超超单纯集都不是Q完备的，此为Q化归的一个重要性质.

Q 度(*Q*-degree)　递归论的基本概念之一. 它是由Q可化归性导出的度. 由于Q可化归性为非标准化归(即由$A\leqslant_Q B$并不能得出A相对B不可计算)，因此，Q度的性质与一般度不同. 对Q度而言，最小的Q度为所有π_1^0集的类(不是一切递归集的类).

递归度(recursive degree)　递归论的基本概念之一. 包含递归集的度称为递归度. 对应不同的化归，也可以定义不同的递归度，如递归T度，递归m度等. 在大多数情况下，递归度中包含的集合都是递归集. 对于1度与m度，它们都有不止一个递归度，而对于1度、*wtt*度、*tt*度和*btt*度而言，递归度只有一个——即所有递归集的类，记为$\mathbf{0}$，它是对应的度结构中的最小元.

递归可枚举度(recursive enumerable degree)　递归论的基本概念之一. 包含递归可枚举集的度称为递归可枚举度，简称*re*度. 对应不同的化归，也可以定义不同的*re*度. 通常*re*度中可能包含非*re*集，但*re*的1度和m度都只包含*re*集.

re 度(*re*-degree)　即“递归可枚举度”.

度的化归性(reducibility of degrees)　递归论术语. 指度中集合之间的可化归关系. 具体地，若$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{b}_r$为两个r度，且存在$A\in\boldsymbol{a}_r, B\in\boldsymbol{b}_r$，使$A\leqslant_r B$，则称$r$度$\boldsymbol{a}_r$可化归到$r$度$\boldsymbol{b}_r$，记为$\boldsymbol{a}_r\leqslant_r\boldsymbol{b}_r$.

递归同构(recursively isomorphism)　自然数集在递归置换意义下的等价关系. 对自然数集A，B，若存在递归置换P，使得$P(A)=B$，则称A,B递归同构，在递归论中一般记为$A\equiv B$. 由等价关系“$\equiv$”导出的(自然数集的)等价类称为递归同构型. 根据曼希尔(Myhill, J.)的结论，递归同构实际上与1等价的概念是等价的(参见“曼希尔同构定理”).

递归同构型(recursive isomorphism type)　见“递归同构”.

合取化归(conjunctive reducibility)　亦称c化归. m化归的一种推广. 形式地，对自然数集A,B，如果存在递归函数f，使得对所有x，$x\in A$，当且仅当$D_{f(x)}\subseteq B$. 则称A可c化归到B，记为$A\leqslant_c B$(D_y是典则下标为y的有穷集). 直观地，$A\leqslant_c B$是指对任何x，可能行找到有穷个自然数$y_1,y_2,\cdots,y_n$，使

得 $x\in A$，当且仅当这些元都在 B 中. 换句话说，就是 B 满足合取式"$y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge\cdots\wedge y_n\in B$". 由于对任何自然数集 $A,B,A\leqslant_c B\leftrightarrow\overline{A}\leqslant_d\overline{B}$，因此由 c 化归导出的度的结构与 d 化归导出的度的结构是同构的. c 化归比 m 化归弱，但比 tt 化归强.

c 化归（c-reducibility）　即"合取化归".

析取化归（disjunctive reducibility）　亦称 d 化归. m 化归的一种推广. 形式地，对自然数集 A,B，若存在递归函数 f，使得对所有 $x,x\in A\leftrightarrow D_{f(x)}\cap B\neq\varnothing$，则称 A 可 d 化归到 B，记为 $A\leqslant_d B$（D_y 是典则下标为 y 的有穷集）. 直观地，$A\leqslant_d B$，是指对任何 x，可能行找到有穷个自然数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，使得 $x\in A$，当且仅当这些元有一个在 B 中. 即 B 满足析取式"$y_1\in B\vee y_2\in B\vee\cdots\vee y_n\in B$". 由于对任何自然数集 $A,B,A\leqslant_d B\leftrightarrow\overline{A}\leqslant_c\overline{B}$. 因此，由 d 化归导出的度结构与 c 化归导出的度结构是同构的. d 化归比 m 化归弱，但比 tt 化归强.

d 化归（d-reducibility）　即"析取化归".

正化归（positive reducibility）　亦称 p 化归. m 化归、c 化归与 d 化归的一种推广. 形式地，对自然数集 A,B，若存在递归函数 f，使得对所有 $x,x\in A\leftrightarrow\exists u(u\in D_{f(x)}\wedge D_u\subseteq B)$，则称 A 可正化归到 B，记为 $A\leqslant_p B$（D_y 是典则下标为 y 的有穷集）. 直观地，$A\leqslant_p B$ 是指对任何 x，为了判断"$x\in A$?"，可通过向 B 提问一个形如"$(y_{11}\in B\wedge\cdots\wedge y_{1n_1}\in B)\vee\cdots\vee(y_{m1}\in B\wedge\cdots\wedge y_{mn_m}\in B)$"的问题得到，该公式中不含否定词，或者说，只用到 B 中的正信息. p 化归弱于 m 化归、c 化归与 d 化归，但强于 tt 化归. p 化归、c 化归与 d 化归的概念是杰克什（Jockusch，C. G.）于 1966 年提出的.

p 化归（p-reducibility）　即"正化归".

线性化归（linear reducibility）　亦称 l 化归. 一种类似于 tt 化归的化归. 形式地，对自然数 A,B，若存在递归函数 f，使得对所有 $x,x\in A\leftrightarrow|D_{f(x)}\cap B|\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$. 则称 A 可线性化归到 B. 记为 $A\leqslant_L B$（D_y 是典则下标为 y 的有穷集）. 直观地，$A\leqslant_l B$ 是指对任何 x，为判断"$x\in A$?"，可通过向 B 提问有穷个问题"$y_1\in B$?"，…，"$y_n\in B$"，若回答为肯定的个数是奇数，则 $x\in A$ 成立，否则 $x\notin A$.

l 化归（l-reducibility）　即"线性化归".

枚举化归（enumeration reducibility）　亦称 e 化归. 一种可化归性概念. 对自然数集 A；B，若存在 re 集 W_z，使得$\forall x[x\in A\leftrightarrow(\exists u)[\langle x,u\rangle\in W_z\wedge D_u\subseteq B]]$（$D_u$ 为以 u 为典则下标的有穷集），则称 A 可枚举化归到 B，记为 $A\leqslant_e B$. 直观地说，A 可枚举化归到 B，是指存在一个能行的过程，以该过程接受 B 的枚举作为输入，以 A 的枚举作为输出. 若将 B 的按另一个次序的枚举作为输入时，该过程的输出仍为 A，但输出次序可能不同. 这里，输出和输入的枚举都可能重复. 从形式上看，e 化归可以看成是正化归的推广，只是将式中的 $u\in D_{f(x)}$变为$\langle u,x\rangle\in W_Z$. 从另一个角度看，$A\leqslant_e B$ 非常类似于 A 相对 re 于 B，不过前者的概念比后者强（即 $A\leqslant_e B\rightarrow A$ re 于 B），因为前者在得到 A 的枚举时，只能用到 B 的正信息（即外部信息源只在 $y\in B$ 时对提问"$y\in B$?"给出回答，且回答不一定立即给出），而后者在得到 A 的枚举时，既可用到 B 的正信息，也能用到负信息（即外部信息源对任何提问 $y\in B$ 皆立即给出回答，而不论 y 是否属于 B）.

对于枚举化归，任何 re 集可 e 化归到任何其他集合：反之，任何能化归 re 集的集合也一定是 re 集. 这一点是与其他化归差别很大的. 从某种意义上说，e 化归不是一种标准化归，它已没有相对可计算的意义. 除了前面的定义外，e 化归也能从函数出发用另一种方式来定义：若 α,β 为部分函数，且存在部分递归算子 F，使得 $F(\beta)\simeq\alpha$，则称 α 可 e 化归到 β，记为 $\alpha\leqslant_e\beta$. 若将这种定义推广到集合上，则该定义与前面的定义一致（即定义 $G_\alpha\leqslant_e G_\beta\leftrightarrow\alpha\leqslant_e\beta$，其中 G_α，G_β 为 α,β 的图）. 对部分函数上的 e 化归，$\leqslant_e$ 与 $\leqslant_T$，$\leqslant_{wT}$在全函数上是一致的，即若 α,β 为全函数，则 $\alpha\leqslant_e\beta\leftrightarrow\alpha\leqslant_T\beta\leftrightarrow\alpha\leqslant_{wT}\beta$. 由 e 化归的概念可导出 e 等价的概念：若 $A\leqslant_e B\wedge B\leqslant_e A$，则称 A 和 B e 等价，记为 $A\equiv_e B$. e 化归的概念是弗里德贝格（Friedberg，R. M.）和美国数学家罗杰斯（Rogers，H.）于 1959 年提出的.

e 化归（e-reducibility）　即"枚举化归".

e 度（e-degree）　亦称枚举度或部分度. 它是由 e 化归导出的度. 与一般的度不同，e 度的（$\leqslant_e$ 关系）最小元 $\boldsymbol{o}_e$ 不但包含所有递归集，也包含所有 re 集. e 度的结构 $\mathscr{D}_e$（在化归关系$\leqslant_e$ 下）形成上半格，但不形成格. 此外，$\mathscr{D}_e$ 中没有极小度，但存在极小对，事实上对任何非 $\boldsymbol{o}$ e 度 $\boldsymbol{a}_e$，都存在非 $\boldsymbol{o}$ e 度 $\boldsymbol{b}_e$，使 $\boldsymbol{a}_e$ 与 $\boldsymbol{b}_e$ 形成极小对. $\mathscr{D}_e$ 与 $\mathscr{D}_m,\mathscr{D}_{tt},\mathscr{D}_T$ 与 $\mathscr{D}_a$ 都不初等等价. e 度的性质相对其他度来说研究的较少.

枚举度（enumeration degree）　即"e 度".

部分度（partial degree）　即"e 度".

完全e 度（total e-degree）　递归论的基本概念之一. 它是包含全函数的图的 e 度. 由于 e 化归与 T 化归在全函数上是一致的，因此完全 e 度的结构与 T 度结构是一致的. 此外，存在有非完全的 e 度.

s 化归（s-reducibility）　d 化归的一种推广. 具体地，对自然数集 A,B,A 可 s 化归到 B（记为 $A\leqslant_s B$），当且仅当存在递归函数 f，使得

$$(\forall x)[x\in A\leftrightarrow W_{f(x)}\cap B\neq\varnothing].$$

由 s 化归可导出 s 等价与 s 度的概念. 若 $A\leqslant_s B\wedge B$

$\leqslant_s A$，则称 A 与 B s 等价，记为 $A \equiv_s B$. 集合 A 所有的 s 度为 $\deg_s(A)=\{B \mid A \equiv_s B\}$. 对 s 度来说，一切 re 集都属于两个 s 度：$\{\varnothing\}$ 与所有非空 re 集的类.

***s* 度**（*s*-degree） 见"*s* 化归".

受界合取化归（bounded conjunctive reducibility） 亦称 *bc* 化归. 一种可化归性. 是用类似 *btt* 化归对 *tt* 化归的限制办法，对合取化归限制后得到的. 形式地，A 可 *bc* 化归到 B（记为 $A \leqslant_{bc} B$），是指存在递归函数 f 和常数 n（称为该化归的范数），使得：

$$(\forall x)[[x \in A \leftrightarrow D_{f(x)} \subseteq B] \wedge [|D_{f(x)}| \leqslant n]].$$

直观上，A 可 *bc* 化归到 B，是指存在一个常数 n，使得对任何 x，可找到不超过 n 个自然数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$，使得 $x \in A$，当且仅当合取式"$y_1 \in B \wedge, y_2 \in B \wedge, \cdots, \wedge y_m \in B$"成立.

用类似限制提问个数小于某个常数的方法，对 *d* 化归与 *p* 化归进行限制后，即可得到受界析取化归（即 *bd* 化归）与受界正化归（*bp* 化归）的概念.

***bc* 化归**（*bc*-reducibility） 即"受界合取化归".

受界析取化归（bounded disjunctive reducibility） 见"受界合取化归".

***bd* 化归**（*bd*-reducibility） 见"受界合取化归".

受界正化归（bounded positive reducibility） 见"受界合取化归".

***bp* 化归**（*bp*-reducibility） 见"受界合取化归".

受界搜索化归（bounded search reducibility） 亦称 *bs* 化归. 一种可化归性. 是对 T 化归限制后得到的. 具体地，对自然数集 A, B，若 $A \leqslant_T B$，并且存在递归函数 f，使得在判断"$x \in A$?"时，计算 C_A（A 的特征函数）的带外部信息源 B 的图灵机向 B 提问的次数不超过 $f(x)$，则称 A 可受界搜索化归到 B，记为 $A \leqslant_{bs} B$. *bs* 化归在定义上非常类似 *wtt* 化归. 但 *wtt* 限制的是提问范围（只能对 $\leqslant f(x)$ 的元提问），而 *bs* 化归则限制提问次数. 由于图灵机具有某种存储性，因此可限制对每个 y 只提问一次，由此可看出 *wtt* 化归强于 *bs* 化归，即 $A \leqslant_{wtt} B \rightarrow A \leqslant_{bs} B$. 此外有 $A \leqslant_{bs} B \rightarrow A \leqslant_T B$. 但 *bs* 化归与 *wtt* 化归和 T 化归都不存在，当且仅当关系. 事实上，存在 *bs* 完备的非 *wtt* 完备集，亦存在 T 完备的非 *bs* 完备集. *bs* 化归有一个非常特殊的性质，即 *bs* 化归没有可传性.

***bs* 化归**（*bs*-reducibility） 即"受界搜索化归".

部分 *m* 化归（partially *m*-reducibility） 亦称 *pm* 化归. *m* 化归的一种推广. 即在 *m* 化归中允许化归函数为部分递归函数. 具体地，A 可部分 m 化归到 B（记为 $A \leqslant_{pm} B$），是指存在部分递归函数 f，使得 $(\forall x)[x \in A \leftrightarrow f(x) \downarrow \wedge f(x) \in B]$. *pm* 化归对 Δ_2^0 集的研究非常重要.

***pm* 化归**（*pm*-reducibility） 即"部分 *m* 化归".

算术分层（arithmetical hierarchy） 亦称算术谱系. 递归论的基本概念之一. 是按照量词复杂性对算术关系进行的递归论分层. 由于任何算术关系都能表示成形如 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nS(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的前束范式（$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 为一阶量词 $\forall$ 或 $\exists$，S 为递归关系），因此可以用量词个数对算术关系进行分层. 但由于利用递归的配对函数，任意个相邻的相同量词可缩减成一个，因此可进一步要求前束范式中的量词 $\forall$ 与 $\exists$ 是交替出现的. 形式地，具体的算术分层 Σ_n, π_n 与 Δ_n 可递归定义如下：

1. $\Sigma_0=\pi_0=\{R : R$ 为递归关系$\}$.
2. $\Sigma_{n+1}=\{\exists x R(x, y_1, y_2, \cdots, y_m) : R \in \pi_n\}$.
3. $\pi_{n+1}=\{\forall x R(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) R \in \Sigma_n\}$.
4. $\Delta_n=\Sigma_n \cap \pi_n$.
5. $\Delta_\omega=\bigcup\{\Sigma_n \cup \pi_n : n \in \omega\}$.

Σ_n, π_n 与 Δ_n 中的关系分别称为 Σ_n 关系，π_n 关系与 Δ_n 关系. 实际上，Σ_n 关系是指可以表示成形如 $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots S(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的关系（S 为递归谓词），π_n 关系是指可以表示成形如 $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \cdots S(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的关系（S 为递归谓词）. Δ_n 关系为既是 Σ_n 关系也为 π_n 关系的关系，Δ_ω 则为一切算术关系的类. 而形如

$$\underbrace{\exists \forall \exists \cdots}_{n\text{个量词}}$$

的前缀称为 Σ_n 前缀；形如

$$\underbrace{\forall \exists \cdots \forall}_{n\text{个量词}}$$

的前缀称为 π_n 前缀. 因此 $\Sigma_n(\pi_n)$ 关系为可由递归关系加上 $\Sigma_n(\pi_n)$ 前缀表示的关系. 此外，Σ_n 关系、π_n 关系与 Δ_n 关系也称为 Σ_n^0 关系、π_1^0 关系与 Δ_n^0 关系. 若某一关系在某一 $\Sigma_n, \pi_n, \Delta_n$ 中（即为算术关系），则也称该关系在算术分层中.

Σ_n, π_n 与 Δ_n 有以下封闭性质：

1. Σ_n, π_n 与 Δ_n 对合取、析取与受限量词封闭.
2. Δ_n 对否定运算封闭.
3. $R \in \Sigma_n$，当且仅当 $\neg R \in \pi_n$；$R \in \pi_n$ 当且仅当 $\neg R \in \Sigma_n$.
4. Σ_n 对存在量词封闭，π_n 对全称量词封闭.

关于算术分层的其他性质（参见"枚举定理"，"算术分层定理"与"波斯特分层定理"）. 对具体的分层，$\Sigma_0, \pi_0, \Delta_0$ 与 Δ_1 恰为全体递归关系的集合，Σ_n 为所有递归可枚举关系的集合.

算术谱系（arithmetical pedigree） 即"算术分层".

算术关系（arithmetical relation） 递归关系的推广. 是可以通过对递归关系添加有穷个量词定义的关系，即可以表示 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nR(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 形的关系，其中 R 为递归关系，Q_1，

$Q_2,\cdots,Q_n$ 为一阶量词∃或∀. 等价地，算术关系亦是可以从递归关系出发，经有限次否定与射影运算得到的关系. 算术关系的定义是由美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)与波兰数学家莫斯托夫斯基(Mostowski,A.)给出的.

从可判定(或可计算)的角度上说，递归关系具有最小的复杂性，但递归关系对(不受限)量词不封闭，而算术关系类则为递归关系类对量词封闭的最小扩张，因此算术关系的概念可看做递归关系概念的推广. 实际上，任何算术关系也恰为一阶算术可定义关系(参见“算术表示定理”)，这也是“算术”一词的来源.

算术表示定理(arithmetical representation theorem)　算术关系可用一阶算术公式表示的定理. 它指出：一关系 $R(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为算术关系(即 R 在算术分层中)，当且仅当 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在一阶算术中可定义. 即存在一阶算术中的公式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得对任何自然数 $n_1,n_2,\cdots,n_m$, $R(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 为真，当且仅当 $\varphi(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 在一阶算术中为真. 这也是“算术分层”与“算术关系”一词的来源. 算术表示定理是美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)于 1931 年证明的.

算术枚举定理(arithmetical enumeration theorem)　算术表示定理的推广. 其内容是：对任何 n, $m\geqslant 1$，存在 $m+1$ 元 Σ_n 关系，使得该关系枚举所有 m 元 Σ_n 关系. 类似地，亦存在 $m+1$ 元 π_n 关系，使得该关系枚举所有 m 元 π_n 关系. 算术枚举定理是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)与波兰数学家莫斯托夫斯基(Mostowski,A.)证明的.

算术分层定理(arithmetical hierarchy theorem)　算术分层的性质定理. 它指出算术分层是不会崩塌的，即对任何 $n>1$: $\Sigma_n-\pi_n\neq\varnothing$, $\pi_n-\Sigma_n\neq\varnothing$, $\Delta_n\subset\Sigma_n$, $\Delta_n\subset\pi_n$, $\Sigma_n\cup\pi_n\subset\Delta_{n+1}$. 由该分层定理可知，算术分层有如下结构：

$$\Delta_1 \begin{matrix}\subset \Sigma_1 \supset\\ \subset \Pi_1 \subset\end{matrix} \Delta_2 \begin{matrix}\subset \Sigma_2 \supset\\ \subset \Pi_2 \subset\end{matrix} \Delta_3 \begin{matrix}\subset \Sigma_3 \supset\\ \subset \Pi_3 \subset\end{matrix} \cdots$$

算术分层定理是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.)与波兰数学家莫斯托夫斯基(Mostowski,A.)证明的.

波斯特分层定理(Post's hierarchy theorem)　算术分层中各层之间的相似性性质定理. 其内容为：一关系为 Δ_{n+1}，当且仅当该关系是相对某个 Σ_n 或 π_n 关系递归的；一关系为 Σ_{n+1}，当且仅当该关系相对某个 Σ_n 或 π_n 关系递归可枚举. 波斯特分层定理是波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post,E. L.)于 1948 年证明的.

算术集(arithmetical set)　一元算术关系的自然数集. 指能表示成形如 $\{x: Q_1y_1, Q_2y_2,\cdots, Q_ny_nS(y_1,y_2,\cdots,y_n,x)\}$ 的自然数集，其中 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 为一阶量词∃或∀，S 为 $n+1$ 元递归谓词. 一集合 A 为算术集，当且仅当存在自然数 n，使 $A\leqslant_T \mathbf{0}^{(n)}$. 在某些教科书中，也有时将后者作为算术集的定义. 若集合 A 为 Σ_n 关系(或 π_n 关系，Δ_n 关系)，则称 A 为 Σ_n 集(或 π_n 集，Δ_n 集).

相对算术关系(relativized arithmetical relation)　算术关系概念的相对化. 对自然数集 A 和关系 R，若 R 可表示成 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)S(x_1,x_2,\cdots,x_n,a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的形式，其中 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 为量词∀或∃，S 为相对 A 递归的关系，则称 R 为相对于 A 的算术关系. 若集合 B 是相对于 A 的(一元)算术关系，即 B 可表示成：$\{x:(Q_1y_1)(Q_2y_2)\cdots(Q_ny_n)S(y_1,y_2,\cdots,y_n,x)\}$ 其中 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 为量词，S 为相对于 A 递归的 $n+1$ 元关系，则称 B 为相对于 A 的算术集，并记为 $B\leqslant_a A$，亦称 B 可算术化归到 A. 由算术化归关系可导出算术等价的概念. 对集合 A,B，若 $A\leqslant_a B$，并且 $B\leqslant_a A$，则称 A,B 算术等价，记为 $A\equiv_a B$.

相对算术集(relativized arithmetical set)　见“相对算术关系”.

算术化归(arithmetical reducibility)　见“相对算术关系”.

相对算术分层(relativized arithmetical hierarchy)　算术分层概念的相对化. 即对相对算术关系依量词复杂性进行的分层. 与算术分层类似，若 A 为自然数集合，R 为相对于 A 的算术关系，则 R 可表示为相对于 A 的递归关系加上某个 Σ_n 或 π_n 前缀组成的表达式，这样的关系分别称为 Σ_n^A 关系或 π_n^A 关系. 形式地，Σ_n^A 关系，π_n^A 关系与 Δ_n^A 关系的类 Σ_n^A, π_n^A 与 Δ_n^A 可递归定义如下：

1. $\Sigma_0^A=\pi_0^A=\{R: R$ 为相对于 A 递归的关系$\}$.
2. $\Sigma_{n+1}^A=\{\exists xR(x,y_1,y_2,\cdots,y_m): R\in\pi_n^A\}$.
3. $\pi_{n+1}^A=\{\forall xR(x,y_1,y_2,\cdots,y_m): R\in\Sigma_n^A\}$;
   $\Delta_n^A=\{\forall xR(x,y_1,y_2,\cdots,y_m): R\in\Sigma_n^A\}$.
4. $\Delta_n^A=\Sigma_n^A\cap\pi_n^A$.
5. $\Delta_w^A=\bigcup\{\Sigma_n^A\cup\pi_n^A: n\in w\}$.

这些 $\Sigma_n^A,\pi_n^A,\Delta_n^A$ 构成了相对 A 的算术分层，而 Δ_w^A 则为一切相对于 A 的算术关系的类. 实际上，$\Sigma_0^A,\pi_0^A,\Delta_0^A$ 与 Δ_1^A 恰为所有相对于 A 递归关系的类，Σ_1^A 则为相对 A 的 re 关系的类. 算术分层所具有的封闭性，枚举定理与算术分层定理、波斯特分层定理对相对算术分层皆成立的.

Σ_n 完备集(Σ_n-complete set)　一种完备集. 它是指 Σ_n 中集合的 1-化归最大元. 形式地，对自然数集 A，若 $A\in\Sigma_n$，并且对所有 $B\in\Sigma_n$，有 $B\leqslant_1 A$，则称

A 为 Σ_n 完备集. 实际上,对任何 $n\geqslant 1$,Σ_n 完备集都是与 $\mathbf{0}^{(n)}1$ 等价. 即 A 为 Σ_n 完备集$\leftrightarrow A\equiv_1\mathbf{0}^{(n)}\leftrightarrow A\equiv\mathbf{0}^{(n)}$. 后一个当且仅当关系可由曼希尔同构定理保证.

类似地,可定义 π_n 完备集为 π_n 中的 1 化归最大元. 对任何 $n\geqslant 1$,π_n 完备集与$\overline{\mathbf{0}^{(n)}}1$ 等价. 用类似方法还可以定义 $\Sigma_n^A(\pi_n^A)$完备集为 $\Sigma_n^A(\pi_n^A)$中 1 -化归的最大元,一集合 B 为 $\Sigma_n^A(\pi_n^A)$完备集,当且仅当 $B\equiv_1 A^{(n)}$ ($B\equiv_1\overline{A^{(n)}}$). 具体地,$K=\{X:X\in W_x\}$为 Σ_1 完备集,$F_{in}=\{X:W_x$ 有穷$\}$为 Σ_2 完备集,$ToT=\{x:|\Phi_x$ 为全函数$\}$为 π_2 完备集,$R_{ec}=\{X:W_x$ 为递归集$\}$为 Σ_3 完备集,$\{X:W_x\equiv_T K\}$为 π_3 完备集.

解析关系(analytical relation) 算术关系的一种推广. 它是可以从算术关系出发,使用二阶量词作用有穷次后得到的关系. 具体地,解析关系是指可以表示成形如:$(Q'_1f_1)(Q'_2f_2)\cdots(Q'_nf_n)R(f_1,f_2,\cdots,f_n,f_{n+1},f_{n+2},\cdots,f_{n+m},x_1,x_2,\cdots,x_p)$的表达式的关系,其中 $Q'_1,Q'_2,\cdots,Q'_n$ 为二阶函数量词$\forall'$或$\exists'$,$f_1,f_2,\cdots,f_{n+m}$为函数变元,$x_1,x_2,\cdots,x_p$ 为个体变元,R 为算术关系. 从可判定(可计算)角度上说,递归关系具有最小的复杂性,但对一阶量词与二阶量词都不封闭. 将递归关系定义推广到算术关系后,即可对一阶量词封闭,但仍对二阶量词不封闭,而解析关系则对二阶量词有封闭性.

有解析关系的定义中,也可用集合变元与集合量词代替函数变元与函数量词. 且两种定义是等价的. 在解析关系中,亦有类似于算术表示定理的表示定理(参见"解析表示定理").

解析表示定理(analytical representation theorem) 解析集的判定定理. 该定理在形式上类似于算术表示定理,其内容是:集合 A 为解析集,当且仅当 A 在二阶算术中可定义,也当且仅当 A 在初等数学分析中可定义. 后者说明了解析集与解析分层中"解析"一词的来源.

解析分层(analytical hierarchy) 亦称解析谱系. 按照量词复杂性对解析关系所作的递归论分层. 与算术分层类似,任何解析关系可以用算术关系加上有穷个交替出现的二阶函数量词$\forall'$与$\exists'$表示,依照量词个数,可以将该解析关系纳入具体的解析分层 Σ_n^1 或 π_n^1 中. 形式地,具体的解析分层 $\Sigma_n^1,\pi_n^1,\Delta_n^1$ 可递归定义如下:

1. $\Sigma_0^1=\pi_0^1=\{R:R$ 为算术关系$\}$.

2. $\Sigma_{n+1}^1=\{(\exists'f)R(f,f_1,f_2,\cdots,f_k,x_1,x_2,\cdots,x_m):R\in\pi_n^1\}$.

3. $\pi_{n+1}^1=\{(\forall'f)R(f,f_1,f_2,\cdots,f_k,x_1,x_2,\cdots,x_m):R\in\Sigma_n^1\}$.

4. $\Delta_n^1=\Sigma_n^1\cap\pi_n^1$.

Σ_n^1,π_n^1 与 Δ_n^1 中的关系分别称为 Σ_n^1 关系、π_n^1 关系与 Δ_n^1 关系,此外,Δ_ω^1 定义为:$\bigcup\{\Sigma_n^1\bigcup\pi_n^1:n\in\omega\}$,即所有解析关系的集合. 实际上,$\Sigma_n^1$ 关系可表示成形如

$$\underbrace{(\exists'f_1)(\forall'f_2)\cdots}_{n\text{个二阶量词}}R(f_1,f_2,\cdots,f_n,f_{n+1},\cdots,f_{n+p},x_1,x_2,\cdots,x_q)$$

的关系;π_n^1 关系则可表示成形如

$$\underbrace{(\forall'f_1)(\exists'f_2)\cdots}_{n\text{个二阶量词}}R(f_1,f_2,\cdots,f_n,f_{n+1},f_{n+2},\cdots,f_{n+p},x_1,x_2,\cdots,x_q)$$

的关系. 其中 $f_1,f_2,\cdots,f_{n+p}$为函数变元,$x_1,x_2,\cdots,x_q$ 为个体变元,R 为算术关系. 因此由$\exists'$开始的 n 个交替出现的二阶量词称为 Σ_n^1 前缀,由$\forall'$开始的 n 个交替出现的二阶量词称为 π_n^1 前缀. 此外,对 $n\geqslant 1$,Σ_n^1 关系可表示成下形范式:

$$(\exists'f_1)(\forall'f_2)\cdots(Q_n^1f_n)(Q^0x)$$
$$R(f_1,\cdots,f_n,f_{n+1},\cdots,f_{n+p},x,x_1,\cdots,x_q),$$

其中若 n 为偶数,Q_n^1 为$\forall'$,Q^0 为$\exists$;若 n 为奇数,Q_n^1 为$\exists'$,Q^0 为$\forall$;而 R 为递归关系. π_n^1 关系也可表示成以$\forall'$开头的类似表达式. 解析分层还具有如下封闭性:

1. $\Sigma_n^1,\pi_n^1,\Delta_n^1$ 对合取、析取运算与一阶量词封闭.

2. Δ_n^1 对否定运算封闭.

3. $R\in\Sigma_n^1$,当且仅当$\neg R\in\pi_n^1$;
   $R\in\pi_n^1$,当且仅当$\neg R\in\Sigma_n^1$.

4. 对 $n\geqslant 1$,Σ_n^1 对二阶量词$\exists'$封闭,π_n^1 对二阶量词$\forall'$封闭.

关于解析分层的其他性质,参见"解析枚举定理"、"解析分层定理". 此外,与算术分层不同,$\Delta_1^1\neq\Sigma_0^1=\pi_0^1=\Delta_0^1$,$\Delta_1^1$ 的关系称为超算术关系.

解析谱系(analytical pedigree) 即"解析分层".

超算术关系(hyper arithmetical relation) 见"解析分层".

解析集(analytical set) 解析关系的特殊情况. 若一个集合是解析关系,则称该集合为解析集. 若一集合为 Σ_n^1 关系(或 π_n^1 关系、Δ_n^1 关系),则称该集合为 Σ_n^1 集(或 π_n^1 集、Δ_n^1 集).

相对解析关系(relativized analytical relation) 解析关系概念的相对化. 对自然数集 A,若关系 R 可以用相对 A 的算术关系添加有穷个二阶量词表示,则称 R 为相对 A 的解析关系. 由相对解析关系还能得到相对解析集的概念. 若自然数集合 B 为相对 A 的解析关系,则称 B 为相对 A 的解析集.

相对解析集(relativized analytical set) 见"相对解析关系".

相对解析分层(relativized analytical hierarchy) 解析分层概念的相对化. 即对相对算术关系依量词复杂性进行的递归论分层. 具体地,对自然数集 A,相对 A 的解析分层 $\Sigma_n^{1,A}$,$\pi_n^{1,A}$ 与 $\Delta_n^{1,A}$ 可递归定义如下:

1. $\Sigma_0^{1,A}=\pi_0^{1,A}=\{R:R$ 为相对 A 的算术关系$\}$.

2. $\Sigma_{n+1}^{1,A}=\{(\exists' f)R(f,f_1,f_2,\cdots,f_k,x_1,x_2,\cdots,x_m):R\in\pi_n^{1,A}\}$.

3. $\pi_{n+1}^{1,A}=\{(\forall' f)R(f,f_1,f_2,\cdots,f_k,x_1,x_2,\cdots,x_m):R\in\Sigma_n^{1,A}\}$.

4. $\Delta_n^{1,A}=\Sigma_n^{1,A}\cap\pi_n^{1,A}$.

$\Sigma_n^{1,A}$,$\pi_n^{1,A}$ 与 $\Delta_n^{1,A}$ 中的关系分别称为 $\Sigma_n^{1,A}$ 关系,$\pi_n^{1,A}$ 关系与 $\Delta_n^{1,A}$ 关系. 此外,用 $\Delta_w^{1,A}$ 表示 $\bigcup\{\Sigma_n^{1,A}\cup\pi_n^{1,A}:n\in w\}$,即所有相对 A 的解析关系的集合.

Σ_n^1 完备集(Σ_n^1-complete set) 一种完备集. 是指 Σ_n^1 中集合的 1-化归最大元. 具体地,若 $A\in\Sigma_n^1$,并且对一切 $B\in\Sigma_n^1$,$B\leqslant_1 A$,则称 A 为 Σ_n^1 完备集. 类似地,π_n^1 中集合的 1-化归最大元称为 π_n^1 完备集. 类似还可定义 $\pi_n^{1,A}$ 与 $\Sigma_n^{1,A}$ 完备集. 对任何 $n\geqslant 1$,Σ_n^1,π_n^1,$\Sigma_n^{1,A}$ 与 $\pi_n^{1,A}$ 完备集都是存在的.

解析枚举定理(analytical enumeration theorem) 解析表示定理的推广. 其内容为:对任何 n,$m\geqslant 1$ 及 l,存在 Σ_n^1 关系 R,R 具有 $m+1$ 个自然数变元、l 个函数变元、R 枚举所有具有 m 个自然数变元与 l 个函数变元的 Σ_n^1 关系. 类似地,将上面的定理中的 Σ_n^1 换为 π_n^1 后定理仍然成立. 这两个定理统称解析枚举定理. 解析枚举定理是美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.)于 1955 年证明的.

解析分层定理(analytical hierarchy theorem) 解析分层的性质定理. 具体地,其内容为:对任何 $n\geqslant 1$,$\Sigma_n^1-\pi_n^1\neq\varnothing$,$\pi_n^1-\Sigma_n^1\neq\varnothing$,$\Sigma_n^1\cup\pi_n^1\subset\Delta_{n+1}^1$,由前两式还可得到:$\Delta_n^1\subset\Sigma_n^1$,$\Delta_n^1\subset\pi_n^1$. 由解析分层定理可知,解析分层具有如下结构:

$$\Delta_1^1\begin{array}{c}\subset\ \Sigma_1^1\ \subset\\ \subset\ \Pi_1^1\ \subset\end{array}\Delta_2^1\begin{array}{c}\subset\ \Sigma_2^1\ \subset\\ \subset\ \Pi_2^1\ \subset\end{array}\Delta_3^1\begin{array}{c}\subset\ \Sigma_3^1\ \subset\\ \subset\ \Pi_3^1\ \subset\end{array}\cdots$$

需要指出的是,与算术分层不同,$\Delta_1^1\neq\Delta_0^1$,Δ_1^1 中的关系称为超算术关系. 解析分层定理是由法国数学家勒贝格(Lebesgue, H. L.)等人证明的,它指出,解析分层是不会崩塌的.

Δ_n^1 化归(Δ_n^1-reducibility) 由相对解析关系定义的化归. 具体地,对自然数集 A,B,若 A 为相对 B 的 Δ_n^1 集,则称 A 可 Δ_n^1 化归到 B,记为$A\leqslant_{\Delta_n^1}B$. 休恩菲尔德(Shoenfield, J. R.)证明了对任何 n,Δ_n^1 化归是可传的. 此外,化归也是自反的. 因此由 Δ_n^1 化归可导出的 Δ_n^1 等价与 Δ_n^1 度的概念.

记号系统(system of notations) 一种映射. 是从一个自然数集 D_S 到某个序数前节的映射 v_S,一个记号系统 S,映射 v_S 要满足以下三个条件:

1. 存在部分递归函数 k_S,使得

$v_S(x)=0\Rightarrow k_S(x)=0$,

$v_S(x)$为后继序数$\Rightarrow k_S(x)=1$,

$v_S(x)$为极限序数$\Rightarrow k_S(x)=2$.

2. 存在部分递归函数 p_S,使得

$v_S(x)$为后继序数$\Rightarrow[p_S(x)\downarrow\ \&\ v_S(x)=v_S(p_S(x))+1]$.

3. 存在部分递归函数 q_S,使得 $v_S(x)$为极限序数$\Rightarrow[q_S(x)\downarrow\ \&\ \varphi_{q_S(x)}$ 为全函数,$\&\ \{v_S(\varphi_{q_S(x)}(n))\}_{n=0}^{n=\infty}$是以 $v_S(x)$为极限的递增序列$]$. D_S 中的元称为系统 S 的记号. 若 $x\in D_S$,$v_S(x)=\alpha$,则称 x(在系统 S 中)为 α 的记号. 对记号系统 S,若 v_S 为一一的,则称 S 为单叶的;若 D_S 是递归的,则称 S 为递归的;若

$$R_S=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in D_S\ \&\ v_S(x)\leqslant v_S(y)\}$$

为递归的,则称 S 为递归相关的;若对任何可构造序数 α,S 中都有 α 的记号,则称 S 为极大的;若对任何记号系统 S',都存在部分递归函数 $\varphi:D_{S'}\to D_S$,使得 $x\in D_S\Rightarrow v_S(x)\leqslant v_S(\varphi(x))$,则称 S 为完全的. 对任何记号系统 S,若 S 为递归相关的,则 S 为递归的;若 S 为完全的,则 S 为极大的. 此外,以下的完全系统 O 在超算术分层等的定义中扮演了重要角色. 系统 O 的定义域 D_O 与偏序$<_O$ 归纳定义如下:

1. O 的记号为 1.

2. 若 $\gamma=\beta+1$,则对任何 β 的记号 x,令 2^x 为 γ 的记号,并且若 $z=x$ 或$\langle z,x\rangle$已在$<_O$ 中,将$\langle z,2^x\rangle$加入关系$<_O$ 中.

3. 若 γ 为极限序数,则对任何 y,若$\{\varphi_y(n)\}_{n=0}^{n=\infty}$为以 γ 为极限的无穷上升序数序列的记号集,并且$(\forall i)(\forall j)[i<j\Rightarrow\langle\varphi_y(i),\varphi_y(j)\rangle$已经在$<_O$ 中$]$,则令 3×5^y 为 γ 的记号;对任何满足$(\exists n)[\langle x,\varphi_y(n)\rangle$已在$<_O$ 中$]$的 z,将$\langle z,3\times 5^y\rangle$放入$<_O$ 中. $k_O(1)=0$,$k_O(2^x)=1$;$k_O(3\times 5y)=2$;$p_{S_1}(2^x)=x$;$q_{S_1}(3\times 5y)=y$,对未给出定义的值,令其为无定义.

最早对记号系统进行研究的是美国数学家、逻辑学家丘奇(Church, A.)与美国逻辑学家、数学家克林(Kleene, S. C.),以上的定义是克林给出的,他本人称这样的系统为 r 系统.

可构造序数(constructive ordinal) 一种特殊的序数. α 为可构造序数,是指存在一个记号系统 S,使得 S 中有 α 的记号. 可构造序数都是可数序数,可构造序数的全体构成序数的一个前节,并且可构造序数只有可数多个. 从直观上说,可构造序数是可以在自然数上能行表示的序数. 事实上,对任何可构造序数,都存在递归相关的单一的记号系统 S,使

得 S 中有该序数的记号. 此外,可构造序数也恰为递归序数. 最早定义可构造序数并对之进行研究的是美国数学家、逻辑学家丘奇(Church,A.).

递归序数(recursive ordinal) 一种可构造序数. α 为递归序数是指存在(某个自然数集上的)递归关系 R,使得 R 为良序,并且 R 给出良序与 α 同构. 事实上,一个序数为递归序数,当且仅当该序数为可构造序数. 因此,递归序数与可构造序数的定义是一致的. 关于递归序数的性质参见"可构造序数".

有穷路径树(finite-path tree) 亦称良基树. 递归序数的另一种定义方法. 设 τ 是自然数序列的集合,如果 $\alpha\in\tau$,并且 β 为 α 的前节,则 β 亦在 τ 中,即称 τ 为树;τ 的一条枝是指 τ 的一个极大全序子集. 由于枝也称路径,因此称不含无穷枝的树为有穷路径树,有穷路径树在对解析分层的研究中扮演了重要角色. 有穷路径树 τ 中结点 u 的序数 $ord_\tau(u)$定义为

$$\mathrm{ord}_\tau(u)=\begin{cases}\sup\{1+\mathrm{ord}_\tau(u*\langle n\rangle)\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad((\exists n)(u*\langle n\rangle\in\tau)), \\ 1 \qquad (\text{其他}).\end{cases}$$

τ 的序数 ord(τ),可定义为:

$$\mathrm{ord}(\tau)=\begin{cases}\mathrm{ord}_\tau(\langle\varnothing\rangle) & (T=\varnothing), \\ 0 & (\text{其他}).\end{cases}$$

直观地,若把树看成向下生长的,且 u 为 τ 的极小元,则 $\mathrm{ord}_\tau(u)$为 1,否则 $\mathrm{ord}_\tau(u)$为比小于 u 的那些 v 的序数都大的最小序数. 而 ord(τ)则为 τ 的树根的序数. 事实上,任何有穷路径树的序数都是可数的;反之,任何可数序数都是某个有穷路径树的序数. 而任何递归有穷路径树的序数一定是递归序数(可构造序数),并且递归序数也都是某个递归有穷路径树的序数,因此,可以把它作为递归序数的定义.

良基树(well-founded tree) 即"有穷路径树".

π_1^1 集表示定理(representation theorem for π_1^1 sets) π_1^1 集的判定定理. π_1^1 集在解析分层中扮演了类似 re 集的重要角色(虽然从表面上看,re 集似乎应与 Σ_1^1 集对应). 俄国数学家卢津(Лузин,H. H.)、波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński,W.)和美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)证明了以下称为 π_1^1 集第一表示定理的结论:集合 A 为 π_1^1 的,当且仅当存在递归树的递归序列 $\{T_x\}_{x\in w}$,使得 $x\in A\leftrightarrow T_x$ 为有穷路径树. 卢津、谢尔品斯基、克林和斯派克特(Spector,C.)还证明了以下称为 π_1^1 集第二表示定理的结论:集合 A 为 π_1^1 的,当且仅当存在递归全序的递归序列 $\{<_x\}_{x\in w}$,使得 $x\in A\leftrightarrow <_x$ 为良序.

超度(hyperdegree) 递归论的基本概念之一. 对自然数集 A,B,若 B 是相对 A 超算术的(即 B 在相对 A 的超算术分层中,或 $B\in\Delta_1^{1,A}$),则称 B 超算术化归到 A,记为 $B\leqslant_h A$. 关系 $\leqslant_h$ 是自反与可传的,因此可由此导出超算术等价与超度的概念:若 $A\leqslant_h B$ & $B\leqslant_h A$,则称 A,B 超算术等价,并记为 $A\equiv_h B$. 集合 A 所在的超度定义为

$$\deg_h(A)=\{B\mid A\equiv_h B\}.$$

超度的许多性质类似 T 度. π_1^1 度在超度中的性质类似 re 度在 T 度中的性质,超跳跃在其中则类似于跳跃. 最早对超度进行研究的是斯派克特(Spector,C.).

超算术等价(hyperarithmetical equivalence) 见"超度".

超算术分层(hyperarithmetical hierarchy) 算术分层概念到无穷序数(准确地说,到可构造序数)的推广. 为把算术分层(例如 $\Sigma_0,\Sigma_1,\cdots$)推广到无穷序数,关键是必须对任何极限序数 α 给出合适的集合 A_α,这样 $\Sigma_{\alpha+n}$就可以用相对算术分层 $\Sigma_n^{A_\alpha}$ 来定义(出于技术上的原因,$\Sigma_{\alpha+n}$实际上由 $\Sigma_{n+1}^{A_\alpha}$来定义的). 为能行式地处理可构造序数,需要在合适的记号系统上工作. 由于需要某些特殊的不变性,一般选用系统 O 作为研究超算术分层的基本记号系统(系统 O 与 O 上序关系 $<_0$ 的定义可参见"记号系统"). 系统 O 到自然数集的集合的映射 H 定义如下:$H(1)=\varnothing$;若 $x\in D_0$,则 $H(2^x)=(H(x))'$;若 $3\cdot 5y\in D_0$,则 $H(3\cdot 5y)=\{\langle u,v\rangle\mid v<_0 3\cdot 5y \,\&\, u\in H(v)\}$. 对于这样定义映射 H,若 x,y 为同一序数的记号,则 $H(x)\equiv_T H(y)$,因此,可以从 H 出发定义超算术分层 $\Sigma_\alpha^0,\Pi_\alpha^0$ 与 Δ_α^0 如下:

1. 若 $\beta=n<\omega$,定义 $\Sigma_\beta^0=\Sigma_n,\pi_\beta^0=\pi_n$.

2. 若 $\beta=\alpha+n$,α 有极限序数,$n<\omega$,则

$$\Sigma_\beta^0=\Sigma_{n+1}^{H(y)},\quad \pi_\beta^0=\pi_{n+1}^{H(y)},$$

其中 y(在系统 O 中)为序数 α 的记号.

3. $\Delta_\beta^0=\Sigma_\beta^0\cap\pi_\beta^0$. 若集合 A 在某个 Σ_β 或 π_β 中,则称 A 在超算术分层中或称 A 为超算术集. 一集合 A 为超算术集,当且仅当 $A\in\Delta_1^1$.

超算术分层有许多与算术分层类似的性质,如超算术分层是不会崩塌的. 此外,若 x 为 $\beta+1$ 的记号,则 $H(x)$为 Σ_β^0 完备集. 此外,对超算术分层概念相对化之后,还能得到相对超算术分层的概念. 若 $A\in\Delta_1^{1,B}$,称 A 为相对 B 的超算术集,由此还可引导出超度的概念.

超算术集(hyperarithmetic set) 见"超算术分层".

高低分层(high/low hierarchy) 亦称跳跃分层. 一种递归论分层. 是由跳跃算子导出的对 $\mathscr{D}[\mathbf{0},\mathbf{0}']$的递归论分层. 具体地,$\mathrm{H}_n(n\in\omega)$,$I$ 与 $\mathrm{L}_n(n\in\omega)$就构成了具体的高低分层;其中

$\mathrm{H}_n=\{\mathbf{a}\leqslant\mathbf{0}'\mid \boldsymbol{a}^{(n)}=\mathbf{0}^{(n+1)}\}$为全体 n 高度的类，

$\mathrm{L}_n=\{\mathbf{a}\leqslant\mathbf{0}'\mid \boldsymbol{a}^{(n)}=\mathbf{0}^{(n)}\}$为全体 n 低度的类，

$\mathrm{I}=\{\mathbf{a}\leqslant\mathbf{0}'\mid\forall n\in N(\mathbf{0}^{(n)}<\boldsymbol{a}^{(n)}<\mathbf{0}^{(n+1)})\}$为全体 n 中间度的类，

对高低分层而言，$\forall n\ (\mathrm{H}_{n+1}-\mathrm{H}_n\neq\varnothing)$，$\forall n(\mathrm{L}_{n+1}-\mathrm{L}_n\neq\varnothing)$，并且 $I\neq\varnothing$. 前两个结论可由萨克斯(Sacks，G. E.)跳跃逆定理得出，而后一结论是拉克伦(Lachlan，A. H.)与美国学者马丁(Martin，D. A.)分别独立证明的. 高低分层概念相对化后可得到相对高低分层的概念，具体地，对 T 度 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 高低分层是由相对于 $\boldsymbol{a}$ 的 n 高度的类 $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{a})$，相对于 a 的 n 低度的类$\mathrm{L}_n(\boldsymbol{a})$与相对于 $\boldsymbol{a}$ 中间度的类形成的分层.

跳跃分层(jump hierarchy)　即"高低分层".

相对高低分层(relativized high/low hierarchy)　见"高低分层".

广义高低分层(generalized high / low hierarchy)　高低分层概念的推广. 具体地，广义 n 低度的类 GL_n，广义 n 高度的 GH_n 与广义中间度的类 GI 就构成了广义高低分层. 由于 $\mathrm{GH}_n\cap\mathscr{D}[\mathbf{0},\mathbf{0}']=H_n$，$\mathrm{GL}_n\cap\mathscr{D}[\mathbf{0},\mathbf{0}']=\mathrm{L}_n$，$\mathrm{GI}\cap\mathscr{D}[\mathbf{0},\mathbf{0}']=I$. 因此，广义高低分层是不会崩塌的. 此外，对所有 $n>0$，$\mathrm{GH}_{n+1}-\mathrm{GH}_n\neq\mathrm{H}_{n+1}-\mathrm{H}_n$；$\mathrm{GL}_{n+1}-\mathrm{GL}_n\neq\mathrm{L}_{n+1}-\mathrm{L}_n$，$\mathrm{GI}\neq I$. 广义高低分层是高低分层的非平凡扩张. 广义高低分层概念也可相对化得到相对广义高低分层的概念. 相对于 $\boldsymbol{a}$ 广义 n 高度的类$\mathrm{GH}_n(\boldsymbol{a})$，相对于 $\boldsymbol{a}$ 广义 n 低度的类 $\mathrm{GL}_n(\boldsymbol{a})$与 $\boldsymbol{a}$ 广义中间度的为在 GI，形成了广义 $\boldsymbol{a}$ 高低分层.

算术度(arithmetical degree)　由算术化归导出的概念. 具体地，对自然数集 A，A 所在的算术度定义为：$\deg_a(A)=\{B\mid B\equiv_a A\}$(参见"相对算术关系")，与 T 度不同的是，所有算术集都在最低的算术度中. 在算术度中，$\Phi^{(w)}$所在的算术度被定义为 $\mathbf{0}_a$ 的跳跃 $\mathbf{0}'_a$. 算术度有许多与 T 度相似的性质. 如存在极小的算术度. 但肖尔(Shore，R. A.)证明了 T 与 $\mathscr{D}_a$ 不是初等等价的. 算术度还有另外一个涵义，即包含算术集的度.

布尔分层(Boolean hierarchy)　re 集生成的最小布尔代数的分层. 由于对任何 Δ_2^0 集 A，都存在递归函数 g，使得对任何 x，$A(x)=\lim_s g(x,s)$，因此，若限制 $g(x,s)$的变化次数(对 s 而言)，就可以得到对所有 Δ_2^0 集的一个子集(实际上是所有可 btt 化归到 K 的集合的类，也即由 re 集在集合运算下生成的最小布尔代数)的分层. 具体地，$\Sigma_n^{-1}=\{A\in\Delta_2^0\mid$存在 A 的递归逼近 g，使对任何 x，$g(x,s)$至多变化 n 次$\}$. $\pi_n^{-1}=\{A\mid\overline{A}\in\Sigma_n^{-1}\}$，　$\Delta_n^{-1}=\Sigma_n^{-1}\cap\pi_n^{-1}$. Σ_n^{-1}，π_n^{-1} 与 Δ_n^{-1} 构成了具体的布尔分层，并且布尔分层是不会崩塌的，即 $\Sigma_n^{-1}-\pi_n^{-1}\neq\varnothing$，$\pi_n^{-1}-\Sigma_n^{-1}\neq\Phi$，$\Sigma_n^{-1}\cup\pi_n^{-1}\subset\Delta_{n+1}^{-1}$对任何 $n\geqslant1$ 成立. 事实上，Σ_1^{-1} 中的集合即为 re 集，而 Σ_n^{-1} 集合则为 nre 集.

跳跃(jump)　递归论的重要算子之一. 具体地，集合 A 的跳跃(记为 A')可形式定义为

$$A'=\{x\mid x\in W_x^A\}=\{x\mid\Phi_n^A(x)\ \text{收敛}\}$$

由集合的跳跃运算可导出度的跳跃算子的概念；对不可解度 $\boldsymbol{a}$，若 A 为 $\boldsymbol{a}$ 中任一集合，则 $\boldsymbol{a}$ 的跳跃 $\boldsymbol{a}'$ 定义为：$\boldsymbol{a}'=\deg(A')$. 集合 A 的跳跃实际上是相对 A 的停机问题集，因此，它是 Σ_1^A 完备集. 对任何集合 A 的跳跃 A'，A' re 于 A，并且 $A'\not\leqslant_T A$；若 B re 于 A，则 $B\leqslant_1 A'$，反之亦成立. 此外，跳跃算子保持 T 化归关系. 事实上，还可以得到如下更强的结论：$A\leqslant_T B\Leftrightarrow A'\leqslant_1 B'$，$A\equiv_T B\Leftrightarrow A'\equiv B'$. 由此可知，度的跳跃定义是相容的.

跳跃算子是生成较高不可解度的最自然的算子，因此，它在不可解度理论中扮演了重要角色. 跳跃算子本身与由此概念导出的其他一些概念，如低度、高度等都是不可解度理论所关注的重要内容. 对跳跃算子本身来说，最重要的问题之一是其可定义性，该问题曾长期未得到解决，直到 20 世纪 90 年代初，方由库珀(Cooper，S. B.)利用 $d-re$ 度给出了肯定的答案. 跳跃算子是 $\mathscr{D}\rightarrow\mathscr{D}(\geqslant\mathbf{0}')$的映射. 由于非递归低度的存在，该映射不是单射，但它是满射. 关于这一结论(参见"跳跃逆定理").

***n* 跳跃**(n-jump)　跳跃算子的 n 次复迭. 形式地，集合 A 的 n 跳跃可递归定义如下：

1. $A^{(0)}=A$.
2. $A^{(n+1)}=(A^{(n)})'$.

类似地可递归定义度的 n 跳跃：

1. $\boldsymbol{a}^{(0)}=\boldsymbol{a}$.
2. $\boldsymbol{a}^{(n+1)}=(\boldsymbol{a}^{(n)})'$.

集合 A 的 n 跳跃 $A^{(n)}$有如下性质：$B\in\Sigma_{n+1}^A\Leftrightarrow B\leqslant_1 A^{(n+1)}\Leftrightarrow B$ 相对 $A^{(n)}$递归枚举. 因此，若存在 n，使 $B\leqslant_T A^{(n)}$，则 B 是相对 A 算术的.

***ω* 跳跃**(ω-jump)　跳跃算子的无穷复迭. 形式地，集合 A 的 ω 跳跃(记为 $A^{(\omega)}$)可定义为 $A^{(\omega)}=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A^{(y)}\}$. 对度 $\boldsymbol{a}$，设 $A\in\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的 ω 跳跃定义为：$\boldsymbol{a}^{(\omega)}=\deg(A^{(\omega)})$. 相对跳跃，$\omega$ 跳跃的可定义性质较容易解决，利用哈林顿(Harrington，L.)和肖尔(Shore，R. A.)的一个定理，可直接推出 ω 跳跃算子的可定义性.

弱跳跃(weak jump)　一种类似跳跃的算子. 形式地，自然数集 A 的弱跳跃(记为 H_A)定义为 $\mathrm{H}_A=\{e:\mid W_e\cap A\neq\varnothing\}$. 对任何自然数集 A，$\mathrm{H}_A\leqslant_T A'$；若 A 为 π_n 完备集，则 H_A 为 Σ_{n+1}完备集. 此外，对任何 re 集 A，存在 re 集 B，使得 $A\equiv_T B$，并且

$H_B \equiv_T A'$.

超跳跃(hyper jump) 超度理论中相应于不可解度中"跳跃"的概念. 形式地,自然数集 A 的超跳跃 T^A 定义为 $T^A=\{z \mid \Phi_z^A$ 是有穷路径树的特征函数$\}$. 所有 Δ_1^1 集(超算术集)都具有最低的超度,因此 $A \equiv_h A' (A' \in \Delta_1^{1,A})$. 而在超度理论中,$\pi_1^1$ 集的性质类似于不可解度理论中的 re 集,故以某个 $\pi_1^{1,A}$ 完备集作为超度中"跳跃"的定义是合适的,而 T^A 正是一个 $\pi_1^{1,A}$ 完备集.

超跳跃有些性质与跳跃类似,如 $A \leqslant_h B \Leftrightarrow T^A \leqslant_1 T^B$. 超跳跃也可以用类似跳跃的形式定义:如果 $W_z^{1,A}$ 为 $\pi_1^{1,A}$ 集的一种"合适"的枚举,则可以

$$K^{1,A}=\{x \mid x \in W_x^{1,A}\}$$

作为 A 的超跳跃定义. 事实上,对任何 A,$K^{1,A} \equiv T^A$,因此,可以认为这两种定义方式是等价的.

跳跃逆定理(jump inversion theorem) 跳跃算子逆像存在定理. 跳跃算子是 $\mathscr{D} \rightarrow \mathscr{D}(\geqslant \mathbf{0}')$ 的映射. 一个重要的问题是:该映射是否为满射? 弗里德贝格(Friedberg, R. M.)最早对该问题给出了肯定的回答. 他证明了弗里德贝格跳跃逆定理:任给不可解度 $\boldsymbol{c} \geqslant \mathbf{0}'$,存在度 $\boldsymbol{a}$,使得 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a} \cup \mathbf{0}'=\boldsymbol{c}$. 库珀(Cooper, S. B.)进一步证明了以下更强的结论:任给不可解度 $\boldsymbol{c} \geqslant \mathbf{0}'$,存在极小度 $\boldsymbol{m}$,使得 $\boldsymbol{m}'=\boldsymbol{m} \cup \mathbf{0}' =\boldsymbol{c}$. 而对于 re 度的跳跃,萨克斯(Sacks, G. E.)证明了萨克斯跳跃定理:任给不可解度 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$,若 $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}'$,且 $\boldsymbol{b}$ 相对 $\mathbf{0}'re$,$\mathbf{0}<\boldsymbol{c} \leqslant \mathbf{0}'$,则存在非递归 re 度 $\boldsymbol{a}$,使得 $\boldsymbol{a}' =\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{c} \not\leqslant a$. 跳跃逆定理表明 re 度的跳跃类为$\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \geqslant \mathbf{0}'$,且 $\boldsymbol{a}$ 相对于 $\mathbf{0}'re\}$.

高度(high degree) 递归论的基本概念之一. 指具有最高跳跃度的不可解度. 若不可解度 $\boldsymbol{a} \leqslant \mathbf{0}'$,且 $\boldsymbol{a}'=\mathbf{0}''$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为高度. 对任何 $\boldsymbol{a} \leqslant \mathbf{0}'$,有 $\boldsymbol{a}' \leqslant \mathbf{0}''$. 因此,高度实际上是 $\mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}']$ 中具有最高跳跃的度,或者从直观上说,是 $\mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}']$ 中"较大的度". $\mathbf{0}'$ 是平凡的高度,由萨克斯跳跃定理(参见"跳跃逆定理")知,存在非完备的 re 高度. 此外,任何高的 re 度都包含极大集;反之,任何极大集的不可解度也一定是高度.

低度(low degree) 递归论的基本概念之一. 指具有最小跳跃度的不可解度. 若不可解度 $\boldsymbol{a} \leqslant \mathbf{0}'$,且 $\boldsymbol{a}'=\mathbf{0}'$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为低度. 由于对任何度 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}' \geqslant \mathbf{0}'$,因此,低度实际上是具有最小跳跃的度,从直观上说,低度是 $\mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}']$ 中"较小"的度. 利用有穷损伤方法可以证明,存在低的单纯集,因此,存在非平凡的(即不为 $\mathbf{0}$ 的)低度. 虽然看来低度具有"较小"的度,但任何非递归的 re 度都是两个低 re 度的上确界.

***n* 高度**(n-high degree) 高度概念的推广. 具体地,对任何自然数 n,若度 $\boldsymbol{a} \leqslant \mathbf{0}'$,并且 $\boldsymbol{a}^{(n)}= \mathbf{0}^{(n+1)}$,则称度 $\boldsymbol{a}$ 为 n 高度. n 高度的类记为 H_n. 特别地,$H_0=\{\mathbf{0}'\}$,而 1-高度恰为高度. 对任何自然数 n,$H_{n+1}-H_n \neq \varnothing$. 该定理最早是作为萨克斯(Sacks, G. E.)跳跃定理(参见"跳跃逆定理")的推论得出的. n 高度概念可相对化而得到相对化的 n 高度的概念:若度 $\boldsymbol{d} \in \mathscr{D}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}']$,并且 $\boldsymbol{d}^{(n)}=\boldsymbol{a}^{(n+1)}$,则称 $\boldsymbol{d}$ 为相对于 $\boldsymbol{a}$ 的 n 高度. 相对于 $\boldsymbol{a}$ 的 n 高度的类记为

$$H_n(\boldsymbol{a}).$$

***n* 低度**(n-low degree) 低度概念的推广. 具体地,对任何自然数 n,若度 $\boldsymbol{a} \leqslant \mathbf{0}'$,并且 $\boldsymbol{a}^{(n)}=\mathbf{0}^{(n)}$,则称度 $\boldsymbol{a}$ 为 n 低度. n 低度的类记为 L_n. 特别地,$L_0= \{\mathbf{0}\}$,1 低度恰为低度. 对任何自然数 n,$L_{n+1}-L_n \neq \varnothing$. 该定理最早是作为萨克斯(Sacks, G. E.)跳跃定理(参见"跳跃逆定理")的推论得出的. n 低度概念可被相对化而得到相对 n-低度的概念:若度 $\boldsymbol{d} \in \mathscr{D}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}']$,并且 $\boldsymbol{d}^{(n)}=\boldsymbol{a}^{(n)}$,则称 $\boldsymbol{d}$ 为相对于 $\boldsymbol{a}$ 的 n 低度. 相对于 $\boldsymbol{a}$ 的 n 低度的类记为 $L_n(\boldsymbol{a})$.

广义*n* 高度(generalized n-high degree) n 高度概念的推广. 形式地,广义 n 高度的类 GH_n 定义为:$GH_n=\{\boldsymbol{d} \in \mathscr{D}: \boldsymbol{d}^{(n)}=(\boldsymbol{d} \cup \mathbf{0}')^{(n)}\}$. 普通的 n 高度是定义在 $\mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}']$ 中的,而广义 n 高度则将之推广到整个 $\mathscr{D}$ 中,对一切 n,$GH_n \cap \mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}']=H_n$. 此外,对一切 $n \geqslant 0$,$GH_{n+1}-GH_n \neq H_{n+1}-H_n$,因此,广义 n 高度是 n 高度的真扩张概念. 广义 n 高度的概念可被相对化而得到相对广义 n 高度的概念:若 $\boldsymbol{d} \in \mathscr{D}(\geqslant \boldsymbol{a})$,并且 $\boldsymbol{d}^{(n)}=(\boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{a}')^{(n)}$,则称 $\boldsymbol{d}$ 为相对 $\boldsymbol{a}$ 的广义 n 高度,全体相对 $\boldsymbol{a}$ 的广义 n 高度的类记为

$$GH_n(\boldsymbol{a}).$$

广义*n* 低度(generalized n-low degree) n 低度概念的推广. 通常的 n 低度定义在 $\mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}']$ 中的,而广义 n 低度的概念则被推广到了 $\mathscr{D}$ 中. 具体地,广义 n 低度的类 GL_n 可定义为:$GL_0\{\mathbf{0}\}$,对 $n>0$,$GL_n=\{\boldsymbol{d} \in \mathscr{D} \mid \boldsymbol{d}^{(n)}=(\boldsymbol{d} \cup \mathbf{0}')^{(n-1)}\}$. 对广义 n 低度,$GL_n \cap \mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}']=L_n$. 此外,对一切 $n>0$,$GL_{n+1}- GL_n \neq L_{n+1}-L_n$. 因此,广义 n 低度是 n 低度概念的真扩张. 广义 n 低度的概念可被相对化而得到相对化的广义 n 低度的概念:$GL_0(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{a}\}$;对 $n>0$,$GL_n(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{d} \in \mathscr{D}(\geqslant \boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{d}^{(n)}=(\boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{a}')^{(n-1)}\}$. $GL_n(\boldsymbol{a})$ 中的度称为相对于 $\boldsymbol{a}$ 的广义 n 低度.

中间度(intermediate degree) 递归论的基本概念之一. 指介于高度和低度之间的不可解度. 对不可解度 $\boldsymbol{a} \leqslant \mathbf{0}'$,如果 $\forall n (\mathbf{0}^{(n)}<\boldsymbol{a}^{(n)}<\mathbf{0}^{(n+1)})$,则称度 $\boldsymbol{a}$ 为中间度. 一切中间度的类记为 I,且有

$$\left(\bigcup_{n \in w}(H_n \cup L_n)\right) \cup I=\mathscr{D}[\mathbf{0}, \mathbf{0}'],$$

这些 H_n, L_n, I 构成了高低分层. 拉克伦(Lachlan, A. H.)和美国学者马丁(Martin, D. A.)分别独立证明了确实存在中间度. 中间度的概念可推广到广义中

间度的概念：广义中间度 $\mathrm{GI}=\{\boldsymbol{d}\in\mathscr{D}:\forall n>0((\boldsymbol{d}\cup\boldsymbol{0}')^{(n-1)}<\boldsymbol{d}^{(n)}<(\boldsymbol{d}\cup\boldsymbol{0}')^{(n)})\}$. $\mathrm{GI}\cap\mathscr{D}[\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}']=\{\boldsymbol{d}\in\mathscr{D}(\geqslant\boldsymbol{a})\mid\forall n>0((\boldsymbol{d}\cup\boldsymbol{a}')^{(n-1)}<\boldsymbol{d}^{(n)}<(\boldsymbol{d}\cup\boldsymbol{a}')^{(n)})\}$.

半低集(semi-low set) 递归论的基本概念之一. 指由弱跳跃导出的一种类似低集的概念：若 H_A 是 A 的弱跳跃，$\mathrm{H}_A\leqslant_T\varnothing'$，则称 A 为半低集. 任何半低集都可 T 化归到$\varnothing'$，且任何低集也都是半低集，但反之不然. 事实上，对任何 *re* 集 A，存在 *re* 集 $B\equiv_T A$，使得 $\bar{B}$ 为半低集. 但若 *re* 集 A 不是低集，则必存在 *re* 集 $C\equiv_T A$，使 $\bar{C}$ 不是半低集.

恰对(exact pair) 一种不可解度的无序对. 斯派克特(Spector, C.)证明了如下重要定理：如果 I 为 $\mathscr{D}$ 的可数理想，则存在 $\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1\in\mathscr{D}$，使得对任何度 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\in I\leftrightarrow\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{a}_0\wedge\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{a}_1$. $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1\}$称为理想 I 的恰对. 该定理称为恰对定理. 由恰对定理可立即得出 $\mathscr{D}$ 不形成格的结论. 因为若取$\{\boldsymbol{d}_i:i\in\omega\}$为一无穷上升链，则由它生成的理想的恰对显然没有下确界.

度结构的自同构(automorphism of degrees' structure) 递归论的基本概念之一. 指度结构到其自身的一一保序映射. 若 f 为 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的一一映射，且对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{D}$，$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\leftrightarrow f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{y})$，则称 f 为偏序结构$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$的自同构. 恒等映射即为自同构. 不可解度的一个重要问题为：是否存在非平凡的不可解度结构的自同构？到目前为止，虽然在该问题的研究上取得了一些进展，但并没有彻底解决. 内罗德(Nerode, A.)和肖尔(Shore, R. A.)等人证明了，$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$的任何自同构将任何度映到与其算术等价的度，并且该自同构在 $\mathscr{D}(\geqslant 0^{(\omega)})$上是恒等映射.

自同构基(automorphism base) 研究自同构问题的一个重要工具. 对偏序$\langle U,\leqslant\rangle$，若 $B\subseteq U$ 且对任何 $f:B\to B$，f 至多存在一个扩张 $\hat{f}$，使 $\hat{f}$ 为$\langle U,\leqslant\rangle$的自同构，则称 B 为$\langle U,\leqslant\rangle$的自同构基. 因此，$\langle U,\leqslant\rangle$的自同构基，是指$\langle U,\leqslant\rangle$的任何自同构可由它在该自同构基上的性质惟一确定. 若度集合 A 能生成 $\mathscr{D}$(即 $A\subseteq\mathscr{D}$，且 $\mathscr{D}$ 为包含 A，并且在度的并、交(如果存在)运算下封闭的最小集)，则 A 为$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$的自同构基. 杰克什(Jockusch, C. G.)和波斯纳(Posner, D.)证明了所有极小度能生成 $\mathscr{D}$，因此，所有极小度的类就是$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$的一个自同构基.

可嵌入性(embeddability) 一种同构映射性质. 是一个结构是否存在到另一个结构的子结构同构映射的性质. 如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{T}$ 为两个分别以 U，T 为论域的同一语言的结构. 称 $\mathscr{U}$ 可嵌入 $\mathscr{T}$，是指存在 U 到 T 的单值映射，使该映射保持结构中的所有关系和函数. 关于度结构的嵌入问题，萨克斯(Sacks, G. E.)证明了以下结果：

1. 具有 $2^{\aleph_0}$个元的偏序，若每个元只有有穷个前驱，则该偏序可嵌入$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$中.

2. 具有 $\aleph_1$ 个元的偏序，若每个元至多只有可数个前驱，则该偏序可嵌入$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$中.

3. 具有 $2^{\aleph_0}$个元的偏序，若每个元至多只有可数个前驱和 $\aleph_1$ 个后继，则该偏序可嵌入$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$中.

其中，后两个结论在连续统假设下是等价的. 关于格的嵌入问题，现在已知所有可数分配格及一些有穷非分配格可嵌入$\langle\mathscr{D},\leqslant,\wedge,\vee\rangle$中.

极小度(minimal degree) 递归论的基本概念之一. 指一种小的不可解度. 对不可解度 $\boldsymbol{a}$，如果 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{0}$，且不存在不可解度 $\boldsymbol{b}$，使 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}>\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为极小度. 斯派克特(Spector, C.)最早证明了极小度的存在性. 由于 *re* 度的稠密性，*re* 度都不是极小度，但在 $\boldsymbol{0}'$之下存在极小度. 极小度的个数为 $2^{\aleph_0}$个. 库珀(Cooper, S. B.)证明了任何$\geqslant\boldsymbol{0}'$的度都是极小度的跳跃逆，即对任何 $\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}'$，存在极小度 $\boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{b}$. 此外，所有极小度还构成了 $\mathscr{D}$ 的自同构基.

极小盖(minimal cover) 极小度概念的相对化. 对不可解度 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$，若 $\mathscr{D}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\varnothing$，即$\neg\exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}<\boldsymbol{c}<\boldsymbol{b})$，则称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的极小盖. 若 $\boldsymbol{b}$ 为某个 $\boldsymbol{a}$ 的极小盖，称 $\boldsymbol{b}$ 为极小盖. 将极小度的证明相对化之后，可以将关于极小度的大部分结果推广到极小盖. 具体地，任何一个不可解度都有 $2^{\aleph_0}$个极小盖，并且在 $\boldsymbol{d}'$之下存在 $\boldsymbol{d}$ 的极小盖. 但并非任何不可解度都是极小盖，如任何 *re* 度都不是极小盖. 不过 $\mathscr{D}$ 中存在极小盖的锥，即存在 $\boldsymbol{a}$，使所有 $\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{a}$ 都是极小盖.

极小盖的概念可加强为如下强极小盖的概念：对 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$，若$\forall\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}<\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{a})$，则称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的强极小盖. 若 $\boldsymbol{b}$ 为某个 $\boldsymbol{a}$ 的强极小盖，则称 $\boldsymbol{b}$ 为强极小盖. 显然，若 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的强极小盖，则 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的极小盖. 但与极小盖不同，并非任何度都存在强极小盖，如 $\boldsymbol{0}'$就没有强极小盖.

强极小盖(strongly minimal cover) 见"极小盖".

度结构的判定问题(decidable problem of degrees' structure) 不可解度的重要研究内容. 若在度结构$\langle\mathscr{D},\leqslant\rangle$之下为真的一阶语句集为递归集，则称 $\mathscr{D}$ 的一阶理论是可判定的. 由于任何可数分配格可嵌入 $\mathscr{D}$ 中，因此，度的一阶理论是不可判定的. 事实上，度的一阶理论与二阶算术理论有相同的不可解度，并且它也是不可公理化的. 虽然 $\mathscr{D}$ 的一阶理论不可判定，但它的某些部分是可判定的，如 $\mathscr{D}$ 的 Σ_1 理论是可判定的.

齐性问题(homogeneity problem) 一种不可解度的结构性问题. 由于大部分不可解度的结论都可以被相对化，美国数学家罗杰斯(Rogers, H.)提出了如下强齐性猜想：对任何度 $\boldsymbol{a}$，$\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}(\geqslant\boldsymbol{a})$同构. 耶茨(Yates, C. E. M.)提出了如下齐性猜想：对

任何度 $\boldsymbol{a}$, $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}(\geqslant \boldsymbol{a})$ 初等等价. 但肖尔(Shore, R. A.)和杰克什(Jockusch, C. G.)证明了这两个猜想不成立. 他们证明了:若 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}(\geqslant \boldsymbol{a})$ 初等等价,则 $\boldsymbol{a}$ 为算术度. 因此, D 与 $D(\geqslant \mathbf{0}^{(\omega)})$ 不初等等价. 关于强齐性问题,他们进一步证明了:如果 $\mathscr{D}(\geqslant \boldsymbol{a})$ 与 $\mathscr{D}(\geqslant \boldsymbol{b})$ 同构,则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 算术等价.

波斯特问题(Post's problem) 不递归、不完备的 *re* 集的存在问题. 1944 年,波兰-美国数理逻辑学家波斯特(Post, E. L.)提出了如下著名问题:是否存在非递归并且非完备的 *re* 集? 即是否存在 *re* 度 $\boldsymbol{a}$,使 $\mathbf{0} <_T \boldsymbol{a} <_T \mathbf{0}'$? 此问题即波斯特问题. 波斯特本人为解决此问题做了许多工作. 他计划构造一个 *re* 集 A,使得 $\overline{A}$ 具有某种可定义的(与 A 非递归相容的)性质,并且这种性质能保证 A 非 T 完备. 称此计划为波斯特规划. 波斯特试图构造一个 *re* 集 A,使得 $\overline{A}$ 是足够"稀疏"的,并且这种"稀疏"性最终能保证 A 非 T 完备. 他首先定义了单纯集,并证明了它的存在性,还证明了单纯集不是 m 完备的. 但事实上,单纯集仍可能是 tt 完备的(从而也是 T 完备的). 于是,他又定义了补集比单纯集更稀疏的超单纯集和超超单纯集,它们不再是 tt 完备的. 他构造了一个超单纯集,但未能证明超超单纯集的存在性,也没有证明超单纯集或超超单纯集不是 T 完备的. 到 1954 年,德克尔(Dekker, J.)证明了超单纯集不一定不是 T 完备的. 后来,曼希尔(Myhill, J.)又引进了极大集的概念,这是可能做到的使 *re* 集的补集最稀疏的情况. 弗里德贝格(Friedberg, R. M.)证明了极大集与超超单纯集的存在性,而耶茨(Yates, C. E. M.)则构造了一个 T 完备的极大集,从而使得用构造一个稀疏的补集的方法,来解决波斯特问题的希望最终破灭. 首先解决波斯特问题的是弗里特贝格和穆切尼克(Mučnik, A. A.). 1956 年至 1957 年,他们分别独立地创造了有穷损伤方法,并用此方法证明了存在两个不可比的 *re* 度(因而它们也都是非递归且非 T 完备的),从而成功地解决了波斯特问题.

虽然按照波斯特原来建议的方法无法实现波斯特规划,但实现这个规划的努力一直没有停止. 1973 年,刁格太夫(Degtev, A. N.)证明了,存在某个正等价关系 η 及 *re* 集 A,使得 A 为非递归、半递归及 η 极大的. 1976 年,马琴科夫(Marchenkov, S. S.)证明了:η 超超单纯集不是 Q 完备的,并且 *re* 半递归集如果不是 Q 完备的,也一定不是 T 完备的. 因此刁格太夫构造的非递归、半递归及 η 极大的 *re* 集,即为非递归且非 T 完备的 *re* 集. 但这个结果并未完全实现波斯特规划,因为 η 超超单纯集的概念不是一阶可定义的. 直到 1990 年,哈林顿(Harrington, L.)和索尔(Soare, R. I.)找到了一个一阶可定义性质 $Q(A)$,使得满足该性质的 *re* 集都是非递归且非 T 完备的,并且他们证明了存在满足 $Q(A)$ 条件的 *re* 集,从而成功地实现了波斯特规划. 他们给出的性质 $Q(A)$ 为

$$(\exists C)_{A\subset_m C}(\forall B\subseteq C)(\exists D\subseteq C)(\forall S)_{S\subset C}[[B\cap(S-A)=D\cap(S-A)]\rightarrow(\exists T)_{C\subset T}[A\cap(S\cap T)=B\cap(S\cap T)]],$$

其中 $A\subset_m C$ 表示 A 为 C 的主子集, $A\subset B$ 表示存在非空(*re*)C,使 $A\cup C=B$ 并且 $A\cap C=\varnothing$.

波斯特规划(Post's program) 见"波斯特问题".

半递归集(semi-recursive set) 递归集概念的推广. 半递归集有两种不同的涵义,在一般递归论中它指递归可枚举集(*re* 集);但在不可解度理论中,它通常指杰克什(Jockusch, C. G.)引进的如下概念:一集合 A 为半递归,是指存在二元递归函数 f,使得 $f(x,y)=x$ 或 $f(x,y)=y$,并且 $x\in A\vee y\in A\Rightarrow f(x,y)\in A$. 对后一涵义而言,递归集都是半递归集,且半递归集的补集也是半递归的. 此外,半递归的 *reT* 完备集也是 Q 完备的.

η 封闭集(η-closed set) 对等价关系 η 封闭的集合. 设 η 是一等价关系,集合 A 称 η 封闭的,是指它满足: $x\in A\wedge x\eta y\Rightarrow y\in A$. 而包含 A 的最小 η 封闭集称为集合 A 的 η 闭包(记为 $[A]_\eta$).

由 η 封闭集概念可导出其他相关的 η 概念:若 η 封闭集 A 由有穷个 η 等价类组成,则称 A 为 η 有穷集;若 η 封闭集由无穷个 η 等价类组成,则称其为 η 无穷集;若 η 为正(即 *re*)等价关系, $A,\overline{A}$ 皆为 η 封闭集, A 为 *re* 集, $\overline{A}$ 为 η 无穷集,则称 A 为 η 单纯集,是指 $\overline{A}$ 不包含 η 无穷的 *re* 集;称 A 为 η 超单纯集,是指不存在递归函数 f,使得 $x\neq y\Rightarrow[D_{f(x)}]_\eta\cap[D_{f(y)}]_\eta=\varnothing$,并且 $[D_{f(x)}]_\eta\cap\overline{A}\neq\varnothing$;称 A 为 η 超超单纯集,是指不存在递归函数 f,使得 $W_{f(x)}$ 有穷, $x\neq y\Rightarrow[W_{f(x)}]_\eta\cap[W_{f(y)}]_\eta=\varnothing$,并且 $[W_{f(x)}]_\eta\cap\overline{A}\neq\varnothing$;称 A 为 η 极大集,是指对任何 *re* 的 η 封闭集 $B\supseteq A$, $B-A$ 或 $\overline{B}$ 中有一个为 η 有穷.

η 单纯集(η-simple set) 见"η 封闭集".

拟创造集(quasicreative set) 创造集概念的推广. 若 A 是 *re* 集,并存在递归函数 f,使 $W_x\subseteq\overline{A}\rightarrow D_{f(x)}\subseteq\overline{A}\wedge D_{f(x)}\subsetneq W_x$ (D_x 是典则下标为 x 的有穷集). 创造集就是将上面的 $D_{f(x)}$ 换为 $f(x)$ 的特殊情况,因此创造集都是拟创造集,但反之不然,即存在拟创造的非创造集. 集合 A 为拟创造的,当且仅当 A 为 d 完备的. 与拟创造概念类似的,还有半创造与次创造概念. 形式地,若 A 为 *re* 并存在 f,使 $W_x\subseteq\overline{A}\rightarrow W_{f(x)}\subseteq\overline{A}\wedge W_{f(x)}\not\subseteq W_x$),则称 A 为半创造集;若 A,f 使得: $W_x\subseteq\overline{A}\rightarrow W_{f(x)}\not\subseteq A\wedge W_{f(x)}\subseteq\overline{W}_x$,则称 A 为次创造集. 集合 A 为次创造,当且仅当 A 为 Q

完备的.

半创造集(semicreative set) 见“拟创造集”.

次创造集(subcreative set) 见“拟创造集”.

可分裂性(splitting property) *re* 度的一个重要性质. 由萨克斯(Sacks, G. E.)证明. *re* 度的可分裂性质,是指对任何 *re* 度 $\mathbf{a}>\mathbf{0}$,存在 *re* 度 $\mathbf{c},\mathbf{d}<\mathbf{a}$,使得 $\mathbf{c}\cup\mathbf{d}=\mathbf{a}$. 此外,任何 *re* 度都可以在低度上分裂,即对 *re* 度 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$,$\mathbf{a}$ 为低度,则存在 *re* 度 $\mathbf{c},\mathbf{d}$,$\mathbf{a}<\mathbf{c}<\mathbf{b}$,$\mathbf{a}<\mathbf{d}<\mathbf{b}$,$\mathbf{c}\cup\mathbf{d}=\mathbf{b}$. 该定理由鲁宾孙(Robinson, R. W.)证明的 . 在证明中使用的一种处理低度的方法被称为鲁宾孙技巧. 虽然任何 *re* 度可在低度上分裂,但如果去掉“低”的条件之后,*re* 度不一定在任何小于它的度上可分裂,即$\exists\mathbf{a},\mathbf{b}\in R[\mathbf{a}<\mathbf{b}\wedge\forall\mathbf{c},\mathbf{d}\in R[(\mathbf{a}<\mathbf{c},\mathbf{d}<\mathbf{b})\wedge(\mathbf{c}\cup\mathbf{d}=\mathbf{b})\Rightarrow(\mathbf{b}\leqslant\mathbf{c}\vee\mathbf{b}\leqslant\mathbf{d})]]$. 该定理是拉克伦(Lachlan, A. H.)证明的,被称为拉克伦非分裂定理. 在该定理的证明中,拉克伦首次使用了一种非常复杂的被称之为“魔怪方法”的方法—$0'''$方法. 而该定理作为这种方法的一个例子受到广泛重视.

***re* 度稠密性**(density of *re* degrees) *re*度的一个重要性质. 最早由萨克斯(Sacks, G. E.)证明. 其内容为:任何 *re* 度 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$,存在 *re* 度 $\mathbf{c}$,使 $\mathbf{a}<\mathbf{c}<\mathbf{b}$. 除了 R 本身的稠密性外,斯勒曼(Slaman, T. A.)进一步证明了菱形格是稠密的,即任给 *re* 度 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$,存在 $\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_3$, $\mathbf{a}<\mathbf{c}_0<\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2<\mathbf{c}_3<\mathbf{d}$,使得 $\mathbf{c}_1\cup\mathbf{c}_2=\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_1\cap\mathbf{c}_2=\mathbf{c}_0$. 此外,目前已知,除菱形格外,任何可数分配格与某些非分配格(如 M_5,N_5 等)在 R 中是稠密的.

休恩非尔德猜想(Shoenfield conjecture) 关于 *re* 度稠密性的一个重要猜想. 它是休恩非尔德(Shoenfield, J. R.)于 1965 年提出的. 在萨克斯(Sacks, G. E.)证明了 R(*re* 度的类)的稠密性之后,休恩非尔德猜想可以用类似“有理数的序结构是线性序的稠密结构”的方法,把 R 描述为上半格的稠密结构. 具体地,对 $L=\{\leqslant,U,0,1\}$,设 a 为语言 L 的上半格结构类,这些上半格以$\leqslant$为偏序,U 为上确界运算,0,1 分别为最小与最大元. 休恩非尔德猜想的内容是:$(R,\leqslant,U,\mathbf{0},\mathbf{0}')$为 a 的可数稠密结构. 休恩非尔德猜想有两个直接推论:

1. 任给 *re* 度 $\mathbf{b}>\mathbf{a}>\mathbf{0}$,存在 *re* 度 $\mathbf{c}<\mathbf{b}$,使得 $\mathbf{a}\cup\mathbf{c}=\mathbf{b}$.

2. 任给 *re* 度 $\mathbf{a},\mathbf{b}$,如果 $\mathbf{a}\not\leqslant\mathbf{b}$,$\mathbf{b}\not\leqslant\mathbf{a}$,则 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 无下确界.

在休恩非尔德猜想提出不久,拉克伦(Lachlan, A. H.)证明了推论 1 不成立;而耶茨(Yates, C. E. M.)则成功地证明了极小对的存在性,从而证明了推论 2 不成立. 这两个结论都证明了休恩非尔德猜想是不成立的.

极小对(minimal pair) 一对特殊的 *re* 度. 若度 $\mathbf{a},\mathbf{b}>\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{a}\cap\mathbf{b}=\mathbf{0}$,则称 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 形成极小对. 通常所提的极小对都是指 *re* 极小对,即 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为 *re* 度. 极小对的存在性最早是由耶茨(Yates, C. E. M.)证明的. 极小对的存在性指出,虽然 R 是稠密的,但休恩非尔德猜想仍不成立. 关于极小对的进一步的结果,拉克伦(Lachlan, A. H.)证明了并非每个非 $\mathbf{0}$ 的 *re* 度都有一个极小对,即

$$\exists\mathbf{a}>\mathbf{0}\forall\mathbf{b},\mathbf{c}[\mathbf{0}<\mathbf{b},\mathbf{c}\leqslant\mathbf{a}\rightarrow\exists\mathbf{d}>\mathbf{0}(\mathbf{d}\leqslant\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}\leqslant\mathbf{c})].$$

而库珀(Cooper, S. B.)则证明了,任何高度之下都存在极小对,即

$$\forall\mathbf{a}[\mathbf{a}\text{ 为高度}\rightarrow\exists\mathbf{b},\mathbf{c}>\mathbf{0}(\mathbf{b}\cap\mathbf{c}=\mathbf{0}\wedge\mathbf{b},\mathbf{c}\leqslant\mathbf{a})].$$

***re* 度格的可嵌入性质**(lattice embeddability of *re* degrees' structure) 研究 *re* 度结构的重要方法. 格$(L,\leqslant,\cap,\cup)$可嵌入 R,是指存在 $L\rightarrow R$ 的单值映射 f,使得$\forall a,b\in L(a\leqslant b\leftrightarrow f(a)\leqslant f(b))$,$\forall a,b,c\in L[a\cap b=c\leftrightarrow f(a)\cap f(b)=f(c)]$,$\forall a,b,c\in L[a\cup b=c\leftrightarrow f(a)\cup f(b)=f(c)]$.

关于格嵌入的最早结果是耶茨(Yates, C. E. M.)得出的,他证明了极小对的存在性,从而表明菱形格可保持最小元地嵌入 R. 其后,托马逊(Thomason, S. K.)证明了任何有穷分配格可嵌入 R 中;拉克伦(Lachlan, A. H.)则证明了非分配格 M_5 与 N_5 可嵌入 R,并与勒曼(Lerman, M.)分别独立证明了可数分配格可嵌入 R. 这些结论引出了以下猜想:“是否任何有穷格都可嵌入 R 中?”但拉克伦与索尔(Soare, R. I.)证明了这个猜想不成立,他们证明了非分配格 S_8 不可嵌入 R 中. 其后,艾姆伯斯-思皮斯(Ambos-Spies, K.)与勒曼得到了一个不可嵌入条件 NEC 与一个可嵌入条件 EC. 到目前为止还没有发现既不满足 NEC 条件又不满足 EC 条件的有穷格,因此,这两个条件是当前在这方面最好的结果,但尚未证明任何有穷格一定满足 EC 或 NEC 条件. 关于格嵌入的其他研究主要集中于研究哪些格是(在 R 中)稠密的,哪些格保持 0,1 嵌入 R 中. 关于这两方面的研究,参见“稠密性”与“非菱形定理”.

非菱形定理(non-diamond theorem) *re* 度格的嵌入性定理. 拉克伦(Lachlan, A. H.)证明的一个重要定理,其内容是:即使菱形格,也无法保持最大与最小元地嵌入 R. 即 $(\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b}\in R)[\mathbf{a}\cup\mathbf{b}=\mathbf{0}'\rightarrow\exists\,\mathbf{c}>\mathbf{0}(\mathbf{c}<\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}<\mathbf{b})]$.

关于保持最大最小元的格嵌入性质,艾姆伯斯-思皮斯(Ambos-Spies, K.)、莱普(Lempp, S.)与勒曼(Lerman, M.)证明了:有穷分配格 L 可保持最大与最小元的嵌入 R,当且仅当 L 中存在一个不可交元 $\mathbf{a}$(即不存在 $\mathbf{b}\in L$,使 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}_L$ 且 $\mathbf{a}\cap\mathbf{b}=\mathbf{0}_L$),使得

$$(\forall\mathbf{b},\mathbf{c}\in L)[\mathbf{b}<\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}<\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}\cup\mathbf{c}<\mathbf{a}].$$

非菱形定理还可被进一步推广到以下结论:若

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为极小度的一半(但 $\boldsymbol{a}\cap\boldsymbol{b}$ 不一定为 $\boldsymbol{0}$),则

$$\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}'.$$

可交度(capable degree) 递归论的基本概念之一.指具有一定性质的re度.re 度 $\boldsymbol{a}$ 称为可交度,是指存在非 $\boldsymbol{0}$ re 度 $\boldsymbol{b}$,使 $\boldsymbol{a}\cap\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.实际上,可交度或者为 $\boldsymbol{0}$,或者为极小对的一半.由于极小对是存在的,因此,非平凡可交度(即不为 $\boldsymbol{0}$ 的可交度)是存在的.更进一步,由于高极小对的存在,高可交度也是存在的,且可交度形成理想.即若 $\boldsymbol{a}$ 为可交,$\boldsymbol{b}\leqslant\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{b}$ 亦可交;若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可交,则 $\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b}$ 亦可交.并非每个非完备 re 度都是可交度(参见“不可交度”与“强不可交度”).

不可交度(noncapable degree) 递归论的基本概念之一.指非可交度.若 re 度 $\boldsymbol{a}$ 不是可交度,则称之为不可交度.即对任何 re 度 $\boldsymbol{b}>\boldsymbol{0}$,存在 re 度 $\boldsymbol{c}>\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{b},c\leqslant a$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为不可交度.耶茨(Yates,C. E. M.)最早证明了非完备不可交度的存在性:对任何 re 度 $\boldsymbol{c}>\boldsymbol{0}$,存在不可交度 $\boldsymbol{a}$,使 $\boldsymbol{a}\not\geqslant\boldsymbol{c}$.全体不可交度形成一个滤子.即不可交度是向上封闭的,且对任何不可交度 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\cap\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{c}$ 亦为不可交度.事实上,它还形成强滤子,即若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为不可交,则存在 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}<\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{c}<\boldsymbol{b}$,使 $\boldsymbol{c}$ 亦不可交.

不可交度的概念可被能行化而得到能行不可交度的概念:对 re 度 $\boldsymbol{a}$,若存在 re 集 $A\in\boldsymbol{a}$,且存在递归函数 f,g,h,使得若对一切

$$e:W_{f(e)}=\Phi_{g(e)}^{A}=\Phi_{h(e)}^{W_e},$$

并且 $\varnothing<_T W_e$,则 $\varnothing<_T W_{f(e)}$.有趣的是,虽然对大部分递归论概念而言,能行化后的概念与原来概念一般是不同的,但能行不可交度与不可交度的概念则是一致的,即任何不可交度也是能行不可交的.进一步,不可交度概念与即时单纯度的概念也是一致的,即 re 度 $\boldsymbol{a}$ 为不可交度,当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 为即时单纯度.

能行不可交度(effective noncapable degree) 见“不可交度”.

强不可交度(strongly noncapable degree) 不可交度概念的推广.若非 $\boldsymbol{0}$ 的 re 度 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{0}'$,且对任何 re 度 $\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\not\leqslant\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}\not\leqslant\boldsymbol{a}$,则 $\mathbf{a}\cap\boldsymbol{b}$ 不存在,那么 $\boldsymbol{a}$ 称为强不可交度.艾姆伯斯-思皮斯(Ambos-Spies,K.)首先证明了对任何 re 度 $\boldsymbol{c}>\boldsymbol{0}$,存在强不可交度 $\boldsymbol{a}\not\geqslant\boldsymbol{c}$.莱普(Lempp,S.)则证明了存在高的强不可交度.

可并度(cuppable degree) 可交度概念的对偶概念.re 度 $\boldsymbol{a}$ 称为可并度,是指存在 re 度 $\boldsymbol{b}<\boldsymbol{0}'$,使 $\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}'$.哈林顿(Harrington,L.)证明了任何 re 度或者是可并的,或者是可交的.该定理还可进一步推广(参见“低可并度”).

低可并度(low cuppable degree) 一种可并度.对 re 度 $\boldsymbol{a}$,若存在低度 $\boldsymbol{b}$,使 $\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}'$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为低可并度.费耶尔(Fejer,P. A.)和索尔(Soare,R. I.)推广了哈林顿(Harrington,L.)的结果(参见“可并度”),他们证明了任何 re 度为低可并度,当且仅当它为不可交度.因此任何 re 度或为可交度,或为低可并度,且不能既为可交度又为低可并度.

反并性质(anticupping property) re 度的一种性质.对 re 度 $\boldsymbol{a}$,若存在 re 度 $\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a}$,使得对任何 $\boldsymbol{c}<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\cup\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 具有反并性质.若休恩菲尔德猜想成立,则任何 re 度都没有反并性质.但耶茨(Yates,C. E. M.)、库珀(Cooper,S. B.)与哈林顿(Harrington,L.)均证明了 $\boldsymbol{0}'$ 具有反并性质,而哈林顿进一步证明了任何高度都有反并性质.

加并性质(plus－cupping property) 与反并性质相对的性质.对 re 度 $\boldsymbol{a}$,若对任何非 $\boldsymbol{0}$ 的re度 $\boldsymbol{b}\leqslant\boldsymbol{a}$ 与任何 re 度 $\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{a}$,存在 $\boldsymbol{c}<\boldsymbol{d}$,使 $\boldsymbol{b}\cup\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 具有加并性质.哈林顿(Harrington,L.)证明了存在具有加并性质的 re 度.

分枝度(branching degree) 一种特殊的 re 度.对 re 度 $\boldsymbol{a}$,若存在 re 度 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>\boldsymbol{a}$,使 $\boldsymbol{b}\cap\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为分枝度.由于极小对的存在,$\boldsymbol{0}$ 是分枝度.斯勒曼(Slaman,T. A.)则进一步证明了分枝度是稠密的.

非分枝度(nonbranching degree) 一种特殊的 re 度.指不是分枝度的 re 度.若 re 度 $\boldsymbol{a}$,不是分枝度,即不存在 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>\boldsymbol{a}$,使 $\boldsymbol{b}\cap\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为非分枝度.由于极小对的存在,$\boldsymbol{0}$ 不是非分枝度.但费耶尔(Fejer,P. A.)证明了非分枝度是稠密的.

自可化归集(autoreducible set) 一种特殊的自然数集.指带有自身可计算性质的自然数集.对自然数集 A,若存在 e,使得对所有 x,

$$A(x)=\Phi_{e}^{A-\{x\}},$$

则称 A 为自可化归集.从直观上说,A 为自化归集,是指 A 中的信息有一定的冗余.即对任何 x,x 是否在 A 中,可由 A 中的其他信息(即根据 $A-\{x\}$)计算出来.对任何集合 A,$A\oplus A$ 为自可化归的,因此任何 m 度中都包含自可化归集.实际上,对任何非递归 re 集 B,存在 re 集 $A\leqslant_T B$,使 A 为非自可化归集.但因为存在 re 度,使得该度中所有的集合都是自可化归的,所以此处的“$\leqslant_T$”不能加强为“$\equiv_T$”.只包含自可化归集的度称为完备自可化归度.但任何 $\geqslant\boldsymbol{0}'$ 的度都不是完备自可化归度.此外,任何自可化归集都是有丝集,反之亦然.

有丝集(mitotic set) 一种特殊的 re 集.指可划分为两个都与自身等价的 re 集的 re 集.对 re 集合 A,如果存在 re 集 A_0,A_1,使得 $A_0\cup A_1=A,A_0\cap A_1=\varnothing$,且 $A_0\equiv_T A_1\equiv_T A$.称 A 为有丝集.拉德那(Ladner,R. E.)证明了任何 re 集是有丝的,当且仅

当它是自可化归的. 他还证明了存在非 **0** *re*度 **a**,使 **a** 中只包含有丝的 *re* 集.

d-re **集**(*d-re* set)　一个特殊的差集. 若集合 A 为两 *re* 度之差,则称 A 为 *d-re* 集. 因此,*d-re* 集是指存在一个能行的过程枚举该集合,在枚举过程中可能将一些元取出,但一旦取出就不允许再次放入其中(参见"布尔分层"、"*d-re* 度").

n-re **集**(*n-re* set)　一种特殊的集合. 指属于解析分层 Σ_n^1 的集合(参见"解析分层"). 即 A 为*n-re*集,当且仅当存在递归函数 g,使得$\forall x(A(x)=\lim_s g(x,s))$,并且对所有 x, $|\{s|g(x,s)\neq g(x,s+1)\}|\leqslant n$. 特别地,1-*re* 集即为 *re* 集,2-*re* 集即为 *d-re* 集. *n-re* 集也可等价定义为:A 为 *n-re*集,当且仅当存在 n 个 *re* 集 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$,若 n 为偶数,则 $A=(A_0-A_1)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-2}-A_{n-1})$;若 n 为奇数,则 $A=(A_0-A_1)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-3}-A_{n-2})\cup A_{n-1}$.

d-re **度**(*d-re* degree)　递归论的基本概念之一. 指包含 *d-re* 集的度. 特别地,若 *d-re* 度 **a** 不包含 *re* 集,则称其为真 *d-re* 度. *d-re* 度具有弱稠密性,即对任意两个 *re* 度 **a**,**b**,若 **a**<**b**,则存在真 *d-re* 度 **c**,使 **a**<**c**<**b**. 但*d-re*度不是稠密的(因而与 *re* 度理论不是初等等价的). 不过 *d-re* 度在 low_2 上是稠密的. 此外,菱形格可以保持最大与最小元地嵌入 *d-re* 度结构中,这也是与 *re* 度的另一个不同之处. 库珀(cooper,S. B.)利用 *d-re* 度证明了跳跃的可定义性问题,因而显示了 *d-re* 度研究的重要性.

n-re **度**(*n-re* degree)　递归论的基本概念之一. 指包含 *n-re* 集的度. 若 $n>1$,且 *n-re* 度 **a** 中不包含$(n-1)$-*re* 度,则称 **a** 为真 *n-re* 度. *n-re* 度与 *d-re* 度有许多类似之处,目前已知的 *d-re* 度的结论在 *n-re* 度中皆成立. 因此,一个很重要的问题是 *d-re* 度与 *n-re* 度($n>1$)是否都是初等等价的?该问题目前仍未解决.

1 **脱殊集**(1-generic set)　亦称 1 兼纳集. 集合论力迫法中脱殊集概念到递归论中的平移. 形式地,集合 A 为 1 脱殊集,是指对任何 e,或者存在 $\sigma\subset A$,使 $\varphi_e^\sigma(e)\downarrow$;或者存在 $\sigma\subset A$,使得对任何 $\tau\supseteq\sigma$, $\varphi_e^\tau(e)\uparrow$(称 $\varphi_e^\sigma(e)$强无定义),其中 σ,τ 皆为 0,1 有穷串. 1 脱殊集可等价定义为:集合 A 为 1 脱殊集,是指对任何递归可枚举的 0,1 有穷串集合 S,或者存在 $\sigma\subset A$,使 $\sigma\in S$;或者存在 $\sigma\subset A$,使对一切 $\tau\supseteq\sigma,\tau\notin S$.

一个集合 A 为 1 脱殊集,实际上是指它没有任何"特殊"的 Σ_1 性质. 即对任何 Σ_1 语句 φ,或者 $A\vDash\varphi$或者 $A\vDash\neg\varphi$(这里把 A 看成$\{\sigma:\sigma\subset A\}$)从递归论角度看,如果某个 Σ_1 性质 P 有无穷多次满足机会,则该性质被 1 脱殊集满足. 任何 1 脱殊集都是有穷的,并且也是余有穷的,它们都不是 *re* 集(事实上,它们都是禁集). 1 脱殊集的概念是杰克什(Jockusch,C. G.)首先引入的.

1 **脱殊度**(1-generic degree)　一种特殊的度. 是包含 1 脱殊集的度. 任何 1 脱殊度都是非递归的广义低度. 特别地,$\leqslant\mathbf{0}'$的 1 脱殊度是低度($\leqslant\mathbf{0}'$的 1 脱殊度也是存在的). 此外,任何 1 脱殊度之下均没有非递归的*re*度(因此 1 脱殊度也是 *re* 度),并且任何 1 脱殊度都是一个非 *re* 极小对的上确界.

n **脱殊集**(*n*-generic set)　1 脱殊集概念的推广. 如果集合 A 不具有"特殊"的 Σ_n 性质,则它称为 n 脱殊集. 形式地,集合 A 为 n 脱殊集,是指对任何 Σ_n 的有穷 0,1 串集合 S,或者存在 $\sigma\subset A$,使 $\sigma\in S$;或者存在 $\sigma\subset A$,使得对任何 $\tau\supseteq\sigma,\tau\notin S$. 包含 n 脱殊集的度称为 n 脱殊度. 对任何 n,存在$\leqslant\mathbf{0}^{(n)}$的 n 脱殊度,并且对 n 脱殊度 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^{(n)}=\boldsymbol{a}\cup\mathbf{0}^{(n)}$. 此外,与 1 脱殊集的性质类似,$n$ 脱殊集都是非递归的且非 *re* 的.

n **脱殊度**(*n*-generic degree)　见"*n* 脱殊集".

p **脱殊集**(*p*-generic set)　脱殊集概念向 *re* 集的推广. 由于递归论的扩张构造方法与集合论中力迫法的思想有类似之处,因此力迫法也被移植到递归论中. 与集合论力迫法中脱殊集概念类似的 1 脱殊集也在递归论中发挥了重要作用. 但 1 脱殊集不是 *re* 集,因此对 *re* 集的研究没有多大作用. 为此,杰克什(Jockusch,C. G.)引入了以下 p 脱殊集概念:集合 A 为 p 脱殊集,是指 A 为余无穷,并且对任何 A 满足的 Σ_1 性质 P,存在有穷集 $G\subset\overline{A}$ 与 *re* 集 $H\subseteq A$,使得对任何集合 B,如果 $B\supseteq H$ 并且 $\overline{B}\supset G$,则 B 亦具性质 P. p 脱殊集概念可以更加形式地定义为:集合 A 为 p 脱殊集,当且仅当 A 为余无穷,并且对任何 *re* 的有穷集对的集合$\{\langle E_m;F_m\rangle:m\in w\}$,若 $E_m\cap F_m=\varnothing$对一切 m 成立,则或者存在 m_0,使 $E_{m_0}\subset A$, $F_{m_0}\subset\overline{A}$;或者存在有穷集 $G\subseteq\overline{A}$ 与 *re* 集 $H\subseteq A$,使得对任何 m,或者 $E_m\cap G\neq\varnothing$,或者 $F_m\cap H\neq\varnothing$.

由于放宽了限制条件,*re* 的 p 脱殊集是存在的,并且英格拉希亚(Ingrassia,M. A.)证明了 p 脱殊集都是非有丝集,并且 $\mathbf{0}'$ 中包含 p 脱殊集. 包含 p 脱殊集的度称为 p 脱殊度. 英格拉希亚证明了 p 脱殊度在 R 中是稠密的,丁德成则证明了 *re* 的 p 脱殊度都是非分枝度. 此外,e 脱殊集、s 脱殊集与 *re* 脱殊集都是 p 脱殊集.

p **脱殊度**(*p*-generic degree)　见"*p* 脱殊集".

e **脱殊集**(*e*-generic set)　定义较为简单的*re*的脱殊集. 它是杰克什(Jockusch,C. G.)给出的一种 *re* 的脱殊集定义. 杰克什首先将集合论中力迫法移植到递归论中,给出了 1 脱殊集的概念. 此后,马斯

(Maass,W.)给出了一种 re 脱殊集的定义(称为 re 脱殊集),但该定义过于复杂,因此,杰克什将其简化为 e 脱殊集.具体地,设 $E=\{\langle A_0,A_1,\cdots,A_s\rangle:\forall i\leqslant s(A_i\subseteq A_{i+1}\wedge A_i\subseteq i)\}$.若 $\{B_s\}_{s\in\omega}$ 是 re 集 B 的一个递归枚举,称 $C\subseteq E$ 沿 $\{B_s\}_{s\in\omega}$ 稠密,是指存在原始递归函数 q,使得对任何 s_0,存在 $s>s_0$ 与 $\langle B_0,B_1,\cdots,B_s\rangle$ 的扩张 $\tau,\tau\in C,|\tau|\leqslant q(s)$,且 $(A_\tau-A_s)\upharpoonright s_0=\varnothing$.则 re 集 B 为 e 脱殊集,是指 B 有一个递归枚举 $\{B_s\}_{s\in\omega}$,使得对任何 $s,\langle B_0,B_1,\cdots,B_s\rangle\in E$,且对任何原始递归集 $C\subseteq E$,如果 C 沿 $\{B_s\}_{s\in\omega}$ 稠密,则存在 s,使 $\langle B_0,B_1,\cdots,B_s\rangle\in C$,且 $B_s\cap s=B\cap s$.

杰克什证明了 e 脱殊集的存在性,并证明了 e 脱殊集都是低的即时单纯集,因此也给出解决波斯特问题的另一个方法. e 脱殊集也是 s 脱殊集与 p 脱殊集.

s 脱殊集(s-generic set) 类似 e 脱殊集的一个概念.它是杰克什(Jockusch,C. G.)给出的.即将 e 脱殊集定义中的"递归枚举的前节"换为"特征函数的前节"后得到的概念.具体地,对 $C\subseteq 2^{<\omega}$ 与 re 集 A 的递归枚举 $\{A_s\}_{s\in\omega}$,如果存在原始递归函数 q,使得对任何 $\sigma_0\subseteq C_A(\sigma_0\in 2^{<\omega})$,存在 $s>|\sigma_0|$ 与 $\tau\in C$,使得 $|\tau|\leqslant q(s),\tau\supseteq\sigma_0$,且对所有 $n\in A_s$ 有 $\tau(n)=1$,则称 C 沿 $\{A_s\}_{s\in\omega}$ 稠密.称 re 集 A 为 s 脱殊集,是指存在 A 的递归枚举 $\{A_s\}_{s\in\omega}$,使得对任何原始递归集 $C\subseteq 2^{<\omega}$,如果 C 沿 $\{A_s\}_{s\in\omega}$ 稠密,则存在 $\tau\in C$,使 $\tau\subseteq C_A$(以上 C_A 为 A 的特征函数).

任何 e 脱殊集都是 s 脱殊集(因此 s 脱殊集存在),而任何 s 脱殊集都是 p 脱殊集. s 脱殊集都是低的,但不一定是即时单纯集.

re 脱殊集(re-generic set) 一种脱殊集.它是马斯(Maass,W.)给出的.杰克什(Jockusch,C. G.)最早把集合论力迫概念引入递归论,并给出了 1 脱殊集的概念.但 1 脱殊集不是 re 集,对 re 度的研究没有作用.为此,马斯引入了 re 脱殊集的概念(虽然后来杰克什定义的 e 脱殊集, s 脱殊集与 p 脱殊集也是 re 的,但一般称的"re 脱殊集"都是指马斯给出的脱殊集概念).在马斯的定义中,有穷损伤的思想被隐含地包含在其中.其基本思想是:如果某个 Σ_1 性质有无穷多次机会被满足(这种"机会"必须能够在原始递归扩张中找到),那么这个性质将被 re 脱殊集满足.马斯证明了 re 脱殊集的存在性,并指出 re 脱殊集都是低的即时单纯集.此外, re 脱殊集都是 p 脱殊集.

有穷扩张方法(finite extension method) 一种递归论构造方法.其基本思想是:为构造能满足需求 $R_0,R_1,\cdots$ 的集合,构造一个 $\{0,1\}$ 串的序列 $\sigma_0\subseteq\sigma_1\subseteq\sigma_2\subseteq\cdots$,使得对任何 B,如果 $\sigma_i\subset C_B$,则 B 满足需求 R_i,那么这样的一个无穷序列将定义出一个能满足所有 R_n 的集合 A.此方法能应用的关键是:对任何 0,1 有穷串 σ 与需求 R_n,必须找到 σ 的一个有穷扩张 $\tau\supseteq\sigma$,使得任何满足 $C_B\supset\tau$ 的 B 都满足需求 R_n.一般用此方法构造非 re 集.

需求(requirement) 递归论的基本概念之一.指构造满足某一性质的集合时,该集合需满足的一些具体条件.例如,为使集合 A,B 互相不可比较,需要对所有自然数 e,满足以下需求: $\varphi_e^A\neq B,\varphi_e^B\neq A$.再如,使余无穷 re 集 A 非递归,可以通过使 A 满足以下需求来实现(对一切自然数 e): W_e 无穷 $\rightarrow W_e\cap A\neq\varnothing$(其中 W_e 为 re 集).

一个具体的递归论构造,通常是构造一个满足一系列需求的集合.这些需求之间会有一些冲突,构造的关键往往就是解决这些矛盾.与需求相关的两个概念是正需求与负需求,前者的特征是为满足这种需求,要将一些元放入集合中,而后者的特征则是为满足这种需求,要限制某些元进入某个集合中,或者说需要保护集合的某个部分.正需求与负需求本身就是一对矛盾,当它们发生冲突时,通常是通过损伤方法满足的.但在实际构造中,许多需求既具有正需求性质,又具有负需求性质,即既需要放一些元,同时又需要限制一些元进入某个集合中.

正需求(positive requirement) 见"需求".

负需求(negative requirement) 见"需求".

余无穷扩张方法(coinfinite extension method) 有穷扩张方法的一种推广.它具有比有穷扩张方法更强的力量.具体地,一个余无穷扩张方法,是通过逐步定义一串部分函数 $\theta_0\subseteq\theta_1\subseteq\theta_2\subseteq\cdots$ 来构造满足某些性质的集合

$$A(\text{以}\bigcup_{n\in\omega}\{\theta_n\}\text{ 作为 }C_A\text{ 的定义}).$$

与有穷扩张方法不同的是,有穷扩张方法要求这些 θ_n 都定义在 ω 的有穷前节上;而余无穷扩张方法则只要求 θ_n 的定义域是余无穷集,从而保证每个 θ_n 有足够的扩张空间.有穷扩张方法是余无穷扩张方法的特殊情况.使用余无穷扩张方法的典型例子是恰对的构造.

极限引理(limit lemma) 递归论的一个基本定理.其内容为:对任何一元函数 f, f 相对于 A' 递归,当且仅当存在相对于 A 递归的二元函数 g,使得 $\forall x(f(x)=\lim_s g(x,s))$.极限引理在与跳跃有关的递归论构造中,起着十分重要的作用.

允许方法(permitting method) 一种递归论构造方法.一般用来构造相对于某个 re 集递归的 re 集.具体地,允许方法是指:对给定的 re 集 B,设 $\{B_s\}_{s\in\omega}$ 为 B 的一个递归枚举,则如果在构造 re 集 A 时(设 $\{A_s\}_{s\in\omega}$ 为 A 的一个递归枚举),当任何 x 在 s 步枚

举进 A，一定有一个 $y<x$，使得 $y\in B_{s+1}-B_s$，这样的构造能保证 $A\leqslant_T B$ 成立. 由于在这样的构造过程中，任何元 x 被枚举进 A 时，在同一步中，一定要有一个较小的元 y 进入 B，因此称 x 被 y 允许进入 A，这也是"允许"一词的由来. 允许方法有许多变种，可以被修改用来构造一些非 *re* 集.

优先方法(priority method)　一种递归论构造方法. 在递归论构造中，常常会产生以下问题：在构造过程中的某一时刻，可能有多个需求同时有被满足的机会(通过使一些元进入被构造集合)，甚至有的需求已被暂时满足，但如果要满足某一个需求，就无法满足其他需求，或者使已暂时被满足的需求被损伤. 这时就要决定需优先满足哪一个需求. 所谓优先方法就是给所有需求都指定优先级，当多个需求之间发生冲突时，优先满足优先级最高的需求. 优先方法通常会产生损伤，即为满足优先级高的需求而破坏了已经建立的对低优先级需求的满足，但并非所有优先方法都一定有损伤.

损伤方法(injury method)　一种递归论构造方法. 在递归论的优先方法中，有时会发生这样的情况：在构造过程中，某个需求有机会通过放一些元进入构造的集合中而被满足，但这可能破坏一些已暂时被满足了的需求. 在这种情况下，往往按这些需求的优先级高低来决定是否要将这些元放入被构造的集合. 如果将这些元放入集合会破坏(也称损伤)优先级较高的需求，则不允许这些元放入，否则允许放入. 在后一情况下，优先级较低的需求可能被损伤，因此需要重新满足. 在某些情况下(如每个需求至多只被损伤有穷次)，就能够解决这些冲突，而使这些需求被满足. 这种在构造过程中可能产生损伤的方法称为损伤方法. 按每个需求可能被损伤的最多次数，损伤方法又分为有穷损伤与无穷损伤等方法.

有穷损伤优先方法(finite injury priority method)　一种损伤优先方法. 其基本思想是：保证在构造过程中每个需求至多被损伤有穷次. 这样，任何需求在某一步骤之后不再被损伤. 因此，只要每个需求有无穷次满足机会，该需求就能被最终满足. 在有穷损伤方法中，每个需求的限制函数(即该需求所要保护的长度)一般都是有极限的(即对限制函数 $r(e,s)$，$\lim_s r(e,s)<\infty$)，因此能保证优先级较低的需求有足够多的满足机会.

最早使用有穷损伤方法的是弗里德贝格(Friedberg, R. M.)和穆切尼克(Mučnik, A. A.)，他们使用这一方法解决了波斯特问题.

0′优先方法(0′-priority mehtod)　即"有穷损伤优先方法"(参见"有穷损伤优先方法"与"0‴优先方法").

无穷损伤优先方法(infinite injury priority method)　一种递归论构造方法. 自有穷损伤方法出现后，许多递归论问题都被这一方法解决了. 但此方法在解决诸如 *re* 度的稠密性等问题上变得无能为力. 20 世纪 60 年代初，休恩菲尔德(Shoenfield, J. R.)和萨克斯(Sacks, G. E.)分别独立地推广了有穷损伤方法，得到了比之更为强有力的方法——无穷损伤优先方法，该方法证明了厚性引理与稠密性定理. 相对有穷损伤方法来说，无穷损伤方法的关键在于某些需求会被损伤无穷多次，但在某些特别限制之下，这些需求仍旧可以满足(例如对萨克斯技巧来说，只要损伤某个需求的元素集合为递归集，则该需求仍被满足). 当然，对无穷损伤方法来说，除此之外还需要更多的技巧. 例如，由于限制函数的上极限可能无穷，这就要求其下极限有穷(相当于在一定时刻打开"窗口"，让优先级较低的需求被满足. 不过在极少数情况下，这一点也不一定能保证，而要通过别的方法来处理). 此外，由于不同的需求不一定在同一时刻打开"窗口"，因此，需要用诸如"真步"、"弹球机方法"与"树方法"等技巧来处理.

通常的无穷损伤方法称为 0″优先方法. 不过，0‴优先方法事实上是一种更为复杂的无穷损伤方法，但一般的无穷损伤方法都指 0″优先方法. 关于 $0^{(n)}$优先方法的划分，参见"0‴优先方法".

0‴优先方法(0‴-priority method)　一般无穷损伤优先方法的推广. 无穷损伤方法出现后，在 20 世纪六七十年代，该方法解决了许多不可解度方面的问题. 但随着递归论研究的进一步深入，这种方法对许多问题显得力量不足. 1975 年，拉克伦(Lachlan, A. H.)使用了一种更加复杂、而力量更强大的方法——0‴优先方法，证明了非分裂定理. 由于该方法极为复杂，以至于多年无人理解，因此被称为"魔怪方法"(monster method). 直到 20 世纪 70 年代末至 20 世纪 80 年代初，这种方法才逐渐为人理解，并被用来证明了许多重要定理.

与 0″优先方法相比，0‴优先方法的复杂性，表现在某个需求最终如何满足，需通过一个 0‴的外部信息源才能知道(虽然构造过程仍为有穷)；而 0″方法则只需通过一个 0″的外部信息源就能得到. 如果用树形方法来表述，有穷损伤方法(0′方法)的真路径只要通过 0′就能知道；而无穷损伤方法(0″方法)的真路径就需要 0″外部信息源才能知道，但对真路径 f，通过 $R_{f\upharpoonright n}$就可以满足 R_n；但对 0‴方法，最后一点并不成立，一个需求需要真路径上许多结点的帮助才能满足，而最终如何满足，需通过 0‴外部信息源，才能知道(这可以大致看成在真路径上再进行一次有穷损伤). 需通过哪个层次的外部信息源，才能知道最终需求如何满足，一般将之作为各个 $0^{(n)}$方法的划分标准.

树方法(tree method) 一种功能很强的递归论构造方法. 在递归论构造中,每个需求 R_n 都需要某种策略来满足,但最终怎样满足则不是固定的(如在有的情况下一个策略只作用有穷次,而在另一种情况下则要作用无穷次). 满足一个需求,策略的作用方式不同,对优先级较低需求的影响当然也不一样. 对一般的优先方法来说,较高优先级的需求,往往只能通过限制函数对优先级较低的需求产生影响,而树方法则灵活得多:可以定义一个符号集 Λ 与树 $\Lambda^{<\omega}$,Λ 中的符号代表各个策略可能的输出(这种输出既可以是有穷或无穷,也可以是这个策略产生的限制函数或者是其他输出). 一个需求 R 可以通过一系列 α 策略($\alpha\in T$)来满足(这里的 α 表示对 $\beta\subset\alpha$,β 策略的输出为 $\alpha(|\beta|)$). 这样,α 策略作用时,可随 β 策略的不同输出而改变. 在具体的构造过程中,每一步都"猜测"各个策略的最终输出(并记 $\sigma^s\in T$ 为这些猜测组成的串),然后,按这些"猜测"决定哪些 α 策略作用及如何作用. 在适当的构造下,最终可猜中正确的输出,这些正确的输出形成的串 $f\in\Lambda^{\omega}$,称为真路径. 而每个需求 R 将通过某个 α 策略:$\alpha\subset f$ 来满足.

对 $0'$ 与 $0''$ 优先方法来说,R_n 一般是通过 $f\upharpoonright n$ 策略来满足的;而对 $0'''$ 优先方法,则在 f 上还有一个"有穷损伤",R_n 是通过一系列 $f\upharpoonright n_1, f\upharpoonright n_2,\cdots$ 来满足. 在有穷损伤情况下,$f=\lim_s\sigma^s$. 对无穷损伤方法,$f=\lim\inf_s\sigma^s$. 在前一种情况下,$f\leqslant_T 0'$,后一情况则 $f\leqslant_T 0''$,这也是 $0'$ 与 $0''$ 方法名称的由来. 树方法最早是由拉克伦(Lachlan, A. H.)在用 $0'''$ 优先方法证明非分裂定理时使用的. 但现在已被用在各种有穷与无穷损伤方法中. 对无穷损伤方法,树形构造还能自然地解决限制函数不一定能同时降低的问题.

弹球机方法(pinball machine method) 一种重要的递归论构造方法. 一般用于无穷损伤方法. 在无穷损伤方法中,通常 $\lim_s r(e,s)\not<\infty$(其中 $r(e,x)$ 表示 R_e 在 s 步的限制函数),且只能 $\lim\inf_s r(e,s)<\infty$. 或 R_e 对优先级较低的需求会打开无穷多次"窗口". 但当多个需求共同作用时,有可能产生一个需求的限制函数减小、另一个却增加的情形,即可能产生 $\lim\inf_s(\max(r(e_0,s),r(e_1,s)))=\infty$ 的情形. 弹球机方法就是为解决此障碍设计的. 其基本思想是:当某个正需求产生候选元以后,该元并不是一步就进入要构造的集合(需要该元在某一时刻同时大于所有优先级较高的需求的限制函数),而是逐步进行. 只要该元大于某个优先级较高需求的限制函数,就可以"通过"这个需求的限制,而等待下一个需求的限制函数降低. 若该候选元通过了所有优先级较高的需求的限制,则这个元就能放入要构造的集合. 由于这种过程是逐步进行的,因此,只要求每个需求能开放无穷多次"窗口"(而不是要求它们同时打开各种"窗口"),则优先级较低的正需求就能够满足.

一个具体的弹球机模型有无穷个洞穴 $H_0,H_1,\cdots$ 与无穷个阀门 $G_0,G_1,\cdots$ 及一个收集袋 G_{-1}. 每个 H_n 相应于正需求 P_n,阀门 G_n 则相应于负需求 N_n,每个 H_n 在适当时候会弹出一个球(实际上是一个自然数),该球会尽量设法通过阀门 $G_n,G_{n-1},\cdots,G_0$,并进入 G_{-1}. 若这个候选元在阀门 G_{i+1} 中,并且在某一步大于 N_{i+1} 的限制函数,则该候选元在这一步就能通过阀门 G_{i+1},并进入阀门 G_i;若某个球最后通过了 G_0 进入 G_{-1},则就可将这个元放入要构造的集合中. 弹球机模型是勒曼(Lerman, M.)首先提出的.

可判定逻辑系统(decidable logic system) 具有能行判定算法的逻辑系统. 一个逻辑系统 S 是可判定的,是指存在一个能行的算法,使得该算法能够判定 S 中的任何公式是否可证. 若使用哥德尔编码,则可以得到更为精确的描述:若 G 是 S 中公式到自然数集的一个能行一一映射,且对 S 中可证公式的集合 P,$G(P)$ 为递归集,则称该逻辑系统可判定,否则称其不可判定. 最基本的可判定逻辑系统是古典命题演算系统. 此外,像直觉主义的命题演算系统、模态逻辑的命题演算系统(包括 T,$K4$,$S4$,$D4$,$S5$)都是可判定的. 有穷值逻辑的命题演算系统也是可判定的,但它们相应的一阶谓词演算系统都不可判定. 不过它们的一些子类仍然是可判定的. 目前已知的可判定的古典一阶谓词演算系统的子类主要有:

1. 只含一元谓词的公式类.
2. 只含等号,不包含其他谓词、函词的公式类.
3. 形为 $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_m\exists y_1\exists y_2\cdots\exists y_n A$ 的公式类.
4. 形为 $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_m\exists y_1\exists y_2\cdots\exists y_n\forall z_1\forall z_2\cdots\forall z_n A$ 的公式类.

(在子类 3 和 4 中,A 为不含量词、函数符号与自由变元的公式)

可判定数学理论(decidable mathematical theory) 具有能行判定算法的数学理论. 对于语言 $\mathscr{L}$ 上的理论 T,若存在一个能行的算法 AL,使得对 $\mathscr{L}$ 上的任何语句 σ,AL 可以判定"$\sigma\in T$"是否成立,则称理论 T 是可判定的,反之称其为不可判定的. 以上定义的更为形式化的描述,可以通过哥德尔编码来表述:若 T 是语言 $\mathscr{L}$ 的理论,G 是 $\mathscr{L}$ 的语句集到一个递归集 S 的(直观意义下的)能行一一映射. 且 $G(T)$ 为递归集,则称理论 T 是可判定的,否则称其为不可判定的. 目前已知的可判定数学理论主要有:

1. $\mathrm{Th}(\langle\omega,\leqslant\rangle)$($\omega$ 为自然数集).

2. Th($\langle Q,\leqslant\rangle$)($Q$ 为有理数集).
3. Th($\langle \omega,+\rangle$).
4. Th($\langle z,+\rangle$)(z 为整数集).
5. 代数封闭域的理论.
6. 实闭域的理论.
7. 阿贝尔群的理论.
8. 有序阿贝尔群的理论.
9. 布尔代数的理论.
10. 自由群的理论.
11. 欧氏几何的理论.
12. 双曲几何的理论.
13. p 进位域的理论.
14. 有限域的理论.
15. 线性序集的理论.

量词消去方法(method of elimination of quantifiers) 研究判定问题的一种方法. 一般用它来证明一些数学理论的可判定性,也是证明数学理论可判定性的最早的方法. 量词消去法的基本思想是:对某个语言 $\mathscr{L}$ 的一阶数学理论 T,若对 $\mathscr{L}$ 的任何无量词公式都可以能行地判定其是否在 T 中,并且任何 $\mathscr{L}$ 的公式都可以能行地化为一个(在理论 T 之下)等价的无量词公式,则理论 T 是可判定的. 由于前一条件通常可以满足,因此,关键往往是证明后一条件成立. 在实际证明中,一般是证明一个形如 $\exists xM(x)$ 的公式可以等价于 $\mathscr{L}$ 中原子公式的某个布尔组合. 量词消去方法是由挪威数学家斯科朗(Skolem, A. T.)创造,并由波兰学者塔尔斯基(Tarski, A.)发展的. 该方法已被成功地用来解决许多数学理论的判定问题. 其中最强的结果属于塔尔斯基,他证明了实闭域理论是可判定的.

模型论方法(model theoretic method) 研究判定问题的一种方法. 用模型论方法的证明,一般是基于如下事实:若理论 T 有一个递归可枚举的公理集,并且 T 是完备的,则理论 T 是可判定的. 而理论 T 的完备性,很多是通过模型论方法证明的. 例如,许多证明都用到了以下定理:若理论 T 没有有穷模型,并且存在某个无穷基数 α,使 T 为 α 范畴的(即 T 的任何两个基数为 α 的模型是同构的),则 T 为完备理论. 此外,通过适当的改进,上述方法还可以应用到一些非完备理论上.

解释方法(interpretation method) 研究判定问题的一种方法. 该方法基于如下原理:对语言 $\mathscr{L}$ 的理论 T,若有一语言 $\mathscr{L}'$ 的理论 T' 是可判定的,并且存在一个从 $\mathscr{L}$ 的语句集到 $\mathscr{L}'$ 的语句集的能行映射 t,使得对 $\mathscr{L}$ 的任一语句 σ,$\sigma\in T$,当且仅当 $t(\sigma)\in T'$,则 T 也是可判定的. 若理论 T 是不可判定的,并且 T 可以解释到 T' 中,则 T' 也一定是不可判定的. 解释方法经过适当修改,已成为证明某些数学理论不可判定性的有力工具.

不可判定的递归论问题(undecidable problems in recursion theory) 已被证明不具有可判定性的一类递归论问题. 递归论本身的大部分问题都是不可判定的. 其中最基本的问题是停机问题(参见“停机问题”). 除此之外,根据瑞斯(Rice, H. G.)定理,任何非平凡(即不等于 $\varnothing$,ω)的下标集 A(即存在部分可计算函数的类 $\mathscr{A}$,使 $A=\{e:\varphi_e\in\mathscr{A}\}$)都是非递归的,因此,大部分涉及下标的递归论问题都是不可判定的. 常见的有:

判定 φ_x 与 φ_y 是否相等?
判定 W_x 是否有穷?
判定 W_x 是否为递归集?
判定 W_x 是否为空集?
判定 φ_x 是否为全函数?

半图埃系统的不可判定性(undecidability of semi-Thue system) 半图埃系统字问题的不可判定特性. 半图埃系统的判定问题是指:是否存在一个能行的算法,使得对任何半图埃系统 S 及 S 的任意两个字 W_1,W_2,该算法可以判定

$$W_1 \overset{S}{\Rightarrow} W_2$$

是否成立. 由于这个问题是对所有的半图埃系统而言的,因此也称为一般半图埃系统的字问题. 事实上,可以证明,对于任何图灵机,可以构造一个半图埃系统来模拟图灵机的计算. 因此,可以把停机问题对应到一个半图埃系统的字问题. 故由停机问题的不可判定性可以知道(一般的),半图埃系统的字问题是不可判定的. 特别地,对某个具体的半图埃系统,也有相应的特殊半图埃系统的字问题,它们的判定性依赖于所给的半图埃系统. 但确实存在半图埃系统,使该系统相应的字问题是不可判定的.

图埃系统的不可判定性(undecidability of Thue system) 图埃系统字问题的不可判定特性. 图埃系统的判定问题是指:是否存在一个能行的算法,使得对任何图埃系统 S 及 S 的任意两个字 W_1,W_2,该算法可以判定

$$W_1 \Rightarrow^* W_2$$

是否成立. 由于这个问题是对所有的图埃系统而言的,因此也称为一般图埃系统的字问题. 事实上,可以证明,存在一个具体的图埃系统,它的字表包含两个字母,它是不可判定的. 因此一般图埃系统的字问题是不可判定的. 特别地,对某个具体的图埃系统,也有相应的特殊图埃系统的字问题,它们是否可判定,依赖于所给的图埃系统. 由上面的讨论,确实存在具有不可解的字问题的图埃系统.

半群的字问题(word problem for semigroups) 历史上最先被证明不可判定性的一个问题. 所有有

限半群和许多可数半群，可以由有穷个产生元及这些产生元组成的有穷串（称为字）上的有穷个等价关系（称为定义关系）产生. 例如，半群$\langle N,+\rangle$可以由一个产生元产生（没有定义关系），而$\langle n,+_n\rangle$（$+_n$表示模 n 加法）则可以由一个产生元 g 使定义关系 $g^n\sim\Lambda$ 产生（Λ表示空串，g^i 表示 $i(i<n)$）. 所谓半群的字问题是指：是否存在能行的算法，使得对任意由有穷个产生元和有穷个定义关系生成的半群，及由这些产生元组成的两个字 W_1,W_2，该算法可以判定 W_1 与 W_2 在半群中是否表示同一个元.

由于以上问题是对任意半群而言的，因此称为一般的半群的字问题. 对于一个特殊的半群，也有其特殊的半群的字问题. 波兰-美国数理逻辑学家波斯特（Post，E. L.）和俄国数学家马尔可夫（Марков，A. A.）证明了一般的半群的字问题是不可解的，并且存在由有穷个产生元和有穷个定义关系产生的半群，其对应的特殊的半群的字问题是不可解的. 首先考虑半群的字问题是挪威数学家图埃（Thue，A.）. 它是一个在形式上与逻辑没有联系的问题.

群的字问题（word problem for group） 一个不可判定性问题. 所有有限群和一些可数无穷群，可以由有穷个产生元及这些产生元组成的有穷串（称为字）上的有穷个等价关系（称为定义关系）表示. 例如半群$\langle z,0,+\rangle$（z 为整数集）可以由两个产生元$\{p,n\}$与等价关系$\{pn\sim\Lambda,np\sim\Lambda\}$表示，$p^i$ 表示 i，n^i 表示$-i$，Λ为空串，表示 0. 所谓群的字问题是指：是否存在能行的算法，使得对任意的可以由有穷个产生元和有穷个定义关系生成的群，及由这些产生元组成的两个字 W_1,W_2，该算法可以判定 W_1 与 W_2 在群中是否表示同一个元.

由于以上问题是对任意（可有限表示的）群而言的，因此称为一般群的字问题. 对于一个具体的群，也有其对应的特殊的群的字问题. 相对半群的字问题来说，群的字问题的解决要困难得多. 解决这一问题的是诺维科夫（Novikoff，P. S.）和美国学者布恩（Boone，W. W.），他们证明了一般群的字问题是不可解的，并且证明了存在有穷个产生元和有穷个定义关系产生的群，其对应的字问题是不可解的.

希尔伯特第十问题（Hilbert's tenth problem） 关于整系数多项式是否存在整数解的难题. 1900年，德国数学家希尔伯特（Hilbert，D.）在巴黎第二届国际数学家大会上作的题为《数学问题》的著名讲演中，提出 23 个问题作为对未来数学家的挑战，其中的第 10 个问题是：寻找一个算法，使得对任意的整系数多项式 P，该算法可以判定等式 $P=0$ 是否有整数解. 经过长期研究，1970 年，马季亚谢维奇（Matijacevic，Y.）在普特南（Putnam，H.）、美国女数学家鲁宾孙（Robinson，J. B.）和美国学者戴维斯（Davis，M. D.）等人工作的基础上否定地解决了这一问题，即证明了该算法是不存在的. 具体地，他们证明了一个谓词是递归可枚举的，当且仅当该谓词是丢番图谓词. 由于存在非递归的递归可枚举谓词，因此可知希尔伯特第十问题是不可解的.

波斯特对应问题（Post correspondence problem） 一种不可判定性问题. 一个波斯特对应系统是由一个字母表 A 和 A 上字的序偶$\langle h_i,k_i\rangle(i=1,2,\cdots,m)$的有穷集合组成的系统. A 上的一个字 u 称为该系统的一个解，是指存在 $i_1,i_2,\cdots,i_n,1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant m$，使得 $u=h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n}=k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_n}$.

波斯特对应问题是指：是否存在算法，可以对任意的波斯特对应系统判断它是否有解. 通过半图埃系统的不可判定性，可以证明波斯特对应问题是不可解的. 波斯特对应问题是波兰-美国数理逻辑学家波斯特（Post，E. L.）于 1946 年提出的一个判定问题，它的重要性在于利用它可以证明许多其他问题的不可判定性.

不可判定逻辑系统（undecidable logic system） 不具有能行判定算法的逻辑系统. 一个逻辑系统 S 是不可判定的，是指不存在一个能行的算法，使得该算法能够判定 S 中的任何公式是否可证. 美国数学家、逻辑学家丘奇（Church，A.）和英国数学家图灵（Turing，A. M.）证明了一阶谓词演算系统是不可判定的. 此外，像直觉主义逻辑的谓词演算系统、多值逻辑与模态逻辑的谓词演算系统也都是不可判定的. 不过，一阶谓词演算系统的一些公式类却是可判定的，但大部分仍是不可判定的. 目前知道的不可判定的公式类主要有：

1. $\exists x_1\exists x_2\cdots\exists x_m\forall y_1\forall y_2\cdots\forall y_nA$ 形的公式类（A 中不含量词、自由变元与函数符号. 下同）.
2. $\exists x_1\exists x_2\exists x_3\forall y_1\forall y_2\cdots\forall y_n\exists zA$ 形的公式类.
3. $\exists x_1\exists x_2\forall y_1\forall y_2\cdots\forall y_n\exists zA$ 形的公式类.
4. $\exists x_1\exists x_2\forall y\exists z_1\exists z_2\cdots\exists z_nA$ 形的公式类.
5. $\forall x\exists y\forall z\exists u_1\exists u_2\cdots\exists u_nA$ 形的公式类.
6. $\exists x_1\exists x_2\exists x_3\forall yA$ 或$\exists x_1\exists x_2\forall y\exists zA$ 形的公式类.
7. $\exists x\forall y_1\forall y_2\exists z_1\exists z_2A$ 或$\forall x\exists y\forall z\exists u_1\exists u_2A$ 形的公式类.

不可判定数学理论（undecidable mathematical theory） 不具有能行判定算法的数学理论. 对于语言 $\mathscr{L}$ 上的理论 T，如果不存在一个能行的算法，使得对于 $\mathscr{L}$ 中的任何语句 σ，该算法可以判定“$\sigma\in T$”是否成立，则称理论 T 是不可判定的. 最早被证明为不可判定的数学理论是佩亚诺算术 PA（该问题是美国数学家、逻辑学家丘奇（Church，A.）于 1936 年证明的），实际上，PA 的任何无矛盾扩张都是不可判定的（如各种公理集合论系统就是不可判定的，

参见“算术系统的不可判定性”). 目前已知下列数学理论是不可判定的:

1. $\mathrm{Th}(\langle z,+,\cdot\rangle)$ (z 为整数集).
2. $\mathrm{Th}(\langle Q,+,\cdot\rangle)$ (Q 为有理数集).
3. 群理论.
4. 半群的理论.
5. 环的理论.
6. 域的理论.
7. 格的理论.
8. 分配格的理论.
9. 偏序理论.

正规系统的不可判定性(undecidability of normal system) 一种文法系统的不可判定特性. 所谓正规系统的判定问题是指:是否存在能行的算法,使得对任意的正规系统 S 及 S 上的两个字 W_1,W_2,该算法可以判定

$$W_1\overset{S}{\Rightarrow}W_2$$

是否成立. 正规系统的判定问题是不可解的. 由于以上问题是对所有的系统而言,故称为一般正规系统的判定问题. 对具体的正规系统,也有其对应的特殊的判定问题,后者依赖于所给的系统. 事实上,存在仅有两个字母组成的正规系统,其对应的特殊的判定问题是不可解的.

波斯特系统的不可判定性(undecidability of Post system) 一种文法系统的不可判定特性. 波斯特系统的判定问题是指:是否存在能行的算法,使得对任意波斯特系统 S 及 S 上两个字 W_1,W_2,该算法可以判定

$$W_1\overset{S}{\Rightarrow}W_2$$

是否成立. 此问题称为一般的波斯特系统的判定问题. 此问题是不可解的. 对具体的波斯特系统,也有其对应的特殊的判定问题. 事实上,存在一个波斯特系统,使得其对应的判定问题是不可解的.

算术系统的不可判定性(undecidability of arithmetic system) 佩亚诺算术系统的不可判定特性. 1936 年,美国数学家、逻辑学家丘奇(Church, A.)用哥德尔证明不完备定理的思想证明了佩亚诺算术的不可判定性. 美国学者罗塞(Rosser, J. B.)同年证明了佩亚诺算术是本质不可判定的(参见“本质不可判定性”). 由算术系统的本质不可判定性还可以得到诸如 ZF 系统等重要理论的不可判定性.

本质不可判定性(essential undecidability) 一个不可判定的数学理论. 若一个数学理论 T 是不可判定的,且其任意无矛盾扩张也是不可判定的. 则称其为本质不可判定的. 本质不可判定的概念和思想对证明许多数学理论的不可判定性有很大作用. 如果能证明某一本质不可判定理论 T' 可在理论 T 中解释,则可知理论 T 是不可判定的. 本质不可判定理论的最基本的一个例子是佩亚诺算术系统.

丢番图谓词(Diophantine predicate) 一种特殊谓词. 它是可表示为带量词的整系数多项式等于 0 的形式的谓词. 若一谓词 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可以表示成 $\exists y_1\exists y_2\cdots\exists y_m(p(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0)$ 的形式,其中 p 为整数系数多项式,则称 M 为丢番图谓词(表达式和量词的定义域为自然数). 因此,一个丢番图谓词对应于某个丢番图等式的可解性. 1970 年,马季亚谢维奇(Matijacevic, Y)证明了一谓词为部分可判定,当且仅当它为丢番图谓词. 因此存在不可判定的丢番图谓词. 这一结论证明了希尔伯特第十问题是不可解的.

计算复杂性测度(computational complexity measure) 简称复杂性测度. 对计算复杂性概念的一种定量刻画. 计算复杂性理论最关心的一个问题,是某个递归函数的计算过程或某个递归问题的判定过程到底有多复杂. 为了回答这个问题,首先必须给出度量计算(或判定)过程之复杂性的标准. 对此,有各种各样可能的选择. 例如,在某种计算模型之下所化的计算步数或者所用到的空间等. 这些都在一定程度上从某些特定的角度反映了计算(判定)过程的复杂程度. 从而可以作为其复杂性测度.

从抽象的意义上来说,某个算法 P 输入 x 后,其(收敛的)计算过程的复杂性测度可以是某个(具特定含义的)自然数,例如记为 $\Phi_p(x)$. 这样一来,对应于算法 P 的复杂性测度,实际上是一个函数 $\lambda x\Phi_p(x)$. 此函数称为 P 的复杂性函数,其定义域恰好由使 P 收敛的输入所组成. 而其取值则在自然数中. 如果假定某种算法的全体已被能行地列举出来: $P_0,P_1,P_2,\cdots$ 约定诸 P_i 是以自然数输入的. 那么其相应的复杂性测度便是一个函数列: $\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\cdots$ 其中 $\Phi_i(n)$ 恰在 $P_i(n)$ 收敛时有定义,而其值是算法 P_i 在输入 n 后的计算复杂性度量(参见“布鲁姆测度”). $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in w}$ 便是一种计算复杂性测度. 其中的每个 Φ_i 都称为复杂性函数. 若 Φ 的定义依赖于所给的计算模型(如 $\Phi_i(n)$ 定义为计算步数或使用空间等),则称 Φ 为面向模型的复杂性测度. 否则便称为与模型无关的.

确定型时间复杂性测度(deterministic time complexity measure) 一种复杂性测度. 它是以计算步数为度量的复杂性测度. 设 M 为(确定型)算法(计算模型). 若字 w 输入 M 后在 n 步收敛(停机). 则称 n 为 M 输入 W 时的计算步数或计算长度. 若 M 在输入 W 后不收敛,则其计算时间无定义(或称无穷大). 若以 $\Phi_M(\omega)$ 表示 M 在输入 ω 时的计算时间,并作为 M 的复杂性测度. 则 Φ_M 称为 M 的时间复杂性测度. 一般地,若把某种算法的全体枚举出

来：$M_0, M_1, M_2, \cdots$ 并以 Φ_i 表示 Φ_{M_i} 作为 M_i 的时间复杂性测度. 则 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$ 便是关于这种算法的时间复杂性测度. 时间复杂性测度 Φ 记为 DTIME. 设 Φ_M 为算法 M 的时间复杂性测度. 如令 $\Phi'_M(n)=\max\{\Phi_M(\omega)\,|\,W$ 长度为 $n\}$. 则称 Φ'_M 为 M 运行时间(函数)或时间复杂性函数.

运行时间(running time)　见"确定型时间复杂性测度".

实时计算(realtime computation)　一种时间复杂性较低的计算. 设 Φ_M 为算法 M 的时间复杂性函数. 若对任何 $n\in\omega$, 有 $\Phi_M(n)\leqslant n$, 则称 M 为具有实时计算的或者可在实时内计算的. 而依 M 所进行的计算都称为实时计算. 若某个函数 f 可由一个具有实时计算的算法来计算, 则称 f 为实时可计算函数.

实时可计算函数(realtime computable function)　见"实时计算".

确定型空间复杂性测度(deterministic space complexity measure)　一种复杂性测度. 它是以所需空间为度量的一种复杂性测度. 设 M 为(确定型)算法, 若对 M 输入字 W 后, 计算收敛, 并且在整个计算过程使用了 n 个空间单元(如纸带单元), 则称 n 为 M 在输入 W 的计算空间. 如果计算不收敛, 则其计算空间无定义. 若以 $\Phi_M(W)$ 表示 M 在输入 W 时的计算空间, 并以 Φ_M 作为 M 的复杂性测度, 则称 Φ_M 为空间复杂性测度, 若 $M_0, M_1, \cdots$ 为某种算法的枚举, 并以 Φ_i 表示 M_i 之空间复杂性测度 Φ_{M_i}, 则 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$ 称为关于这种算法的空间复杂性测度(确定型). 空间复杂性用 DSPACE 表示. 设 Φ_M 为算法 M 的空间复杂性测度, 则函数

$$\Phi'_M(n)=\max\{\Phi_M(W)\,|\,W \text{ 字长为 } n\}$$

称为 M 的工作空间(函数)或称为 M 的空间复杂性函数.

空间复杂性函数(space complexity function)　见"确定型空间复杂性测度".

非确定型时间复杂性测度(nondeterministic time complexity measure)　一种复杂性测度. 是对应于非确定型算法的以计算步数度量的复杂性测度. 非确定型时间复杂测度记为 NTIME.

非确定型空间复杂性测度(nondeterministic space complexity measure)　一种复杂性测度. 它是关于非确定型算法并以计算所需空间为度量的一种复杂性测度. 非确定型空间复杂性测度记为 NSPACE.

时间可构造函数(time constructable function)　图灵机的一种停机时间函数. 设 f 为一个递归函数, 如果存在一个图灵机 M, 使对任何字长为 n 的字 W, 当 W 输入 M 后, M 恰好在 $f(n)$ 步停机. 则称 f 为时间可构造的. 实际上, 递归函数 f 满足条件 $\forall_{a.e^n}(f(n)\geqslant(1+\varepsilon)\cdot n)$ ($\varepsilon>0$ 为某个常数). 则只要存在某个图灵机 M 和常数 c, 使 M 在任何长为 n 的字输入后都会在 $c\cdot f(n)$ 步之内停机, 那么 f 必定是时间可构造的函数. 对时间可构造的函数 f 来说, 全体以 f 为时间界函数的图灵机可以能行地枚举出来: $M_0, M_1, \cdots$ 这样, $\{L(M_i)\,|\,i\in\omega\}$ 恰好是以 f 为界函数的时间复杂性语言类(其中 $L(M_i)$ 为由 M_i 接受的语言), 即为 $\mathrm{DTIME}(f)=\{L\,|$ 存在一个图灵机 M, 以 f 为时间界函数接受 $L\}$. 这一点, 当 f 不是时间可构造函数时并不成立.

空间可构造函数(space constructable function)　图灵机的一种空间限定函数. 设 f 为一元递归函数. 如果存在一个图灵机 M, 使对 M 输入任何字 W 时, 其总停机, 且停机时纸带上恰好有 $f(|W|)$ 个单元非空(其中 $|W|$ 表示 W 之字长), 同时在整个计算过程中没有用到 $f(|W|)$ 之外的其他单元. 那么称 f 为空间可构造函数. 递归函数 f 为空间可构造的, 当且仅当存在一个图灵机 M 和常数 c, 使得 M 计算 f, 且 M 的空间复杂性函数 Φ_M 满足

$$\forall n(\Phi_M(n)\leqslant c\cdot f(n)).$$

当 f 为空间可构造函数时, 全体以 f 为空间界函数的图灵机可以能行枚举出来. 但对一般的递归函数并不成立.

界函数(bounding function)　一种特殊函数. 是时间或空间复杂性的限定函数. 设 M 为一个算法, Φ 为其一个复杂性测度. f 为一元数论函数, 若对任何字 W, 都有 $\Phi(W)\leqslant f(|W|)$, 则称 f 为 M 关于 Φ 的一个界函数. 特别地, 当 Φ 分别为时间和空间复杂性测度时, 相应地称 f 为 M 的时间界函数和空间界函数.

界函数的另一个含义是关于复杂性类的. 设 Φ 为某个复杂性测度, f 为一元数论函数. 若 $\Phi(f)$ 表示全体以 f 为 Φ 界函数的算法所接受的(计算的)语言(函数)类, 则称 f 为复杂性类 $\Phi(f)$ 的界函数, 亦称 f 为 $\Phi(f)$ 之名(参见"语言复杂性类"、"函数复杂性类").

复杂性类(complexity class)　递归论的基本概念之一. 指由一些复杂性相似的客体所组成的类. 设 Φ 为复杂性测度, f 为一元数论函数, 将全体关于 Φ 以 f 为界函数的算法所计算(接受)的函数(语言)组成的类 $\Phi(f)$, 称为以 f 为界函数(或名)的复杂性类. 这样, 依 $\Phi(f)$ 中客体的不同, 便有具体的语言复杂性类和函数复杂性类. 又依 Φ 性质的不同而有时间复杂性类和空间复杂性类之分.

函数复杂性类(complexity class of functions)　一种复杂性类. 指由一些具有"相似"复杂性的递归

函数所组成之集合. 设 f 为一个一元递归函数. $B=(\varphi,\Phi)$ 为一个布鲁姆空间(参见"布鲁姆空间"). 令

$$\Phi(f)=\{g\mid g \text{ 为递归函数 } \& \ \exists i\ (g=\varphi_i \ \& \ \forall_{a.e^x}(\Phi_i(x)\leqslant f(x)))\},$$

则称 $\Phi(f)$ 为由 f 所产生的复杂性函数类. f 称为 $\Phi(f)$ 之名或界函数. 若 F 为一个函数集合, 则 $\Phi(F)=\bigcup\{\Phi(f)\mid f\in F\}$ 为 F 的复杂性类.

语言复杂性类(complexity class of languages)　一种复杂性类. 指具有特定复杂性的语言组成之集合. 设 Σ 为有穷字母表, 所谓 Σ 上的语言, 是指由 Σ 上的字(即有穷字母串)组成之集合. 设 M 为一个算法, Φ_M 为其复杂性测度, L 为 M 所接受的语言. 若存在函数 t, 使对任何 $\sigma\in L$, 都有 $\Phi_M(\sigma)\leqslant t(|\sigma|)$, 则称 L 为 M 关于 Φ_M 以 t 为界函数而接受的语言. 并称 L 是具有复杂性 t 的语言. 所有具有复杂性 t 的语言组成之类 $\Phi(t)$ 称为 t 的语言复杂性类. 此时, t 称为 $\Phi(t)$ 之名或界函数. 若 F 为函数集合, 此 $\Phi(F)=\bigcup\{\Phi(t)\mid t\in F\}$ 称为 F 的(语言)复杂性类.

时间复杂性类(time complexity class)　一种复杂性类. 它是由(确定或非确定型)时间复杂性测度所导出的复杂性类. 设 Φ 为时间复杂性测度, f 为数论函数, 则将 $\Phi(f)=\{L\mid$存在一个关于 Φ 以 f 为界函数的算法 M 接受 $L\}$ 称为函数 f 的(关于 Φ 的)时间复杂性类, 或更明确一些, 称为时间复杂性语言类. 类似地, 可以定义时间复杂性函数类. f 称为 $\Phi(f)$ 的界函数或名. 若 F 为数论函数集, 则 F 的时间复杂性类为

$$\Phi(F)=\bigcup_{f\in F}\Phi(f).$$

习惯上, 确定型时间复杂性类用记号

$$\tau\text{-DTIME}(f) \text{ 和 } \tau\text{-DTIME}(F)$$

表示. 其中 τ 表示某种算法的类型. 例如, 对应于图灵机模型, 就有复杂性类 T-DTIME(f) 和 T-DTIME(F). 此外, 由于常见的各种模型对应的时间复杂性测度都是多项式相关的, 因此, 时间复杂性类常用图灵机模型为代表. 从而, DTIME(f) 通常都是指由图灵机模型而导出的时间复杂性类. 类似地, 对非确定型时间复杂性类也有相应的记号 τ-NTIME (f), τ-NTIME (F), NTIME (f) 和 NTIME(F).

现令 multiT 表示多带图灵机, id 表示幺函数, Lin, Pol 和 2^{Lin} 分别表示线性函数类、多项式函数类和指数函数类, 则下面为一些常见的时间复杂性类:

REALTIME＝multi$T$-DTIME(id),

LINTIME＝multi$T$-DTIME(Lin),

P＝DTIME(Pol),

DEXPTIME＝DTIME(2^{lin}),

Q＝multi$T$－NTIME(id),

NP＝NTIME(pol),

NEXPTIME＝NTIME(2^{lin}).

空间复杂性类(space complexity class)　一类复杂性类. 它是由空间复杂性测度所导出的复杂性类(参见"复杂性类"). 由于常见的各种计算模型所对应的空间复杂性测度都是线性相关的. 因此, 通常以图灵机模型为代表进行讨论. 并且以 DSPACE(f) 表示以 f 为界函数的确定型图灵机模型对应的空间复杂性类. 即 DSPACE(f)＝$\{L\mid$存在以 f 为空间界函数的确定型图灵机接受 $L\}$. 称之为 f 的空间复杂性类. 函数集 F 的空间复杂性类则为

$$\text{DSPACE}(F)=\bigcup_{f\in F}\text{DSPACE}(f).$$

当需要特别指出空间复杂性所对应的算法类型 τ 时, 用记号 τ-DSPACE(f) 和 τ-DSPACE(F) 表示. 对非确定型空间复杂性类, 也有相应的记号 NSPACE (f), NSPACE (F), τ-NSPACE (f) 和 τ-NSPACE(F). 另外, 空间复杂性函数类也可仿此定义.

以下是一些常见的空间复杂性类:

L＝DSPACE(log),

NL＝NSPACE(log),

NLINSPACE＝DSPACE(lin),

NLINSPACE＝NSPACE(lin),

PSPACE＝DSPACE(pol),

EXPSPACE＝DSACE(2^{lin}),

其中 log, lin, pol 和 2^{lin} 分别表示对数函数类、线性函数类.

相关性(relatedness)　反映复杂性测度间关系的一种性质. 设 Φ,Ψ 为两个复杂性测度, 并且 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$, $\Psi=\{\Psi_i\}_{i\in\omega}$, 于是, 若 h 为数论函数, 并且对任何 i,

$$\forall_{a.e^x}(\Phi_i(x)\leqslant h(x,\Psi_i(x)) \ \& \ \Psi_i(x)\leqslant h(x,\Phi_i(x))).$$

则称 Φ 和 Ψ 为 h 相关的测度. 若 F 为数论函数集, 并且存在 $h_1,h_2\in F$, 使

$$\forall i\forall_{a.e^x}(\Phi_i(x)\leqslant h_1(x,\Psi_i(x)) \ \& \ \Psi_i(x)\leqslant h_2(x,\Phi_i(x))).$$

则称 Φ 和 Ψ 是 F 相关的. 当 h 和 F 取一些特定的函数和函数类时, 便得到一些特殊的相关性(参见"递归相关性"、"线性相关性"、"多项式相关性").

递归相关性(recursive relatedness)　复杂性测度间的一种特殊的相关性, 设 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$, $\Psi=\{\Psi_i\}_{i\in\omega}$, 为两个复杂性测度. 若存在递归函数 h_1, h_2, 使得

$$\forall i\forall_{a.e^x}(\Phi_i(x)\leqslant h_1(x,\Psi_i(x)) \ \& \ \Psi_i(x)\leqslant h_2(x,\Phi_i(x))).$$

则称 Φ 和 Ψ 是为递归相关的. 只要令 $h(x,y)=\max$

$(h_1(x,y),h_2(x,y))$，便可将上述条件等价地改成

$$\forall i \forall_{a.e.x}(\Phi_i(x) \leqslant h(x,\Psi_i(x)) \ \& \ \Psi_i(x) \leqslant h(x,\Phi_i(x))).$$

此时的 h 称为相关函数.

相关函数(relative function)　见"递归相关性".

多项式相关性(polynomial relatedness)　复杂性测度间的一种特殊相关性. 它是两种复杂测度在多项式意义下的等价性. 设 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$, $\Psi=\{\Psi_i\}_{i\in\omega}$ 为两个复杂性测度. 对任何一元函数 t，令 $\mathrm{Pol}(t)=\{t^k|k\in\omega\}$. 若对任何满足 $\forall x\in\omega(x\leqslant t(x))$ 的函数 t，都有 $\Phi(\mathrm{Pol}(t))=\Psi(\mathrm{Pol}(t))$，则称 Φ 和 Ψ 是多项式相关的. 若存在多项式 p，使 Φ 与 Ψ 是 p 相关的(参见"相关性")，则 Φ 与 Ψ 为多项式相关的. 绝大多数的时间复杂性测度都是多项式相关的.

线性相关性(linear relatedness)　复杂性测度间的一种特殊相关性. 它是两个复杂性测度在线性意义下的等价性. 设 Φ,Ψ 为两个复杂性测度. t 为一元数论函数，令 $\mathrm{Lin}(t)=\{c\cdot t|c\in\omega\}$. 若对满足 $\forall x\in\omega(t(x)\geqslant x)$ 的任何 t，都有 $\Phi\mathrm{Lin}(t)=\Psi\mathrm{Lin}(t)$，则称 Φ 与 Ψ 为线性相关的(参见"复杂性类"). 绝大多数的空间复杂性都是线性相关的.

一致测度(conform measure)　反映计算复杂性质的一种测度. 设 Φ 为复杂性测度，若以任何递归函数为界函数的复杂性函数类所对应的下标集都是 1-等价的，即对任何递归函数 t_1,t_2，均有

$$\{x|\varphi_x\in\Phi(t_1)\}\equiv_1\{x|\varphi_x\in\Phi(t_2)\},$$

则称 Φ 为一致测度. 并非任何复杂性测度都是一致测度，但是具有有穷不变性的测度则都是一致的，反之不然. 此外，已知 Φ 的所有复杂性类都是 re 的，并不能保证 Φ 一定是一致的. 目前尚不知道 Φ 的一致性能否推得 Φ 的任何复杂性类都是 re 的.

有穷不变性测度(finite invariance measure)反映计算复杂性性质的一种测度. 设 Φ 为一个复杂性测度，如果任何递归函数 t，t 的复杂性类$\Phi(t)$在有穷变换下不变，即只要 f 与 g 只有有限处的值可能不同，都有 $f\in\Phi(t)\leftrightarrow g\in\Phi(t)$. 那么称 Φ 为有穷不变性测度. 并非任何测度都是具有有穷不变性的. 例如，对任何布鲁姆测度 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$，如令

$$\Phi'_i(x)=\begin{cases}0 & (i=i_0),\\ \Phi_i(x)+x & (\text{其他}),\end{cases}$$

其中 i_0 为某个递归函数的下标，则 $\Phi=\{\Phi'_i\}_{i\in\omega}$仍是一个布鲁姆测度，但它肯定不是有穷不变的(因为只要 φ_{i_0}的一处变化，就会引起其复杂性的无穷变化). 若 Φ 是具有有穷不变性的，则 Φ 一定是一致的，并且其复杂性类都是 re 的，反之不然. 通常所见的各种自然的复杂性测度都是具有有穷不变性的. 上述例子表明布鲁姆公理推不出有穷不变性，反映了布鲁姆公理的不足之处.

复杂性类的递归可枚举性(recursive enumerability of complexity class)　反映复杂性类的能行性的一个性质. 设 $\Phi(f)$为一个复杂性类，若存在一个递归函数 g，使 $\Phi(f)=\{\varphi_{g(i)}|i\in\omega\}$，则称$\Phi(f)$为递归可枚举的. 若 $\Phi(f)$为语言复杂性类，则其 re 性即指其在能行编码之下的 re 性. 并非任何复杂性类都是 re 的，刘易斯(Lewis, F. D.)于 1971 年首先证明了存在非 re 的复杂性类，哈特曼尼斯(Hartmanis, J.)于 1973 年进一步证明了每个布鲁姆测度 Φ 都有一个子测度 Ψ，使得 Ψ 有非 re 的复杂性类. 对于非 re 的复杂性类，无法有一个能行的方法列举出其全体元素. 这是一种病态性质. 但是，若复杂性测度 Φ 是有穷不变的，则关于 Φ 的任何复杂性类都是 re 的(参见"有穷不变性测度").

复杂性测度的复合性(compositionality of complexity measure)　计算复杂性测度的一种性质. 一个复杂性测度为复合性，是指任何两个递归函数的复合函数之复杂性，可由该两函数之复杂性经过某种能行运算而得. 具体地，设(φ,Φ)为一个布鲁姆空间，h 为递归函数，并满足$\varphi_{h(i,j)}(x)=\varphi_i(\varphi_j(x))$，$s$ 为某个二元递归函数，若对任何 x 均有

$$\Phi_{h(i,j)}(x)=s(\Phi_i(\varphi_j(x)),\Phi_j(x)),$$

则称 Φ 为具有(h,s)复合性的测度. 若 Φ 是具有(h,s)复合性的测度，则任何两个函数 φ_i 和 φ_j 之复合函数 $\varphi_{h(i,j)}(x)=\varphi_i(\varphi_j(x))$的复杂性函数 $\Phi_{h(i,j)}$，可由 Φ_j 及 Φ_i 在 φ_j 相应处的值经 s 作用而得. 里希克(Lischke, G.)于 1975 年首先证明了有些布鲁姆测度并不具有任何(h,s)复合性. 而且，即使某个布鲁姆测度具有(h,s)复合性. 其子测度也未必具有这种性质. 另外，复合性不能推出一致性或复杂性类的 re 性，有穷不变性也不可推出复合性.

复杂性测度的平行性(parallelity of complexity measure)　计算复杂性测度的一种性质. 设(φ,Φ)为布鲁姆空间，如果存在二元递归函数 h，使得对任何 i,j

$$\varphi_{h(i,j)}(x)=\begin{cases}\varphi_i(x) & (\Phi_i(x)\leqslant\Phi_j(x)),\\ \varphi_j(x) & (\text{其他}),\end{cases}$$

并且 $\Phi_{h(i,j)}(x)=\min\{\Phi_i(x),\Phi_j(x)\}$. 则称 Φ 是平行的. 若 Φ 为平行的，则可以对任何两个算法 M_i,M_j. 对任何输入 x，可以能行地从此两个算法中挑选出复杂性较低的那个进行计算. 而且这样做并不增加整个计算的复杂性. 确定型图灵机的空间复杂性测度和确定型多带图灵机的时间复杂性测度都是平行的. 但确定型(单带)图灵机的时间复杂性测度恰是非平行的.

复杂性测度的合适性(properness of complexity measure) 计算复杂性测度的一种性质. 设 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$为一个布鲁姆测度. 如果$\forall i\in\omega(\Phi_i$ 为递归函数$\to\Phi_i\in\Phi(\Phi_i))$. 即只要复杂性函数 Φ_i 本身是递归的,那么计算它自己的复杂性将不会超过 Φ_i 本身. 则称 Φ 为合适的. 直观上,若 Φ 为合适的,则为了确定一个算法 M_i 的复杂性 Φ_i,这个过程的复杂性将不会超过执行这个算法 M_i 所需的复杂性 Φ_i. 因此,合适性是对复杂性测度的一种自然要求. 但是,并非每个复杂性测度都具有合适性. 此外,并行性与合适性是相互独立的.

复杂性测度的稠密性(density of complexity measure) 计算复杂性测度的一种性质. 设 Φ 为一个布鲁姆测度,F 为一元递归函数集合. 若对任何 s,$t\in F$,只要 $\Phi(s)\subset\Phi(t)$,总存在 $u\in F$,使$\Phi(s)\subset\Phi(u)\subset\Phi(t)$. 则称 Φ 在 F 上是稠密的. T-DSPACE 在全体一元递归函数集上是稠密的.

最优测度(optimal measure) 计算复杂性测度的一种性质. 设 t,f 为两个一元递归函数. (φ,Φ)为布鲁姆空间,若存在 i,使 $\varphi_i=f\ \&\ \Phi_i=t$(即 t 为 f 的计步函数),并且对任何 j,只要 $\varphi_j=f$,皆有

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\Phi_j(n)+1}{t(n)+1}\right)>0 \quad (\text{记为 } t\leq\Phi_j).$$

则称 t 为 f 的最优计步函数. 若测度 Φ 中每个全的 Φ_i 都有最优计步函数,则称之为最优测度. 并非任何测度都是最优的,但是确定型图灵机空间测度是最优测度.

公理复杂性理论(axiomatic complexity theory) 亦称抽象复杂性理论或布鲁姆复杂性理论. 用公理化方法讨论计算复杂性的一种理论. 这种讨论最初是由布鲁姆所创立的,它们只涉及复杂性测度的共性而与任何具体的计算模型无关. 设 $\mathscr{B}=(\varphi,\Phi)$为一个布鲁姆空间,即 φ 为全体一元部分递归函数的能行枚举,Φ 为其相应的布鲁姆测度. 公理复杂性理论就是讨论这种布鲁姆空间的性质,主要是布鲁姆测度的基本性质. 由于各种各样具体的复杂性测度实际上都是布鲁姆测度,因而,公理复杂性理论的结果对它们也有效. 归结起来,公理复杂性理论的主要结果有下列几条:

1. 压缩定理. 对任何一个以复杂性函数为界函数的复杂性类,都可能行地找到其真扩张和复杂性类及其界函数.

2. 间隙定理. 对任何递归函数 $h(h(x)\geqslant x)$,存在递增的递归函数 t,使得 $\Phi(t)=\Phi(h\circ t)$,从而没有哪个算法的复杂性可介于 t 和 $h\circ t$ 之间,即 t 和 $h\circ t$ 之间形成一个间隙.

3. 加速定理. 有些递归函数不存在最好的算法(从而是可加速的).

4. 命名定理. 任何复杂性类都可用某个纯正函数作为其名(即界函数).

5. 并定理. 如果$\{f_i\}_{i\in\omega}$为一元递归函数的一个递归枚举,并且$\forall i\forall x(f_i(x)\leqslant f_{i+1}(x))$. 则以诸 f_i 为名的复杂性类之并仍为一个复杂性类.

公理复杂性理论还有一些非常有趣的结论:

6. 全体布鲁姆测度在下列运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 之下形成非有补的格:

$$\Phi_i\wedge\Phi_j(x)=\min\{\Phi_i(x),\Phi_j(x)\},$$
$$\Phi_i\vee\Phi_j(x)=\max\{\Phi_i(x),\Phi_j(x)\}.$$

7. 对任何布鲁姆测度 Φ,不存在递归函数 g,使 $\Phi_i(x)=g(i,x)$,也不存在递归函数 f,使

$$\forall i\forall x\in\operatorname{dom}(\varphi_i)(\Phi_i(x)\leqslant f(x)).$$

8. 任何两个布鲁姆测度都是递归相关的. 即对布鲁姆测度 Φ 和 $\hat{\Phi}$,存在二元递归的增函数 h,使对任何 i 和几乎所有 x,有

$$\Phi_i(x)\leqslant h(x,\hat{\Phi}(x))\ \&\ \hat{\Phi}_i(x)\leqslant h(x,\Phi_i(x)).$$

9. 存在任意复杂的递归函数,即对任何递归函数 f,存在递归函数 h,使对任何 i,如果 $h=\varphi_i$,则

$$\forall_{a.e^x}(\Phi_i(x)\geqslant f(x)).$$

抽象复杂性理论(abstract complexity theory) 即“公理复杂性理论”.

布鲁姆复杂性理论(Blum complexity theory) 即“公理复杂性理论”. 由于布鲁姆(Blum, M.)最初创立并加以系统研究而得名.

布鲁姆公理(Blum axioms) 用以刻画计算复杂性测度的两条公理. 它是由布鲁姆(Blum, M.)于 1967 年引进的. 设$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$为全体一元部分递归函数的能行枚举. $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$为部分递归函数的一个序列. 下列两条便称为布鲁姆公理:

$B1$. 对任何 i,$\operatorname{dom}(\varphi_i)=\operatorname{dom}(\Phi_i)$,

$B2$. 如果以 $M(i,x,y)$表示谓词 $\Phi_i(x)=y$,则 $M(i,x,y)$为一个递归谓词(即可判定的).

满足布鲁姆公理的 Φ,称为布鲁姆测度或复杂性测度. 由于 Φ_i 是用以表示对应于 φ_i 的算法的计算复杂性,因此,Φ_i 称为(φ_i 的)计步函数. 这样,Φ_i 当然应与 φ_i 具有相同的定义域(即 $B1$). 而公理 $B2$ 则保证了可以能行地确定一个特定的计算能否在某个能行的界内收敛. 而且,$B2$ 中关于“$\Phi_i(x)=y$”的递归性条件也可以等价地用“$\Phi_i(x)\leqslant y$”或“$\Phi_i(x)<y$”之递归性来替代.

计步函数(step-counting function) 见“布鲁姆公理”、“布鲁姆测度”和“复杂性函数”.

布鲁姆测度(Blum measure) 亦称复杂性测度或抽象复杂性测度. 依布鲁姆公理确定的一种抽象复杂性测度. 设 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$为一元部分递归函数列. 若 Φ 满足布鲁姆公理,则称 Φ 为一个布鲁姆测

度.其中的每个函数 Φ_i 称为计步函数，或复杂性函数，或价值函数.布鲁姆测度是从各种具体的计算复杂性测度中抽象出来的一个概念.例如，若令 $\Phi_i(n)$ 和 $\Phi'_i(n)$ 分别表示图灵机 M_i 在输入 n 后的计算步数及所用到的单元数，则它们都是布鲁姆测度.实际上，布鲁姆测度反映了各种具体的复杂性测度的最基本的共性.值得指出的是，第一，布鲁姆的两条公理是互相独立的，第二，布鲁姆测度与任何一种具体的计算模型无关；第三，由于布鲁姆测度有极大的一般性，可能会带来一些不自然现象，即有些布鲁姆测度看起来不像"复杂性测度".例如 Φ 为一个布鲁姆测度，i_0 为某个递归函数的固定下标，令

$$\hat{\Phi}_i(x)=\begin{cases}\Phi_i(x) & (i\neq i_0),\\ 0 & (i=i_0).\end{cases}$$

则 $\hat{\Phi}=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$ 也是一个布鲁姆测度.但对这种测度 $\hat{\Phi}$ 而言，不论递归函数 φ_{i_0} 有多复杂，其对应的算法 M_{i_0} 的计算复杂性处处为零，而这种操作是不合理的.

复杂性测度(complexity measure)　即"布鲁姆测度".

复杂性函数(complexity function)　亦称计步函数或价值函数.见"布鲁姆测度".可以用它反映某个部分递归函数计算的复杂性.

价值函数(cost function)　见"复杂性函数".

布鲁姆空间(Blum space)　公理复杂性理论研究的对象.它最初是由布鲁姆(Blum，M.)于1967年引进的.设 φ 为全体一元部分递归函数的一种能行枚举，即 $\varphi=\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$，而 $\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$ 为相应的布鲁姆测度.此时，Φ_i 便作为刻画计算 φ_i 算法的计算复杂性的一种度量.要讨论计算复杂性，就要讨论这种 φ 及 Φ.因此，(φ,Φ) 便是计算复杂性理论研究的对象，称之为布鲁姆空间.

相关性定理(relatedness theorem)　反映复杂性测度间关系的一个重要结论.具体地说，任何两个布鲁姆测度 Φ 和 Ψ 都是递归相关的.也即存在递归二元函数 h(并且 h 关于第二变元是递增的)，使得

$$\forall i\forall_{a.e}x(\Phi_i(x)\leqslant h(x,\Psi_i(x))\ \&\ \Psi_i(x)\leqslant h(x,\Phi_i(x))).$$

在递归因子之下，所有的计算复杂性测度都是"渐近地相同的".换言之，如果一个函数对某个计算测度来说可以"容易地"计算的，那么在某个递归因子之下，它在所有的测度之下都可认为是可"容易地"计算的.

度量集(measured set)　一种特殊的一元部分递归函数集.设 Γ 为一元部分递归函数集，若存在递归函数 f，使得：

1. $\Gamma=\{\varphi_{f(i)}\mid i\in\omega\}$，即 Γ 为 re 集.

2. $\varphi_{f(i)}(x)=y$ 是一个三元可判定谓词(即三元递归谓词).

则称 Γ 为一个度量集.例如 Φ 为一个布鲁姆测度，则全体测度函数之集 $\{\Phi_i\mid i\in\omega\}$ 便是一个度量集.其实，度量集名称正是由此而得.度量集与纯正函数之间有下列关系：若 Γ 为度量集，则必存在递归函数 h，使 Γ 中所有函数都是 h 纯正的.

压缩定理(compression theorem)　关于复杂性类的一个重要定理.最初是由布鲁姆(Blum，M.)于1967年证明的：设 $\Gamma=\{\gamma_i\}_{i\in\omega}$ 为一元部分递归函数的 re 集合(即存在递归函数 g，使 $\forall i(\gamma_i=\varphi_{g(i)})$)，并且 $\gamma_i(n)=m$ 是一个递归的三元谓词(这种 Γ 称为度量集).(φ,Φ) 为一个布鲁姆空间.则可以能行地找到二元递归函数 h，使对任何 $\gamma_i\in\Gamma$，都有

$$\Phi(\gamma_i)\subset\Phi(\lambda xh(x,\gamma_i(x))).$$

而且还可以能行地找到一元递归函数 k，使对任何 $\gamma_i\in\Gamma$，有：

1. 如果 $\varphi_j=\varphi_{k(i)}$，则 $\forall_{a.e}x(\Phi_j(x)>\gamma_i(x))$，

2. $\forall_{a.e}x(\Phi_{k(i)}(x)\leqslant h(x,\gamma_i(x)))$，从而，

$$\varphi_{k(i)}\in\Phi(\lambda xh(x,\gamma_i(x)))\backslash\Phi(\gamma_i(x)).$$

由压缩定理可知，虽然对全体递归函数来说，不存在一个一致的方法，对每一个递归函数的复杂性类都找到其真扩张(参见"间隙定理")，但对一些特殊的函数类(即"度量集")而言，这种一致的方法是存在的.即对度量集 Γ 中每一个函数 γ_i，可以(依 h)一致地找到 γ_i 的复杂性类 $\Phi(\gamma_i)$ 之真扩张 $\Phi(\lambda xhz(x,\gamma_i(x)))$.而且还可一致能行地找到这种真包含关系的证据函数

$$\varphi_{k(i)}\in\Phi(\lambda xh(x,\gamma_i(x)))\backslash\Phi(\gamma_i).$$

间隙定理(gap theorem)　反映复杂性类基本性质的一个重要定理.它最初是由恰克坦勃罗特(Trakhtenbrot，B. A.)1967年及布罗丁(Borodin，A. B.)1969年各自独立地证明的.其表述如下：设 f 为一元递归函数，并满足

$$\forall n\in\omega(n\leqslant f(n)),$$

则存在一个递增的一元递归函数 t，使 $\Phi(t)=\Phi(f\circ t)$.即不存在递归函数 φ_i，使其复杂性函数 Φ_i 满足条件

$$\exists^{\infty}x(t(x)<\Phi_i(x)\leqslant f(t(x))).$$

由间隙定理可知，不存在一个递归函数 f，使得对任何递归函数 t，都有 $\Phi(t)\subset\Phi(f\circ t)$(参见"压缩定理").从而不存在一致的方法找到每个递归函数之复杂性类的真扩张.另一方面，对满足 $\forall n\in\omega(f(n)\geqslant n)$ 之 f，总有 $t(x)\leqslant f(t(x))$.故 $\Phi(t)\subseteq\Phi(f\circ t)$.但间隙定理断言，不论 f 之增长有多快，也不能保证上述关系总是严格的包含关系.即总存在递归函数 t，使 $\Phi(t)=\Phi(f\circ t)$.也就是说，不存在

任何算法 M，使 M 的复杂性严格介于 t 和 $f\circ t$ 之间. 在这个意义上说，在 t 和 $f\circ t$ 之间的区间上形成了一个计算复杂性的“间隙”，这正是间隙定理名称之由来. 也说明，相对于递归函数来说，测度函数要“稀少”一些.

纯正函数(honest function) 一种特殊的部分递归函数. 这种函数的值可以“反映”其复杂性. 具体地说，设 f 为一元部分递归函数，g 为二元递归函数，Φ 是一个布鲁姆测度，若存在 f 的一个下标 i，使得

$$\forall_{a.e^x}(\Phi_i(x))\leqslant g(x,f(x)).$$

则称 f 关于 Φ 是 g 纯正的函数. 如果 f 是 g 纯正的，则一定存在一个计算 f 的算法 M，使 M 的复杂性可被 f 之值(借助于 g)而控制. 对任何递归函数 g，全体 g 纯正函数组成一个 re 的函数集.

命名定理(naming theorem) 亦称纯正性定理. 反映复杂性类基本性质的一个重要定理. 是麦克莱特(Mccreight, E. M.)和迈耶(Meyer, A.)于 1969 年证明的定理：设 (φ,Φ) 为一个布鲁姆空间，则存在一个递归函数 g 满足下列条件：

1. $\{\varphi_{g(i)}:i\in\omega\}$ 为一个度量集.

2. $\forall i(\varphi_i)$ 为一元递归函数，则 $\varphi_{g(i)}$ 也是一元递归函数，且 $\Phi(\varphi_i)=\Phi(\varphi_{g(i)})$.

上述结果表明，任何复杂性类 $\Phi(\varphi_i)$ 都可以在某个确定的度量集中找到某名(即 $\varphi_{g(i)}$). 这便是命名定理名称的由来. 此外，由于度量集总是某个 h 纯正函数类的子集，所以，上述结论可以推得：存在一个函数 h，使任何复杂性类都可由某个 h 纯正函数命名. 纯正性定理之名称因此而得.

纯正性定理(honesty theory) 即“命名定理”.

可加速函数(speedable function) 一种不存在最佳算法的可计算函数. 设 g 为一个二元递归函数，且关于其第二变元是严格递增的，$\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$ 为复杂性测度，f 为递归函数，如果

$$\forall i(f=\Phi_i\rightarrow$$

$$\exists j(f=\Phi\ \&\ \forall\ a.e.x(g(x,\Phi_j(x))<\Phi_i(x)))).$$

则称 f 有一个(关于 Φ 的)g 加速. 称函数 f 称为(g)可加速的. 不是可加速的函数称为不可加速的. 注意到 g 关于第二变元之严格递增条件保证了 $g(x,y)>y$. 因此，当 f 是 g 可加速的函数时，对任何一个计算 f 的算法 M_i(即 $f=\varphi_i$ 时)，总存在另一个更好的算法 M_j 来计算 f，而且 M_j 的复杂性 Φ_j 比之 M_i 的复杂性 Φ_i 至少有一个 g 改进量. 如当 $g(x,y)=(x+1)\cdot y$ 时，改进后的算法复杂性 $\Phi_j(x)$ 小于 $\Phi_i(x)/(x+1)$，即

$$\forall a.e.x(\Phi_j(x)<\Phi_i(x)/(x+1)).$$

值得指出的是，一个函数是否为可加速的，与具体的测度相关.

能行可加速函数(effectively speedable function) 一种可加速函数. 指可能行地找到越来越好的算法的可计算函数. 设 g 为二元递归函数，$\Phi=\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$ 为布鲁姆测度. 若对部分递归函数 f 的任何下标 i，都可能行地找到 f 的另一个下标 j，使得

$$\forall a.e.x(g(x,\Phi_j(x))<\Phi_i(x)).$$

则称 f 是能行 g 加速的，或是能行可加速的(参见“可加速函数”). 并非所有 g 可加速函数都是能行可加速的. 实际上，一个部分递归函数 f 为能行可加速的，当且仅当其图

$$G(f)=\{\langle x,f(x)\rangle\mid x\in\omega\}$$

是一个次创造集. 即存在递归函数 h，使得

$$\forall i(W_i\cap G(f)=\varnothing\rightarrow G(f)\subset W_{h(i)}\subseteq\overline{W}_i).$$

由于次创造集一定是 T 完全的，从而一定是非递归的，故若 f 为递归函数，或是某个测度函数时，f 一定不是能行可加速的，但它们却可能是 g 可加速的.

加速定理(speed-up theorem) 反映复杂性测度重要性质的一个基本定理. 它是布鲁姆公理复杂性理论中最主要的成果之一，是布鲁姆(Blum, M.)于 1967 年最早证明的. 它指出了有些递归函数不存在最好的算法，即是可加速的. 具体地说，设 (φ,Φ) 为布鲁姆空间，g 为关于第二变元严格递增的二元递归函数. 则必定存在递归函数 f 满足下列条件：

1. $\forall x(f(x)\leqslant x$.

2. $\forall i(f=\varphi_i\rightarrow$

$\exists j(f=\varphi_j\ \&\ \forall a.e.x(g(x,\Phi_j(x))<\Phi_i(x)))$，

即 f 为关于 Φ 是 g 可加速的.

对某些递归函数 f 来说，它不存在最好的算法. 值得指出的是，条件 2 中的条件“$\forall a.e.x$”不能改为“$\forall x$”，甚至不能给其例外的 x 一个递归的界限. 因此，可能有有限但却很多的 x，是该不等式的例外情形. 这极大地限制了加速定理的实际意义. 另外，定理中条件

$$\forall x(f(x)\leqslant x)$$

表明了 f 的可加速现象不是由 f 增长速度之加快造成的. 不仅如此，加速定理中所断言存在的函数可以限定为 $\{0,1\}$ 值的. 再则，加速定理仅断言了有些 f 的可加速性，并没有给出能行的加速方法，即 f 未必是能行可加速的.

并定理(union theorem) 反映复杂性类关于“并”运算性质的一个定理. 设 Φ 为一个复杂性测度，$F=\{f_i\}_{i\in\omega}$ 为一个 re 的一元递归函数集(即存在递归函数 h，使 $\forall i(f_i$ 递归 $\&\ f_i=\varphi_{h(i)})$). 并且对任何 i,x，有 $f_i(x)\leqslant f_{i+1}(x)$. 则可能行地找到递归函数 g，使得

$$\Phi(g)=\Phi(F)(=\bigcup_{f\in F}\Phi(f)).$$

即由诸 f_i 的复杂性类组成之并集仍是某个递归函数的复杂性类.并且其界函数可能行地找到.但是,对任何布鲁姆测度 Φ,总存在递归函数 t_1,t_2,使 $\Phi(t_1)\cup\Phi(t_2)$ 不是任何递归函数的复杂性类.同样,也存在递归函数 s_1,s_2,使 $\Phi(s_1)\cap\Phi(s_2)$ 不是任何递归函数之复杂性类.对交运算来说,类似于并定理的结论并不成立.实际上,对任何布鲁姆空间 (φ,Φ),总存在递归函数 f,使对任何 i,$\varphi_{f(i)}$ 为递归函数,且 $\forall x(\varphi_{r(i)}(x)<\varphi_{r(i+1)}(x))$,但是

$$\bigcap_{i\in\omega}\Phi(\varphi_{r(i)})$$

却不是任何递归函数的复杂性类.

易解性(tractability) 一个非严格定义的直观概念.指一类问题不仅在理论是能行可解的,而且在实际上也是可解的一种性质.这种问题有时也称为可行的.依丘奇论题,一函数 f 是能行可计算的,是指存在一个图灵机 M 来计算 f,而对这种图灵机的纸带长度和运行时间都没有任何具体的限制.实际的计算机却对此二者都是有限制的.这就造成了能行可计算性与实际可计算性之间的差异.即有些能行可计算函数不一定是实际可计算的.例如:假定计算 $f(n)=3^n$ 的值需要 3^n 步,而每一步需要 1 微秒时间来完成,那么计算 $f(60)=3^{60}$ 将需要 1.3×10^{13} 个世纪!可见,这种计算不是实际可行的,因此,可以认为 f 不是易解的.与可计算性一样,要对易解性下一个严格的定义是非常困难的,依库汉姆(Cobham,A.)和爱德蒙茨(Edmonds,J.)1965 年的建议,在计算复杂性领域中,人们一般地将易解性同多项式时间可计算性等同起来(参见"库克-卡普论题").

可行性(feasibility) 即"易解性".依库克-卡普论题,也就是多项式时间可计算的(参见"易解性").

难解性(intractability) 可解的但又不是易解的一种性质.若一个问题是能行可解的,但又不是实际可解的,则称之为难解的.可见,难解性也是一种非严格定义的直观概念,依库克-卡普论题,难解的问题就是指非多项式时间可解的能行可解问题.

比较简单的一些可判定的难解问题是在 20 世纪 60 年代初发现的,但它们都是一些"人工制造"的问题.这种例子的比较自然的例子直到 20 世纪 70 年代初才获得,其中,迈耶(Meyer,A.)和斯托克梅耶(Stokmeyer,L.)证明了带平方的正规表达式的等价性问题是一个可判定的问题.但却需要指数时间,从而这是难解的.另一个有趣的难解问题是普莱斯博格算术系统的判定问题,费希尔(Fisher,J.J.)和拉宾(Rabin,M.O.)于 1974 年证明了普莱斯博格算术系统的判定需要指数时间 $2^{2^{cn}}$,因而也是难解的.

库克-卡普论题(Cook-Karp thesis) 亦称库克-卡普论点.计算复杂性理论中的一个基本假设.它断言易解性等同于多项式时间可计算性.尽管库克-卡普论题与丘奇论题一样被广泛接受,但是,支持库克-卡普论题的证据要比支持丘奇论题的证据弱得多.归结起来,承认库克-卡普论题的依据大致有下列几条:

1. 多项式时间可计算性概念具有"稳定性",即它不依赖于任何一种特殊的计算模型.而易解性与难解性当然也应该是独立于各种具体的计算模型的.

2. 一般地,多项式时间可计算的都可以认为是易解的.尽管像时间复杂性为 n^{100} 或者 $10^{99}n^2$ 的算法,可以认为在实际中不大可能快速运算.但是,自然提出的多项式可解问题,大多只用到 2 到 3 次多项式,且包含特别大的系数.

3. 对具指数时间复杂性的算法,只有极个别的可以认为在实际中计算得很好(如背包问题的分支界限算法),绝大多数确实都是在实际中不能快速计算的,因而可以认为是难解的.

4. 除了以"多项式时间可计算性"作为区分易解与难解的界限外,尚未找到一种自然而又合理的区分标准.

顺便指出,库汉姆(Cobham,A.)于 1964 年最早讨论了多项式时间可计算函数类,并指出它是独立于计算模型的选择的.而把多项式时间可计算性作为易解性的一种严格刻画,则是由爱德蒙茨(Edmonds,J.)于 1965 年最初建议的.他称具有多项式时间界的算法为"好算法".

多项式界可计算性(polynomially bounded computability) 计算复杂性的一种量度.设 M 为任何一个(确定或非确定型的)算法.Φ_M 为 M 的一个复杂性函数,若存在一个多项式 p,使对任何 n 都有 $\Phi_M(n)\leqslant p(n)$,则称 M 为关于 Φ 的多项式界算法.若一函数 f 可由某个(关于 Φ 的)多项式界算法计算,则称 f 为(关于 Φ 的)多项式界可计算函数,也称为多项式 Φ 界的可计算函数.特别地,当 Φ 分别为时间和空间复杂性函数时,多项式 Φ 界算法(可计算函数)特称为多项式时间和多项空间算法(可计算函数)(参见"库克-卡普论题 P 类和 NP 类").

多项式界算法(polynomial bounded algorithm) 见"多项式界可计算性".

***P* 类**(P-class) 一种特殊的类.指确定型图灵机多项式时间可计算语言类.是由卡普(Karp,R.M.)于 1972 年首先引进的一个概念.设 M 为一个确定型图灵机,若存在一个多项式 p,使对任何字 W,当 W 输入 M 后,必定会在 $p(|W|)$ 步内停机,即

M 的计步函数 f 满足

$$\forall n(f(n)\leqslant p(n)),$$

则称 M 为多项式界的图灵机. 而 P 指全体多项式界的确定型图灵机所接受的语言组成的类. 即 $P=\{L|$存在多项式界确定型图灵机 M 使 M 接受 $L\}$.

由于一个语言可以同一个判定问题自然地对应起来,因此,P 也可看成全体具有多项式时间算法可解的问题组成之类. 从数学的观点看,P 也是一个十分自然的语言类,它不依赖于具体的计算模型,例如,若 M_1 为具有多带多读头的图灵机,则它的计算速度一般地要比单带单读头的图灵机快. 但是,只要 M_1 有一个多项式时间界 P_1,总可以(能行地)构作一个单带单读头的图灵机 M,以及多项式 p,使 M 以 p 为时间界函数,并且 M 和 M_1 接受的语言相同. 从而,以多带多读头图灵机为计算模型而定义的类 P,与前面的 P 是一样的. 不仅如此,对任何其他合理的计算模型情形也一样. 此外,P 类还给出了语言类易解性和难解性的一种自然分界. 即可以把 P 类看成易解的语言类,而把 P 之外的语言看成难解的(参见"库克-卡普论题"). 当然,若某个语言的计算模型以一个极大的多项式为界,看起来它也是很难解的. 但是,若要在 P 中给出易解与难解之区分界限,往往是不自然的,而且会随着计算机技术的发展有所改变,而 P 则提供了一种对易解性的自然刻画.

多项式时间可计算集(polynomial time computable set) 一种可计算的集合. 指由多项式时间界确定型图灵机所接受的集. 也即 P 类中的集合(参见"P 类").

NP **类**(NP class) 一种特殊的类. 是由不确定型图灵机在多项式时间内接受的语言类. 设 NM 为一个不确定型图灵机,p 为一个多项式,如果对任何字 W 输入到 NM 后,需要 NM 接受 W,那么总有一种接受的计算路径,其长度不超过$p(|W|)$步. 换言之,NM 的(非确定型)时间复杂性函数

$$\Phi_{\mathrm{NM}}(n)\leqslant p(n)(\text{对任何 } n\in\omega).$$

则称 NM 为具多项式时间界(p)的非确定型图灵机,p 称为其界函数. 所有由具有多项式时间界的非确定型图灵机所接受的语言组成之类记为 NP,即 $\mathrm{NP}=\{L|$存在非确定型图灵机 NM 接受 L & NM 为具多项式时间界的$\}$,称之为 NP 类. NP 类反映了"多项式时间可验证性"这一概念. 例如,对 $L\in\mathrm{NP}$,若 $W\in L$,则总可在多项式时间内加以验证,但是尚不知道这种"多项式时间可验证性"与"多项式时间可计算性"是否一致,这就是著名的 $P=?$ NP 问题. 此外,NP 类也是不依赖于任何具体地计算模型的一个语言类.

NP **完全集**(NP-complete set) NP 类中复杂性最高的一种集合,是计算复杂性理论中最重要的一个概念. 设 L 为一个语言,如果对任何 $L_1\in\mathrm{NP}$,皆有多项式可计算函数 f,使

$$\forall x(x\in L_1\leftrightarrow f(x)\in L)$$

(即 L_1 是多项式时间多一可化归到 L,$L_1\leqslant_m^p L$),则称 L 是 NP 难的. 特别地,若 $L\in\mathrm{NP}$,且 L 又是 NP 难的,则称 L 是 NP 完全的. 由于当 $L_1\leqslant_m^p L$ 时,可以认为 L 比 L_1 更难解,因此,NP 完全的语言是 NP 类中最难的. 正因为如此,只要能证明某个 NP 完全集是多项式时间可计算的,那么必有 $P=\mathrm{NP}$. 反之,若能证明某个语言 L_1 不是多项式时间可计算,但却是 NP 的,即 $L_1\in\mathrm{NP}\backslash P$,则 NP 完全的语言 L 必定也满足 $L\in\mathrm{NP}\backslash P$. 对 NP 完全集的研究与 $P=?$NP 问题密切相关,这正是它的魅力所在.

第一个 NP 完全集的例子是库克(Cook,S. A.)于 1971 年给出的可满足性问题的集 SAT. 卡普(Karp,R. M.)于 1972 年给出了 NP 完全性这一术语的明确表述及其严格的形式定义,并给出了 21 个 NP 完全的问题. 此后,越来越多的 NP 完全集被发现,而且它们涉及数学的几乎每一个分支. NP 类包含大量出现在工业和商业界的实际问题. 又由于一般地相信 $P\neq\mathrm{NP}$,因而,一个问题是 NP 完全的,常可看成它不是 P 中的一个"证明",这样一来,NP 完全性又相当于给出了该问题的一个复杂性下界.

P-NP **问题**(P-NP problem) 亦称 $P=?$ NP 问题,计算复杂性理论以及计算机理论中最重要的一个未解决问题. 它问在多项式时间界下,确定型图灵机接受的语言类 P 与非确定型图灵机所接受的语言类 NP 是否是相同的. 因为 $P\subseteq\mathrm{NP}$,所以,P-NP 问题实际上是问这种包含关系是否是严格的,也即非确定型多项式时间算法是否确实比确定型多项式时间算法更有力. 但是,至目前为止,只知道当某个问题 $S\in\mathrm{NP}$ 时,一定存在一个多项式 p 和常数 c,使 S 的确定型复杂性界为为 $c\cdot 2^{p(n)}$. 即 S 为指数时间可计算的.

非确定型算法在多项式时间内有检查指数个可能性的能力. 这使人们觉得非确定型多项式时间算法确实比确定型多项式时间算法有力得多. 事实上,尽管人们进行了持久不懈的努力,仍未找到 NP 中许多著名问题(如巡回售货员问题、子图同构等)的多项式时间算法. 正是由于这些原因,现在人们普遍相信 $P\neq\mathrm{NP}$,但始终没有找到一个证明或否证. 由于有许多重要的实际问题都已被证明是 NP 完全的. 因此,研究 P-NP 问题有着十分重要的实际意义和理论价值. 因为对 P-NP 问题的肯定或否定回答,可使对许多实际问题找到其"可行的"算法或者干脆放弃这种努力. 值得指出的是,英国数学家贝克(Baker,T.)、吉尔(Gill,J.)和以色列学者索洛韦

(Solovay,R. M.)于1975年证明了存在递归集 A,B,使 $P^A=\mathrm{NP}^A$ & $P^B\neq\mathrm{NP}^B$,从而,用通常的相对化方法不足以证明 $P=\mathrm{NP}$,也不足以证明 $P\neq\mathrm{NP}$.

相对化复杂性类(relativized complexity class) 一种复杂性类.指由带外部信息源的图灵机所接受(计算)的复杂性类.设 M^A 为带外部信息源 A 的图灵机.Φ_M^A为其复杂性测度,f 为递归函数,则复杂性类$\Phi^A(f)=\{L\mid$若存在带 A 为外部信息源的图灵机 M^A 接受 L,并且 f 为 M^A 的(关于 Φ_M^A 的)界函数$\}$便是一个相对化(于 A)的复杂性类,记为 C^A.特别地,

$$P^A=\mathrm{DTIME}^A(\mathrm{pol}),\quad \mathrm{NP}^A=\mathrm{NTIME}^A(\mathrm{pol}).$$

其中 pol 表示多项式函数类.

库克定理(Cook theorem) 第一个 NP 完全问题.是库克(Cook,S. A.)于1971年证明的一个结果:可满足性问题SAT是NP完全的.这是注意到,若语言 $L\in\mathrm{NP}$,并且SAT多项式可化归到 L,则 L 也是NP完全的.可见第一个NP完全性问题有着特别重要的意义.

多项式时间多一可化归(polynomial time many one reducible) 简称 P-m 可化归或卡普可化归.递归论的基本概念之一.它是由卡普(Karp,R. M.)于1972年明确定义的一个概念.是用以比较两个问题之间的难度的.设 A_1,A_2 为两个集合,若存在一个多项式时间可计算函数 f,使得

$$\forall x(x\in A_1\leftrightarrow f(x)\in A_2),$$

则称 A_1 是 P-m 可化归到 A_2 的.并记为 $A_1\leqslant_m^P A_2$.当 $A_1\leqslant_m^P A_2$ 时,A_2 比 A_1 更"难"一些.若

$$A_1\leqslant_m^P A_2\ \&\ A_2\leqslant_1^P A_1,$$

则称 A_1 和 A_2 为 P-m 等价的,并记为 $A_1\equiv_m^P A_2$.此时,A_1 和 A_2 的"难度"相当.P-m 等价的两个集合也常称为多项式等价或简称 P 等价.值得指出的是,任何NP完全集都是 P 等价的.但目前尚不知它们是否都是 P 同构的(参见"伯尔曼-哈特曼尼斯猜想").

卡普多项式(Karp reducibility) 见"多项式时间多一可化归".

多项式等价集合(polynomially equivalent sets) 见"多项式时间多一可化归".

多项式时间多一可化归度(polynomial time many one reducible degree) 简称 P-m 度.由 P-m 可化归性导出的一种等价类.设 A 为任何一个集合,则全体与 A 为 P-m 等价的集合组成之类

$$deg(A)=\{B\mid B\equiv_m^P A\}$$

称为 A 的 P-m 度.P-m 度用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\cdots$等表示.对 P-m 度 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,如果有 $A\in\boldsymbol{a}$ 可化归到 $\boldsymbol{b}$,记为 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$,这样,全体 P-m 度 D_m 在"$\leqslant$"下组成一个代数结构,实际上,$(D_m,\leqslant)$是一个可分配的上半格.

多项式时间图灵可化归(polynomial time Turing reducible) 简称 P-t 可化归或库克化归.递归论的基本概念之一.它最初是由库克(Cook,S. A.)于1971年加以研究的一种化归.设 A,B 为两个集合.若存在一个以 B 为外部信息源的确定型多项式时间界图灵机 M^B 接受 A(即 $A\in P^B$),则称 A 是 P-t 可化归到 B 的,记为 $A\leqslant_t^P B$.当 $A\leqslant_t^P B$ & $B\leqslant_t^P A$ 时,称 A,B 为 P-t 等价的,并记为 $A\equiv_t^P B$.P-t 化归既是通常的图灵化归性的一种限制,又是 P-m 化归的一种推广.

库克可化归性(cook reducibility) 见"多项式时间图灵可化归".

多项式时间图灵可化归度(polynomial time Turing reducible degree) 简称 P-t 度.由 P-t 化归性导出的一种等价类.对任何集合 A,所谓 A 的 P-t 度,是指集类

$$deg(A)=\{B\mid B\equiv_T^P A\}.$$

若对 P-t 度 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,存在 $A\in\boldsymbol{a},B\in\boldsymbol{b}$,使 $A\leqslant_T^P B$,则称 $\boldsymbol{a}$ 可化归到 $\boldsymbol{b}$,并记为 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$.若以 D_T 表示全体 P-t 度之集合,则$(D_T,\leqslant)$组成一个不可分配的上半格.

多项式同构(polynomially isomorphic) 集合关于多项式可计算的一种分类.设 A,B 为两个集合,若存在一个一一对应的函数 f,使 f 和 f^{-1}都是多项式时间可计算的,并且 $f[A]=B$,则称 A 和 B 为多项式同构或 P 同构的,记为 $A\equiv_P B$.伯尔曼(Berman,L.)和哈特曼尼斯(Hartmanis,J.)证明了许多已知的NP完全集都是 P 等价的.因此,他们猜想所有NP完全集都是 P 同构的.这个猜想称为伯尔曼-哈特曼尼斯猜想,简称BH猜想.但至今对此尚无证明或否证.注意到BH猜想可以推出 $P\neq$ NP.因此,实际上BH猜想的解决,其难度不比 P-NP 问题解决的难度低.

伯尔曼-哈特曼尼斯猜想(Berman-Hartmanis conjecture) 见"多项式同构".

多项式纯正函数(polynomial honest function) 一种特殊的递归函数.设 f 为递归函数,若存在多项式 p,使对任何 $y\in rang\,(f)$,存在 $x\in \mathrm{dom}\,(f)$,使得 $f(x)=y$,并且 $|y|\leqslant p(|x|)$,则称 f 为多项式纯正的.等价地,递归函数 f 称为多项式纯正的,当且仅当存在多项式 p,使对任何 x,$f(x)$ 都可在 $p(|f(x)|)$步内计算出来.换言之,f 是关于时间复杂性测度的 p 纯正函数(参见"纯正函数").

单向函数(one-way function) 一种特殊的递归函数.若递归函数 f 满足下列三个条件:

1. f 是多项式时间可计算的;
2. f 是多项式纯正的;
3. f 的逆函数不是多项式时间可计算的;

则称 f 为单向函数.但是至今为止,尚未证明有单

向函数.实际上,这种函数的存在性等价于

$$P \neq \mathrm{NP}.$$

Σ_n 可允许序数(Σ_n admissible ordinal)　一种极限序数.设 λ 为极限序数,且对任何 Σ_n 公式 $\varphi(x,y)$,λ 满足

$$L_\lambda \models (\forall u)[(\forall x \in u)(\exists y)\varphi(x,y) \rightarrow (\exists z)(\forall x \in u)(\exists y \in z)\varphi(x,y)].$$

则称 λ 为 Σ_n 可允许序数.其中 L_λ 为哥德尔的可构造分层的第 λ 层.事实上,上式表明对任何 Σ_n 函数 φ 与 L_λ 中的元素 x,$\varphi[x]$ 亦为 L_λ 中的元素,即 L_λ 对 Σ_n 型的函数满足替换公理.Σ_n 允许序数在 α 递归论中扮演了极其重要的角色,尤其是 Σ_1 可允许序数又称为可允许序数,是整个 α 递归论的中心.

可允许序数(admissible ordinal)　即 Σ_1 可允许序数.递归论的基本概念之一.可允许序数的概念是整个 α 递归论的基础.在 α 递归论中所使用的 α 一般都指可允许序数.由于 α 递归论是经典递归论的推广,因此,作为 α 递归论的基础,选择什么样的无穷序数 α 作为工作对象,必须受到一定的限制.像 $\omega+100$ 或 $\omega+\omega$ 之类的序数是不合适的,因为它们对递归论中的基本运算——加法——是不封闭的.要能够使递归论中的一些主要概念顺利推广,这样的 α 首先必须保证一切递归函数在它之下封闭;其次,对递归函数的某个值的计算,必须在 $<\alpha$ 步骤内完成.如果假设(在美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)的等式演算系统中)对任何等式的有穷集,其任何一个推论都能在 $<\alpha$ 步骤内完成,那么这样的 α 就能够满足上面的条件.这样的序数就是可允许序数.

从集合论角度来看,如果将 L_α 作为论域,希望集合论的公理以某种能行的方式成立.对极限序数 λ,外延公理、空集公理、对偶公理与并集公理等在 L_λ 中成立.幂集公理必须放弃(否则就只能讨论 L).对替换公理,应当要求其对能行函数成立,即对 Σ_1 函数成立.这恰好也与可允许序数的定义一致.具体地,ω_1^{ck}(第一个非递归序数)是 ω 之后的第一个可允许序数.δ_2^1(不是任 Δ_2^1 集的序型的最小序数)也是可允许的;ZF 集合论系统的可传模型 M 中的任何一个无穷基数都是可允许序数;此外,M 中的任何一个无穷正规基数对任何 n 都是 Σ_n 允许的.但一般地,大部分极限序数都不是可允许的.

α 有穷集(α-finite set)　有穷集概念在 α 递归论中的推广.L_α 中的元素称为 α 有穷集.作为对普通递归论的推广,α 递归论所考虑的"计算步数"及"读写的信息数量"均允许到所有 $\beta<\alpha$,因此一个自然的想法,就是认为所有 $\beta<\alpha$ 是(α)有穷的(就像在经典递归论中认为一切 $n<\omega$ 是有穷的),这样才能有效地将经典递归论中能行的概念(在有穷步内算出,计算过程中使用有穷多个存贮单元)推广到 α 递归论中(在 $<\alpha$ 步骤内算出,计算过程中使用 $<\alpha$ 个存贮单元).但"有穷性"作为一个集合论概念,它又必须对"等势"封闭,即与有穷集等势的集合仍然应当是有穷的.因此,仅认为一切 $\beta<\alpha$ 有穷是不够的.不过在 α 递归论中,使用集合论的等势概念是不合适的.相反,只有在两个集合之间存在"能行的"一一对应关系时,才可以认为它们是"等势的".因此,α 有穷性概念与 α 递归论概念是密不可分的.在 α 递归论中,若 f 为部分 α 递归函数,k 为 α 有穷集,则 $f[k]$ 也是 α 有穷的.另外,与经典递归论相似的一个性质是:所有 α 有穷集可以被 α 能行地枚举出来.对 α 有穷性来说,与经典递归论不同,有穷与有界不再是相同的概念.具体地,ω_1^{ck} 有穷的 ω 的子集恰为自然数的超算术集.δ_2^1 有穷的 ω 的子集恰为自然数的 Δ_2^1 集(关于 ω_1^{ck} 与 δ_2^1 的定义,参见"可允许序数").

α 递归函数(α-recursive function)　α 递归论中能行性概念的表述.对可允许序数 α,一个函数 $f:\alpha \rightarrow \alpha$ 称为部分 α 递归函数,是指其图象在 L_α 上 Σ_1 可定义.作为 α 递归论中能行性的定义,这里用到了集合论中的能行方法——定义.这样,α 递归论中的能行函数就被定义为在可定义性上较为"简单",或可称为"能行"的函数.从另一个角度上说,如果把 α 递归函数看做具有 α-re 图象的函数,那么该函数的定义过程也可以看成一个枚举过程.因此用"在 L_α 上 Σ_1"作为 α-re 的定义,进而得到 α 递归函数的定义也是合理的.

α 递归可枚举集(α-recursively enumerable set)　亦称 α-re 集.α 递归函数的定义域.集合 $C \subseteq \alpha$ 称为 α 递归可枚举(简称 α-re),是指 C 为一个部分 α 递归函数的定义域.换句话说,C 是 L_α 上的一个 Σ_1 集合.与经典递归论中 re 集相似,任何 α-re 集也是某个 α 递归函数的值域,反之,任何 α 递归函数的值域也是 α-re 集.此外,所有 α-re 集可以被(α)能行地枚举.即存在一个含有两个变元的 α 递归函数 $g(x,e)$,使得对任何 $e<\alpha$,$\{x \mid g(x,e)=0\}$ 为 α-re 集.反之,对任何 α-re 集 C,存在 $e_0<\alpha$,使 $C=\{x \mid g(x,e_0)=0\}$.

a-re 集(a-re set)　即"α 递归可枚举集".

α 递归集(α-recursive set)　特征函数为 α 递归函数的集合.一集合 $C \subseteq \alpha$ 为 α 递归的,是指 C 与 α-C 均为 α-re 集.换句话说,$C \subseteq \alpha$ 为 α 递归,当且仅当 C 是 L_α 上的 Δ_1 集,这一点与经典递归论中的性质相似.

α 递归论(α-recursion theory)　一种递归理论.是经典递归论(研究 ω 上函数与集合的能行性问题)将论域扩展到可允许序数上以后所形成的一

种理论.

将经典递归论推广到更大的无穷序数上的根本原因是因为逻辑学家们认为,递归论中诸如能行性、有穷性、相对递归性等概念不应当仅仅局限于自然数上,它们应当能够被推广到更大的无穷序数上.早在1938年,美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S.C.)就提出了用自然数集合表示一些无穷序数,这就使得人们可以在自然数上讨论一些(可数)无穷序数(也就是递归序数).

在20世纪50至60年代,逻辑学家们得到了在ω_1^{ck}(第一个非递归序数)上的一系列结果,这些为以后的研究奠定了基础,同时也推动了这一研究的发展.这一研究方向的发展动因还来自数理逻辑的其他研究方向——集合论、模型论与证明论.竹内外史研究了将集合论的相容性归约到序数理论的相容性问题.他提出了一种序数上的递归理论,以证明所要求的理论与相对相容性证明在某种意义上可以是能行的.并证明了美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)的可构造域L(利用它证明了选择公理与广义连续统假设的相容性)可以通过能行方式同构到他的序数理论上.他的工作为通过L的良好结构,在递归论与集合论之间建立密切的联系打下了基础.从模型论的方向上,麦克弗(Machover,M.)把与递归论相关的模型论思想结果推广到无穷语言I_{kk},进而发展了一种在无穷正规基数上的递归理论,并证明了可满足性不是"算术"可定义的.从另一个角度上,克雷塞尔(Kreisel,G.)将兴趣集中在可定义性与各种高等逻辑与语言的关系上,将有穷性的推广建立在可定义性的基础之上,而不是基数的基础上.此外,通过对这一领域的研究,逻辑学家们还希望为递归论找到一个公理化的途径.

可允许序数的概念最早是由克里普克(Kripke,S.A.)引入的,他证明了ω_1^{ck}与所有无穷基数都是可允许序数,并且阐明可允许序数上的有穷性概念可以用"为L_α的元素"来表述.1966年至1967年,萨克斯(Sacks,G.E.)将经典递归论中的优先方法引入α递归论中,从而解决了相应于许多可允许序数的波斯特问题.其中(1972)延森(Jensen,R.)在L上的工作为α递归论提供了必要的工具.同年,萨克斯和辛普森(Simpson,S.G.)对所有可允许序数,完全解决了波斯特问题.

弱相对α递归性(weak relative α-recursiveness) α递归性的一个较弱形式推广.设$A,B\subseteq\alpha$,B相对A的弱α递归,是指存在α-re集W_e,使得对所有x:

$$x\in B\leftrightarrow(\exists\upsilon)(\exists\xi)[\langle x,\upsilon,\xi,1\rangle\in W_e\ \&\ k_\upsilon\subseteq A\ \&\ k_\xi\subseteq\alpha-A],$$

$$x\notin B\leftrightarrow(\exists\upsilon)(\exists\xi)[\langle x,\upsilon,\xi,0\rangle\in W_e\ \&\ k_\upsilon\subseteq A\ \&\ k_\xi\subseteq\alpha-A],$$

式中,$\{k_\beta\}$为α有穷集的一个(α)能行枚举.从直观意义上说,弱相对α递归性看起来较好地体现了α递归论中的相对能行性,但它甚至不具备可传性,因此α递归论中的相对能行性概念是用一个要求更强的概念定义的(参见"相对α递归性").

相对α递归性(relative α-recursiveness) α递归性的推广.设$A,B\subseteq\alpha$.B称为相对A是α递归,是指存在α-re集W_e,使得对一切γ:

$$k_\gamma\subseteq B\leftrightarrow(\exists\delta)(\exists\xi)[\langle\gamma,\delta,\xi,1\rangle\in W_e\ \&\ k_\delta\subseteq A\ \&\ k_\xi\subseteq\alpha-A],$$

$$k_\upsilon\subseteq\alpha-B\leftrightarrow(\exists\delta)(\exists\xi)[\langle\upsilon,\delta,\xi,0\rangle\in W_e\ \&\ k_\delta\subseteq A\ \&\ k_\xi\subseteq\alpha-A],$$

式中$\{k_\beta\}_{\beta<\alpha}$为$\alpha\xi$有穷集的一个能行枚举.以上关系记为$B\leqslant_\alpha A$,称$B$通过归约过程$e$相对$\alpha$递归于$A$(当记为$\{e\}^A=B$).

从直观上说,B相对A α递归,是指对任何一个α有穷集,可以通过A"能行"地判定它是否包含在B中,或者包含在$\alpha-B$中.从形式上看,"弱相对α递归"似乎更为合理.但不幸的是,对很多可允许序数,"弱相对α递归关系"甚至不是可传的.因此在α递归论中,一般都使用这里的概念作为相对能行性的定义.当然,在ω递归论中,这两个定义是一致的.在一般α递归论中,它比"弱相对α递归性"要强(参见"弱α相对递归性").

α度(α-degree) 递归论的基本概念之一.指由α相对递归性导出的等价类概念.与古典递归论相似,所有α度形成上半格,此外,它们与古典递归论的图灵度有许多相似之处.如α-re度结构是稠密的(对一切可允许序数α).对许多可允许序数,存在α-re的极小对.但在$\alpha>\omega$之后,$\mathbf{0}'$以下ω度的结构和$\mathbf{0}'$以下α度的结构不同构.

高型对象(object of higher type) 自然数对象的一种推广.对任何自然数n,ω上的n型对象的集合递归定义为:

1. $T^{(0)}=\omega$.

2. $T^{(n+1)}=T^{(n)}$到ω的全函数的集合.

3. $T=\bigcup_{i<\omega}T^{(i)}$中的成员称为高型对象.

简单地说,自然数为0型对象,自然数上的全函数为1型对象,自然数上全函数到自然数的全函数为2型对象等.

高型递归论(higher recursion theory) 一种递归理论.是把自然数上的递归论推广到高型对象上得到的数学理论.事实上,一型的递归对象(递归函数)与二型递归对象(递归泛函)可以划入经典递归论的范畴,这种递归性可以成功地被推广到更高型对象上.通过重复从较低型对象向较高型对象推广的一致过程,可得到较高型对象上的递归性定义.例

如，一型对象的计算相当于有一个执行机械过程的机器 M，对 M 输入数 n 后可得到输出 $m=\varphi(n)$. 二型对象 $F(f,n)$ 的计算相当于在上述 M 处再加上一个外部信息源 f. 对输入 f,n,M 在计算 n 时，要问到 f 对某些变元的值. 三型对象 $\mathscr{F}(F,f,n)$ 相当于在 M 之上加上两个外部信息源 f 和 G（其图象的基数为 $2^{\aleph_0}$），当计算 n 时，M 要问到 f 对某变元的集，同时还要问到 F 对某变元的值. 在问到 F 对变元 g 的值时，要计算 g 的图象，因此 M 的计算不再有穷. 类似可有更高型对象的计算.

对高型对象而言，紧致性不再成立，“计算”的概念也不再有原来的“能行性”了. μ 算子也失去了它在经典递归定义中的中心地位（从上面的例子看出，在高型对象的计算中，搜索范围可能不再是可数无穷了），因此其研究变得更为复杂了. 这一方向的研究最早由美国逻辑学家、数学家克林（Kleene，S. C.）提出的.

将递归论推广到高型对象的另一条途径是通过紧致性、单调性和连续性进行的. 这一方向的研究是由美国学者戴维斯（Davis，M. D.）、克林和克雷塞尔（Kreisel，G.）提出的. 他们的基本观点是：计算树仍然是有穷的. 这一方向的研究发展成为可数泛函理论.

非经典逻辑

非经典逻辑（non-classical logic） 亦称非标准逻辑. 数理逻辑的一个分支. 通常指两个演算（命题演算和谓词演算）以外的符号逻辑系统及可用于推理描述的数学系统. 非经典逻辑大体可以分为三类. 第一类是从语构角度出发对谓词演算进行扩充所形成的符号逻辑系统，例如模态逻辑、时态逻辑、动态逻辑、线性逻辑、非单调逻辑等. 第二类是从语义角度出发对谓词演算进行扩充所形成的符号逻辑系统，例如某些多值逻辑系统. 第三类是通过数学计算确定命题真值，从而建立起推理的数学描述的数学系统，也有人称这一类为语义逻辑，因为它们通常没有相应的形式符号系统，例如模糊逻辑.

由于各种应用逻辑的发展，特别是计算机科学和人工智能科学的发展，对一阶谓词演算系统的表示能力提出了挑战. 许多领域内一阶谓词演算显得苍白无力，另一些领域内它则显得无能为力，因而使各种非经典逻辑得到空前充分的发展.

应当指出，模态逻辑是相当“经典”的，甚至可追溯到亚里士多德（Aristateles）. 之所以人们倾向于将它列入非经典逻辑范畴，是因为近代的科学发展赋予了它新的意义和新的应用前景. 还应指出，对非经典逻辑的理解及对其外延的规定，众说纷纭，以上意见只是较为常见的一种.

模态逻辑（modal logic） 一类非经典逻辑. 它研究含有模态词“必然”、“可能”的模态命题及其推理的科学. 模态词可以用符号表示，符号 L（或□）表示“必然”，符号 M（或 ◇）表示“可能”. 现代模态逻辑是在古典的命题演算或谓词演算的基础上构造起来的，因而是数理逻辑的一个重要分支.

历史上第一位对模态逻辑进行系统研究的逻辑学家是古希腊哲学家、科学家亚里士多德（Aristotle）. 他在《工具论》一书中，提出了大量模态三段论形式，其中很多已被现代模态逻辑证明是有效的. 在亚里士多德的著作中所包含的朴素模态逻辑思想，成为现代模态逻辑研究的思想源泉. 由于他的著作中也存在一些难解的问题，因此在很长一段时间内，人们并不理解他的研究成果. 直到 20 世纪 30 年代，波兰数学家、逻辑学家武卡谢维奇（Łukaszewicz，J.）和美国学者麦科尔（MacColl，H.）等逻辑学家开始用现代逻辑的观点对亚里士多德的模态逻辑进行深入的研究，取得了许多有价值的成果.

把模态问题引入数理逻辑中来是从 20 世纪初开始的. 美国逻辑学家刘易斯（Léwis，C. I.）第一个用数理逻辑的观点和方法对模态逻辑作系统的研究，从而使模态逻辑的研究获得了质的飞跃. 刘易斯当之无愧地成为现代模态逻辑的创始人.

在数理逻辑中提出模态问题与当时关于实质蕴涵（亦称真值蕴涵）的争论有关. 英国数理逻辑学家罗素（Russell，B. A. W.）、英国逻辑学家、数学家怀特海（Whitehead，A. N.）在他们合写的巨著《数学原理》中，把 $p\rightarrow q$ 定义为 $\neg p \vee q$，即只要 p 假或 q 真，$p\rightarrow q$ 就为真，这就是所谓的实质蕴涵. 实质蕴涵的前件 p 与后件 q 之间不必有必然的联系. 在罗素和怀特海的命题演算中还有下列命题：

1. $p\rightarrow(q\rightarrow p)$.
2. $\neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$.
3. $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)$.

命题 1 表示：只要 p 真，任何命题 q 都蕴涵 p，即任何命题蕴涵真命题.

命题 2 表示：只要 p 假，p 蕴涵任何命题 q，即假命题蕴涵任何命题.

命题 3 表示：任何两个命题 p 与 q，不是 p 蕴涵 q，就是 q 蕴涵 p，即任何两个命题必有蕴涵关系.

上述命题，人们称之为实质蕴涵的怪论. 为了克服实质蕴涵的缺点，刘易斯提出了严格蕴涵的概念. 他把“p 严格蕴涵 q”定义为“不可能$(p\wedge\neg q)$”。用符号$\multimap$表示“严格蕴涵”，因此 $p\multimap q$ 表示“p 严格蕴涵 q”。严格蕴涵的定义包含了模态词. 1914 年，刘易斯（Léwis，C. I.）在论文《严格蕴涵的演算》和《蕴涵

的矩阵代数》中，提出了第一个模态命题演算，从而开创了用数理逻辑的观点和方法研究模态逻辑的新局面. 1932 年，刘易斯和兰福德(Langford, C. H.)合写了《符号逻辑》一书，其中构造了 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 五个模态命题演算系统.

在刘易斯工作的基础上，不少逻辑学家在数理逻辑的基础上陆续构造出许多不同的严格蕴涵的模态命题演算. 1946 年，巴坎(Barcan, R. C.)发表了论文《基于严格蕴涵的一阶函项演算》，德国学者卡纳普(Carnap, R.)发表了论文《模态性和量词》，他们各自独立地构造了模态谓词演算. 从 20 世纪 50 年代起，一些逻辑学家开始建立模态命题逻辑的自然推理系统与模态谓词逻辑的自然推理系统. 莫绍揆先生在 1950 年发表了他的论文《推理定理和两类新的逻辑系统》.

20 世纪 40 年代以前，现代模态逻辑的研究侧重于语构方面. 从 20 世纪 40 年代起，在模态逻辑的语义方面，也取得了许多重要的研究成果. 卡纳普是这方面的先驱，1947 年，他在《意义与必然》一书中，提出了模态逻辑语义系统的理论. 20 世纪 50 年代后，克里普克(Kripke, S. A.)等逻辑学家又进一步加以研究，提出了完整的模态逻辑语义理论.

刘易斯创立的模态逻辑是关于逻辑必然和逻辑可能的. 人们把这样的模态逻辑称为经典的模态. 此外，一些逻辑学家还建立了不是关于逻辑必然和逻辑可能的模态逻辑系统. 人们把这些逻辑系统称为非经典的模态逻辑. 义务逻辑、认知逻辑和时态逻辑等都是非经典的模态逻辑.

中国对模态逻辑的研究也在不断深入发展. 1986 年出版的周礼全先生的《模态逻辑引论》详细地介绍了国内外的研究成果.

模态命题演算 T (modal propositional calculus T) 一种重要的模态命题演算. 模态命题演算 T 由下列几个部分构成：

1. 初始符号：

1) 命题变元：$P_1, P_2, P_3, \cdots$.

2) 一元逻辑联结词：$\neg$, L.

3) 二元逻辑联结词：$\rightarrow$.

4) 括号：(,).

2. 形成规则：

1) 任一命题变元是合式公式.

2) 如果 α 是合式公式，则 $(\neg\alpha)$ 是合式公式.

3) 如果 α 和 β 是合式公式，则 $(\alpha\rightarrow\beta)$ 是合式公式.

4) 如果 α 是合式公式，则 Lα 是合式公式.

用下列元语言变元表示合式公式：

$A, B, C, \cdots; A_1, B_1, C_1, \cdots$.

3. 定义：

1) Def $\wedge$ ：$(A\wedge B)=\text{Df}\ \neg(A\rightarrow\neg B)$.

2) Def $\vee$ ：$(A\vee B)=\text{Df}(\neg A\rightarrow B)$.

3) Def$\leftrightarrow$ ：$(A\leftrightarrow B)$
$=\text{Df}\ \neg((A\rightarrow B)\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$.

4) Def$M$：M$A=\text{Df}\ \neg L\neg A$.

5) Def $\multimap$ ：$(A\in B)=\text{DfL}(A\rightarrow B)$.

6) Def$=$ ：$(A=B)=\text{Df}((A\multimap B)\wedge(B\multimap A))$.

4. 公理：

具有下列任一公式模式的合式公式都是 T 的公理：

1) $(A\rightarrow(B\rightarrow A))$.

2) $((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))$.

3) $((\neg A\rightarrow B)\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A))$.

4) (L$A\rightarrow A$).

5) (L$(A\rightarrow B)\rightarrow(LA\rightarrow$L$B)$).

5. 推理规则：

1) 由 A 和 $(A\rightarrow B)$ 推导出 B.

2) 由 A 推导出 LA.

在模态命题演算 T 中还要给出下列定义：

1. T 中一个有穷的合式公式序列 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 T 中的一个证明，当且仅当其中的合式公式都属于下列几种情况之一：是一条公理；是合式公式序列中位于前面的一个或两个合式公式，经过运用推理规则而得出的一个合式公式.

2. 一个有穷的合式公式序列 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 T 中合式公式 B 的一个证明，当且仅当 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 T 中的一个证明，并且 $B_n=B$.

3. 合式公式 B 是 T 中的定理，当且仅当 T 中有一个关于 B 的证明. B 是 T 的定理记为 $\underset{T}{\vdash}B$.

4. T 中一个有穷不空的合式公式序列 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 T 中合式公式集 Γ 到 B 的推导，当且仅当 $B=B_n$，并且其中的合式公式都属于下列几种情况之一：是一条公理；是 Γ 中的一个合式公式；是合式公式序列中位于前面的一个或两个合式公式，经过运用推理规则而得出的一个合式公式.

T 中由 Γ 到 B 的推导记为 $\Gamma\underset{T}{\vdash}B$.

5. T 中的合式公式 B 是合式公式集 Γ 的语形后承，当且仅当 T 中有一个由 Γ 到 B 的推导.

模态命题演算 T **的解释**(interpretation of modal prop sitional calculus T) 模态命题演算 T 的语义. 模态命题演算 T 的一个解释是一个有序三元组 $\langle W, R, V\rangle$. W 是一个由可能世界 $w_1, w_2, w_3, \cdots$ 组成的集；R 是 W 集上的具自返性的二元关系；V 是满足一系列条件的赋值(用 1 表示"真"，用 0 表示"假"). 利用 T 解释可以定义语义理论中的三个重要概念如下：

1. T 中合式公式 A 是 T 常真的，当且仅当对于所有的 T 解释 $\langle W,R,V\rangle$ 和任一 $w_j\in W$，$V(A,w_i)=1$. A 是 T 常真的记为 $\models_T A$.

2. 在 T 解释下 T 中合式公式 B 是合式公式 A 的语义后承，当且仅当没有一个 T 解释 $\langle W,R,V\rangle$ 和一个 $w_i\in W$，使 $V(A,w_i)=1$ 而 $V(B,w_i)=0$. B 是 A 的语义后承记为 $A\models_T B$.

3. 在 T 解释下 T 中合式公式 B 是 T 中合式公式集 Γ 的语义后承，当且仅当没有一个 T 解释 $\langle W,R,V\rangle$ 和一个 $w_i\in W$，使得对于所有的 $C\in\Gamma$，$V(c,w_i)=1$ 而 $V(B,w_i)=0$. B 是 Γ 的语义后承记为 $\Gamma\models_T B$.

克里普克 T 语义图(the Kripke T semantic diagrams)　一种著名的判定模态命题演算 T 的合式公式常真性的方法. 具体画法如下：首先根据 T 中的定义，使要判定的那个 T 中合式公式 A 不出现逻辑联结词 $\vee$，$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$，将变形的结果记为 A^*. 其次画一条垂直线，把 A^* 写在垂直线右边的上端. 在垂直线下端附近写上 $t_1(t_2,t_3,\cdots)$，以表示这个图是 T 语义图中的第一个图(第二个图，第三个图……)然后按照下列规则进行：

[$L\neg$]：若图 t_i 的左半(即垂直线的左边)有一个 $\neg A$，则在 t_i 的右半(即垂直线的右边)写一个 A.

[$R\neg$]：若图 t_i 的右半有一个 $\neg A$，则在 t_i 的左半写一个 A.

[$L\wedge$]：若图 t_i 左半有一个 $A\wedge B$，则在 t_i 的左半写一个 A 和一个 B.

[RL]：若在图 t_i 的右半有一个 LA，则画一新图 t_j，在 t_j 的右半写一个 A，并从 t_i 画一条有箭头的直线到 t_j. t_j 称为 t_i 的直接导出图.

[LL]：若在 t_i 的左半有一个 LA，则在 t_i 的左半和所有 t_i 的直接导出图的左半都各写上一个 A.

在一个 T 语义图中，把用有箭头的直线连结起来的图群(可以只有一个孤立的图)称为这个 T 语义图的一个分支.

[$R\wedge$]：如果语义图的某一分支 L_k 中的某个图 t_i 的右半有一个 $A\wedge B$，则把分支 L_k 换成两个分支 L_{k_1} 与 L_{k_2}，L_{k_1} 是把 L_k 中的 t_i 换为 t_{i_1} 的结果，L_{k_2} 是把 L_k 中的 t_i 换为 t_{i_2} 的结果，而 t_{i_1} 与 t_i 的不同仅仅在于 t_{i1} 的右半比 t_i 多一个 A，t_{i_2} 与 t_i 的不同也仅仅在于 t_{i_2} 的右半比 t_i 多一个 B.

为了利用克里普克 T 语义图判定 T 的合式公式的常真性，还需要下列定义：

1. 一个 T 语义图是完结的，当且仅当这个 T 语义图中没有任一合式公式还必须应用画图规则.

2. 在一个 T 语义图中，一个图 t_i 中出现矛盾，当且仅当至少有一个 T 的合式公式在 t_i 左半和右半都出现.

3. 在一个 T 语义图中，一个分支 L_i 中出现矛盾，当且仅当 L_i 中至少有一个图 t_j 出现矛盾.

4. 一个 T 语义图是有矛盾的，当且仅当在这个语义图完结时每一分支都出现矛盾.

由此得到如下结论：对于 T 的任一合式公式 A，A 是 T 常真的，当且仅当 A 的 T 语义图是有矛盾的.

模态命题演算 S_4 (modal propositional calculus S_4)　一种重要的模态命题演算. S_4 的初始符号和形成规则与模态命题演算 T 相同. S_4 的公理模式共有六条，其中前五条与 T 的那五条相同，把它们分别记为

$$S_4\,\mathrm{I},S_4\,\mathrm{II},S_4\,\mathrm{III},S_4\,\mathrm{IV},S_4\,\mathrm{V}.$$

S_4 的第六条公理模式为 $S_4\,\mathrm{VI}.\ LA\rightarrow LLA$，$S_4$ 的推理规则就是 T 的那两条推理是规则. 与 T 中类似，可以定义 S_4 中的证明，S_4 中的定理等概念. T 中的定理都是 S_4 的定理，S_4 是 T 的扩大.

模态命题演算 S_5 (modal propositional calculus S_5)　一种重要的模态命题演算. S_5 的初始符号和形成规则与模态命题演 T 相同. S_5 的公理模式共有六条，其中前五条与 T 的那五条相同，所以它们分别记为

$$S_5\,\mathrm{I},S_5\,\mathrm{II},S_5\,\mathrm{III},S_5\,\mathrm{IV},S_5\,\mathrm{V}.$$

S_5 的第六条公理模式为 $S_5\,\mathrm{VI}.\ \neg LA\rightarrow L\neg LA$. S_5 的推理规则就是 T 的那两条推理规则. 与 T 中类似，可以定义 S_5 中的证明、定理等概念. T 中的定理都是 S_5 的定理，S_5 是 T 的扩大. 又因为 $S_4\,\mathrm{VI}$ 是 S_5 的定理，所以 S_5 也是 S_4 的扩大.

模态谓词演算 QTB (modal predicate calculus QTB)　一种重要的模态谓词演算. 模态谓词演算 QTB 由下列几个部分构成：

1. 初始符号：

1) 个体变元：$x_1,x_2,x_3,\cdots$.

2) 命题变元：$p_1,p_2,p_3,\cdots$.

3) 谓词：一元词谓词 $F_1^1,F_2^1,F_3^1,\cdots$；二元谓词 $F_1^2,F_2^2,F_3^2,\cdots$；三元谓词 $F_1^3,F_2^3,F_3^3,\cdots$.

4) 一元逻辑联结词：$\neg$，L.

5) 二元逻辑联结词：$\rightarrow$.

6) 全称量词：$\forall$.

7) 括号和逗号：(,).

2. 形成规则：

若 $a,a_1,a_2,\cdots;b,b_1,b_2,\cdots;\cdots$ 这些元语言变元表示个体变元，且采用模态命题演算 T 的元语言变元.

1) 任一命题变元是合式公式.

2）任一 $F_i^n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是合式公式.

3）若 α 是合式公式，则 $(\neg\alpha)$ 是合式公式.

4）若 α 和 β 是合式公式，则 $(\alpha\rightarrow\beta)$ 是合式公式.

5）若 α 是合式公式，则 $L\alpha$ 是合式公式.

6）若 α 是合式公式，则 $\forall a\alpha$ 是合式公式.

另外还有下列规则：在一个合式公式中 $\forall a$ 后面紧接着的那个合式公式，称为 $\forall a$ 的辖域；若在合式公式 A 中，个体变元 a 某次出现在全称量词 $\forall$ 的最邻近后面，或者出现在 $\forall a$ 的辖域中，则称在 A 中 a 的某次出现是约束的，亦称在 A 中 a 的某次出现是约束出现；否则称在 A 中 a 的某次出现是自由的，亦称在 A 中 a 的某次出现是自由出现.

3. 在模态谓词演算 QTB 中除了全部采用模态命题演算 T 的那些定义外，还有下面的定义：

$$Def\exists:\exists aA = Df\neg\forall a\neg A.$$

4. 具有下列任一公式模式的合式公式都是 QTB 的公理：

1）$(A\rightarrow(B\rightarrow A))$.

2）$((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))$.

3）$((\neg A\rightarrow B)\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A))$.

4）$\forall aA\rightarrow A(b/a)$（$A$ 中无自由 a 在 $\forall b$ 的辖域中. $A(b/a)$ 表示在 A 中用个体变元 b 替换自由个体变元 a 的结果）.

5）$(\forall a(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow\forall aB))$（$A$ 中无自由 a）.

6）$(LA\rightarrow A)$.

7）$(L(A\rightarrow B)\rightarrow(LA\rightarrow LB))$.

8）$(\forall aLA\rightarrow L\forall aA)$.

5. 推理规则：

1）由 A 和 $(A\rightarrow B)$ 推导出 B.

2）由 A 推导出 $\forall aA$.

3）由 A 推导出 LA.

类似于模态命题演算 T，可以定义 QTB 中的证明、定理、推导、语形后承等概念. 由于模态命题演算 T 的合式公式都是模态谓词演算 QTB 的合式公式，T 中的公理和推理规则分别是 QTB 的公理和推理规则，所以 T 的定理都是 QTB 的定理，因此 T 是 QTB 的子系统.

模态谓词演算 QTB 解释（interpretation of modal predicate calculus QTB） QTB 的语义. 模态谓词演算 QTB 的一个解释是一个有序四元组 $\langle W,R,D,V\rangle$. W 是一个由可能世界 $w_1,w_2,w_3,\cdots$ 组成的集；R 是 W 集上的具自返性的二元关系；D 是以个体为元的非空集（称为个体域），$D=\{d_1,d_2,d_3,\cdots\}$，并且规定各个可能世界中的个体都相同；V 是满足一系列条件的赋值. 利用 QTB 解释可以定义语义理论中的三个重要概念如下：

1. QTB 中合式公式 A 是 QTB 可满足的，当且仅当至少有一个 QTB 解释 $\langle W,R,D,V\rangle$ 和一个 $w_i\in W$，$V(A,w_i)=1$.

2. QTB 的合式公式集 Γ 是 QTB 可满足的，当且仅当至少有一个 QTB 解释 $\langle W,R,D,V\rangle$ 和一个 $w_i\in W$，对于所有的 $B\in\Gamma$，$V(B,w_i)=1$.

3. QTB 中合式公式 A 是 QTB 常真的，当且仅当对于对任一个 QTB 解释 $\langle W,R,D,V\rangle$ 和任一个 $w_i\in W$，$V(A,w_i)=1$. A 是 QTB 常真的记为 $\vDash_{QTB} A$.

QTB 中语义后承的定义与 T 中的类似.

模态谓词演算 QS_4B（modal predicate calculus QS_4B） 一种重要的模态谓词演算. QS_4B 的初始符号和形成规则与模态谓词演算 QTB 相同. QS_4B 的公理模式共有九条，其中前八条与 QTB 的八条相同，把它们分别记为

$$QS_4B\,\mathrm{I},QS_4B\,\mathrm{II},\cdots,QS_4B\,\mathrm{VIII}.$$

QS_4B 的第九条公理模式为

$$QS_4B\,\mathrm{IX}.\ LA\rightarrow LLA,$$

QS_4B 的推理规则就是 QTB 的三条推理规则. 与 QTB 中类似，可以定义 QS_4B 的证明、定理等概念. QS_4B 是 QTB 的扩大.

多值逻辑（many-valued logic） 一类非经典逻辑. 指命题可以取多于二值的一类逻辑系统. 自古以来，人们通常认为命题只能取真假两个值，即一个命题非真即假，这种观念在整个逻辑发展过程中占有主流地位，由此发展起来的经典二值逻辑系统已成为逻辑学中最基本的系统. 然而，早在古希腊时期，古希腊哲学家、科学家亚里士多德（Aristotle）就对这一观念提出过异议，他举例说，“明天发生海战”这一命题的真值在现在就是不可决定的，因此，它具有介于真与假之间的一个中间值状态. 20 世纪初，美国学者麦科尔（MacColl，H.）提出一种有别于经典二值逻辑的命题逻辑系统，他把命题的取值规定为“必然真”、“不可能真”以及“真值可变”三种值. 例如“2＝2”取值“必然真”，“3＝2”取值“不可能真”，“x＝2”取值“真值可变”. 最先以类似于经典二值逻辑的形式发展起来的.

多值逻辑系统是 20 世纪 20 年代，由波兰数学家武卡谢维奇（Łukaszewicz，J.）及波兰-美国数理逻辑学家波斯特（Post，E. L.）提出. 武卡谢维奇于 1920 年给出了他的三值逻辑系统，他沿袭亚里士多德的观点，将第三值解释为“未决定的”或“可能的”，表示未来可能发生的状态，后来他又将它的三值逻辑系统推广到 n 值及无穷值. 波斯特于 1921 年独立地发展了他的有限多值逻辑系统. 在他的系统中，命题可以取 1，2…，m 等 m 个值，其中 1 表示真，m 表示假，其他值表示中间状态. 自此之后，大量反映不同哲学背景，具有不同应用领域的多值逻辑系统相

继出现.有代表性的有限多值逻辑系统除武卡谢维奇的三值逻辑系统 k_3 及其 n 值扩充 t_n 之外,还有美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)的三值逻辑系统 K_3,博赫瓦(Bochvar,D. A.)的三值逻辑系统 B_3 及其 n 值扩充 B_n,美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)的 n 值逻辑系统 G_n 以及近年来由国内学者朱梧槚、萧奚安发展起来的中介逻辑 ML.命题可以取无穷值的多值逻辑系统有武卡谢维奇的无穷值逻辑 k_ω 及哥德尔的无穷值逻辑系统$_\aleph$.另外,概率逻辑与模糊逻辑也可以被看做为无穷值逻辑系统,它们的命题真值可以取[0,1]区间内的任意实数.综观多值逻辑的发展,人们研究和建立各种多值逻辑系统主要出于下面三种动机:

1.是纯数学的兴趣,人们试图从语义上扩充经典逻辑的二值语义,以建立一种有别于经典逻辑的新逻辑系统,同时由于真值范围的扩大,命题连结词的定义更为灵活,通过定义各种形式的命题连结词可以获得一些非常有趣的逻辑或代数性质.

2.是来自哲学的兴趣,通过赋予介于真假之间的中间状态值以不同的哲学意义,可以获得反映各自哲学背景的逻辑系统.大量的三值逻辑系统是出于这种考虑而建立的.

3.是对于应用的需求.博赫瓦发展他的三值逻辑系统的目的是试图解释语言学中的语义悖论,克林则是为了解决在部分递归函数理论中数值谓词的可判定性问题而建立他的 K_3 系统.

一些学者试图利用多值逻辑排除集合论悖论,即用某种多值逻辑系统与康托尔的概括原则相配套建立一个集合论系统,以消除悖论,但这方面的研究未获得令人注目的发展,相反,国内著名数理逻辑学家莫绍揆于 1954 年证明武卡谢维奇 n 值逻辑系统 t_n 与概括原则相配套,一定会产生悖论.近几十年来,多值逻辑在计算机科学领域中获得了广泛的应用,这方面的应用可以概括为两类:一类是在电路设计及开关理论中的应用,例如,通过设计具有多值状态的逻辑电路以减少集成电路的引线数目等;另一类是在计算机科学理论中的应用,特别是人工智能、程序语言、知识表示与推理等方面的应用.这些应用使得多值逻辑成为计算机科学关注的一个重要分支.

波茨娃尔三值逻辑(Bochvar's 3-valued logic) 一种多值逻辑系统.它由波茨娃尔(Бочевар,B.)于 1939 年给出的一种三值逻辑系统,规定命题可取真值:0(假),1(真)和 u.波茨娃尔将第三值 u 解释为有悖论的或无意义的.因而当 A 取值 u 时,$\neg A$ 仍取值 u;当 A,B 中有一取值 u 时 $A*B$($*$ 可以为 $\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow$ 之一)恒取值 u,其他真值运算与二值逻辑相同.

克林三值逻辑(Kleene's 3-Valued Logic) 一种多值逻辑系统.它是由美国逻辑学家、数学家克林(Kleene,S. C.)于 1938 年给出的一种三值逻辑系统,规定命题可能的取值为 0(假)、1(真)和 u.取值 u 的命题被认为是未知的或不可决定的,从而使真值联结词的定义如下:

A	$\neg A$
0	0
1	1
u	u

$A\vee B$	0	1	u
0	0	1	u
1	1	1	1
u	u	1	u

$A\wedge B$	0	1	u
0	0	0	0
1	0	1	u
u	0	u	u

$A\rightarrow B$	0	1	u
0	0	1	1
1	0	1	u
u	u	1	u

$A\leftrightarrow B$	0	1	u
0	1	0	u
1	0	1	u
u	u	u	u

克林并没有否认命题的最终取值非真即假,一个命题取第三值 u 只是说明它的最终的取值目前还不知道,或者根据某种判定方法(如能行算法)不能决定它的真值.

武卡谢维奇无穷值逻辑(Łukaszewicz's infinitely valued logic) 一种多值逻辑系统.它是波兰数学家、逻辑学家武卡谢维奇(Łukaszewicz,J.)首先提出的一种多值逻辑系统,命题可以区间[0,1]中任一值为其真值.如果用 $v(\alpha)$ 表示命题 α 的真值,那么系统规定:

$v(\neg A)=1-v(A)$;

$v(A\vee B)=\max(v(A),v(B))$;

$v(A\wedge B)=\min(v(A),v(B))$；
$v(A\to B)=\min(1,1-v(A)+v(B))$；
$v(A\leftrightarrow B)=\min(v(A\to B),v(B\to A))$；
$v(\forall xA(x)=\min\limits_{d\in U}v(A(d))$；
$v(\exists xA(x))=\max\limits_{d\in U}v(A(d))$.

武卡谢维奇还建立了系统的形式推演部分.

武卡谢维奇三值逻辑(Łukaszewicz's 3-valued logic)　一种多值逻辑系统.是由波兰数学家、逻辑学家武卡谢维奇(Łukaszewicz,J.)于1920年给出的三值逻辑系统,也是历史上最早出现的一种多值逻辑系统.规定命题可取真值:0(假),1(真)和u.取真值u的命题被看做是“未来可以确定其真假,但目前仍不能决定其真假的命题”.因而真值联结词定义如下:

A	$\neg A$
0	0
1	1
u	u

$A\vee B$	0	1	u
0	0	1	u
1	1	1	1
u	u	1	u

$A\wedge B$	0	1	u
0	0	0	0
1	0	1	u
u	0	u	u

$A\to B$	0	1	u
0	1	1	1
1	0	1	u
u	u	1	1

$A\leftrightarrow B$	0	1	u
0	1	0	u
1	0	1	u
u	u	u	1

威斯博格(Wajsberg,M.)于1931年给出了武卡谢维奇三值逻辑系统k_3的一个公理化系统:

1. $\alpha\to(\beta\to\alpha)$.
2. $(\alpha\to\beta)\to[(\beta\to(\alpha-\gamma)\to(\alpha\to\gamma))]$.
3. $(\neg\alpha\to\neg\beta)\to(\beta\to\alpha)$.
4. $[(\alpha\to\neg\alpha)\to\alpha]\to\alpha$.

另加一条分离规则$\alpha,\alpha\to\beta\vdash\beta$.

雷斯彻概率逻辑(Rescher's probabilistic logic)　一种多值逻辑系统.它由雷斯彻(Rescher,N.)首先提出的.命题可以从区间[0,1]中的任一值为其真值.雷斯彻将命题真值解释为“概然测度”或“可信度”.系统使用$\neg,\vee,\wedge$为基本真值联结词并且满足下列条件:

1. 命题集合$\mathscr{P}$与联结词$\neg,\vee,\wedge$组成一个有补格.即满足:

1) $p\wedge p=p\vee p=p$.
2) $p\wedge q=q\wedge p,p\vee q=q\vee p$.
3) $p\wedge(q\wedge r)=(p\wedge q)\wedge r$,
$p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$.
4) $p\wedge(q\wedge r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$,
$p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$.
5) $p\wedge \text{true}=p$, $p\wedge\text{false}=\text{false}$,
$p\vee\text{true}=\text{true}$, $p\vee\text{false}=p$.
6) 若$p\vee q=\text{true}$, $p\wedge q=\text{flase}$则定义q为$\neg p$.
7) $p\leqslant q$,当且仅当$p\wedge q=p$.

2. 若用$v(\alpha)$表示命题α的真值,那么:

1) 若$p\leqslant q$,则$v(p)\leqslant v(q)$.
2) $v(p\vee q)=v(p)+v(q)-v(p\wedge q)$.
3) $v(p\wedge q)=0$,当且仅当$\neg p\leqslant q$且$\neg q\leqslant p$.
4) $v(\text{true})=1$, $v(\text{false})=0$.
5) $v(p\vee\neg p)=1$,(或$v(p\wedge\neg p)=0$).

3. 若用$p\to q$表示$\neg p\vee q$,那么
$v(p\to q)=1-v(p)+v(q)-v(\neg p\wedge q)$.

模糊逻辑(fuzzy logic)　一类非经典逻辑.通常指在美国控制论专家扎德(Zadeh,L.A.)的模糊子集理论基础上发展起来的一种推理理论.它规定$a\in A$(A为一集合)可取区间[0,1]上的任一值为其真值,称为a对于集合A的隶属度,进而称每个隶属度分布为A的一个模糊子集.这一理论将命题的真值由隶属度和模糊子集来定义,对联结词$\neg,\vee,\wedge$的规定与武卡谢维奇无穷值逻辑相同,但

$$v(\alpha\to\beta)=\max(v(\neg\alpha),\min(v(\alpha),v(\beta))).$$

这一理论的一个显著特点是使用近似推理.例如

$$\frac{A\to B,A'}{B'},$$

其中A'与A近似,B'与B近似.这时可取

$$v(B')=v(A\to B)\cdot v(A').$$

非单调逻辑(nonmonotonic logic)　一类非经典逻辑.即非单调推理的形式化.在推理过程中,如果增加新知识可能废除一些以前已推出的结论,这

种推理就是非单调的(或可废除的),非单调性是在不完全知识情形下常识推理的一般特性.而经典逻辑是单调的,即增加新的公理只会推出更多的定理,不会使以前能推出的定理无效,因此,经典逻辑不能直接刻画不完全信息的推理问题.非单调逻辑是在人工智能研究的背景下为了形式化人的常识推理提出的一种新的非经典逻辑,在计算机科学与人工智能研究中有相当广泛的应用,并在数理逻辑中得到进一步研究.

人工智能研究的一个目标是为了在计算机中表示知识,并进行符合人的常识的推理,一种知识表示的行之有效的方法是把知识用逻辑语言来描述,但基于经典逻辑(如一阶逻辑),人的常识的表示或计算是相当困难的,例如,所有的框架问题或环境问题一直是知识表示的难题.一个常识表示的典型例子是描述“鸟会飞”的性质,一般地鸟会飞,例如鸵鸟是一只鸟,常识上人们可推出鸵鸟会飞,但是把这个问题在一阶逻辑中形式化,则必须列出导致鸟不会飞的所有例外情况(无穷).在非单调逻辑中,则是把鸵鸟会飞作为一个一般假设的非单调结论,使得在进一步获得有关例外情况的新知识时,能够修正它,从而使得知识的表示变得经济而且容易计算.在20世纪70年代末,一些人工智能研究者从不同方面研究了这类问题.

非单调逻辑作为一个研究分支,是由1980年国际人工智能杂志(Atificial Intelligence 13, 1980)出版的一个非单调推理专集开始的,之后10余年,已发表有关研究文献三千余篇,逐步形成为一个成熟的非经典逻辑分支.大致上,非单调逻辑可分成两大类:一类是基于极小化模型定义,如限制逻辑;另一类是基于不动点扩张定义,如缺省逻辑和自认知逻辑,它们都是基于经典逻辑所作的某种非单调推广.此外,还有其他研究非单调逻辑的途径,现存文献中已有几十种之多的非单调逻辑系统.一般地,各种非单调逻辑都是提供一种机制,把不完全知识转化为较完全的知识状态,并能修正由于新增加知识引起的矛盾.历史上,首先是提出各种非单调逻辑系统,进而,充分地研究各种非单调逻辑系统的相互关系和一般基础,并发现解决已有非单调逻辑的问题.现在,人们一方面深入地研究非单调逻辑的各种性质,另一方面,进一步扩展非单调逻辑的能力,并用来解决各种具体的应用问题.

虽然,非单调逻辑能解决诸如框架问题这类不完全知识推理的形式化问题,但它还不能完全刻画人的常识推理所蕴涵的丰富内容,有关非单调逻辑的研究是一个有着相当深度与广泛应用前景的领域.

常识(common-sense) 表述经验的知识.例如“鸟是会飞的”.这类知识可能有众多的例外,例如鸵鸟,企鹅都不会飞.它们很难用经典的单调逻辑系统来刻画,因为随着知识的增长,原有的知识反而会变得无效.对常识的理解尚有歧义,有人将那些与问题有关但常被人们忽略的背景知识也列入常识的范畴.

缺省逻辑(default logic) 一种非单调逻辑.即在一阶逻辑中嵌入一种称为缺省推理规则的非单调逻辑系统.缺省推理规则形如

$$\frac{\alpha(\boldsymbol{x}):M\beta_1(\boldsymbol{x}),\cdots,M\beta_m(\boldsymbol{x})}{w(\boldsymbol{x})}$$

其中$\alpha(\boldsymbol{x})$为前提,$w(\boldsymbol{x})$为结论,$\beta_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$称为缺省条件,$M\beta_i(x)$表示“$\beta_i(x)$与系统不矛盾”.缺省推理逻辑的语义建基于形式演绎的固定点理论,它也有一个类似于消解原理的形式推理手段,只是这一手段不具有完备性.

模态非单调逻辑(modal non-monotonic logic) 一种重要的非单调逻辑.它是一种用于描述常识推理规律的模态逻辑系统,是有代表性的非单调推理之一.该系统使用模态词M,$M\alpha$表示α与系统不矛盾,形式地规定为$\vdash\neg\alpha$,则$\vdash M\alpha$.其中“$\vdash$”表示“非单调地推出”,它的语义仍使用形式演绎的固定点理论来刻画.模态非单调逻辑是由麦克德模特(McDermott)和道弗尔(Dovle)于1980年提出.

限制逻辑(circumscription) 一种非单调逻辑.通常简称限制,是模卡斯(MeCarth,J.)于1980年提出的一种有代表性的非单调推理理论,限制是在一个低阶公式(一阶公式)A的所有P极小(化)模型中都为真的一个较高阶公式(二阶公式),这里P是A中相对于一定准则的极小变量.直观上,限制的基本思想是捕捉一种猜测推理的经济原则,即从某些事实A出发能够推出具有某一性质P的对象就是满足P的全部对象.

令$A(P,x)$是一个包含谓词P与变元x的一阶句子,语义上,A中限制P,是相对于一个偏序$\leqslant^p$的所有P极小模型都为真的句子集,一个A的模型M称为极小的,若不存在它的其他模型M'使得$M'\leqslant^p M$,定义$\leqslant^p$如下:令$M_i(i=1,2)$,是两个模型,$M_1\leqslant^p M_2$,当且仅当(1)M_1与M_2具有相同的论域;(2)P在M_1的外延包含于P在M_2的外延,语法上,限制可刻画为如下二阶句子:

$$A(p,x)\wedge\forall p[A(p,x)\wedge\forall x(p(x)\rightarrow P(x))]\rightarrow[\forall x(P(x)\rightarrow p(x))].$$

其中p是谓词变元,$A(p,x)$是A中以p替换P的结果.

限制存在许多变体,例如可限制谓词元组而且允许某些谓词和函数变化,它们具有不同的表达能力.一般地,限制具有可靠性定理,但没有一般的完

全性成果，由于限制是二阶形式，计算上比较困难，这也是非单调逻辑的共性问题. 由于限制是一阶逻辑的直接扩充，具有一阶逻辑与极小模型的良好性质，因此限制是非单调逻辑中的代表作，对它已有充分的研究和广泛的应用.

自认知逻辑(autoepistemic logic)　一种重要的非单调逻辑. 它把缺省假设看做理想主体的自我信念的反映，体现一种推理主体自知之明的内省，自认知逻辑的语言引入一个模态算子 L 表示信念，代表一类模态非单调逻辑的研究，它对描述关于理智状态的推理有直接的应用.

人们称包含模态词 L 的公式为 L 公式，一个自知理论 T 是一个 L 公式集，一个自认知扩张 S 是满足以下等式的公式集：

$$S=\mathrm{Th}(T\cup\{\mathrm{Lp}\mid p\in S\}\cup\{\neg\,\mathrm{Lp}\mid p\notin s\}),$$

这里 Th 表示经典逻辑的演绎闭包，进一步，自认知模型可以基于模态逻辑的可能世界语义直接定义.

优先语义(preferential semantic)　一种刻画非单调逻辑的一般语义途径. 令 L 为一个标准逻辑，$\subseteq$是一个优先关系，则可定义一个优先逻辑 $L_{\subseteq}$ 如下. 它与 L 的语言相同，但语义后承，记如 $S\models_{\subseteq}A$，定义为：A 在所有 S 的优先模型中都为真，令 M 是 S 的(L 中)模型，称 M 为相对于$\subseteq$的优先模型，若不存在 S 的其他模型 M' 使得 $M\subseteq M'$.

优先语义是定义非单调逻辑的强有力的工具，基于不同的优先关系的定义，优先语义可捕捉大多数非单调逻辑作为它的特殊情形，因此它可作为一种非单调逻辑的统一基础，由此容易得到各种非单调逻辑之间相互关系的结果. 对优先逻辑可进行各种逻辑性质的研究.

理由维护系统(reason maintenance system)亦称真值维护系统、信念修正系统. 一类非单调系统. 它通过记录或描述推理过程的理由来刻画修正过程或理论变化的非单调系统. 原来，理由维护系统着重研究非单调推理的实现，并与其他非单调逻辑有密切关系.

霍尔逻辑(Hoare's logic)　一种程序逻辑. 它是一阶逻辑的扩充. 它以一阶公式及下列表达式为其基本语言成分：$\{Q\}S\{R\}$这里 Q 表示程序 S 入口处各变量所满足的条件，而 R 表示程序 S 出口处各变量所满足的条件. 因而这一表达式表示：S 执行前 Q 真，而 S 执行后 R 真. 霍尔(Hoare)逻辑可用于描述程序语义，进而用于程序正确性证明，和自上而下的程序自动生成.

霍尔逻辑有下列公理及推理规则(这里不包括一阶逻辑公理系统)：

$\{Q_x^e\}x:=e\{Q\}$；　　(赋值公理)

$$\frac{\{P\}S\{Q\},Q\supset R}{\{P\}S\{R\}},\ \frac{P\supset Q,\{Q\}S\{R\}}{\{P\}S\{R\}};$$

(推理规则)

$$\frac{\{P_{i-1}\}S_i\{P_i\},(i=1,2,\cdots,n)}{\{P_0\}S_1,S_2,\cdots,S_n\{P_n\}};$$

(序列语句规则)

$$\frac{\{Q\wedge B\}S_1\{R\},\{Q\wedge\neg B\}S_2\{R\}}{\{Q\}ifB\rightarrow S_1,\neg B\rightarrow S_2\mathrm{endif}\{R\}};$$

(if 语句规则)

$$\frac{\{P\wedge B\}S\{P\}}{\{P\}\mathrm{loop}B\rightarrow \mathrm{S\ endloop}\{P\wedge\neg B\}}.$$

(循环语句规则)

时序逻辑(temporal logic)　模态逻辑的一种扩张. 由曼纳(Manna)等于 1983 年首先提出的. 系统使用全局个体变元、局部个体变元、布尔变元及通常的一阶谓词演算语言成分，此外，还使用四个模态词作为时态算子.

系统的语义仍采用克里普克语义，只是限定可能世界(在时序逻辑中称为状态)之间的可达关系为一线序关序. 曼纳等人的时序逻辑系统基本上是模态系统 S_4 的扩张.

当在时序逻辑系统中适当增加关于数论真命题及程序语义描述的非逻辑公理后，系统可用于程序语义的形式描述和程序正确性证明. 因而它在计算机科学中有一定的地位.

时态算子(temporal operators)　一种特殊算子. 指时态逻辑系统中所使用的模态词. 主要有以下 4 种：

1. 永真算子，用符号$\Box$表示之，“$\Box A$”表示“A 一直为真”.

2. 终真算子，用符号$\Diamond$表示之，“$\Diamond A$”表示“最终 A 会真”.

3. 下真算子，用符号$\bigcirc$表示之，“$\bigcirc A$”表示“下一状态 A 真”.

4. 止真算子，作符号$\rhd$表示之，“$A\rhd B$”表示“A 一直为真直至 B 为真”.

时序命题演算(temporal proposition calculus)不使用个体变元及量词的时态逻辑系统. 它的公理系统组成如下：

1. $\neg\Diamond A\leftrightarrow\Box\neg A$.
2. $\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$.
3. $\bigcirc\neg A\leftrightarrow\neg\bigcirc A$.
4. $\Box A\rightarrow\bigcirc A$.
5. $\Box A\rightarrow A$.
6. $\bigcirc(A\rightarrow B)\rightarrow(\bigcirc A\rightarrow\bigcirc B)$.
7. $\Box A\rightarrow\bigcirc\Box A$.
8. $\Box(A\rightarrow\bigcirc A)\rightarrow(A\rightarrow\Box A)$.
9. $A\rhd B\leftrightarrow(B\vee(A\wedge\bigcirc(A\rhd B)))$.
10. $A\rhd B\rightarrow\Diamond B$.

11. 所有重言式.

推理规则为

$$\frac{A}{\Box A},\quad \frac{A, A\rightarrow B}{B}.$$

一阶时序谓词演算(first-order temporal predicate calculus)　时态命题演算的扩张. 即通常所说的时序逻辑,其中增加语言成分:常函词◯(对任一 t,◯t 表示"下一状态的 t")以及公理(参见"时序命题演算")如下:

12. $\neg\exists vA\leftrightarrow\forall v\neg A$.

13. $\forall vA\rightarrow A_t^v$($A$ 中 t 对 v 可代入).

14. $A\rightarrow\forall vA$(A 中无自由变元 v).

15. $\forall v(A\rightarrow B)\rightarrow(\forall vA\rightarrow\forall vB)$.

16. $\forall v\bigcirc A\rightarrow\bigcirc\forall vA$.

17. $\bigcirc f^{(n)}t_1\cdots t_n=f^{(n)}\bigcirc t_1\cdots\bigcirc t_n$.

18. $\bigcirc p^{(n)}t_1\cdots t_n\leftrightarrow p^{(n)}\bigcirc t_1\cdots\bigcirc t_n$.

19. $\bigcirc(t_1=t_2)\leftrightarrow(\bigcirc t_1=\bigcirc t_2)$.

20. $t=t$.

21. $(t_1=t_2)\rightarrow(A\leftrightarrow A_{t_1}^{t_2})$($A_{t_1}^{t_2}$表示 A 中项 t_2 替换为 t_1,A 中须无时态算子).

22. $(t_1=t_2)\rightarrow(t=t')$($t'$表示 t 中项 t_2 替换为 t_1,t 中无函词◯).

动态逻辑(dynamic logic)　亦称程序模态逻辑. 一种非经典逻辑. 指在程序设计语言基础上扩展模态逻辑的一种形式. 此类逻辑系统使用无穷多对模态词,即对每一程序段 α 引入一对模态词$[\alpha]$和$\langle\alpha\rangle$,使得对系统的任一合适公式 A:

$[\alpha]A$ 表示:执行程序段 α 后的一切可能状态中,A 均为真.

$\langle\alpha\rangle A$ 表示:执行程序段 α 后至少有一种可能状态中,A 为真.

动态逻辑可刻画相应程序设计语言的语义,并在系统内对相应语言编写的程序进行正确性证明.

程序模态逻辑(program modal logic)　即"动态逻辑".

霍恩子句(Horn clauses)　一种命题公式. 至多只含一个正文字的子句. 如 p,$\neg p$,$\neg p\vee q\vee\neg r$ 等均为霍恩子句.

霍恩子句逻辑(Horn clause logic)　一阶逻辑系统的子系统. 是以特定的一阶公式(霍恩子句)为表示形式,以消解原理为推理规则的逻辑系统. 当允许使用表示元逻辑命题的霍恩子句时,它的表述能力与一阶谓词演算相同. 著名的逻辑程序设计语言 PROLOG 便是以霍恩子句逻辑为基础的.

线性逻辑(linear logic)　一种非经典逻辑. 它由施灏(Girard)于 1987 年提出的一种逻辑系统,它可以看做是对古典逻辑的求精. 从证明论的观点来看,这样的求精可从古典逻辑的根岑型矢列演算开始,首先删去两个结构规则:弱规则和缩规则. 由于删去这两个规则以后,会产生两种合取及两种析取,一种称为乘性的,而另一种称为加性的. 最后再加上一种模态词称为重用算子,这样就形成线性逻辑的框架.

根岑(Gentzen,G.)的切割消除性质对于线性逻辑是成立的,并且直觉主义逻辑能被嵌入到线性逻辑中,从 proposition-as-types 原理来看,以上两性质可将带类型的 λ 演算嵌入于命题线性逻辑中去,这样的嵌入展示了线性逻辑的表示能力,事实上线性逻辑的计算结构是很强的. 人们知道若在根岑型古典逻辑中只需限制矢列 $\Gamma\vdash\Delta$ 的右边的 Δ 中至多含一个公式,那么所得的逻辑就是直觉主义逻辑,然而这样的系统左右不对称. 线性逻辑不限制 $\Gamma\vdash\Delta$ 中 Δ 的公式的个数,但禁止使用弱规则与缩规则,这样既可以保持直觉主义的本性又具有对称性.

线性逻辑在计算机科学领域中有许多应用,例如利用线性逻辑能改良函数式程序设计语言等.

线性联结词(linear connective)　线性逻辑中使用的联结词,与通常的联结词是有区别的. 由于在线性逻辑中不采用弱规则与缩规则,以下两个规则:

$$\frac{\vdash A,\Gamma;\vdash B,\Delta}{\vdash A\wedge B,\Gamma,\Delta}\text{与}\frac{\vdash A,\Gamma;\vdash B,\Gamma}{\vdash A\wedge B,\Gamma}$$

就不等价,虽然在古典逻辑中是等价的. 这就需要两个不同的合取联结词⊗与 &,它们的规则为

$$\frac{\vdash A,\Gamma;\vdash B,\Gamma}{\vdash A\,\&\,B,\Gamma}(\&)\text{ 和}\frac{\vdash A,\Gamma;\vdash B,\Delta}{\vdash A\otimes B,\Gamma,\Delta}(\otimes).$$

否定在古典逻辑中是联结词,而在线性逻辑中使用线性否定$(\cdot)^{\perp}$,不把它当做联结词,公式的否定由德·摩根律所决定. 线性否定是具有构造性的,主要的性质是 $A^{\perp\perp}$与 A 恒同,在古典逻辑中 A 等价于$\neg\neg A$,但"$\neg$"不具有构造性,而在直觉主义逻辑中 A 不等价于$\neg\neg A$. 线性否定还表现出一种对偶性和 $A\multimap\mathscr{B}\equiv\mathscr{B}^{\perp}\multimap A$,这里$\multimap$是在线性逻辑中使用的联结词称为线性蕴涵. 相对于$(\cdot)^{\perp}$,联结词⊗与 & 的德·摩根对偶是联结词⅋与⊕,它的规则为

$$\frac{\vdash\Gamma,A,B}{\vdash,\Gamma,A⅋B}(⅋)\quad\frac{\vdash\Gamma,A}{\vdash\Gamma,A\oplus B}(\oplus 1)$$

$$\frac{\vdash\Gamma,A}{\vdash\Gamma,B\oplus A}(\oplus 2).$$

线性矢列演算(linear sequent calculus)　线性逻辑的根岑型推理系统,在此就命题演算介绍这样的系统. 公式由联结词⊗,& ⅋,⊕作用于原子命题及其否定以及常元,1,$\perp$,T,0 而得,公式的否定由德·摩根律定义:

$1^{\perp}\equiv\perp$,$\perp^{\perp}\equiv 1$;

$T^{\perp}\equiv 0$,$0^{\perp}\equiv T$;

$p^{\perp\perp}\equiv p$(p 为原子);

$(A \otimes B)^{\perp} \equiv A^{\perp} ⅋ B^{\perp}$;

$(A ⅋ B)^{\perp} \equiv A^{\perp} \otimes B^{\perp}$;

$(A \& B)^{\perp} \equiv A^{\perp} \oplus B^{\perp}$，$(A \oplus B)^{\perp} \equiv A^{\perp} \& B^{\perp}$.

1. 逻辑公理：$\vdash A, A^{\perp}$.

2. 切割规则：$\dfrac{\vdash A, \Gamma; \vdash A^{\perp}; \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}$CUT.

3. 交换规则：$\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma'}$EXCH，这里 Γ' 是由交换 Γ 中公式位置而得.

4. 加性规则：

1) $\vdash T, \Gamma$（公理）.

2) 规则(&)，($\oplus$1)与($\oplus$2)（参见“线性联结词”）.

5. 乘法规则：

1) $\vdash 1$（公理）.

2) $\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \perp, \Gamma}(\perp)$.

3) 规则($\otimes$)与(⅋)（参见“线性联结词”）.

在以上的演算中可加上量词、模态词和无穷联结词，然而线性逻辑的本质完全可在以上系统中体现，在添加这些内容后，通常的逻辑就能嵌入于线性逻辑中.

相关语义(coherence semantics)　线性逻辑的一种海丁型语义，它体现出线性逻辑的构造性. 施灏(Girard)利用相关空间即二元 qD 来解释公式，这样的思想是把命题和类型统一. 线性逻辑的相关语义的作法可由下表显示：

元素	命题	证明	联结词	规则
解释	相关空间	空间的元　素	空间上的运算	元素上的运算

相关语义是斯科特(Scott, D. S.)语义的改良，所谓相关空间事实上由一个图决定，空间的元素为两两相关点组成的完全子图，相关空间的运算为

$$(\cdot)^{\perp}, \rightarrow, \multimap, \otimes, \&, ⅋, \oplus, !, ?.$$

由$(\cdot)^{\perp}$的相关语义可得 $\mathscr{A}^{\perp\perp} \equiv \mathscr{A}$ 以及 $\mathscr{A} \multimap \mathscr{B}$ 与 $\mathscr{B}_{\perp} \multimap \mathscr{A}^{\perp}$ 是同构的，这说明线性蕴涵是反对称的.

在相关语义中，还有一个有趣性质是 $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} = !\mathscr{A} \multimap \mathscr{B}$，这说明蕴涵可分成两部分：线性部分和重用部分，而线性部分是本质的. 在相关语义中，公式解释为相关空间，而矢列 $\vdash A_1, A_2, \cdots, A_n$ 解释为

$$A_1^*, ⅋ A_2^* ⅋, \cdots, ⅋ A_n^*,$$

这里 A^* 为 A 的解释，而对证明长度作归纳，给出证明的解释，把$\vdash P$ 的证明解释为$\vdash \Gamma$ 的解释空间中的元素，这样就得线性逻辑的相关语义.

中介逻辑演算(medium logic calculus)　一种非经典的逻辑演算系统. 简记为 ML. 它是 20 世纪 80 年代被构造和发展起来的. 以承认中介对象的存在和贯彻中介原则为实际背景和思想原则. ML 包括中介命题演算 MP 及其扩张系统 MP*、中介谓词逻辑演算 MF 及其扩张系统 MF*、中介逻辑的同异性演算系统（即带等词的中介谓词逻辑）ME^* 等 5 个演算系统构成.

由于中介原则仅指出存在着这样的反对对立谓词 P 和 ╕P，有对象 x 使有 $\sim P(x)$. 所以 ML 并不在一切场合排斥二值逻辑的使用，甚至在系统内仍然使用排中律 $P \vee$ ╕P，只是具体内容不同于经典二值逻辑中之排中律，并且否定词$\neg$在 ML 中被定义为

$$\neg P =_{df} P \rightarrow \sim P =_{df} \sim P \vee ╕P.$$

ML 中绝大多数推理规则都是非经典的. ML 中还有一套清晰化算符ℒ，ℛ，ℐ. 当人们无需处理模糊现象时，可用这套清晰化算符对 ML 予以清晰化，使之约化为经典的二值逻辑，又可严格证明经典的二值逻辑演算系统都是 ML 的子系统.

1985 年以来，一批中青年逻辑工作者都投入了关于 ML 的严格的语义研究工作，ML 的相容性、完备性、可靠性等均已得到证明，ML 的范式理论已被建立，人们又证明了 MP* 的命题联结词含量是完全的，而 MP 的命题联结词含量是不完全的，从而由 MP 到 MP* 的扩张具有实质性意义. 萧奚安、朱梧槚又进一步研究了历史上各种三值逻辑系统的语言表达能力. 在 MP* 为命题联结词含量完全之三值逻辑系统的基础上，进一步证明了武卡谢维奇三值系统 L_3^*、波斯特三值系统 P_3^*、斯勒配克三值系统 S_3^* 和伍旧夫三值系统 W_3^*，也都是命题联结词含量完全的三值逻辑，从而它们的语言表达能力都是等效的. 如果它们同时又都是可靠的和完备的，那么可以证明它们都是互相等价的. 但由于它们在各自被构造时，不仅各有其不同的实际背景，而且引进第三值的具体含义和解释也各不相同，从而不仅使得这些系统可以采用各不相同的构造形式，同时在使用价值与范围、应用的方便与自然程度、发展的速度及深度很不一致.

此外，在各种命题联结词含量不完全的三值逻辑系统的语言表达能力的等效与不等效关系的研究中，又证明了 MP 和任何其他命题联结词含量不完全的三值逻辑系统的语言表达能力都不等效.

中介逻辑演算 ML 为构造和发展中介公理集合论并使之形式化准备了逻辑工具.

开放逻辑(open logic)　一个刻画知识的增长和更新以及假说的进化的逻辑理论. 它是由李未于 1991 年创立的.

经典形式系统理论研究所关心的问题是：当一个形式系统的（非逻辑）公理及推理规则给定后，人

们可以从中推出哪些定理及怎样推出这些定理，讨论这个系统是否是不矛盾的、可靠和完全的等. 在一个形式系统内部无法描述假设（公理）是怎样增加和修改的，无法刻画假说（公理集）的进化过程；因为这均来自系统之外的实践，并通过形式系统与其环境的交互作用实现. 形式系统在此意义下是封闭的.

开放逻辑是为克服经典形式系统方法这一不足提出的，它建立在一阶语言（参见“一阶逻辑”）上，目前只考虑闭公式.

开放逻辑的两个基本概念是新假设和事实反驳. 对给定的假说 Γ（闭公式集），称 A 是关于 Γ 的新假设，如果存在两个模型 M 及 M' 使 $M \vDash \Gamma$ 及 $M \vDash A$ 而且 $M' \vDash \Gamma$ 及 $M' \vDash \neg A$ 成立；也就是说 A 关于 Γ 是逻辑独立的.

设 A 是 Γ 的逻辑结论（$\Gamma \vDash A$），称 A 受到事实反驳，如果存在一模型 M，使得 $M \vDash \neg A$ 成立. 令 $\Gamma_{M(A)}$ 代表全体在模型 M 下为真的 Γ 中的公式组成的集合，即

$$\Gamma_{M(A)} = \{A_i \mid A_i \in \Gamma, M \vDash A_i, M \vDash \neg A\}.$$

称一个事实反驳是理想的，如果不存在 A 的另一个事实反驳 M'，使得 $\Gamma_{M(A)} \subset \Gamma_{M'(A)}$ 成立，即它是使 $\Gamma_{M(A)}$ 为极大的事实反驳.

简言之，假说是否成立取决于从它推出的每一结论是否与人们的实践一致，如果某一结论与实践不一致（相当于定义中 $\Gamma \vDash A$ 及存在模型 M 使 $M \vDash \neg A$），就出现事实反驳. 理想事实反驳表示反驳出现时，只检查和修改原假说中导致此结论的极小子集. 可以证明：对理想事实反驳，其 $\Gamma_{M(A)}$ 是 Γ 的某一与 $\neg A$ 一致的极大子集，反之亦然.

若 A 是关于 Γ 的新假设，则 $\Gamma \cup \{A\}$ 称为 Γ 关于 A 的 N 重构. 若 $\Gamma \vDash A$ 且 A 受到事实反驳，则 $\Gamma_{M(A)} \cup \{\neg A\}$ 称为假说的 R 重构. 一般地，称假说 Γ' 是 Γ 的重构，若 Γ' 是 Γ 的 N 重构或 R 重构. 重构描述了假说遇到新假设或事实反驳后的再造.

在开放逻辑中假说的进化可由认识进程刻画. 称假说序列 $\{\Gamma_n\}$ 为一认识进程，若对任意 $n, n \geqslant 1$，Γ_{n+1} 是 Γ_n 的一个重构. 认识进程是单调的，若对任意 $n \geqslant 1$ 有 $\Gamma_{n+1} \supset \Gamma_n$. 可以证明，一个认识进程是单调增（减）的充分必要条件是对任意 $n \geqslant 1$，Γ_{n+1} 是 Γ_n 的 $N(R)$ 重构，即假说总是在不断增加新假设（遇到事实反驳），它是非单调的充分必要条件是在一认识进程 $\{\Gamma_n\}$ 中 N 重构与 R 重构交替出现.

开放逻辑首次在经典数理逻辑的基础上引入了关于认识进程（形式理论序列）的极限概念. 给定认识进程 $\{\Gamma_n\}$，假设集

$$\Gamma^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \Gamma_m$$

为认识进程的上极限，它表示：若 $A \in \Gamma^*$，则 A 属于无限多个 Γ_m. 假设集

$$\Gamma_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \Gamma_m$$

为认识进程的下极限，它表示：若 $A \in \Gamma_*$，则只有有限个 Γ_m 不包含 A. 称一个认识进程是收敛的，若 $\Gamma_* = \Gamma^*$. 此时 Γ_* 或 Γ^* 称为该认识进程的极限，记为 $\lim \Gamma_n$.

开放逻辑的研究证明：对任意模型 M，若 $\mathrm{Th}(M)$ 为在 M 下为真的全体闭公式集合，又令 Γ 是一可满足的假设集，且不包含与 $\mathrm{Th}(M)$ 逻辑独立的闭公式，则必存在一收敛认识进程 $\{\Gamma_n\}$ 使 $\Gamma_1 = \Gamma$ 且有

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Th}(\Gamma_n) = \mathrm{Th}(M).$$

式中 $\mathrm{Th}(\Gamma)$ 表示 Γ 及由 Γ 推出的全体定理组成的集合. 此结果表明：合理地使用新假设与事实反驳的办法可以逼近任意模型.

开放逻辑是软件开发、数据库和知识库维护以及错误诊断技术的理论基础，有着广阔的应用前景.

新假设（new premise） 见“开放逻辑”.

事实反驳（rejection by facts） 见“开放逻辑”.

形式理论序列的极限（limit of sequence of formal theories） 见“开放逻辑”.

撰　稿　丁德成　王元元　卢景波　朱梧槚　沈呈民　沈复兴　宋方敏　张东摩　郑锡忠　钱　磊　萧奚安

审　阅　王世强　李　未　李国伟　杨东屏　莫绍揆

计 算 数 学

计算数学(computational mathematics) 数学科学的一个分支.是20世纪40年代末期随着计算机的诞生和发展,而逐渐引人注目并得到快速发展的一个数学分支研究领域.它研究数值计算方法的设计、分析和有关的理论基础与软件实现问题.数值分析,又称(数值)计算方法,是计算数学的重要组成部分.计算数学几乎与数学科学的一切分支有联系,它利用其他数学分支的成果来发展新的、更有效的计算方法及理论;反过来,计算数学的发展对数学科学本身也产生了愈来愈大的影响,在许多数学分支的研究中都在探索运用计算的方法.

计算数学研究的内容是一个动态的、不断丰富和充实的研究范畴.例如,并行计算机的出现和发展,给计算数学带来了新的研究课题.目前,概括地说,整个计算数学大致可分为两大部分:一是离散型方程的数值求解,二是连续系统的离散化.从数学的分支内容或类型来看,计算数学则包括数值代数、最优化计算、数值逼近、计算几何、计算概率统计、常微分方程和偏微分方程数值解等.其中,数值代数包括线性代数、高次代数方程、超越方程和非线性方程组的数值解法,而属于有限维离散型问题,大型稀疏线性方程组的求解方法、非线性方程大范围收敛的求解方法是这个领域的重要课题;数值逼近包括函数插值、数值微分、数值积分等,它研究函数的离散逼近,有限元形状函数与样条函数等是该领域的重要研究方向,这部分与数值代数构成计算数学的基础部分;最优化计算包括线性规划、非线性规划、动态规划及多目标规划等几个方面的计算方法(参见第五卷《运筹学》有关条目);计算几何研究静态或动态的几何形体及其视像的离散化逼近与生成的计算方法;计算概率和计算统计包括多元统计分析计算、时间序列分析计算、马尔可夫链计算和数学滤波等(参见《概率论》与《统计学》有关条目);蒙特卡罗法是计算机诞生后由美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann,J.)与美国数学家乌拉姆(Ulam,S.M.)倡导的一类新型计算方法,它将求解的数学问题(离散型或连续型)化为概率模型,在计算机上实现随机模拟,以获得近似解,这种方法的优点是,对于问题的几何形状不敏感,收效速度与维数无关;常微分方程和偏微分方程的数值解法,研究这些方程的离散化方法、对离散方程的求解以及有关的理论基础问题,其离散化方法主要有有限差分方法和有限元方法.有限差分方法历史悠久,导源于英国数学家、物理学家牛顿(Newton,I)、瑞士数学家欧拉(Euler,L.),其思想简单而又自然,即以差商代替微商,于是将微分方程离散化为差分方程.库朗(Courant,R.)、菲德里希斯(Friedrichs,K.O.)与卢伊(Lewy,H.)首开偏微分方程数值方法理论分析的先河,于1928年证明了三大典型方程的典型差分格式的收敛性定理.有限元方法是基于等价的变分原理形式,采取任意格网分片逼近的手段,把差分方法与变分方法有机地结合起来而形成的一种离散化方法,已发展成为计算定常问题的主导方法,并推广应用于非定常问题.

计算数学理论的基本概念包括:误差、稳定性、收敛性、计算复杂性、计算量、存贮量、自适应性等.这些概念描述了计算方法的可靠性、准确性、效率以及计算机实现的方便程度,也是比较算法优劣的标准.

在人类数学发展的漫长历史中,尽管计算不是数学活动的全部,但总也是与生活联系最直接、最密切的一环.数学最早导源于计算,计算也曾是古代数学最重要的组成部分.中国春秋战国时期形成并发展的算筹,曾作为通用、有效的计算工具,以后又改进演化成为算盘,与之相应地发展了珠算方法.中式算盘及其变种在世界上许多国家一直沿用至今.公元前2世纪中叶,古希腊数学家、力学家阿基米德(Archimedes)提出曲直转化极限趋近的方法,并据此算出有一定精确度的圆周率 π 值.在代数方程解法方面,公元前1世纪,中国汉代《九章算术》一书记载了开平方和开立方的算法及求解一元二次方程的盈不足法.高次代数方程的近似解法在《九章算术》中已具雏形,到宋代秦九韶(1247)和元代朱世杰(1303)发展完善.该近似解法相当于西方近代的英国数学家霍纳(Horner,W.G.)算法(1819).

15世纪,欧洲资本主义工商业兴起,科学技术有了新发展.17世纪,以解析几何学及微积分学为标志,近代数学开始形成和发展,数值计算方法也有相应的进步.各个时期的大数学家在发展基础数学的同时,也都对计算方法做出了重要贡献.牛顿、瑞士数学家欧拉(Euler,L.)、法国数学家、力学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)发展了一般插值方法与差分方法及优化计算方法;德国数学家、天文学家高斯(Gauss,C.F.)、俄国数学家、力学家切比雪夫(Чебышев,П.Л.)分别对于均方模量和绝对值模量发展了最优逼近的方法与理论;在高次代数方程方

面发展了牛顿迭代解法以及其他种种求根方法，在线性代数方面发展了高斯-若尔当消元法以及各种迭代法.微积分和微分方程发展的同时，也出现了数值计算的新领域——微分方程的离散化与数值解法.由于科学技术的发展和实践的需要，人们开始认识到数值计算的重要性.但是，直到20世纪40年代，由于社会生产规模的制约，特别是技术手段和计算工具等条件限制，数值计算方法的发展比较缓慢，对科学研究和工程技术所起到的作用也是比较有限的.20世纪40年代末期以来，电子计算机的出现和飞速发展，极大地推动了数值计算方法的深入研究和广泛应用.以前不能设想的、难度和规模日益增大的计算问题的解决，在技术上和经济上都成为可行的，计算在整个科学技术以至经济生活中的重要性得到前所未见的提高.同时，以原来分散在数学各分支的计算方法为基础的一门新的数学分支学科——计算数学开始形成和迅速发展，随着计算机的发展，经典的计算方法也经历了一个重新评价、筛选、改造和创新的过程.与此同时，涌现出许多新思想、新概念、新研究方向和许多更能够发挥计算机潜力，具有更强解题能力和更高计算效率的新方法，从而形成了现代意义下的计算数学.

在现代自然科学与工程技术中，基本规律的精确表达形式大都采用微分方程，但用当代数学解析方法能对其求解的方程仅限于少数“初等”的情况.对绝大多数的变系数、非线性、不规则几何等复杂问题，数学解析的方法几乎无能为力.这种情况在今后相当长的时期内也不可能改变.若采用数值计算的方法，再借助于计算机，则从原则上说，解决非线性方程和其他复杂问题是没有不可逾越的障碍的，计算的方法对那些理论上难以处理的问题能给出丰富的、系统性的感性启示，也能为工程设计提供急需的、关键性的定量依据.另外，对那些不能用精确表达式描述的、数学模型尚未定型的问题，利用数值模拟计算可进行多方案的对比筛选，这对过程的理解和模型的正确建立极有帮助.在一些领域，计算手段所取得的成果，其精确可靠性已经接近、达到或超过实验手段的结果，数值试验还可以直接模拟客观世界的现象与规律.而实验手段往往费人工、费时间、费钱财，而且在某些情况进行实验也非常艰难，甚至是非常危险的.这时，计算的手段就成为非常关键甚至是惟一可行的办法.

由于计算机是一种能延伸和强化人的思维智能的工具，计算速度又有极大提高，并且具有高通用性，所以它的作用深刻影响到一切科学技术领域.它刚诞生时，美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann，J.)就深刻地指出它的巨大潜力和计算的方法作为实验方法和理论方法之外的第三种科学方法的发展前景.半个世纪以来的历史证实了这位天才科学家的预言是正确的.计算机的飞速发展把计算的手段推向人类科学活动的前沿，使计算的方法正在上升为科学方法的一个主要环节.当前科学计算方法与传统的科学实验方法、科学理论方法构成了现代科学方法的三个环节，三者相辅相成，可以相互补充替代而又彼此不可缺少.这是意大利科学家伽利略(Galilei，G.)、牛顿以来在科学方法论方面取得的最大进展.

随着计算的方法在各种科学技术领域应用的推广与深化，科学与工程计算(简称科学计算)作为一门工具性、方法性、边缘交叉性的新学科，开始了自己的发展，它包含了在各种科学与工程领域中发展起来的计算性学科分支，如计算物理、计算化学、计算力学、计算生物学、计算地质学、计算经济学等.计算数学是它们的联系纽带和共性基础.人类的计算能力不仅依赖于计算机，还取决于计算方法的效率，例如，从20世纪50年代到20世纪70年代，计算机的运算速度提高了数千倍，但与此同时，解决某些椭圆型方程的计算方法的效率提高了近百万倍.因此，计算数学的发展对于提高计算能力的贡献与高性能计算机的研制是同样重要的.美国数学家冯·诺伊曼对于科学计算和计算数学的兴起和发展都做出了重大贡献.

在中国，计算数学从1956年开始经过40余年的发展，在基础研究上已取得一些卓越成果，在科学计算上解决了许多重要科学工程计算课题.其中最重要的有：20世纪60年代初期，冯康等人在大型水坝应力计算的基础上，独立于西方创造了有限元方法并最早奠定其理论基础；冯康等人于1984年提出哈密顿系统的辛几何算法，开创了计算物理、计算力学与计算数学之间的一个相互结合、相互渗透的前沿领域.周毓麟等集体研究与完成了大量科学计算课题，为中国原子弹的研制成功、氢弹原理的突破和发展做出重大贡献；周毓麟于1982年开创了离散泛函分析方法，用来研究各种非线性偏微分方程的差分方法，形成了一个新的差分方法理论研究系统，从而使差分方法理论和偏微分方程理论融为一体.

数值分析(numerical analysis)　见“计算数学”.

撰　稿　徐利治　　**审　阅**　周毓麟

误 差 理 论

误差(error)　计算数学的基本概念之一.指经计算所得的近似值与准确值或理论值之差.误差产生于计算方法、计算数据的不准确(例如插入值、截断值)以及误差积累等所引起的精确度的损失.有的

著作中也把绝对误差简称为误差(参见“绝对误差”、“相对误差”).

误差的分类如下:从数值上,误差分为绝对误差和相对误差.从误差来源上,误差分为模型误差、观测误差、方法误差(又称截断误差)、舍入误差,其中观测误差又包括系统误差、随机误差和过失误差三种.从误差的表示方法上,又分为标准误差(又称中误差或均方误差),记为 σ;平均误差,记为 η;概率误差,记为 γ.数字计算机出现后,产生了输入误差或称数据误差.

绝对误差(absolute error) 误差的基本度量之一,指一个量的近似值与精确值之差.其表达式为:$e^*=x^*-x$,其中 x 为精确值,x^* 为近似值,e^* 即为近似值 x^* 的绝对误差,简称误差.误差 e^* 可正可负,当 e^* 为正数时,近似值 x^* 偏大,称为强近似值;当 e^* 为负数时,近似值 x^* 偏小,称为弱近似值.通常不能算出精确值 x,也不能算出误差 e^* 的精确值,只能估计出误差的绝对值的某上限 ε^*,称 ε^* 为近似值的误差限.

强近似值(upper approximate value) 见“绝对误差”.

弱近似值(lower approximate value) 见“绝对误差”.

近似值的误差限(error limit of approximate value) 见“绝对误差”.

最大绝对误差(maximal absolute error) 误差绝对值的上确界.使不等式

$$|e^*|=|x-x^*|\leqslant \Delta$$

成立的最小的数 Δ 称为最大绝对误差.其中 x 是精确值,x^* 为近似值,e^* 是绝对误差.

相对误差(relative error) 误差的基本度量之一,指绝对误差 e^* 与精确值 x 的比值,记为 e_r^*,

$$e_r^*=\frac{e^*}{x}.$$

相对误差 e_r^* 能确切地表示近似值的近似程度.e_r^* 可正可负,它的绝对值的上界称为相对误差限,记为 ε_r^*.相对误差常表成百分数

$$e_r^*=\frac{100e^*}{x}\%.$$

相对误差的 100 倍也称为百分误差.

百分误差(percentage error) 见“相对误差”.

相对误差限(relative error limit) 见“相对误差”.

最大相对误差(maximal relation error) 相对误差绝对值的上确界.使不等式

$$|e_r^*|=\frac{|e^*|}{|x|}\leqslant \delta$$

成立的最小的数 δ 称为最大相对误差.其中 x 是精确值,e^* 和 e_r^* 分别为绝对误差和相对误差.

模型误差(model error) 误差的基本类型之一.数学模型与其所模拟的实际问题之间的误差.用计算机解决科学计算问题,首先要建立数学模型.人们通过科学实验,获得很多现象和大批数据,抓住主要矛盾抛开次要因素,建立数学模型.该模型是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的,因此总是近似的,由此所引起的误差就是模型误差.例如,由于炮弹飞行的数学模型忽略空气阻力而引起弹道的偏差,就是一种模型误差.

观测误差(observational error) 误差的基本类型之一.在数学模型中往往包含若干参变量,如物理比重、阻力系数等,这些量往往是由观测得到的,因此也带来误差,这种误差称为观测误差,它包括系统误差、随机误差和过失误差三种.

系统误差(systematic error) 一种观测误差.是由仪器结构的不良或周围环境的改变而产生的观测误差.

随机误差(random error) 一种观测误差.是由某些难以控制的偶然因素造成的观测误差.

过失误差(gross error) 误差的基本类型之一.指因主观原因或粗枝大叶造成的观测误差或计算误差(参见“观察误差”).

截断误差(truncation error) 亦称方法误差.误差的基本类型之一.指数学模型与数值方法之间的误差.实际问题的数学模型往往很复杂,通常要用数值方法来求它的近似解,模型的准确解与由数值方法得出的准确解之差称为截断误差.

方法误差(error of method) 即“截断误差”.

舍入误差(rounding error(round off error)) 误差的基本类型之一.一个数按四舍五入规则或其他舍入规则得到的近似数的误差.实际计算是按有限位数进行的,为了计算方便或受到计算工具的限制,将有效位数较多的数用有效位数较少的数来代替,代替的方式通常采用四舍五入的规则,这样产生的误差称为舍入误差.

输入误差(error of input data) 亦称数据误差.误差的基本类型之一.指进行数值计算时在输入数据中出现的误差.例如,用有限小数表示 1/3,$\sqrt{2}$,π 等所产生的误差就属于此类.

数据误差(error of data) 即“输入误差”.

误差的表示(error representation) 误差理论术语.指描述真值与多个不同观测值误差性态的表达式.设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是某观测对象的一组观测数据,其算术平均值 $\bar{x}$ 是

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

对真值 x，误差是 $\alpha_i=x_i-x$；离差是 $v_i=x_i-\bar{x}(i=1,2,\cdots,n)$；真值 x 对算术平均值的误差 $\delta=|\bar{x}-x|$. 常用标准误差 σ，平均误差 η，概率误差 γ 来表示误差的不同性态，三者之间有如下关系：

$$\sigma=1.2533\eta=1.4826\gamma,$$
$$\eta=0.7979\sigma=1.1829\gamma,$$
$$\gamma=0.6745\sigma=0.8453\eta,$$
$$\sigma>\eta>\gamma.$$

标准误差(standard error)　亦称均方误差. 表示误差的一种方式. 指各个误差平方的算术平均值的平方根. 即

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}.$$

均方误差(error of mean square)　即“标准误差”.

平均误差(mean error(average error))　表示误差的一种方式. 指离差(v_i)的绝对值的算术平均值，即

$$\eta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|v_i|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|,$$

其中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 是算术平均值.

有效数字(significant digits)　误差理论的基本概念之一. 若某数的近似值 x^* 的误差不大于该数某一位数字的半个单位，该位到 x^* 最左边的第一位非零数字都是该数的有效数字，其个数称为该数的有效位数. 例如，取 $x_1^*=3.14$ 作 π 的近似值，它有三位有效数字；取 $x_2^*=3.141$ 作 π 的近似值，x_2^* 仍有三位有效数字(3,1,4)；取 $x_3^*=3.142$ 作 π 的近似值，x_3^* 就有四位有效数字(3,1,4,2). 一个准确数经四舍五入得到的近似数的所有数字都是有效数字.

有效位数(number of significant digits)　见“有效数字”.

四舍五入(counting fractions over 1/2 as one and disregarding the rest)　一种数的近似取值方法. 对一个数 x 进行四舍五入是指对它的十进制表示保留从左数起的一定数目的数字，而把其余舍弃以后得到的 x^*，要求两者的差的绝对值 $|x^*-x|$ 不超过被保留的最后数位的半个单位. 如舍弃的部分正好是被保留的最后数位的半个单位，就有两种可能，一般都规定要被保留的最后一位数字是偶数，即被保留的末位数是奇数时应增加 1；被保留的末位是偶数时不变.

数 值 逼 近

数值逼近(numerical approximation)　现代计算数学的基本组成部分. 它的主要研究方向有函数逼近、函数插值、数值微分和数值积分等.

函数逼近研究在某一种度量意义下，寻求函数在某种较简单又便于计算的逼近函数类中的近似表示，以便于计算和处理. 函数插值研究从离散数据出发补插出连续函数的各种方式的插值方法，实践和理论表明，分片低阶插值比高阶插值有更好的数值稳定性，因此，其中的样条函数插值被广泛应用，是重要的发展方向.

快速傅里叶变换(FFT)是计算有限离散傅里叶变换的一种快速算法，它把 N 点变换的计算量从传统的 $O(N^2)$ 降至 $O(N\log_2 N)$，对实践上要求的大 N，工效提高了若干数量级，为数值谐波分析方法的工程应用创造了条件，也推动了各种快速算法的研究.

数值微分和数值积分研究函数导数和定积分近似计算的数值方法，它们是插值法的直接应用. 基于插值多项式的数值微分公式稳定性差，以致数值微分不可靠；而基于样条函数的数值微分公式则能避免用插值法求数值导数的此种不可靠性.

插值(interpolation)　数值逼近的基本方法和主要研究方向. 是从某函数的某些给定的离散点上的已知值或导数值出发补插出该函数的数值方法的总称，是函数数值逼近的重要组成部分.

给定函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异点的值 $f(x_i)$(有时还给定某些点的某些导数值)，$i=0,1,\cdots,n$，在某函数类 Φ 中寻求函数 $\varphi(x)$，使之 $\varphi(x_i)=f(x_i)$(有时还要求在某些点处某些导数值相等)，则称之为插值问题. $f(x)$ 是待求的被插值函数，$\varphi(x)$ 被称为 $f(x)$ 的插值函数. 函数类 Φ 可以是不同函数类，如取 Φ 作代数多项式、有理函数、指数函数、三角多项式等，于是就相应有代数多项式插值、有理插值、指数插值、三角插值等不同类型的插值方法.

插值问题的主要研究内容是：给定被插函数 $f(x)$ 的插值节点，插值函数类 Φ，插值条件，满足插值条件的函数 $\varphi(x)(\in\Phi)$ 的存在性、惟一性和构造问题；插值函数作为被插函数的近似的误差估计问题；以及当插值结点逐渐加密，并相应扩充插值函数类的插值过程的收敛性和稳定性问题.

利用插值方法通过函数在有限个点处的取值状况估算出该函数在未知点处的值，是求近似值的最基本最常用的手段. 中国刘焯早在公元 6 世纪就将等距二次插值用于天文计算. 英国数学家、物理学家牛顿(Newton, I.)和格雷果里(Gregory, J.)于 17 世纪建立了等距节点上的插值公式；法国数学家、力学家拉格朗日(Lagrange, J.-L.)于 18 世纪给出了一般的非等距结点上的插值公式；他们应用插值公式于航海与天文计算中. 许多现代数值计算方法都

直接或间接地利用了在离散数据的基础上补插出连续函数的思想和方法，例如数值积分、有限差分方法、有限元法和有限体积方法等.

插值问题(interpolation problem) 见"插值".

插值法(interpolation method) 数值逼近的基本方法之一.是由已知的离散数据补插出连续函数的方法.它利用给定的一批离散样点，做出通过这些样点的、连续的、有一定光滑性的曲线(或曲面).插值法的实际意义在于，按某种规则构造一个相对简单的函数$P(x)$作为复杂函数$f(x)$的近似.用$P(x)$代替$f(x)$，进行数值计算、解析表达、图形显示等.常用的插值方法，按$P(x)$所属的函数类不同，有多项式插值(代数插值)、三角插值、指数插值、有理插值、样条插值等.

插值函数(interpolating function) 插值法的基本概念之一.指插值法中用来作为复杂函数$f(x)$的近似表达式的简单函数$P(x)$.以在$[a,b]$上有定义的一元实变量实值函数$f(x)$为例，已知$f(x)$在$x_i\in[a,b]$取值$f_i(i=0,1,\cdots,n)$(有时还给定某些点的某些导数值)，寻求一个简单函数$P(x)$，使得$P(x_i)=f_i\ (i=0,1,\cdots,n)$成立(有时还要求在某些点处某些导数值相等)，则称$f(x)$为被插值函数，$p(x)$为$f(x)$的插值函数，称$p(x_i)=f_i$(以及有时要求在某些点处的某些导数值相等)为插值条件，称互不相同的$n+1$个点$x_0,x_1,\cdots,x_n$为插值节点，称区间

$$[\min_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\},\max_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}]$$

为插值区间，称平面上$n+1$个点$(x_0,f_0),(x_1,f_1),\cdots,(x_n,f_n)$为样点.

插值节点(结点)(nodes of interpolation, interpolation knot) 见"插值函数".

插值区间(interval of interpolation) 见"插值函数".

样点(sample point) 见"插值函数".

插值条件(condition of interpolation) 见"插值函数".

多项式插值(polynomial interpolation) 亦称代数插值.常用的插值方法之一.插值函数$P(x)$为代数多项式的插值法，称$P(x)$为插值多项式，多项式插值是一种最基本、最重要、最常用的插值法.

代数插值(algebraic interpolation) 即"多项式插值".

插值多项式(interpolating polynomial) 见"多项式插值".

内插(interpolate) 插值法的基本类型之一.当自变量x不是插值节点，但位于插值区间之内时，用插值函数$P(x)$补插被插函数$f(x)$称为内插.

外推(extrapolate) 亦称外插.插值法的基本类型之一.当自变量x不是插值节点，且x位于插值区间之外时，用插值函数$P(x)$的值作为被插值函数$f(x)$的近似值，称为外插或外推.

外插(extrapolate) 即"外推".

插值余项(interpolation remainder) 亦称插值误差.插值法的基本概念之一.指被插值函数$f(x)$与插值函数$P(x)$的差，表示为

$$R(x)=f(x)-P(x),$$

它在插值节点处为零.插值余项可有多种表达形式.

插值误差(interpolation error) 即"插值余项".

水平插值(level interpolation) 亦称零次插值.一种插值方法.过样点(x_0,f_0)所作的水平直线，即$P(x)=f_0$，称为$f(x)$的水平插值.当$f'(x)$存在时，该插值余项$R(x)=f'(\xi)(x-x_0)$，其中ξ介于x_0,x之间.

零次插值(zero degree interpolation) 即"水平插值".

线性插值(linear interpolation) 一种插值方法.指以线性函数为插值函数的插值方法.是过两个样点$(x_0,f_0),(x_1,f_1)$所作的代数插值.其插值多项式为

$$P(x)=f_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

称为线性插值公式.令

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

则$l_0(x),l_1(x)$构成了线性插值的基函数.于是$P(x)$可表示为$P(x)=f_0l_0(x)+f_1l_1(x)$.若$f''(x)$连续，则线性插值余项

$$\begin{aligned}R(x)&=f(x)-P(x)\\&=\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\end{aligned}$$

式中ξ是在包含x,x_0,x_1的最小闭区间中的某一点.线性插值公式是最常用、最简单的插值公式.

线性插值公式(formula of linear interpolation) 见"线性插值".

抛物插值(parabolic interpolation) 一种插值方法.指以二次多项式为插值函数的插值方法.是过三个样点$(x_0,f_0),(x_1,f_1),(x_2,f_2)$所做的代数插值.其插值多项式为二次多项式：

$$P(x)=f_0l_0(x)+f_1l_1(x)+f_2l_2(x),$$

称为抛物插值公式，亦称拉格朗日插值公式，其中

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

为抛物插值的基函数. 当 $f(x)$ 三次连续可微时，抛物插值的余项可表为

$$R(x)=f(x)-P(x)$$
$$=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

式中 ξ 是在包含 x,x_0,x_1,x_2 的最小闭区间中的某一点. 抛物插值公式也是一种常用的插值公式.

抛物插值公式(formula of parabolic interpolation) 见"抛物插值".

一点一次带导数插值(one-point linear interpolation with derivative) 亦称切线插值. 一种线性插值. 指过样点 (x_0,f_0) 满足函数值及导数值插值条件的线性插值. 满足条件 $P(x_0)=f_0$, $P'(x_0)=f'_0$ 的一次多项式

$$P(x)=f_0+f'_0(x-x_0),$$

称为一点一次带导数的插值公式.

切线插值(tangent interpolation) 即"一点一次带导数插值".

两点三次带导数插值(two-point cubic interpolation with derivative) 一种多项式插值. 指过两点满足函数值及导数值插值条件的插值. 过样点 (x_0,f_0), (x_1,f_1) 满足条件 $P(x_0)=f_0$, $P'(x_0)=f'_0$, $P(x_1)=f_1$, $P'(x_1)=f'_1$ 的插值多项式

$$P(x)=f_0\alpha_0(x)+f'_0\beta_0(x)+f_1\alpha_1(x)+f'_1\beta_1(x)$$

称为两点三次带导数插法公式，其中

$$\alpha_0(x)=l_0^2(x)(1+2l_1(x)),$$
$$\alpha_1(x)=l_1^2(x)(1+2l_0(x)),$$
$$\beta_0(x)=(x_1-x_0)l_0^2(x)l_1(x),$$
$$\beta_1(x)=(x_0-x_1)l_1^2(x)l_0(x),$$
$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

两点三次带导数插值是埃尔米特插值中最基本、最常用的一种(参见"埃尔米特插值").

拉格朗日插值(Lagrange interpolation) 一种多项式插值. 指插值条件中不出现被插函数导数值的插值. 过 $n+1$ 个样点 (x_i,f_i) $(i=0,1,\cdots,n)$ 满足插值条件

$$L_n(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

的 n 次多项式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f_il_i(x),$$

称为拉格朗日插值多项式，亦称拉格朗日插值公式，其中

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

为 n 次多项式，而且

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & (j=i)\\0 & (j\neq i)\end{cases}\ (i,j=0,1,\cdots,n).$$

$l_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 线性无关，称为拉格朗日插值基函数. 拉格朗日插值公式将插值多项式表为基函数的线性组合，组合系数就是 $f(x)$ 在各插值节点上的函数值. 如果被插值函数 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶连续导数，则插值余项

$$R(x)=f(x)-L_n(x)$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)$$
$$(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

其中 ξ 属于包含 $x,x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的最小闭区间. 拉格朗日插值是最基本、最常用的一种插值.

插值基函数(base functions of interpolation) 见"拉格朗日插值".

拉格朗日插值多项式(Lagrange interpolating polynomial) 见"拉格朗日插值".

张遂-牛顿插值公式(Zhang-Newton interpolation formula) 亦称牛顿插值公式. 一种便于计算的插值多项式，是拉格朗日插值公式的另一种表达形式. 具体形式为

$$L_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$

其中

$$f[x_0]=f_0,$$
$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0},$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$f[x_0,x_1,\cdots,x_i]$$
$$=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_i]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{i-1}]}{x_i-x_0},$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0},$$

依次为零阶均差，一阶均差，$\cdots$，i 阶均差，$\cdots$，n 阶均差(参见"均差").

张遂-牛顿插值公式的特点是，当增加一个插值节点时，只需在原来的插值公式中增加一项. 张遂是中国唐朝天文学家、数学家.

牛顿插值公式(Newton interpolation formula) 即"张遂-牛顿插值公式".

埃特金逐步线性插值法(Aitken successive linear interpolation method) 一种能逐步升阶的插值方法. 用拉格朗日插值多项式计算函数近似值时，如果精度不满足要求，需增加插值节点以提高插值多

项式次数时，原来算出的结果均不能利用，必须重新计算. 用埃特金逐步线性插值法能克服这一缺点. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为非负整数. 记

$$I_{i_k}(x) = f(x_{i_k}), I_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(x)$$

为关于节点 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$ 的 $n-1$ 次插值多项式. 由两个 k 次插值多项式 $I_{0,1,\cdots,k}(x), I_{0,1,\cdots,k-1,l}(x)$ 作线性插值可得到 $k+1$ 次插值多项式

$$I_{0,1,\cdots,k,l}(x) = I_{0,1,\cdots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\cdots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\cdots,k}(x)}{x_l - x_k}(x - x_k), \qquad (1)$$

它是关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_k, x_l$ 的插值多项式，称其为埃特金逐步线性插值公式. $k=1$ 时为线性插值. 计算时可由 $k=0$ 到 $k=n-1$ 逐步求得所需的插值多项式. 计算过程如下表所示.

x_0	$f(x_0)=I_0$					$x-x_0$
x_1	$f(x_1)=I_1$	$I_{0,1}$				$x-x_1$
x_2	$f(x_2)=I_2$	$I_{0,2}$	$I_{0,1,2}$			$x-x_2$
x_3	$f(x_3)=I_3$	$I_{0,3}$	$I_{0,1,3}$	$I_{0,1,2,3}$		$x-x_3$
x_4	$f(x_4)=I_4$	$I_{0,4}$	$I_{0,1,4}$	$I_{0,1,2,4}$	$I_{0,1,2,3,4}$	$x-x_4$

公式(1)也可以改写为

$$I_{0,1,\cdots,k,k+1}(x) = I_{0,1,\cdots,k}(x) + \frac{I_{1,2,\cdots,k+1}(x) - I_{0,1,\cdots,k}(x)}{x_{k+1} - x_0}(x - x_0). \qquad (2)$$

按(2)式计算，就是奈维尔算法. 计算过程如下表所示.

x_0	$f(x_0)=I_0$					$x-x_0$
x_1	$f(x_1)=I_1$	$I_{0,1}$				x_1-x_0
x_2	$f(x_2)=I_2$	$I_{1,2}$	$I_{0,1,2}$			x_2-x_0
x_3	$f(x_3)=I_3$	$I_{2,3}$	$I_{1,2,3}$	$I_{0,1,2,3}$		x_3-x_0
x_4	$f(x_4)=I_4$	$I_{3,4}$	$I_{2,3,4}$	$I_{1,2,3,4}$	$I_{0,1,2,3,4}$	x_4-x_0

从表上看到每增加一个节点就计算一行，斜线上是 1 次到 4 次插值多项式的值. 如精度不满足要求，再增加一个节点，前面的计算结果完全有效. 这个算法适用于计算机上计算，且具有自动选取节点并逐步比较精度的特点，程序也较简单. 一般以斜线上两个相邻插值多项式的值之差满足所需精度作为计算过程终止标志.

埃特金逐步线性插值公式(formula of Aitken successive linear interpolation method)　见“埃特金逐步线性插值法”.

奈维尔算法(Neville algorithm)　见“埃特金逐步线性插值法”.

均差(divided difference)　亦称差商. 计算数学的基本概念之一. 表示离散函数变化快慢的一种量值. 指离散函数的改变量和离散变量改变量的比值. 称

$$f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_k 的一阶均差，称

$$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_1, x_k 的二阶均差. 一般称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的 k 阶均差.

给出了函数值，可按下表逐次计算各阶均差.

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	x_k-x_{k-1}
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			x_1-x_0
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		x_2-x_1
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	x_3-x_2

称上面的表格为均差表. 均差具有如下的基本性质：

1. 均差可表为函数值的线性组合，即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})} \cdot \frac{1}{(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)},$$

其中 $\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k)$.

2. 均差关于节点具有对称性，即与节点的排列顺序无关. 例如

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_2, x_1, x_0].$$

3. 如果 $f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 是一个依赖于 x 的 m 次代数多项式，那么 $f[x, x_0, \cdots. x_k, x_{k+1}]$ 是一个关于 x 的 $m-1$ 次代数多项式.

4. 设 $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$，则有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \varphi[x_0, x_1, \cdots, x_j]\psi[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_k].$$

5. 当节点 x_k 是等距分布时，即 $x_k = x_0 + kh$ 时，令 $y_k = f(x_k)$，则均差与差分之间有下面关系式成立

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k!\ h^k}.$$

6. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在 n 阶连续导数，且 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$，则 n 阶均差与 n 阶导数间有下面关系式

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi\in[a,b].$$

均差表(divided difference scheme table)　见"均差".

差分(finite difference)　计算数学的基本概念之一.指离散函数在离散节点上的改变量.设函数 $y=f(x)$在等距节点 $x_k=x_0+kh(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$上的值 $y_k=f(x_k)$为已知,此处 $h>0$ 为常数,称为步长. $y_{k+1}-y_k$ 称为 $f(x)$于点 x_k 的一阶向前差分,记为 Δy_k.符号 Δ 称为向前差分算子,简称差分算子.一般称

$$\Delta^m y_k=\Delta(\Delta^{m-1}y_k)=\Delta^{m-1}y_{k+1}-\Delta^{m-1}y_k$$

为 $f(x)$于点 x_k 的 m 阶向前差分,而 $\Delta^0 y_k=y_k$.

差分算子 Δ 具有下列性质:

1. 常数的差分为零,即 $\Delta c=0$,这里 c 为常数.

2. 差分算子是线性算子,即 $\Delta(c_1y_k+c_2z_k)=c_1\Delta y_k+c_2\Delta z_k$.这里 c_1,c_2 为任意常数,y_k,z_k 分别为函数 $y=f(x)$和 $z=g(x)$于点 x_k 的值.

3. 若 r,s 为非负整数,则 $\Delta^r(\Delta^s y_k)=\Delta^s(\Delta^r y_k)=\Delta^{r+s}y_k$,简记为 $\Delta^r\cdot\Delta^s=\Delta^s\cdot\Delta^r=\Delta^{r+s}$.

4. 若 $f(x)$是 n 次多项式,记 $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$,则 $\Delta^k f(x)(0\leqslant k\leqslant n)$是 $n-k$ 次多项式,且当 $k>n$ 时,$\Delta^k f(x)=0$.

5. $\Delta(f_k\cdot g_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k$.

6. $\sum\limits_{k=0}^{N-1}f_k\Delta g_k=f_Ng_N-f_0g_0-\sum\limits_{k=0}^{N-1}g_{k+1}\Delta f_k$.

除向前差分算子 Δ 外,还有几种常用的差分算子:

不变算子 I:$If_k=f_k$;

移位算子 E:$Ef_k=f_{k+1}$;

向后差分算子∇:$\nabla f_k=f_k-f_{k-1}$;

中心差分算子 δ:

$$\delta f_k=f\left(x_k+\frac{1}{2}h\right)-f\left(x_k-\frac{h}{2}\right);$$

平均算子 μ:$\mu f_k=\frac{1}{2}[f_k+f_{k+1}]$;

中心差分 δf_k 用到

$$f_{k\pm\frac{1}{2}}=f\left(x_k\pm\frac{h}{2}\right)$$

两个函数值,实际上不是函数表上的值.如果用函数表上的值表示,一阶中心差分可写成

$$\delta f_{k+\frac{1}{2}}=f_{k+1}-f_k,\ \delta f_{k-\frac{1}{2}}=f_k-f_{k-1},$$

二阶中心差分为

$$\delta^2 f_k=\delta f_{k+\frac{1}{2}}-\delta f_{k-\frac{1}{2}},$$

等.上述各差分算子间满足以下一些关系式:

$$\Delta=E-I,\ \Delta=E\cdot\nabla,\ \nabla=I-E^{-1},$$

$$\delta=\Delta E^{-\frac{1}{2}}=E^{-\frac{1}{2}}\Delta=(I-E^{-1})E^{\frac{1}{2}}=E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mu=\frac{1}{2}(I+E)=E-\frac{1}{2}\Delta.$$

与差分算子有密切关系的,是微分算子 D:$Df(x)=f'(x)$.据 $f(x)$的泰勒展式,有

$$\begin{aligned}Ef(x)&=f(x+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}D^kf(x)=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(hD)^k}{k!}\right]f(x)\\&=e^{hD}f(x).\end{aligned}$$

因此,移位算子 E 与微分算子 D 之间有关系式

$$E=e^{hD},\ hD=\ln E=\ln(I+\Delta).$$

上述各算子的定义、性质及关系式在推导插值公式、数值微分公式、数值积分公式中有用.为计算 $f(x)$的各阶差分,使用如下的差分表十分方便.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$

上面是向前差分表.有时也使用类似的向后差分表.

差分算子(difference operator)　见"差分".

差分表(finite difference table)　见"差分".

向前差分(forward difference)　见"差分".

向后差分(backward difference)　见"差分".

中心差分(central difference)　见"差分".

向前差分算子(forward difference operator)　见"差分".

向后差分算子(backward difference operator)　见"差分".

中心差分算子(central difference operator)　见"差分".

不变算子(identity operator)　见"差分".

移位算子(shift operator)　见"差分".

平均算子(mean operator)　见"差分".

差商(difference quotient)　即均差.指导数的近似值.对等步长(h)的离散函数 $f(x)$,其 n 阶差商就是它的 n 阶差分与其步长的 n 次幂的比值.例如 $n=1$ 时,若差分取向前的或向后的,所得一阶差商就是函数的导数的一阶近似;若差分取中心的,则所得一阶差商是导数的二阶近似.

有限差分方程(finite difference equations)　一种特殊的函数方程.指含有未知函数差分的方程.其一般形式为

$$F(x,f(x),\Delta f(x),\cdots,\Delta^n f(x))=0,\qquad(1)$$

式中 F 是已知函数，$f(x)$是未知函数，x 是自变量，

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

称为 $f(x)$在 x 处的一阶差分，h 为一正常数，称为步长，对于大于 1 的正整数 n，n 阶差分按递归方式定义，即

$$\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x)).$$

利用上述定义式(1)可化为

$$\Phi(x,f(x),f(x+h),\cdots,f(x+nh))=0.\ (2)$$

如果(2)式同时含有 $f(x)$与 $f(x+nh)$，则称式(1)或式(2)为 n 阶有限差分方程. 称满足有限差分方程的离散函数为它的解. n 阶有限差分方程的每个解最多含有 n 个任意常数，这样的解称为它的通解；以适当的方式确定通解中的任意常数，即可获得满足附加约束条件的特解.

有限差分方程的解(solution of finite difference equations)　见"有限差分方程".

有限差分方程的通解(general solution of finite difference equations)　见"有限差分方程".

有限差分方程的特解(particular solution of finite difference equations)　见"有限差分方程".

等距节点插值公式(interpolation formula with equidistant nodes)　一种简化的插值公式. 指用差分代替差商表达的插值公式. 这类公式不仅省去了差商运算中的除法，而且在形式上更简单、使用上更方便. 依被插值点在插值区间的位置不同，有多种等距节点插值公式.

刘焯-牛顿向前插值公式(Liu-Newton forward interpolation formula)　亦称牛顿前插公式. 一种等距节点插值公式. 特别适用于被插值点 x 位于插值区间左端点附近的情况：$x=x_0+th$，$0<t<1$. 刘焯-牛顿向前插值公式的具体形式为

$$\begin{aligned}&N_n(x+th)\\&=\sum_{v=0}^{n}\frac{t^{(v)}\Delta^v y_0}{v!}=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0\\&\quad+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y.\end{aligned}$$

这里 $t^{(v)}$为阶乘多项式 $t^{(v)}=t(t-1)\cdots(t-v+1)$. 刘焯-牛顿前插公式的余项为

$$R_n(x_0+th)=h^{n+1}\frac{t^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$
$$(x_0<\xi<x_0+nh).$$

刘焯是中国隋朝天文学家、数学家. 他在天文学的计算中首先建立了这一公式. 比英国数学家、物理学家牛顿(Newton,I.)提出这一公式早一千多年.

牛顿前插公式(Newton forward interpolation formula)　即"刘焯-牛顿向前插值公式".

牛顿向后插值公式(Newton backward interpolation formula)　简称牛顿后插公式. 一种等距节点插值公式. 特别适用于被插值点 x 位于插值区间右端点附近的情况：$x=x_n-th$，$0<t<1$. 牛顿向后插值公式的具体形式是

$$\begin{aligned}N_n(x_n-th)&=\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\frac{t^{(v)}\Delta^v y_{n-v}}{v!}\\&=y_n-t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}-\cdots\\&\quad+(-1)^n\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,\end{aligned}$$

牛顿向后插值公式的余项为

$$R_n(x_n-th)=(-1)^{n+1}\frac{h^{n+1}t^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$
$$(x_0<\xi<x_0+nh).$$

牛顿后插公式也可用向后差分表出. 此时设 $x=x_n+th$，$-1<t<0$，具体形式为

$$\begin{aligned}N_n(x+th)&=y_n+t\nabla y_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n+\cdots\\&\quad+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n,\end{aligned}$$

其余项为

$$R_n(x+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$
$$(x_0<\xi<x_0+nh).$$

牛顿后插公式(Newton backward interpolation formula)　牛顿向后插值公式的简称.

斯特林插值公式(Stirling interpolation formula)　一种等距节点插值公式. 适用于被插值点 x 位于插值区间中部的情形. 为方便计，设与 x 距离最近的插值节点为 x_0，然后将插值节点按如下顺序编号：

$$x_0,x_1=x_0+h,x_2=x_0-h,$$
$$x_3=x_0+2h,x_4=x_0-2h,\cdots$$

令 $x=x_0+th$，$y_{\pm k}=f(x_0\pm kh)$. 由非等距节点的牛顿插值公式及均差与差分的关系，即可得到所谓高斯第一(插值)公式

$$\begin{aligned}G_1(x_0+th)&=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}\\&\quad+\frac{t(t^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\cdots\end{aligned}$$

也可以将插值节点 $x_0,x_0\pm h,x_0\pm 2h$ 按下列顺序编号：$x_0,x_1=x_0-h,x_2=x_0+h,x_3=x_0-2h,x_4=x_0+2h,\cdots$仍令 $x=x_0+th$，$y_{\pm k}=f(x_0\pm kh)$，又可得到所谓高斯第二(插值)公式

$$\begin{aligned}G_2(x_0+th)&=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_{-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}\\&\quad+\frac{t(t^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+\cdots\end{aligned}$$

这两个公式实际上并不直接应用. 通常是用它们的算术平均值，即所谓斯特林插值公式：

$$S_{2p}(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1!}\{\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}\}+\frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}$$

$$+\frac{t(t^2-1)}{3!}\left\{\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}\right\}+\frac{t^2(t^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$
$$+\cdots+\frac{t(t^2-1)(t^2-4)\cdots(t^2-(p-1)^2)}{(2p-1)!}$$
$$\cdot\left\{\frac{\Delta^{2p-1}y_{-(p-1)}+\Delta^{2p-1}y_{-p}}{2}\right\}$$
$$+\frac{t(t^2-1)(t^2-4)\cdots(t^2-(p-1)^2)}{(2p)!}\Delta^{2p}y_{-p},$$

其余项为

$$R_{2p}(x_0+th)$$
$$=t(t^2-1)(t^2-4)\cdots(t^2-p^2)h^{2p+1}\frac{f^{(2p+1)}(\xi)}{(2p+1)!}$$
$$(x_0-ph<\xi<x_0+ph).$$

斯特林插值公式中使用的插值节点个数为奇数．一般，当$|x-x_0|\leqslant h/4$时才使用这个公式．

高斯第一（插值）公式（Gauss first (interpolation) formula） 见“斯特林插值公式”．

高斯第二（插值）公式（Gauss second (interpolation) formula） 见“斯特林插值公式”．

贝塞尔插值公式（Bessel interpolation formula） 一种等距节点插值公式．适用于被插值节点x位于插值区间中部且位于两相邻插值点（设为x_0,x_1）的中点$x_0+h/2$附近的情况．具体公式为

$$B_{2p-1}(x_0+th)=\frac{1}{2}\{y_0+y_1\}+\frac{t-\frac{1}{2}}{1!}\Delta y_0$$
$$+\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}\left\{\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2}\right\}$$
$$+\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$
$$+\frac{\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]}{4!}$$
$$\cdot\left\{\frac{\Delta^4 y_{-1}+\Delta^4 y_{-2}}{2}\right\}+\cdots$$
$$+\left\{\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]\cdots\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2p-3)^2}{4}\right]\Big/(2p-2)!\right\}$$
$$\cdot\left\{\frac{\Delta^{2p-2}y_{-(p-2)}+\Delta^{2p-2}y_{-(p-1)}}{2}\right\}$$
$$+\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]\cdots\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2p-3)^2}{4}\right]\Big/(2p-1)!\right\}$$
$$\cdot\Delta^{2p-1}y_{-(p-1)},$$

其余项为

$$R_{2p-1}(x_0+th)$$
$$=\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]\cdots$$
$$\cdot\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2p-1)^2}{4}\right]\cdot\frac{h^{2p}}{(2p)!}f^{(2p)}(\xi)$$
$$(x_0-(p-1)h<\xi<x_0+ph).$$

这个公式一般当$|t-1/2|\leqslant 1/4$时使用．当$t=1/2$，即x恰为$[x_0,x_1]$的中点时，贝塞尔插值公式具有更简单的形式，且常被使用．

$$B_{2p-1}\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$$
$$=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{2!\ 2^2}\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2}$$
$$+\frac{1^2\cdot 3^2}{4!\ 2^4}\frac{\Delta^4 y_{-1}+\Delta^4 y_{-2}}{2}+\cdots$$
$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2p-3)^2}{(2p-2)!\ 2^{2p-2}}$$
$$\cdot\frac{\Delta^{2p-2}y_{-(p-2)}+\Delta^{2p-2}y_{-(p-1)}}{2},$$

其余项为

$$R_{2p-1}\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$$
$$=(-1)^p\{(2p-1)!!\}^2 2^{-2p}\{(2p)!\}^{-1}h^{2p}f^{(2p)}(\xi),$$
$$(x_0-(p-1)h<\xi<x_0+ph).$$

注意贝塞尔插值公式总是使用偶数个插值节点．

埃弗瑞特插值公式（Everette interpolation formula） 一种插值公式．它是高斯第一插值公式的另一种表现形式（参见“斯特林插值公式”）．令$n=2p-1$，将高斯第一公式中的奇数阶差分变成低一阶的偶数阶差分，经整理、化简，得到埃弗瑞特插值公式

$$E_{2p-1}(x_0+th)=F_0(\eta)+F_1(t),$$

这里，被插值节点$x=x_0+th$，

$$F_i(u)=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{u(u^2-1)(u^2-4)\cdots(u^2-k^2)}{(2k+1)!}\Delta^{2k}y_{-k+i}$$
$$(\eta=(1-t),\ 0<t<1).$$

其余项为

$$R_{2p-1}(x_0+th)=\frac{h^{2p}f^{(2p)}(\xi)}{(2p)!}t(t-p)\prod_{k=1}^{p-1}(t^2-k^2).$$

埃尔米特插值（Hermite interpolation） 亦称切触插值．带导数条件的多项式插值．这种插值要求所构造的插值函数$H(x)$与被插值函数$f(x)$关于插值节点，不仅有相同的函数值，而且有某些阶相同的导数值．

设$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$是两两互异的点，且已知$f(x)$于这些点的函数值$f_i$，导数值$f_i'$$(i=0,1,2,\cdots,n)$．构造一个次数$\leqslant 2n+1$的多项式$H_{2n+1}(x)$，使其满足条件

$$H_{2n+1}(x_i)=f_i,$$
$$H_{2n+1}'(x_i)=f_i'\ (i=0,1,\cdots,n)$$

的插值问题称为埃尔米特插值．所求得的$H_{2n+1}(x)$

称为埃尔米特插值多项式.一种紧凑的表达形式是

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i[1-2(x-x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x) + \sum_{i=0}^{n} f_i'(x-x_i)l_i^2(x), \qquad (1)$$

其中 $l_i(x)$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的拉格朗日插值基函数(参见"拉格朗日插值").当 $f^{(2n+2)}(x)$ 于 (a,b) 连续时,有余项表达式

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots(x-x_n)^2 \quad (a<\xi<b).$$

(1)式是一种最基本、最常用的埃尔米特插值公式.更为一般的埃尔米特插值问题是:在插值节点上,作为插值条件,还可以给出逐次高阶导数值.在每个节点上的插值条件的个数也可以是互不相同的.设 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$,以 $f_k^{(l)}$ 表示 $f(x)$ 于 x_k 的 l 阶导数值.埃尔米特插值问题可叙述为:求一个 α 次多项式 $H(x)$,使

$$H^{(l)}(x_k)=f_k^{(l)} \quad (0\leqslant l\leqslant \alpha_k-1,\ 1\leqslant k\leqslant n),$$

其中

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-1.$$

满足上述插值条件的 $H(x)$ 可以表为

$$H(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{\alpha_k-1} f_k^{(l)}H_{k,l}(x),$$

其中 $H_{k,l}(x)$ 为 α 次多项式,满足条件

$$H_{k,l}^{(i)}(x_j)=\begin{cases}1 & (i=l \text{ 且 } k=j),\\ 0 & (\text{其他}).\end{cases}$$

切触插值(osculating interpolation) 即"埃尔米特插值".

埃尔米特插值公式(Hermite interpolating formula) 见"埃尔米特插值".

埃尔米特插值多项式(Hermite interpolating polynomial) 见"埃尔米特插值".

埃尔米特插值条件(Hermite interpolating condition) 见"埃尔米特插值".

分段插值法(piecewise interpolation method) 一种插值方法.它是根据区间的小区间上的插值形成整个区间的插值方法,即将插值区间分为若干小区间,在每个小区间上采用低次插值的方法.它可以克服在整个插值区间上作高次插值导致的数值不稳定现象,从而达到更好的整体逼近效果.分段插值法大致分为两类,一类是局部化的分段插值,如分段二次插值、分段埃尔米特插值,这类方法只利用被插值函数于本段的信息,从而可以各段独立地进行插值;另一类是非局部化的分段插值,如三次样条插值,用这类方法求出的插值函数虽然是分段表达的,但要依赖于整个插值区间上的信息,从而不能以各段独立而应以各段联立的方式进行.

样条插值(spline interpolation) 一种插值方法.指利用样条函数作为插值函数的插值方法.对区间 $[a,b]$ 的一个分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,若函数 $s(x)$ 满足:

1. $s(x)$ 于每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上为 m 次多项式;

2. $s(x)$ 于 $[a,b]$ 上为 $m-1$ 次可微函数;

则称 $s(x)$ 为 $[a,b]$ 上关于分划 Δ 的 m 次样条函数.此即多项式样条函数.例如,当 $m=3$,$s(x)$ 就是关于分划 Δ 的三次样条函数,或三次样条插值函数,简称三次样条.$[a,b]$ 上关于分划 Δ 的 m 次样条函数全体构成一个 $m+n$ 维线性空间,可用 B-样条函数表出该线性空间的一组基底(参见"B-样条函数").一般,凡分段(片)光滑、各段(片)衔接处具有一定光滑性的函数都称为样条函数,也称样条曲线,简称样条.高次多项式插值有数值不稳定的缺点,而样条插值却有较好的稳定性和收敛性.迄今,样条函数作为数值逼近的一种重要工具已广泛应用于各类数据的插值、拟合、平滑及数值积分、数值微分、微分方程数值解法、积分方程数值解法等方面.

样条函数(spline function) 见"样条插值".

样条曲线(spline curve) 见"样条插值".

三次样条(cubic spline) 见"样条插值".

三次样条插值(cubic spline interpolation) 一种常用的样条插值(参见"样条插值").设 $[a,b]$ 上的插值节点构成 $[a,b]$ 的一个分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,$f(x)$ 于各节点的值是 $f(x_i)=f_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$.三次样条插值问题是求 $[a,b]$ 上关于分划 Δ 的三次样条函数 $s(x)$.根据 $s(x)$ 应满足的两个条件于 $[x_i,x_{i+1}]$,有

$$s(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i+\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1} +(x_{i+1}-x)\left(\frac{f_i}{h_i}-\frac{h_i}{6}M_i\right) +(x-x_i)\left(\frac{f_{i+1}}{h_i}-\frac{h_i}{6}M_{i+1}\right), \qquad (1)$$

其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$,$M_i=s''(x_i)$ 为待定参数.$M_0,M_1,\cdots,M_n$ 满足线性方程组

$$h_{i-1}M_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)M_i+h_iM_{i+1} =6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \quad (i=1,2,\cdots,n-1). \qquad (2)$$

方程组(2)是含有 $n+1$ 个未知数 M_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 的由 $n-1$ 个方程组成的线性方程组,不能定解.为此尚需补充两个条件.一般,在插值区间两个端点各补充一个条件,通常称为端点条件.最常用的端点条件有三种类型:

1. $s'(x_0)=f_0'$, $s'(x_n)=f_n'$.

2. $s''(x_0)=f_0''$, $s''(x_n)=f_n''$.

3. $s^{(j)}(x_0)=s^{(j)}(x_n)$ $(j=0,1,2)$.

用 M_i 表示，这三种条件依次为：

1′. $2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_0}\left(\dfrac{f_1-f_0}{h_0}-f'_0\right)$,

$$M_{n-1}+2M_n=\frac{6}{h_{n-1}}\left(f_n'-\frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

2′. $M_0=f_0''$, $M_n=f''_n$.

3′. $M_n=M_0$,

$$\lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n,$$

$$\lambda_n=\frac{h_0}{h_0+h_{n-1}},\ \mu_n=1-\lambda_n,$$

$$d_n=\frac{6}{h_0+h_{n-1}}\left(\frac{f_1-f_0}{h_0}+\frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

（注意：此时有 $f_0=f_n$）.

三次样条插值的求解过程如下：

1. 将方程组(2)与三种端点条件的任何一种联合，解关于 $M_0,M_1,\cdots,M_n$ 的线性方程组.

2. 将 $M_i(i=0,1,\cdots,n)$ 代入方程组(1)就得到 $s(x)$ 关于各子区间的表达式.

特别指出，若第 2 种端点条件取为

$$M_0=M_n=0(s''(x_0)=s''(x_n)=0),$$

据此得到的样条插值函数称为自然样条，它在理论上，计算实践上都是很重要的. 上面求解三次样条插值的方法称为三弯矩法，是三次样条插值解算方法中最常用的一种.

端点条件(end condition)　见“三次样条插值”.

自然样条(natural spline)　见“三次样条插值”.

三弯矩法(three moments method)　见“三次样条插值”.

***B* 样条函数**(*B*-spline functions)　一类重要的样条函数. 设 $\{x_i\}$ 是节点序列，令

$$\varphi_m(t)=(t-x)_+^m=\begin{cases}(t-x)^m & (t\geqslant x),\\ 0 & (t<x).\end{cases}$$

称函数 $(x_{j+m+1}-x_j)\varphi_m(t)$ 关于 $t=x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+m+1}$ 的 $m+1$ 阶均差

$$B_{j,m}(x)=(x_{j+m+1}-x_j)\varphi_m[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+m+1}]$$
$$(j=-m,-m+1,\cdots,m-1)$$

为第 j 个 m 次 B 样条函数，简称 B 样条函数. 利用均差的性质，有

$$B_{j,m}(x)=(x_{j+m+1}-x_j)\sum_{k=j}^{j+m+1}\frac{(x_k-x)_+^m}{\omega'_{m,j}(x_k)},$$

其中

$$\omega_{m,j}(t)=(t-x_j)(t-x_{j+1})\cdots(t-x_{j+m+1}),$$
$$\omega'_{m,j}(x_k)=(x_k-x_j)\cdots(x_k-x_{k-1})$$
$$\cdot(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{j+m+1}).$$

B 样条函数具有下列重要性质：

1. 递推关系

$$B_{j,0}(x)=\begin{cases}1 & x\in(x_j,x_{j+1}),\\ 0 & (其他).\end{cases}$$

$$B_{j,k}(x)=\frac{x-x_j}{x_{j+k}-x_j}B_{j,k-1}(x)+\frac{x_{j+k+1}-x}{x_{j+k+1}-x_{j+1}}B_{j+1,k-1}(x)$$
$$(k=1,2,\cdots,m).$$

2. 正性与局部非零性

$$B_{j,m}(x)\begin{cases}=0 & (x\notin[x_j,x_{j+m+1}]),\\ >0 & (x\in(x_j,x_{j+m+1})).\end{cases}$$

3. 规范性

$$\sum_{j=-m}^{m-1}B_{j,m}(x)=\sum_{j=i-m}^{i}B_{j,m}(x)=1\ (x\in[x_i,x_{i+1}]).$$

4. B 样条的导数

$$B'_{j,0}(x)=0,$$

$$B'_{j,m}(\lambda)=m\left[\frac{B_{j,m-1}(x)}{x_{j+m}-x_j}-\frac{B_{j+1,m-1}(x)}{x_{j+m+1}-x_{j+1}}\right]$$
$$(m\geqslant 1).$$

三角插值(trigonometric interpolation)　常用的插值方法之一. 指取插值函数为三角多项式的插值方法. 特别适用于对周期函数的插值. 设被插值函数 $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数，取 n 阶三角多项式

$$T_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

为插值函数，称为 n 阶三角插值多项式. 对任意 $2n+1$ 个两两互异的实数 $x_0,x_1,\cdots,x_{2n}$，当其任两个之差都不是 2π 的整数倍时，满足插值条件

$$T_n(x_i)=f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,2n)$$

的 n 阶三角插值多项式 $T_n(x)$ 存在、惟一且可表为

$$T_n(x)=\sum_{i=0}^{2n}f(x_i)\left(\sin\frac{x-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x-x_{i+1}}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}\right)\bigg/\left(\sin\frac{x_i-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2}\cdots\sin\frac{x_i-x_{2n}}{2}\right).$$

称上式为高斯三角插值公式.

三角插值多项式(trigonometric interpolating polynomial)　见“三角插值”.

高斯三角插值公式(Gauss trigonometric interpolation formula)　见“三角插值”.

指数插值(exponential interpolation)　常用的插值方法之一. 指用指数函数之和作为插值函数的插值方法. 例如，在分析放射性元素衰减时常被采用. 给出样点 (x_i,f_i) $(i=0,1,\cdots,n)$，及两两互异的

实数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，求

$$\varphi(x;a_0,a_1,\cdots,a_n,\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_{j=0}^{n}a_je^{\lambda_jx},$$

使其满足插值条件：

$$\varphi(x_i;a_0,a_1,\cdots,a_n,\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=f_i\quad(i=0,1,\cdots,n),$$

此即指数插值问题.它归结为以 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为未知数的线性方程组的求解问题.

有理插值(rational interpolation) 常用的插值方法之一.指用有理函数作为插值函数的插值方法.当被插函数具有极点或其他奇点时，用有理插值往往很有效.假定已知被插函数 $f(x)$ 在 $m+n+1$ 个互不相同的点 $x_0,x_1,\cdots,x_{m+n}$ 处的值为 $f_0,f_1,\cdots,f_{m+n}$.有理插值就是求一个形如

$$R_{m,n}(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

的分式有理函数，使它满足要件 $R_{m,n}(x_i)=f_i$ $(i=0,1,\cdots,m+n)$.并以 $R_{m,n}(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似.满足上述插值条件的有理分式 $R_{m,n}(x)$ 有时可能不存在，但在很多情形下这种插值有理分式是存在惟一的，其系数 $a_i(i=0,1,\cdots,m)$ 及 $b_i(i=0,1,\cdots,n)$，实际上只有 $m+n+1$ 个是独立参数，通过插值条件导出线性方程组

$$Q_n(x_i)f_i=P_m(x_i)\quad(i=0,1,\cdots,m+n).$$

可确定 a_i 及 b_i，从而得到有理插值函数 $R_{m,n}(x)$.

反插值(inverse interpolation) 一种插值法.指利用插值函数反求满足某条件之自变量 x 的近似值.设给定函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个不同点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的值 $y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，欲求使 $f(x)=c$ 之 x 的近似值，这里 c 是含 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 的区间 $[\alpha,\beta]$ 中之某个值.反插值就是求 $f(x)$ 的反函数 f^{-1} 在 c 处的近似值.通常可由 $f(x)$ 的牛顿插值公式 $P_2(x)$ 近似代替 $f(x)$，再令 $P_2(x)=c$，求出 x 的近似，一般用逐次逼近法，先取 $x^{(0)}$ 使得满足 $f(x_0)+f[x_0,x_1](x^{(0)}-x_0)=c$，即

$$x^{(0)}=x_0+\frac{c-f(x_0)}{f[x_0,x_1]},$$

再求 $x^{(1)}$，使它满足 $f(x_0)+f[x_0,x_1](x^{(1)}-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x^{(0)}-x_0)(x^{(0)}-x_1)=c$，这里 $f[x_0,x_1]$ 及 $f[x_0,x_1,x_2]$ 为 $f(x)$ 的一阶与二阶均差.由上式得到

$$x^{(1)}=x^{(0)}-\frac{f[x_0,x_1,x_2]}{f[x_0,x_1]}(x^{(0)}-x_0)(x^{(0)}-x_1).$$

然后用迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(0)}-\frac{f[x_0,x_1,x_2]}{f[x_0,x_1]}(x^{(k)}-x_0)(x^{(k)}-x_1)\quad(k=0,1,\cdots).$$

迭代至 $x^{(k)}$ 与 $x^{(k+1)}$ 在所要求精度下相等为止.也可直接利用反函数 f^{-1} 以 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 为节点的牛顿插值多项式 $p(y)$，用 $p(c)$ 近似 $f^{-1}(c)$.

快速傅里叶变换(fast Fourier transformation) 简称 FFT.计算有限离散傅里叶变换的一种快速算法.一维离散傅里叶变换的计算是按

$$U_K=\sum_{j=0}^{N-1}u_jW^{-jk}\quad(k=0,1,\cdots,N-1),\quad(1)$$

从已知的序列 $\{u_j\}$ 计算未知的序列 $\{U_k\}$，其中

$$W=W_N=e^{2\pi i/N}\quad(i=\sqrt{-1}).$$

传统算法是直接计算式(1)，于是计算一个 N 点离散傅里叶变换的工作量为 N^2 个"复运算"，一个"复运算"是指一个复数乘法和一个复数加法.快速傅里叶变换是根据 W_N 的周期性提出的一种逐次分半的递推算法，其算法概括如下：取 $N=2^m$，将 k 和 j 写成二进制的形式：

$$k=k_{m-1}2^{m-1}+k_{m-2}2^{m-2}+\cdots+k_12^1+k_0,$$
$$j=j_{m-1}2^{m-1}+j_{m-2}2^{m-2}+\cdots+j_12^1+j_0,$$

其中 k_l,j_l 为 0 或 1，$l=0,1,\cdots,m-1$.记

$$u_j=u\ (j_{m-1},j_{m-2},\cdots,j_1,j_0),$$
$$U_k=U\ (k_{m-1},k_{m-2},\cdots,k_1,k_0),$$

利用 $W_N^{2m}=1$，以及 $W^n=1$，当且仅当 $n\equiv0(\bmod N)$，有

$$u^{(l)}(k_0,k_1,\cdots,k_{l-1},j_{m-l-1},\cdots,j_0)=\sum_{j_{m-l}=0}^{1}u^{(l-1)}(k_0,k_1,\cdots,k_{l-2},j_{m-l},\cdots,j_0)\cdot W_N^{-(k_{l-1}2^{l-1}+\cdots+k_0)j_{m-l}2^{m-l}}\quad(l=1,2,\cdots,m),\quad(2)$$

其中 $u^{(0)}(j_{m-1}\cdots,j_1,j_0)=u(j_{m-1},\cdots,j_1,j_0)$，当 $l=m$ 时，有

$$U(k_{m-1},k_{m-2},\cdots,k_1,k_0)=u^{(m)}(k_0,k_1,\cdots,k_{m-2},k_{m-1}),$$

于是完成了离散傅里叶变换，这里，每步每个分量需要一个"复运算"，N 个分量则需要 N 个"复运算"，共有 $m=\log_2N$ 步，故总计 $N\log_2N$ 个"复运算".这是一个简单而高效的算法，比直接算法提高工效 $N/\log_2N$ 倍.当 N 很大时，这是数量级上的提高，从而可以大量节省机时，而且即便对于很大的 N，计算过程也是稳定的.快速傅里叶变换是美国库利(Cooley, J. W.)和美国统计学家图基(Tukey, J. W.)于 1965 年提出来的，它从根本上解决了时域与频域之间相互转换的计算障碍，为数值谐波分析方法在科学技术领域的广泛应用创造了条件，已成功地应用于光谱和声波分析、全息技术、地震勘探、数字信号处理，图象信息处理、微分方程数值解等方面，也推动了各种快速算法的研究.

函数逼近(approximation of functions) 数值

逼近的基本内容之一. 主要指函数的近似表示. 即对于较复杂的函数类 A(通常讨论$[a,b]$上的连续函数)中给定的函数 $f(x)$,要在 A 的一个较简单又便于计算的子集 B 中,寻求函数 $P(x)\in B\subset A$,使误差$R(x)=P(x)-f(x)$在某种度量意义下最小,称$P(x)$为$f(x)$的逼近. 采用不同的度量,就得到不同类型的逼近,统称为函数逼近. 若度量标准取为

$$\|R(x)\|_\infty=\|f(x)-P(x)\|_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|,$$

则称其为一致逼近或均匀逼近. 若函数 $h(x)\in B$,且满足

$$\|f(x)-h(x)\|_\infty=\inf_{P\in B}\|f(x)-P(x)\|_\infty,$$

则称 $h(x)$为 $f(x)$在 B 中的最佳一致逼近. 若度量标准取为

$$\|R(x)\|_2=\|f(x)-P(x)\|_2=\left(\int_a^b (f(x)-P(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

则称其为均方逼近或平方逼近. 若函数 $h(x)\in B$,且满足

$$\|f(X)-h(X)\|_2=\inf_{P\in B}\|f(X)-P(X)\|_2,$$

则称 $h(X)$为 $f(X)$在 B 中的最佳均方逼近. 若度量标准取为

$$\|R(x)\|_{2\rho}=\|f(x)-P(x)\|_2=\int_a^b\rho(x)(f(x)-P(x))^2\mathrm{d}x,$$

就称其为带权平方(或均方)逼近. 其中 $\rho(x)$为权函数. 若函数$h(x)$满足

$$\|f(x)-h(x)\|_{2\rho}=\inf_{P\in B}\int_a^b\rho(x)(f(x)-P(x))^2\mathrm{d}x,$$

则称 $h(x)$为 $f(x)$在 B 中的带权最佳平方(域均方)逼近.

一致逼近(uniform approximation) 见“函数逼近”.

均匀逼近(uniform approximation) 即“一致逼近”.

最佳一致逼近(best uniform approximation) 见“函数逼近”.

均方逼近(mean-square approximation) 见“函数逼近”.

最佳均方逼近(best mean-square approximation) 见“函数逼近”.

带权均方逼近(weighted mean-square approximation) 见“函数逼近”.

带权最佳均方逼近(best weighted mean square approximation) 见“函数逼近”.

多项式的逼近(approximation of polynomials) 一种函数逼近. 指逼近函数类取为多项式集合 H_n 的逼近. 即在 H_n 中求出 $P(x)\in H_n$ 使 $P(x)-f(x)$ 在某种度量意义下最小.

外尔斯特拉斯定理(Weierstrass theorem) 多项式逼近连续函数的一个基本定理. 该定理断言:设 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,则对于任意 $\varepsilon>0$,必存在多项式 $P(x)$,使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

该定理是德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))于 1885 年给出的. 它的证法很多. 被公认为最好的证明是伯恩斯坦(Бернштейн,С. Н.)给出的构造性证明. 对于具有周期性的连续函数,外尔斯特拉斯还证明了用三角多项式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

逼近的可能性. 即:设 $f(x)$为以 2π 为周期的连续函数,则对任意 $\varepsilon>0$,都存在三角多项式 $T(x)$,使得

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|T(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

上述两个定理分别称为外尔斯特拉斯第一定理、第二定理. 计算数学文献中的外尔斯特拉斯定理常指第一定理.

最佳一致逼近多项式(polynomials of best uniform approximation) 一种逼近多项式. 指最佳一致逼近中,取逼近函数类为多项式集合 H_n 时的次数不大于 n 的多项式. 若$P^*(x)\in H_n$ 满足

$$E_n(f)=\inf_{P\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_\infty=\|f(x)-P^*(x)\|_\infty$$

则 $P^*(x)$就是 $f(x)$的 n 次最佳一致逼近多项式. $E_n(f)$称为最小偏差. 这样的多项式是存在的. 并有以下的切比雪夫定理:设 $f(x)\in C[a,b]$,则 $P^*(x)\in H_n$ 是 f 在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式的充分必要条件是:$P^*(x)$在$[a,b]$上至少有 $n+2$ 个点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}\leqslant b$,使

$$P^*(x_i)-f(x_i)=(-1)^i\sigma\|f(x)-P^*(x)\|_\infty\quad(\sigma=\pm1)$$

成立. 该定理给出了最佳一致逼近多项式$P^*(x)$的特性,也是构造最佳一致逼近多项式的依据. 但实际上当 $n\geqslant2$ 时,准确求出最佳一致逼近多项式是很困难的. 通常只能用逐次逼近的列梅兹(Remes)算法求它足够精确的近似. 当 $n=1$ 时,则可直接给出具体算法:假定$f(x)$在$[a,b]$上二阶导数 $f''(x)$连续,且$f''(x)$不变号,则 $f(x)$在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式 $P^*(x)=a_0^*+a_1^*x$ 的系数 a_1^* 为

$$a_1^*=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

由 $f'(x_1)=a_1^*$ 求得 x_1,再按下式计算 a_0^*:

$$a_0^* = \frac{f(a)+f(x_1)}{2} - a_1^* \cdot \frac{a_1+x_1}{2}.$$

最小偏差(least deviation)　见“最佳一致逼近多项式”.

正交多项式(orthogonal polynomials)　具有正交性的多项式族.函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$[a,b]$上带权$\xi(x)$正交是指内积

$$(f,g) = \int_a^b \xi(x)f(x)g(x)dx = 0,$$

若多项式族$\{\psi_k(x),k=0,1,\cdots\}$,其中 ψ_k 为 k 次多项式,满足条件

$$(\psi_i,\psi_j) = \int_a^b \xi(x)\psi_i(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ A_j > 0 & (i = j). \end{cases}$$

则称$\{\psi_k(x),k=0,1\cdots\}$为$[a,b]$上带权 $\xi(x)$的正交多项式族,简称正交多项式.对 $\xi(x)$及$[a,b]$的不同选取,可得不同的正交多项式.

勒让德多项式(Legendre polynomials)　一类正交多项式.指权函数$\xi(x)\equiv1$,区间为$[-1,1]$的正交多项式.勒让德多项式的表达式为

$$p_0(x)=1,p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=1,2,\cdots).$$

其最高次项 x^n 的系数为 $a_n=(2n)!\ /2^n(n!)^2$,最高次项系数为 1 的勒让德多项式为

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

勒让德多项式有以下重要性质:

1. 正交性

$$(p_n,p_m) = \int_{-1}^1 p_n(x)p_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \dfrac{2}{2n+1} & (m = n). \end{cases}$$

2. 递推关系　$p_0(x)=1,p_1(x)=x$,

$$(n+1)p_{n+1}(x)=(2n+1)xp_n(x)-np_{n-1}(x) \quad (n\geqslant1).$$

3. 奇偶性　$p_n(-x)=(-1)^n p_n(x)$,即 n 为奇数时,p_n 为奇函数,n 为偶数时,p_n 为偶函数.

4. p_n 在$[-1,1]$上有 n 个不同的实零点.

5. 在所有最高项系数为 1 的多项式中,$\tilde{P}_n(x)$在区间$[-1,1]$上与零的平方误差最小.

切比雪夫多项式(Chebyshev polynomials)　一类正交多项式.指权函数 $\xi(x)=1/\sqrt{1-x^2}$,区间为$[-1,1]$的正交多项式,表达式为

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \quad (|x| \leqslant 1).$$

令 $x=\cos\theta$,则 $T_n(x)=\cos n\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi$,由三角公式 $T_{n+1}(x)=\cos(n+1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta-\cos(n-1)\theta$ 得递推关系为

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \ (n \geqslant 1),$$

$T_n(x)$的最高次项 x^n 的系数是 2^{n-1}.切比雪夫多项式有以下性质:

1. 正交性

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = m \neq 0), \\ \pi & (n = m = 0). \end{cases}$$

2. 奇偶性　$T_n(-1)=(-1)^n T_n(x)$.

3. 极性　在所有最高项系数为 1 的多项式中,切比雪夫多项式 $\tilde{T}_n(x)=T_n(x)/2^{n-1}$在区间$[-1,1]$上与零的偏差最小,且其偏差为 $1/2^{n-1}$,即

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4. $T_n(x)$在$[-1,1]$上有 n 个实零点

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

切比雪夫级数(Chebyshev series)　一种特殊级数.指函数$f(x)$在$[-1,1]$上按切比雪夫多项式$\{T_k,k=0,1,\cdots\}$展开的级数.切比雪夫级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k T_k(x)$$

的系数为

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$C_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \ (k = 1,2,\cdots),$$

它的部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k T_k(x)$$

是 $f(x)$在区间$[-1,1]$上带权

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

的最小平方逼近多项式.法国数学家勒贝格(Lebesgue,H. L.)曾证明,若 $f\in C[-1,1]$,则

$$\| S_n-f \|_\infty\leqslant(3+\ln n)E_n(f).$$

其中 $E_n(f)$为 f 的最小偏差,由此表明,$S_n(x)$是 f 在$[-1,1]$上最佳一致逼近多项式的很好近似.

最小平方逼近多项式(polynomials of least square approximation)　一种逼近多项式.指最佳均方逼近中,取逼近函数类为多项式集合 H_n 时的多项式.当 $f(x)\in C[a,b]$时,设逼近多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,记

$$F(a_0,a_1,\cdots,a_n) = \int_a^b (f(x) - \sum_{i=0}^n a_i x^i)^2 dx = \| f(x) - p(x) \|_2^2,$$

则最小平方逼近多项式 $p^*(x)=a_0^*+a_1^*x+\cdots+a_n^*x^n$，使

$$\|p^*(x)-f(x)\|_2^2=\min_{p\in H_n}\|f(x)-p(x)\|_2^2.$$

由多元函数极值必要条件

$$\frac{\partial F}{\partial a_j}=0\quad(j=0,1,\cdots,n)$$

得关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的线性方程组：

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b x^{i+j}dx\right)a_i=\int_a^b f(x)x^j dx\quad(j=0,1,\cdots,n)$$

称为法方程，求解得到 $a_k=a_k^*\ (k=0,1,\cdots,n)$. 当 $[a,b]$ 为 $[0,1]$ 时，法方程为

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+j+1}=\int_0^1 f(x)x^j dx\quad(j=0,1,\cdots,n).$$

系数矩阵为希尔伯特矩阵 H_{n+1}，即

$$H_{n+1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1}\end{pmatrix}$$

它是病态矩阵，因此，这种算法只适合于 $n\leqslant 3$ 的情形. 为此，求最小平方逼近多项式可利用勒让德多项式 $\{p_k(x)\}$，设 $f(x)\in C[-1,1]$，则在 $[-1,1]$ 上的最小平方逼近多项式为

$$s_n^*(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}(f,p_k)p_k(x).$$

其中 $(f,p_k)=\int_{-1}^{1}f(x)p_k(x)dx$.

有理逼近(rational approximation)　一种函数逼近. 指逼近函数类取为有理函数集合 $R_m^n[a,b]$ 的逼近. 这里有理函数表示为

$$R_{nm}(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}.$$

$P_n(x)\in H_n, Q_m(x)\in H_m$. 是次数不超过 n 次和 m 次的多项式. 且 $P_n(x)$ 及 $Q_m(x)$ 不可约. 而

$$R_m^n[a,b]=\left\{\frac{P_n}{Q_m},P_n\in H_n,Q_m\in H_m,Q_m>0,\frac{P_n}{Q_m}\text{不可约}\right\}.$$

当 $f(x)\in C[a,b]$ 在 $R_m^n[a,b]$ 中的最佳有理逼近 $R^*(x)$ 是指满足

$$\|R^*(x)-f(x)\|_\infty=\inf_{R_{nm}\in R_m^n[a,b]}\|R_{nm}(x)-f(x)\|_\infty.$$

$R^*(x)$ 在 $R_m^n[a,b]$ 中是存在惟一的，其充分必要条件是在区间 $[a,b]$ 上至少有 $N=n+m-d+2$ 个点 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_N\leqslant b$ 使误差 $R^*(x)-f(x)$ 以正负交错的符号达到 $\|R^*(x)-f(x)\|_\infty$，即

$$R^*(x_i)-f(x_i)=(-1)^i\|R^*(x)-f(x)\|_\infty\quad(i=1,2,\cdots,N).$$

其中 d 是 $R^*(x)$ 的亏损数，若 $R^*(x)$ 非退化则 $d=0$. 确定最佳有理逼近 $R_*(x)$ 较困难，通常只能用逐次逼近的列梅兹算法求它的足够精确的近似.

最佳有理逼近(best rational approximation)　见“有理逼近”.

帕德逼近(Padé approximation)　一种特殊类型的有理逼近. 设函数 $f(x)$ 在原点邻域内可展成幂级数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i,$$

若存在多项式 $P_n(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_nx^n$ 及 $Q_m(x)=1+q_1x+\cdots+q_mx^m$，满足条件

$$f(x)-\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=O(x^{n+m+1}),$$

以及 P_n/Q_m 不可约，则称 $P_n(x)/Q_m(x)$ 为 $f(x)$ 的 (n,m) 阶帕德逼近. 并记 $[n/m]=P_n(x)/Q_m(x)$，若 $[n/m]$ 存在，则必惟一，其系数 $p_i,q_j(i=0,1,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$，满足方程组

$$\begin{cases}a_0=p_0,\\ a_1+a_0q_1=p_1,\\ a_2+a_1q_1+a_0q_2=p_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_n+a_{n-1}q_1+\cdots+a_{n-m}q_m=p_n,\\ a_{n+1}+a_nq_1+\cdots a_{n-m+1}q_m=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n+m}+a_{n+m-1}q_1+\cdots+a_nq_m=0.\end{cases}\qquad(1)$$

其中已规定当 $k<0, a_k=0$. 这个方程组称为帕德方程组. 它是关于 $p_0,p_1,\cdots,p_n,q_1,q_2,\cdots,q_m$ 的 $n+m+1$ 个未知量的线性方程组，求解时先从后 m 个方程求出 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 再代入前 $n+1$ 个方程，即可求得 $p_0,p_1,\cdots,p_n$. 因此，对任何非负整数 n,m 都可由方程组(1)求出 $f(x)$ 的帕德逼近 $[n/m]$，并可依自然顺序排列成形如

$$\begin{matrix}[0/0] & [0/1] & [0/2] & [0/3] & \cdots\\ [1/0] & [1/1] & [1/2] & [1/3] & \cdots\\ [2/0] & [2/1] & [2/2] & [2/3] & \cdots\\ [3/0] & [3/1] & [3/2] & [3/3] & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

的表格，称为帕德表. 当 $m=0$ 时，表中第一列就是 $f(x)$ 的泰勒展开. 实践表明帕德表中主对角线及其两侧的元素，即 $[n/n]$ 和 $[n/n\pm1]$ 在 $n+m$ 相等的诸元素中逼近效果最好.

帕德方程组(Padé' equations)　见“帕德逼近”.

帕德表(Padé' table)　见“帕德逼近”.

曲线拟合(curve fitting)　一种函数数值逼近方法.指求出尽可能好的拟合于已知点的简单曲线的方法.曲线拟合经常用于根据实验数据确定经验公式,由于实验数据一般都有测量误差,所以拟合曲线不一定通过每个点(x_i,y_i),只能要求所求得的近似曲线 $y=f(x)$ 尽可能好的反映所给数据的基本趋势.即要求在样点上误差 $\delta_i=f(x_i)-y_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 按某种度量为最小.记 $\vec{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)^T$,可要求向量$\vec{\delta}$的范数 $\|\vec{\delta}\|$ 最小.目前,很多计算机配有自动选择经验公式之数学模式的程序,程序中函数类型较多,通过计算比较误差可找到拟合得较好的曲线,最后求出该曲线的图形及表达式.

经验公式(experience formula)　一类函数数值逼近公式.指由已知数据用最小二乘法求得的拟合曲线的公式.它是由实验结果推断出来的某一函数的近似表达式.有助于分析和观察该现象的变化规律.为建立经验公式,使它既简单实用,又能反映现象的本质,总是先描出函数大体图象,选定函数类型.然后用图象法、选点法、平均法以及最小二乘法等方法确定函数中的待确定的参变量——经验常数,从而得到拟合曲线及经验公式.例如,经验公式取为 n 维空间直线:$y=a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n$,其中 n 个系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 就是待确定的经验常数.

经验常数(experience constant)　见“经验公式”.

最小二乘问题(least square problem)　亦称最小平差问题.数值逼近的重要问题之一.是用离散平方逼近技术求拟合曲线的问题.设已知节点组 $x_1<x_2<\cdots<x_m$ 上相应的实验值为 $f_1,f_2,\cdots,f_m$.最小二乘问题是指,在已取定的某函数类中,求目标函数 $F(x)$使其方差,即各样点处偏差的平方和

$$\sum_{k=1}^{m}d_k[F(x_k)-f_k]^2$$

(其中 $d_k>0$ 是依数据可靠性不同引进的权数)达到极小.通常选定 $n(n<m)$个函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$,称为基函数.考虑它们的线性组合

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}u_j\varphi_j(x),$$

要求定出系数 $u_1,u_2,\cdots,u_n$,使方差

$$J=\sum_{k=1}^{m}d_k[\sum_{j=1}^{n}u_j\varphi_j(x_j)-f_k]^2$$

达到极小.

最小平差问题(least average derivation problem)　即“最小二乘问题”.

最小二乘法(method of least square)　解最小二乘问题的数值方法.设最小二乘问题中的基函数 $\varphi_j(x)$在节点 x_k 的取值为 $a_{kj}=\varphi_j(x_k)$ $(k=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,于是方差

$$J=J(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\sum_{k=1}^{m}d_k\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{kj}u_j-f_k\Big]^2,$$

是变元 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的二次函数.据极值原理,使 J 达最小的 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 必满足

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

具体求导得

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}=2\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m}a_{ki}d_ka_{kj}\Big)u_j-\sum_{k=1}^{m}a_{ki}d_kf_k\Big].$$

令

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}d_ka_{kj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

$$g_i=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}d_kf_k\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

则 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 应满足下列线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}u_j=g_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

称该方程组为法方程组或正规方程组,由法方程组解得 $\vec{u}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)$,即得最小二乘解

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}u_j^*\varphi_j(x).$$

上述方法称为最小二乘法.

多项式最小二乘法(method of least square by using polynomials)　最小二乘法的一种.指拟合曲线为多项式的最小二乘方法.此时相当于基函数取 $\varphi_j(x)=x^{j-1}$ $(j=1,2,\cdots,n)$.于是相应的参数为

$$a_{kj}=\varphi_j(x_k)=x_k^{j-1}$$
$$(k=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}x_k^{i-1}d_kx_k^{j-1}=\sum_{k=1}^{m}d_kx_k^{i+j-2}$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n),$$

$$g_i=\sum_{k=1}^{m}x_k^{i-1}d_kf_k\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

相应的法方程组为

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}u_j=g_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

因其系数矩阵为病态矩阵,当 $n>4$ 时,法方程组的数值求解不稳定,有效数位的丢失很严重(参见“最小二乘法”).

样条最小二乘法(method of least square by using spline)　最小二乘法的一种.指拟合曲线为三次样条函数的最小二乘方法.适当选取分段节点

$$\cdots<t_{-3}<t_{-2}<t_{-1}<t_0<t_1<\cdots<t_r<t_{r+1}<\cdots,$$

取基函数 $\varphi_j(x)=\psi_{3,i-4}(x)$ $(j=1,2,\cdots,n)$,这里

$$\psi_{3,i}(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=i}^{i+4}\beta_{ij}|x-t_j|^3$$

$(i=-3,-2,\cdots,r-1)$,

$$\beta_{ij}=\frac{4!}{\omega_i'(t_j)},\ \omega_i'(t_j)=\prod_{\substack{k=i\\k\neq j}}^{i+4}(t_j-t_k),$$

称为山丘形紧凑基样条. 由于 $\psi_{3,i}$ 在区间 (t_i,t_{i+1}) 外恒为 0,所以

$$\psi_{3,i}(x)\psi_{3,j}(x)\equiv 0\quad(|i-j|>3),$$
$$\varphi_i(x)\varphi_j(x)\equiv 0\quad(|i-j|>3),$$

这就简化了 a_{ij},c_{ij},g_i 的计算. 从而便于法方程组的求解. 余下的工作可按标准程式进行. 此时,法方程组是良态的,计算稳定性好(参见"最小二乘问题"和"最小二乘法").

矛盾线性方程组(over-determined linear system) 亦称超定线性方程组. 一类特殊的代数方程组. 指方程个数多于未知量个数时的线性代数方程组. 这类问题在实践中经常遇到. 例如,大地测量问题、曲线拟合问题以及某些统计计算问题等,均属此类型. 因方程个数多于未知量个数,所以这些方程式中必有"矛盾". 为确定未知量 x_j,考虑各方程的剩余量

$$\delta_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j-b_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

并使这些量具有某种意义下的极小性. 一般可采取使 $\max\limits_i|\delta_i|$ 为最小的原则(即切比雪夫原则),或使

$$\|\vec{\delta}\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$$

为最小的原则(即高斯准则,又称最小二乘准则)来决定未知数 x_j. 从概率论的角度看,最小二乘准则是有其根据的,从实际计算角度看,该准则的处理也较为简单.

超定线性方程组(over-determined linear system) 即"矛盾线性方程组".

切比雪夫原则(Chebyshev criterion) 见"矛盾线性方程组".

最小二乘准则(least square criterion) 见"矛盾线性方程组".

高斯准则(Gauss criterion) 即"最小二乘准则".

解矛盾线性方程组的最小二乘法(least square method solving over-determined linear system) 最小二乘法的一种. 指采用最小二乘准则求解矛盾线性方程组的一个常用方法. 设有矛盾线性方程组

$$c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{im}x_m=d_i$$
$$(i=1,2,\cdots,n,n>m),$$

其中 d_i 及系数 c_{ij} 均为已知值,x_j 为待定未知量. 记各方程的剩余量

$$\delta_i=\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_j-d_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

最小二乘准则要求

$$J=\|\vec{\delta}\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_j-d_i\Big]^2$$

最小. 根据极值原理,使 J 达到极小的 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,必满足

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2\Big)=0\quad(k=1,2,\cdots,m).$$

经整理得法方程组

$$\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}c_{ik}c_{ij}\Big)x_j=\sum_{i=1}^{n}c_{ik}d_i\quad(k=1,2,\cdots,m).$$

解法方程组得 $\vec{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*)^T$,即得符合要求的最小二乘解. 法方程组的病态程度很大,应采用具有良好数值稳定性的计算方法求解. 共轭斜量法及预条件共轭斜量法为最适用解法.

选点正交(orthogonality with respect to selected points) 两函数的一种正交形式. 指两函数按给定点组正交. 若函数 $f(x),g(x)$ 对给定的点组 $\{x_0,x_1,\cdots,x_N\}$ 满足条件

$$\sum_{m=0}^{N}f(x_m)g(x_m)=0,$$

则称 $f(x),g(x)$ 关于点组 $\{x_0,x_1,\cdots,x_N\}$ 正交,简称选点正交. $f(x),g(x)$ 都是多项式时,满足上述条件的多项式称为选点正交多项式. 当点组取为等距节点($x_m=x_0+mh$)时,选点正交多项式有简单的公式. 依选点正交定义,将 $1,x,x^2,\cdots,x^\upsilon$ 正交化,则得选点正交多项式

$$P_{\upsilon,n}(x)=\sum_{m=0}^{\upsilon}(-1)^m\binom{\upsilon}{m}\binom{\upsilon+m}{m}\binom{x}{m}\Big/\binom{n}{m},$$

选点正交多项式 $P_{\upsilon,n}(x)$ 有如下性质:

1. $P_{\upsilon,n}(x)$ 满足选定正交条件,即

$$\sum_{m=0}^{n}P_{\upsilon,n}(m)P_{\mu,n}(m)=\delta_{\mu\upsilon}\frac{(\upsilon+n+1)!\ (n-\upsilon)!}{(2\upsilon+1)(n!)^2}.$$

2. 它与切比雪夫 q 函数之间有下列关系,

$$q_\upsilon(n,x)=\frac{(-1)^\upsilon(n-1)!}{2^\upsilon(n-\upsilon-1)!P_{\upsilon,n-1}(x)}.$$

3. 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上,令 $n\to\infty$,则多项式

$$P_{\upsilon,n}(x)\to P_\upsilon(1-2x)$$

(这里 P_υ 是勒让德多项式

$$P_\upsilon(x)=\frac{1}{\upsilon!2^\upsilon}\frac{d^\upsilon}{dx^\upsilon}(x^2-1)^\upsilon).$$

选点正交多项式(orthogonal polynomials with respect to selected points) 见"选点正交".

切比雪夫 q 函数(Chebyshev q-function) 一种特殊函数. 指如下定义的函数

$$q_\upsilon(n,x)=\sum_{m=0}^{\upsilon}\binom{\upsilon+m}{m}\binom{\upsilon-n}{\upsilon-m}\binom{x}{m}.$$

实际计算时,最好以

$$q_v^*(n,x)=\frac{q_v(n,x)}{2^{-v}v!\ M_v(n)}$$

代替 $q_v(n,x)$，其中 $M_v(n)$ 是

$$\binom{v+m}{m} 与 \binom{n-1-m}{v-m} \quad (m=0,1,\cdots,v)$$

的最大公约数. 这样，诸数 $q_v^*(n,m)$ $(m=0,1,\cdots,n-1)$ 是无公约数的整数，称 $q_v^*(n,x)$ 为最简切比雪夫 q 函数，或称为最简正交多项式.

最简正交多项式(simplest orthogonal polynomials)　见“切比雪夫 q 函数”.

数值积分(numerical integration)　数值逼近的一个组成部分. 指根据被积函数在积分区间上的一些离散点上的值计算该函数的定积分的近似值的数值方法的总称，也称为机械求积，当被积函数以表格形式给出，即只知道其在若干离散点上的量值，或被积函数的原函数不能由表达式给出，或虽有原函数的表达式，但它过于复杂而不适于计算时，通常用数值积分方法近似地求出待求的定积分的近似值.

数值积分的基本思想是把积分区间划分成若干小区间，在每个小区间上先求出被积函数的插值函数，然后以插值函数代替被积函数计算这些小区间上的定积分，取这些定积分之值的累加和作为原定积分的近似值，其要点是积分区间的划分和插值型求积公式的选取. 为了判定求积公式的优劣，须要有一个衡量指标，这就是求积公式的代数精确度的概念，某求积公式的代数精确度为非负整数 m，如它对 $j(j\leqslant m)$ 次代数多项式的定积分计算是精确的，而对 $m+1$ 次代数多项式的就不再是精确的了. 高斯型求积公式是一类具有最高代数精确度的插值型求积公式.

求积公式的余项估计问题，即误差估计问题是很重要的，它有助于在实际计算中选取恰当的求积方法，其次对于选定的一种方法，确定积分区间的恰当划分. 自适应积分法是根据误差要求由计算机自动确定积分区间划分步长的一种积分方法，它可以用较小的代价取得较好的计算效果. 龙贝格积分法是将积分区间逐次分半的一种加速收敛的自动积分法.

机械求积(mechanical quadrature)　即“数值积分”.

数值积分法(numerical integration methods)　求定积分近似值的数值方法. 指用被积函数有限个抽样值的离散和或加权平均值近似地代替定积分值的方法. 在求函数 $f(x)$ 的定积分时，能够求出原函数

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$$

的情况是很少的，从而也无法用牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a) \tag{1}$$

来计算定积分. 其次，即使可以求出原函数，也往往由于其表达式过于复杂而难以精确求值. 另外，当 $f(x)$ 是列表函数时，也无法应用(1)式计算定积分. 上述事实说明研究数值积分方法的必要性. 历史上，阿基米德(Archimedes)、牛顿(Newton, I.)、欧拉(Euler, L.)、高斯(Gauss, C. F.)、切比雪夫(Чебышев, П. Л.)等人都对数值积分法有重要贡献. 形如

$$\int_a^b w(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \tag{2}$$

的近似公式称为数值积分公式或求积公式. 分别称 x_k, A_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 为求积节点，求积系数. 称 $w(x)$ $(\geqslant 0)$ 为权函数，$w(x)\equiv 1$ 时，(2)式左端即为 $f(x)$ 的定积分. 称 $[a,b]$ 为求积区间，它可以是有限的，也可以是无限的. 求积系数仅与求积区间、求积节点及权函数有关，与被积函数 $f(x)$ 无关. 构造求积公式的问题，就是确定求积节点 x_k，及求积系数 A_k，使得求积余项式或称求积误差

$$E(f)=\int_a^b w(x)f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \tag{3}$$

在某种度量意义下尽可能小. 若求积公式(2)对 $f(x)=x^p$ $(p=0,1,\cdots,m)$ 精确成立，而当 $f(x)=x^{m+1}$ 时不再是精确等式，即 $E(x^p)=0$ $(p=0,1,\cdots,m)$ 且 $E(x^{m+1})\neq 0$ 时，称求积公式(2)的代数精确度为 m. 代数精确度的概念是检验求积公式优劣的一个指标.

数值积分公式(numerical integration formula)　见“数值积分法”.

求积公式(quadrature formula)　见“数值积分法”.

求积节点(nodes of quadrature)　见“数值积分法”.

求积系数(coefficients of quadrature)　见“数值积分法”.

求积区间(interval of quadrature)　见“数值积分法”.

代数精确度(algebraic accuracy)　见“数值积分法”.

插值型求积公式(interpolator quadrature formula)　一类最基本的求积公式. 指用被积函数 $f(x)$ 的插值多项式代替 $f(x)$ 作定积分而导出的数值积分公式. 函数 $f(x)$ 以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 n 次拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x), \tag{1}$$

$$l_k(x) = \frac{w_n(x)}{(x - x_k)w'_n(x_k)},$$

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

用 $L_n(x)$ 代替 $f(x)$ 作积分，便得到插值型求积公式

$$\int_a^b w(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \qquad (2)$$

其中

$$A_k = \int_a^b w(x)l_k(x)\mathrm{d}x \quad (k = 0,1,\cdots,n).$$

当全部求积节点 $x_k \in [a,b]$ 时，称为内插求积公式. 由插值多项式(1) 的性质，求积公式(2) 的代数精确度至少是 n. 并且可以通过插值多项式的余项进一步研究求积误差 $E(f)$.

内插求积公式(interpolation quadrature formula) 见"插值型求积公式".

牛顿-科茨公式(Newton-Cotes rule) 一类最基本的内插求积公式. 指在有限区间$[a,b]$上求积节点等距、权函数 $w(x)\equiv 1$ 的内插求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

其中 $x_k=a+kh \ (k=0,1,\cdots,n)$,

$$h = \frac{b-a}{n},$$

$$A_k = (b-a)C_k^{(n)},$$

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)\mathrm{d}t.$$

通常称 $C_k^{(n)}(k=0,1,\cdots,n)$为科茨系数，它们与积分区间无关. 下表是科茨系数表

n	$C_k^{(n)}$
1	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$
4	$\frac{7}{90},\frac{16}{45},\frac{2}{15},\frac{16}{45},\frac{7}{90}$
5	$\frac{19}{288},\frac{25}{96},\frac{25}{144},\frac{25}{144},\frac{25}{96},\frac{19}{288}$
6	$\frac{41}{840},\frac{9}{35},\frac{9}{280},\frac{34}{105},\frac{9}{280},\frac{9}{35},\frac{41}{840}$
7	$\frac{751}{17280},\frac{3577}{17280},\frac{1323}{17280},\frac{2989}{17280},\frac{2989}{17280},\frac{1323}{17280},\frac{3577}{17280},\frac{751}{17280}$
8	$\frac{989}{28350},\frac{5888}{28350},\frac{-928}{28350},\frac{10496}{28350},\frac{-4540}{28350},\frac{10496}{28350},\frac{-928}{28350},\frac{5888}{28350},\frac{989}{28350}$

从上表中可看出：当 $n\leqslant 7$ 时，科茨系数均为正数；从 $n=8$ 开始，科茨系数有正有负，这样的求积公式在计算上会带来较大的误差. 因此 $n\geqslant 8$ 时的牛顿-科茨公式在计算实践上不被采用，常用的是 $n\leqslant 4$ 时的牛顿-科茨求积公式.

注意，在牛顿-科茨公式中，求积区间$[a,b]$的两个端点都是求积节点，而且其他求积节点都在(a,b)内，故称这样的牛顿-科茨公式为闭型牛顿-科茨公式. 牛顿-科茨公式的求积误差，当 n 为奇数，且 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$ 时，有

$$E(f) = c_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta) \quad (a<\eta<b),$$

$$c_n = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t;$$

当 n 为偶数，且 $f(X)\in C^{n+2}[a,b]$ 时，则

$$E(f) = c'_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta) \quad (a<\eta<b),$$

$$c'_n = \frac{1}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t.$$

由此易知，当 n 为偶数时牛顿-科茨公式的代数精度为 $n+1$.

科茨系数(Cotes coefficients) 见"牛顿-科茨公式".

闭型牛顿-科茨公式(closed Newton-Cotes rule) 见"牛顿-科茨公式".

梯形公式(trapezoidal rule) 一种常用的求积公式. 指 $n=1$ 时的牛顿-科茨公式. 该公式表示为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \qquad (1)$$

它的代数精确度是 1. 若 $f''(x)$ 于$[a,b]$上连续，则由积分插值余项知求积误差为

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) \quad (a<\xi<b).$$

公式(1) 右端是以 $f(a)$, $f(b)$ 为底，$b-a$ 为高的梯形的面积值，故通称为梯形公式，它有广泛的应用.

辛普森公式(Simpson rule) 一种常用的求积公式. 指 $n=2$ 时的牛顿-科茨公式. 该公式表示为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

它的代数精确度是 3. 当 $f^{(4)}(x)$于$[a,b]$上连续时，求积误差为

$$E(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi) \quad (a<\xi<b).$$

辛普森$\frac{3}{8}$公式(Simpson's $\frac{3}{8}$ rule) 一种常用的求积公式. 指 $n=3$ 时的牛顿-科茨公式. 该公式表示为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)],$$

其中 $h=(b-a)/3$, $x_k=a+kh \ (k=0,1,2,3)$. 它的

代数精确度是 3. 当 $f^{(4)}(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续时，求积误差为

$$E(f)=-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi)\ (a<\xi<b).$$

理查森外推算法(Richardson's extrapolation algorithm) 一种提高逼近精度的有效算法. 设有一个与 h 无关的量 F^*，用步长为 h 的函数 $F_1(h)$ 去逼近它时，截断误差的模式为

$$F^*-F_1(h)=a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+\cdots+a_kh^{p_k}+\cdots, \quad (1)$$

这里 $0<p_1<p_2<\cdots<p_{k-1}<p_k<\cdots$，$a_k(k=1,2,\cdots)$ 都是与 h 无关的常数. 以 qh 代替(1)式中的 h，则有

$$F^*-F_1(qh)=a_1(qh)^{p_1}+a_2(qh)^{p_2}+\cdots+a_k(qh)^{p_k}+\cdots \quad (2)$$

以 q^{p_1} 乘(1)式两端并与(2)式相减，得

$$(1-q^{p_1})F^*-(F_1(qh)-q^{p_1}F_1(h))=a_2(q^{p_2}-q^{p_1})h^{p_2}+\cdots+a_k(q^{p_k}-q^{p_1})h^{p_k}+\cdots$$

当 $1-q^{p_1}\neq 0$，有

$$F^*-\frac{F_1(qh)-q^{p_1}F_1(h)}{1-q^{p_1}}=\frac{a_2(q^{p_2}-q^{p_1})}{1-q^{p_1}}h^{p_2}+\cdots+\frac{a_k(q^{p_k}-q^{p_1})}{1-q^{p_1}}h^{p_k}+\cdots=a_2^{(2)}h^{p_2}+\cdots+a_k^{(2)}h^{p_k}+\cdots,$$

其中

$$a_i^{(2)}=\frac{a_i(q^{p_i}-q^{p_1})}{1-q^{p_1}}\quad(i=2,3,\cdots,k,\cdots)$$

都是与 h 无关的常数. 若令

$$F_2(h)=\frac{F_1(qh)-q^{p_1}F_1(h)}{1-q^{p_1}},$$

则 $F_2(h)$ 比 $F_1(h)$ 对 F^* 有更高逼近阶. 一般地，若选 q 满足 $1-q^{p_m}>0$，令

$$F_m(h)=\frac{F_{m-1}(qh)-q^{p_{m-1}}F_{m-1}(h)}{1-q^{p_{m-1}}}\quad(m=2,3,\cdots), \quad (3)$$

可以证明

$$F^*-F_m(h)=a_m^{(m)}h^{p_m}+a_{m+1}^{(m)}h^{p_{m+1}}+\cdots,$$

这里 $a_m^{(m)},a_{m+1}^{(m)},\cdots$ 与 h 无关. 公式(3)即为理查森外推公式. 理查森外推算法的计算步骤如下表所示，其中(i)表示计算顺序.

(1)$F_1(h)$	(3)$F_2(h)$	(6)$F_3(h)$	(10)$F_4(h)$
(2)$F_1(qh)$	(5)$F_2(qh)$	(9)$F_3(qh)$	
(4)$F_1(q^2h)$	(8)$F_2(q^2h)$		
(7)$F_1(q^3h)$			

外推算法是计算数学中普遍使用的一种重要技巧. 龙贝格积分方法就是基于理查森外推算法的一种求积方法.

科茨公式(Cotes rule) 亦称布尔法则. 一种内插求积公式. 指 $n=4$ 时的牛顿-科茨公式. 该公式表为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{2}{45}h[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)],$$

其中 $h=(b-a)/4$，$x_k=a+kh\ (k=0,1,2,3,4)$. 它的代数精确度是 5. 当 $f^{(6)}(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续时，求积误差为

$$E(f)=-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)\ (a<\xi<b).$$

布尔法则(Boole rule) 即"科茨公式".

复化求积公式(composite integration rule) 一类重要的求积公式. 指将求积区间 $[a,b]$ 分为 m 个子区间，对每个子区间应用同一求积公式. 所得到的复合数值积分公式. 令

$$h=\frac{b-a}{m},$$

$$x_k=a+kh\quad(k=0,1,\cdots,m).$$

对每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 用某个求积公式求得积分值 I_k，然后求和，用

$$\sum_{k=0}^{m-1}I_k$$

作为所求定积分

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的近似值. 此即所谓复化求积公式. 应用复化求积公式可以提高数值积分的精确度. 以下三种复化求积公式有广泛应用：

1. 复化梯形公式. 对每个子区间应用梯形公式，并求和

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx T_m=\frac{b-a}{2m}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(x_k)\Big]$$

其求积误差为

$$E(f)=I-T_m=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)\ (a<\xi<b).$$

2. 复化辛普森公式. 记子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 的中点为 $x_{k+\frac{1}{2}}$，应用辛普森公式并求和

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx S_m=\frac{h}{6}\Big[f(a)+4\sum_{k=0}^{m-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{m-1}f(x_k)+f(b)\Big].$$

其求积误差为

$$E(f) = I - S_m = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \quad (a < \xi < b).$$

3.复化科茨公式.将每个子区间$[x_k, x_{k+1}]$四等分，内分点记为

$$x_{k+\frac{1}{4}}, x_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{3}{4}},$$

应用科茨公式并求和

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx C_m = \frac{h}{90}\Big[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{m-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{m-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 32\sum_{k=0}^{m-1} f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + 7f(b)\Big].$$

其求积误差为

$$E(f) = I - C_m = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi) \quad (a < \xi < b).$$

复化梯形公式(composite trapezoidal rule) 见“复化求积公式”.

复化辛普森公式(composite Simpson rule) 见“复化求积公式”.

复化科茨公式(composite Cotes rule) 见“复化求积公式”.

自适应积分法(adaptive integration methods) 一种数值积分法.指根据误差要求由计算机自动选择步长的数值积分法.例如，对于在积分区间$[a,b]$上变化不均衡的被积函数$f(x)$，在变化平稳的地方，对于不太小的子区间就可以达到较好的精度；而在变化急剧的地方，相应的子区间就要分得细一些才能达到所需要的精度.在求积过程中，随时对被积函数的变化情况加以鉴别，而只对需进一步细分的那些子区间加以细分.这种算法称为自适应积分法.它能以较小的计算代价(函数值的计算次数)取得较好的计算效果.

高斯型求积公式(Gaussian type quadratures) 一类重要的求积公式.指具有最高代数精确度的插值型求积公式.求积公式

$$\int_a^b w(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \qquad (1)$$

中含有$2n$个自由参数A_k和$x_k(k=1,2,\cdots,n)$.适当选择求积节点x_k和求积系数A_k，可使(1)达到最高代数精确度$2n-1$.高斯求积理论中的一个基本定理断言：当求积节点$x_k(k=1,2,\cdots,n)$取为区间$[a,b]$上关于权函数$w(x)$的n次正交多项式的零点时，所构造的插值型求积公式即具有最高代数精确度$2n-1$.这里区间$[a,b]$可以是有限区间，也可以是无限区间、半无限区间.而且，当$f\in C^{2n}[a,b]$时，高斯型求积公式的误差可一般地表述为

$$E(f) = \int_a^b w(x)\, f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_a^b w(x)\, \omega_n^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中$a<\eta<b$，$w_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

通常称高斯型求积公式中的求积节点为高斯点.高斯型求积公式除具有最高代数精确度外，还能够较精确地计算某些广义积分、无穷区间上的积分.高斯型求积公式的求积节点和求积系数的计算比较麻烦.为此，对某些特定的权函数，早已做出了与它对应的节点和系数表.目前，也已研制出了计算高斯型求积公式的节点和系数的程序，从而可更方便地在计算机上运用高斯型积分公式.

高斯点(Gauss points) 见“高斯型求积公式”.

高斯-勒让德求积公式(Gauss-Legendre quadrature) 一种高斯型求积公式.指积分区间$[a,b]=[-1,1]$，权函数$w(x)\equiv 1$时的高斯型求积公式，其节点是勒让德多项式

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

的零点.高斯-勒让德求积公式有时也简称高斯公式.

高斯公式(Gauss quadrature) 高斯-勒让德求积公式的简称.

高斯-拉盖尔求积公式(Gauss-Laguerre quadrature) 一种高斯型求积公式.指积分区间为$[0,\infty)$，权函数

$$w(x) = e^{-x}$$

时的高斯型求积公式，其节点为拉盖尔多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$$

的零点.

高斯-埃尔米特求积公式(Gauss-Hermite quadrature) 一种高斯型求积公式.指求积区间为$(-\infty,\infty)$，权函数

$$w(x) = e^{-x^2}$$

时的高斯型求积公式，其节点为埃尔米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$$

的零点.

高斯-切比雪夫求积公式(Gauss-Chebyshev quadrature) 亦称梅莱公式.一种高斯型求积公式.一般是指求积区间为$[-1,1]$，权函数

$$w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

时的高斯型求积公式，其节点为第一类切比雪夫多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 的零点

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

与此同时，求积区间为[－1,1]，权函数

$$w(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

的高斯型求积公式也称为高斯-切比雪夫求积公式．此时求积节点为第二类切比雪夫多项式

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

的零点

$$\cos\frac{k\pi}{n+1}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

梅莱公式(Mehler quadrature)　即“高斯-切比雪夫求积公式”.

高斯-雅可比求积公式(Gauss-Jacobi quadrature)　一种高斯型求积公式．指求积区间为[－1,1]，权函数

$$w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$
$$(\alpha>-1,\beta>-1)$$

时的高斯型求积公式，其节点为雅可比多项式

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{\alpha+\beta}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m$$

的零点.

求积误差的佩亚诺表示(Peano's representation of integration error)　一种求积误差表达式．指借助于佩亚诺核定理所得求积公式的误差表达式．求积误差

$$E(f)=\int_a^b w(x)f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k),\quad(1)$$

可看做定义在某函数类上的线性泛函：对任意常数 c，有

$$E(cf(x))=cE(f(x)),$$
$$E(f(x)+g(x))=E(f(x))+E(g(x)).$$

记所有次数 $\leqslant n$ 的多项式的集合为 $\mathscr{P}_n$．佩亚诺核定理如下：若对任意 $P(x)\in\mathscr{P}_n$，有 $E(P(x))=0$，则对一切 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$ 有

$$E(f)=\int_a^b f^{(n+1)}(t)K(t)\mathrm{d}t,\quad(2)$$

其中

$$K(t)=\frac{1}{n!}E_x[(x-t)_+^n],$$

而

$$(x-t)_+^n=\begin{cases}(x-t)^n & (x\geqslant t),\\ 0 & (x<t).\end{cases}$$

符号 E_x 表示线性泛函 E 作用于 $(x-t)_+^n$ 中的变量 x．函数 $K(t)$ 称为线性泛函 E 的皮亚诺核．由佩亚诺核定理，任何一个求积公式的误差都可以表达成(2)式的形式．佩亚诺表示的意义在于它给出了估计求积误差的标准方法．如对于梯形公式

$$\begin{aligned}K(t)&=\int_a^b(x-t)_+\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[(a-t)_++(b-t)_+]\\&=\int_a^b(x-t)_+\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}(b-t)\\&=\frac{1}{2}(a-t)(b-t).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\\&=\frac{1}{2}\int_a^b f''(t)(a-t)(b-t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

佩亚诺核(Peano kernel)　见“求积误差的佩亚诺表示”.

佩亚诺核定理(Peano kernel theorem)　见“求积误差的佩亚诺表示”.

利用样条插值的求积公式(integration formula by using spline interpolation)　利用样条插值求积分近似值的公式．指对被积函数 $f(x)$ 进行样条插值，把样条函数 $S(x)$ 的积分作为函数 $f(x)$ 之积分的近似值的公式．设在 $n+1$ 个被积结点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 给出函数 $f(x)$ 的对应值 $f_0,f_1,\cdots,f_n$，用其三次样条插值函数 $S(x)$，则得求积公式

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\approx\int_a^b S(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}S(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=0}^{n}\Big[\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)(f_i+f_{i+1})\\&\quad-\frac{1}{24}(x_{i+1}-x_i)^3(M_i+M_{i+1})\Big],\end{aligned}$$

其中 $M_i=S''(x_i)$，$M_{i+1}=S''(x_{i+1})$（参见“三次样条插值”）.

龙贝格积分法(Romberg integration method)　积分区间逐次分半的自动积分法．指从梯形公式出发，将积分区间逐次分半，运用理查森外推技巧的一种递推算法．具体作法：用梯形公式求得积分的近似值

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)];$$

将 $[a,b]$ 二等分，应用 $n=2$ 的复化梯形公式算出 T_2；将 $[a,b]$ 四等分，应用 $n=4$ 的复化梯形公式算出 T_4，如此继续，可得 $T_1,T_2,T_4,\cdots,T_{2^k},\cdots$ 注意

$$T_{2^k}=\frac{1}{2}(T_{2^{k-1}}+H_{2^{k-1}}),$$

其中

$$H_{2^{k-1}}=\frac{b-a}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}f\Big(a+(2i-1)\frac{b-a}{2^k}\Big).$$

故在计算 T_{2^k} 时只须计算 $f(x)$ 的 2^{k-1} 个新值就可从 $T_{2^{k-1}}$ 求出 T_{2^k}. 记 $T_{2^k}^{(0)}=T_{2^k}$，用递推关系

$$T_{2^k}^{(l)}=\frac{4^l}{4^l-1}T_{2^k}^{(l-1)}-\frac{1}{4^l-1}T_{2^{k-1}}^{(l-1)}\quad\begin{pmatrix}l=1,2,\cdots\\k=l,l+1,\cdots\end{pmatrix}$$

可得到一系列新的近似值. 而 $T_{2^k}^{(k)}$ 的代数精确度为 $2k+1$. 实际计算时，可按下表逐行自左向右进行：

k						
0	$T_1^{(0)}$ ↓					
1	$T_2^{(0)}$ →	$T_2^{(1)}$ ↙				
2	$T_4^{(0)}$ →	$T_4^{(1)}$ →	$T_4^{(2)}$ ↙			
3	$T_8^{(0)}$ →	$T_8^{(1)}$ →	$T_8^{(2)}$ →	$T_8^{(3)}$		
⋮	…	…	…	…		
k	$T_{2^k}^{(0)}$	$T_{2^k}^{(1)}$	$T_{2^k}^{(2)}$	$T_{2^k}^{(3)}$	…	$T_{2^k}^{(k)}$

如果被积函数 $f(x)$ 充分光滑，则上表中每列元素及对角线元素皆收敛于所求的积分值 I，特别是对角线元素序列以超线性的速度收敛. 因此，当对角线上两相邻近似值 $T_{2^k}^{(k)}, T_{2^k}^{(k-1)}$ 之差的绝对值，或相对误差

$$\frac{T_{2^k}^{(k)}-T_{2^k}^{(k-1)}}{T_{2^k}^{(k)}}$$

的绝对值小于允许误差时，终止计算，而以 $T_{2^k}^{(k)}$ 为积分近似值.

最高三角精确度求积公式(integration formula with the highest trigonometric accuracy)　一种求积公式. 它是适用于求周期函数积分的数值求积公式. 在讨论以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的求积公式

$$\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)\tag{1}$$

时，很自然地用 $f(x)$ 的三角插值多项式

$$T_m(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\tag{2}$$

代替 $f(x)$(这里的基点像通常一样在积分区间之内). 若公式(1)对于任何 m 阶三角多项式(2)是精确的，而对于($a_{m+1}^2+b_{m+1}^2>0$ 的)$m+1$ 阶三角多项式可以不精确，则称公式(1)具有 m 阶三角精确度. 并称公式(1)是最高 m 阶三角精确度求积公式. 若 $f(x)$ 是具有周期 T 的周期函数，则求积公式

$$\int_0^{T}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$

(其中 x_k 为具有步长 $h=T/n$、属于$[0,T]$的等距节点)对于任意的 $n-1$ 阶三角多项式

$$T_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_k\cos\frac{2\pi}{T}kx+b_k\sin\frac{2\pi}{T}kx\right)$$

都精确.

三角精确度(trigonometric accuracy)　见“最高三角精确度求积公式”.

奇异积分的近似计算(numerical computation of singular integrals)　计算奇异积分近似值的数值方法. 在应用上常遇到计算奇异积分的问题

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x,\tag{1}$$

这里或者被积函数 $F(x)=p(x)f(x)$ 含有奇点，或者积分区间(a,b)无界. 对于奇异积分，一般用下列两种方法作近似计算(当被积函数是列表函数时也适用)：

1. 析因子法. 把被积函数写成

$$F(x)=p(x)f(x),$$

使 $p(x)$ 包含 $F(x)$ 的全部奇点，而 $f(x)$ 是一个足够光滑的函数. 在$[a,b]$上取 n 个内插节点：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，按 $f(x)$ 在这些基点的值构造拉格朗日插值多项式，可得计算积分(1)的近似公式

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k),$$

其中

$$A_k=\int_a^b\frac{p(x)w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}\mathrm{d}x,$$

其中

$$w(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k).$$

2. 分项法. 例如计算

$$\int_a^b(x-a)^{\sigma}f(x)\mathrm{d}x\ (-1<\sigma\leqslant 0),$$

其中 $x=a$ 是一个奇点. 假定 $f(x)$ 有 k 阶连续导数. 利用

$$\begin{aligned}f(x)=&\left\{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right\}\\&+\left\{f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right\}\end{aligned}$$

得到

$$(x-a)^{\sigma}f(x)=F_1(x)+F_2(x),$$

其中

$$F_1(x)=f(a)(x-a)^{\sigma}+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^{\sigma+1}+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{\sigma+k},$$

$$F_2(x)=(x-a)^{\sigma}\left\{f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right\}.$$

于是得

$$\int_a^b (x-a)^\sigma f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b F_1(x)\mathrm{d}x+\int_a^b F_2(x)\mathrm{d}x,$$

这里右端第一个积分可逐项求出，而第二个积分的被积函数已经相当光滑，可用求积公式算出. 这便是分项法的基本思想.

析因子法(factorial method) 见“奇异积分的近似计算”.

分项法(method of separate term) 见“奇异积分的近似计算”.

重积分的近似计算(numerical computation of multiple integral) 计算重积分近似值的数值方法. 计算长方形区域上的二重积分，可利用形如

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=kh\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}A_{pq}f(x_p,y_q)+E$$

的公式，其中 $A_{p,q},x_p,y_q$ 与函数 $f(x,y)$ 无关，

$$h=\frac{b-a}{n},\qquad k=\frac{d-c}{m},$$
$$x_p=a+ph,\quad y_q=c+qk,$$

而 E 是余项. 建立这种公式的方法很多，可两次利用单重积分的求积公式，亦可用 $f(x,y)$ 的插值多项式等. 当积分区域不是长方形时，仍可利用单重积分求积公式计算重积分.

数值微分(numerical differentiation) 数值逼近的一个组成部分. 它是根据函数在一些离散点上的函数值，推算它在某点的导数或某高阶导数的近似值的数值方法的总称. 当函数由表格形式给出，或函数表达式十分复杂，其导数值难以计算时，通常用数值微分方法推算它在待求点的导数以及高阶导数的近似值.

最自然的数值微分方法是用差商代替导数. 一般用能近似代替该函数的插值函数的相应导数作为待求导数的近似值. 例如设已经求出了函数 $f(x)$ 的插值函数

$$I(x):f(x)=I(x)+R(x),$$

其中 $R(x)$ 为余项. 对上式求 k 阶导数，就得到带余项的数值微分公式

$$f^{(k)}(x)=I^{(k)}(x)+R^{(k)}(x).$$

于是插值函数 $I(x)$ 的 k 阶导数 $I^{(k)}(x)$ 就是待求的 $f^{(k)}(x)$ 的近似值，而插值函数的余项 $R(x)$ 的 k 阶导数 $R^{(k)}(x)$ 则给出此近似值的截断误差. 如插值函数为拉格朗日插值多项式时就有拉格朗日数值微分公式. 对于这类公式，其截断误差随所给离散点间的间距的缩小而下降，但其舍入误差却随间距的缩小而增大，即具有不稳定性，以致产生数值微分的不可靠性. 如取插值函数为样条函数，则相应的数值微分方法能避免用多项式插值的数值微分的不可靠性，这是因为样条插值既保证函数本身的收敛性也保证其导数的收敛性. 当离散数据含有随机性误差，并服从一定的概率分布时，可先用最小二乘法拟合一个较低次的逼近多项式，然后对后者求导数作为待求的导数的近似值.

数值微分法(numerical differentiation methods) 计算函数导数的近似值的数值方法. 最自然最简单的数值微分方法是用差商代替导数，一般方法是找一个能近似地代替该函数的插值函数，将该插值函数的导数作为待求导数的近似值.

拉格朗日数值微分公式：若取插值函数为拉格朗日插值多项式，则有拉格朗日数值微分公式. 设区间 $[a,b]$ 包含点 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x$，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n+j$ 次连续可微，它的拉格朗日插值多项式是

$$L_n(x),f(x)=L_n(x)+R_n(x),$$

其中

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)f(x_i),$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}w(x),\theta\in[a,b],$$
$$l_i(x)=\frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)},$$
$$w(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$
$$w'(x_i)=\prod_{\substack{k\neq i\\k=0}}^{n}(x_i-x_k)$$
$$(i=0,1,2,\cdots,n).$$

于是有 $f^{(j)}(x)=L_n^{(j)}(x)+R_n^{(j)}(x)$. 从而，如下公式给出 $f(x)$ 在 $x=x_k$ 的导数 f_k' 的近似值

$$f_k'\approx\sum_{\substack{i\neq k\\i=0}}^{n}\frac{w'(x_k)}{(x_k-x_i)w'(x_i)}f_i+\sum_{\substack{i\neq k\\i=0}}^{n}\frac{1}{x_k-x_i}f_k.$$

$f(x)$ 的 j 次导数的近似值的计算公式为

$$f^{(j)}(x)\approx\sum_{i=0}^{n}f_il_i^{(j)}(x).$$

马尔可夫数值微分公式：若 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是等距分布，则可得形式较简洁的数值微分公式. 利用牛顿向前插值公式有

$$f^{(j)}(x)=f^{(j)}(x_o+th)$$
$$\approx\frac{\mathrm{d}^j}{dx^j}\sum_{k=0}^{n}\binom{t}{k}\Delta^kf_0,$$

其中

$$t=\frac{x-x_0}{h},$$

故

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{h},$$

注意到 $k<j$ 时，$\binom{t}{k}$ 是 t 的 k 次多项式，故有

$$f^{(j)}(x)\approx\frac{1}{h^j}\sum_{k=j}^{n}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\binom{t}{k}\Delta^k f_0,$$

特别地，当 $j=n$ 时，有

$$f^{(n)}(x)\approx\frac{1}{h^n}\Delta^n f_0;$$

当 $n=1$ 时，有

$$f'(x)\approx\frac{\Delta f_0}{h}=\frac{f_1-f_0}{h},$$

误差为$O(h)$；

当 $n=2$ 时，有

$$f''(x)\approx\frac{\Delta^2 f_0}{h^2}=\frac{f_2-2f_1+f_0}{h^2},$$

误差为 $O(h)$.

数值微分公式

$$f''(x_0)\approx\frac{f_1-2f_0+f_{-1}}{h^2},$$

误差为 $O(h^2)$，在微分方程离散化中常被采用. 应当指出，采用插值多项式型的数值微分公式的计算稳定性差，一般是病态的，并且难以达到满意的精确度，所以在实际使用计算时要特别注意误差的分析.

三次样条插值函数数值微分公式：定义在$[a,b]$上的四次连续可微的函数 $f(x)$的三次样条插值函数 $s(x)$是

$$\begin{aligned}s(x)=&\left[\frac{3}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{2}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]f(x_i)\\&+\left[\frac{3}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{2}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]f(x_{i+1})\\&+h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{1}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]m_i\\&-h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{1}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]m_{i+1},\end{aligned}$$

其中

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$
$$h_i=x_{i+1}-x_i,$$
$$m_i=s'(x_i)\quad(i=0,1,\cdots,n-1).$$

取 $s(x)$的导数作为 $f(x)$的导数的近似值，于是有

$$\begin{aligned}&f'(x)\\\approx&\, s'(x)\\=&\frac{6}{h_i^2}\left[\frac{1}{h_i}(x_{i+1}-x)^2-(x_{i+1}-x)\right]f(x_i)\\&+\frac{6}{h_i^2}\left[(x-x_i)-\frac{1}{h_i}(x-x_i)^2\right]f(x_{i+1})\\&+\frac{1}{h_i}\left[\frac{3}{h_i}(x_{i+1}-x)^2-2(x_{i+1}-x)\right]m_i\\&-\frac{1}{h_i}\left[2(x-x_i)-\frac{3}{h_i}(x-x_i)^2\right]m_{i+1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f''(x)\\\approx&\, s''(x)\\=&\frac{6}{h_i^2}\left[1-\frac{2}{h_i}(x_{i+1}-x)\right]f(x_i)\\&+\frac{6}{h_i^2}\left[1-\frac{2}{h_i}(x-x_i)\right]f(x_{i+1})\\&+\frac{2}{h_i}\left[1-\frac{3}{h_i}(x_{i+1}-x)\right]m_i\\&-\frac{2}{h_i}\left[1-\frac{3}{h_i}(x-x_i)\right]m_{i+1}.\end{aligned}$$

对点 $x=x_i$ 上的导数，则有

$$f'(x_i)\approx m_i;$$

$$\begin{aligned}f''(x_i)\approx&\, s''(x_i)\\=&-\frac{6}{h_i^2}f(x_i)+\frac{6}{h_i^2}f(x_{i+1})\\&-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x_{i+1})\approx&\, s''(x_{i+1})\\=&\frac{6}{h_i^2}f(x_i)-\frac{6}{h_i^2}f(x_{i+1})\\&+\frac{2}{h_i}m_i+\frac{4}{h_i}m_{i+1}.\end{aligned}$$

令

$$h=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}h_i.$$

可证不仅 $s(x)$本身收敛到 $f(x)$，而且 $s'(x)$和 $s''(x)$也分别收敛到 $f'(x)$和 $f''(x)$，且有误差估计：

$$s(x)-f(x)=O(h^4),$$
$$s'(x)-f'(x)=O(h^3),$$
$$s''(x)-f''(x)=O(h^2).$$

因此，此种方法可避免用多项式插值型数值微分公式近似求导数的不可靠性.

拉格朗日数值微分公式(Lagrange's numerical differentiation formula)　见“数值微分法”.

马尔可夫数值微分公式(Markoff's numerical differentiation formula)　见“数值微分法”.

三次样条插值函数数值微分公式(cubic spline interpolation function numerical differentiation formula)　见“数值微分法”.

计 算 几 何

计算几何(computational geometry)　应用数学和计算数学的一个新分支. 它是在计算机环境中研究几何模型(包括自由曲线、曲面和几何体)的设计、表示、分析和输入、输出、交互修改等问题.

在早期，由于数学放样和外形设计的实际需要，应用样条函数和逼近论方法建立了某些曲线、曲面

的算法及其性质的研究；直到20世纪60年代初，法国工程师贝济埃(Bézier,P.E.)和美国MIT教授孔斯(Coons,S.A.)分别提出了适用于交互控制和设计的B网逼近和超限插值的基本思想和计算方法之后，才奠定了计算几何的理论基础.因此，国际上一致公认贝济埃和孔斯为计算几何的奠基人.

现在，计算几何已与微分几何、代数几何、拓扑学、计算数学和逼近论等数学分支以及数据结构、算法设计与分析、数据库和软件工程等计算机科学与技术建立了紧密联系；它的应用已渗透到计算机辅助设计与制造(CAD/CAM)、计算机图形学、机器人工程、生物医学工程和电子工程等领域.通常称计算几何的理论和应用为计算机辅助几何设计(CAGD).

计算几何的内容可大致分为曲线造型、曲面造型和体素造型三个部分，它们之间有着相互支持和相互补充的紧密联系.几何模型的设计和表示方法主要有逼近、插值、张量积算法、布尔和算子、混合函数、割角磨光和体素拼合等，其中贝济埃的B样条曲线、曲面和孔斯曲面方法占有突出的地位，这是由它们具有便于人机交互设计性质所决定的.通常，几何模型适用于交互设计的几何性质，主要表现在坐标选择无关性、仿射与射影不变性、凸包性、保形性、快速离散、易于交互修改和输入输出等几个方面.为了便于在计算机环境中实现，计算几何还研究几何模型的各种快速高精度算法，例如，模型图形的生成和显示、离散求交、几何拼接和有关几何量计算等算法.

计算几何是一门应用性较强的学科.由于在CAD/CAM、计算机图形学等高技术领域的应用需要，推动和促进了该学科的蓬勃发展.目前，较活跃的研究方向有非规则区域上的曲面设计、散乱点数据处理、三角域B-B曲面、多元样条曲面、超限插值、离散造型、过渡曲面、几何连续性、保形分析等几何模型的设计和表示的研究，以及图形算法、几何复杂性、几何公差、几何数据库、几何造型系统和用户接口等有关几何模型的算法和系统设计的研究.

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design)　简称CAGD.通常是指计算几何的理论及其应用.

数学放样(mathematical lofting)　计算几何的基本概念之一.指用数学方法并通过计算机模拟手工的放样过程，以建立产品对象的几何外形(包括线型和面型).

光顺(fairing)　计算几何的基本概念之一.指适当地修改原始型值点(改动量尽可能小)，使得所要设计的线型或面型用眼睛看来既光滑又顺畅的过程.光顺的线型通常要求曲线的切向变化连续，没有多余拐点且曲率变化较均匀.

曲线造型(curve modeling)　计算几何研究的基本内容之一.在计算机辅助设计等应用中，曲线的设计、表示、数学性质、几何形状分析、离散生成显示、几何拼接、光顺、求交、物理性质计算和人机交互等技术的统称.

曲面造型(surface modeling)　计算几何研究的基本内容之一.在计算机辅助设计等应用中，曲面的设计、表示、数学性质、几何形状分析、离散生成显示、几何拼接、光顺、求交、物理性质计算和人机交互等技术的统称.

体素造型(volume modeling)　亦称立体造型.计算几何研究的基本内容之一.指在计算机环境中，几何体的定义、设计、表示、分析和几何体之间的操作与计算.诸如布尔运算、求交、物理性质计算和几何体的输入、输出、显示、人机交互等.

立体造型(solid modeling)　即"体素造型".

几何造型(geometric modeling)　计算几何术语.一般泛指曲线造型、曲面造型和体素造型.

几何不变性(量)(geometric invariance (invariant))　几何图形的特征之一.指曲线、曲面不依赖于参数表示，并且与坐标系选择无关的几何性质(量).

几何连续性(geometric continuity)　亦称视觉连续性.几何图形的特征之一.如果曲线或曲面上每一点都存在着一个邻域，它与相应欧氏空间中的一个连通开集存在着一一对应的k阶连续的正则映射，则称该曲线或曲面为k阶几何连续的.

视觉连续性(visual continuity)　即"几何连续性".

几何拼接(geometric joint)　计算几何的基本方法之一.指分段(片)曲线(面)在公共接触部分具有一定几何连续性要求的条件、表示方法和算法设计等.

几何复杂性(geometric complexity)　计算几何术语.指几何问题的算法设计及其时间和空间复杂性分析.

离散方法(discrete method)　计算几何的基本方法和重要研究方向.指构造便于计算机生成、表示和综合等较简单的离散模型去替代或逼近较为复杂几何模型的方法.

控制顶点(control points)　计算几何的基本概念之一.一个几何模型能被一组点惟一地确定，称这组点为该模型的控制顶点.按一定顺序联结控制顶点而成的多边形(多面形或多面体)称为该模型的控制多边形(多面形或多面体).

控制多边形(control polygon)　见“控制顶点”.

控制多面形(control polyhedron)　见“控制顶点”.

控制多面体(control polyhedron)　见“控制顶点”.

凸包性质(convex hull property)　几何图形的特性之一. 整个几何模型均在其控制顶点的凸包之中,则称该模型具有凸包性质.

保凸性(convex-preserving)　几何图形的特性之一. 指对于任意凸的控制多边(面)形,所讨论的曲线(面)模型均为凸曲线(面)段(片).

散乱点插值(interpolation for scattered data)　计算几何的基本方法和重要研究方向. 指插值一组空间散乱分布点及其相应的函数或几何信息,且整体具有一定(几何)连续性的数学模型表达式.

超限插值(transfinite interpolation)　计算几何的重要研究方向. 指插值一个无限点集上的函数或几何信息的数学模型表达式.

过渡曲面(fillet)　计算几何的一类重要曲面. 指与几块曲面(片)之间满足一定几何拼接条件的曲面(片).

贝济埃曲线(Bézier curve)　计算几何的一类重要曲线. n 次贝济埃曲线定义为

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)\quad(t\in[0,1]),$$

式中 $P_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为控制顶点,$B_{i,n}(t)(i=0,1,\cdots,n)$ 为 n 次伯恩斯坦基函数. 贝济埃曲面是贝济埃曲线的张量积形式,

$$P(s,t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}B_{i,m}(s)B_{j,n}(t)\quad(s,t\in[0,1]^2).$$

贝济埃曲面(Bézier surface)　见“贝济埃曲线”.

B 样条(参数)曲线(B-spline(parametric) curve)　计算几何的一类重要曲线. 给定控制顶点 $P_i(i=0,1,\cdots,n)$ 和节点集 $\pi=(t_0,t_1,\cdots,t_N)$,k 阶 B 样条(参数)曲线定义为

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,k}(t),\ t\in[t_0,t_N],$$

其中 $B_{i,k}(t)$ 是由节点集 π 所决定的 $k-1$ 阶 B 样条基函数. B 样条(参数)曲面是 B 样条(参数)曲线的张量积形式.

B 样条(参数)曲面(B-spline(parametric) surface)　见“B 样条(参数)曲线”.

圆弧样条曲线(arc-spline curve)　计算几何的一类曲线. 指分段为圆弧,并且整体具有一阶几何连续的曲线.

双三次孔斯曲面(bicubic Coons patch)　计算几何的一类重要曲面. 双三次孔斯曲面定义为

$$S(u,v)=(u^3,u^2,u,1)M\cdot C\cdot M^T(v^3,v^2,v,1)^T\quad((u,v)\in[0,1]^2),$$

其中

$$C=\begin{pmatrix}S(0,0)&S(0,1)&S_v(0,0)&S_v(0,1)\\S(1,0)&S(1,1)&S_v(1,0)&S_v(1,1)\\S_u(0,0)&S_u(0,1)&S_{uv}(0,0)&S_{uv}(0,1)\\S_u(1,0)&S_u(1,1)&S_{uv}(1,0)&S_{uv}(1,1)\end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

三角域伯恩斯坦-贝济埃曲面片(triangular Bernstein-Bézier patch)　计算几何的一类重要曲面. 给定三角形 $\triangle=\triangle Q_1Q_2Q_3$ 和控制顶点 $\{P_{i,j,k},i+j+k=n\}$(亦称 B 网),$\triangle$ 上 n 次伯恩斯坦-贝济埃曲面片定义为

$$S(Q)=\sum_{i+j+k=n}P_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(Q).$$

其中

$$B^n_{i,j,k}(Q)=\frac{n!}{i!j!k!}u^iv^jw^k,$$

而 (u,v,w) 为 Q 关于 $\triangle$ 的重心坐标(面积坐标).

高次代数方程求根

高次代数方程求根(finding roots of polynomial equation)　简称代数方程求根. 求高次代数方程足够精确近似根的计算方法. 在非线性方程 $f(x)=0$ 的求根问题中,如果方程左边函数 $f(x)$ 为 x 的 n 次多项式,这种方程就称为 n 次代数方程,也称多项式方程,所谓 n 次多项式是指

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 $a_0\neq0$,n 为正整数,$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数,称为多项式系数,通常是实数,也可以是复数. 当 $n\geqslant2$ 就称 $f(x)=0$ 为高次代数方程,其次数为 n,如果有一个复数 x_1 使 $f(x_1)=0$,就称 x_1 为方程 $f(x)=0$ 的一个根,也称多项式 $f(x)$ 的一个零点. 代数方程求根就是求多项式零点. 代数方程根的存在性已经解决,结论是在复数域内,n 次代数方程有 n 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,其中可能有相同的根,称为重根. 低次方程的根可直接用公式表示:

一次方程 $a_0x+a_1=0$,$a_0\neq0$ 时有一个根

$$x_1=\frac{-a_1}{a_0};$$

二次方程 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$,$a_0\neq0$ 时有两个根

$$x_1,x_2=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}.$$

当方程系数都是实数时，一次方程的根是实根，二次方程的两个根可能是两个实根或一对共轭复根，三次方程的三个根可用立方根式表示，四次方程的四个根也可用根式表示. 但这些公式已相当复杂不便于计算，五次或五次以上的代数方程的根已不可能用根式表示，因此对三次以上的代数方程求根通常都要用数值方法. 由于高次方程是一种特殊的非线性方程，所以，求非线性方程根的牛顿法和其他迭代法均适用于高次方程求根. 但是，由于高次代数方程的特点，无论是计算多项式值或求根方法都有它的特殊性，例如，求根过程中计算多项式 $f(x)$ 的值就要使用秦九韶法，为判断实根的个数及对根进行隔离可使用斯图姆方法，此外，如劈因子法，贝努利方法和圆盘法等都是针对高次方程特点的求根方法.

高次方程求根是一个古老的问题，在中国最古老的数学专著《九章算术》中，已经有简单方程求根的开方术，到北宋时期，刘益给出解方程的正负开方术，贾宪提出了增乘开方法，到南宋时期，秦九韶在《数书九章》(1247)中提出的秦九韶法都是对方程求根的重大贡献. 在西方英国数学家、物理学家牛顿(Newton, I)于 1669 年给出的用减根变换原理解方程与《九章算术》的开方术相似，而霍纳(Horner, W. G.)于 1819 年给出的方法就是秦九韶法，但却晚了许多世纪.

笛卡儿法则(Descartes law)　判断多项式方程正根个数的简单法则. 给出方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

若 $a_n\neq0$，则方程正根个数是方程系数序列 $\{1,a_1,\cdots,a_n\}$ 的变号次数 V_0 或比 V_0 少一个正偶数. 当 $V_0=0$ 或 1 时，笛卡儿法则给出肯定答案：$V_0=0$ 方程没有正根，当 $V_0=1$ 时，方程只有一个正根. $V_0\geqslant2$ 时，答案是不明确的. 尽管如此，该法则判断多项式方程正负根个数仍有很大作用.

斯图姆定理(Sturm theorem)　判断实系数多项式方程实根个数的定理. 给出实系数多项式方程

$$f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,\ a_0\neq0,$$

令 $f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=f'(x)$，用 $f_1(x)$ 除 $f_0(x)$ 得商 $q_1(x)$ 及余式 $-f_2(x)$. 一般地有

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)q_k(x)-f_{k+1}(x)$$
$$(k=1,2,\cdots,m),$$

直到 $f_{m+1}(x)\equiv0$ 为止，得到 $m+1$ 个多项式序列

$$\{f_0(x),f_1(x),\cdots,f_m(x)\},$$

称为以 f_0 及 f_1 为基的斯图姆序列，当 $x=a$ 时，

$$\{f_0(a),f_1(a),\cdots,f_m(a)\}$$

是一个数列. 若其中两个相邻数符号相反就称为一次变号，记此数列变号次数为 V_a. 若 $f(a)\neq0$，$f(b)\neq0$，且数列

$$\{f_0(b),f_1(b),\cdots,f_m(b)\}$$

的变号次数为 V_b，则 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内共有 V_a-V_b 个不相同的实根. 设最后非零函数 $f_m(x)$ 没有实根，则 $f(x)=0$ 的实根都是单根. 若 $f_m(x)=0$ 有实根，则这些根都是 $f(x)=0$ 的重根，其重数为 $f_m(x)=0$ 内的重数加 1. 这就是斯图姆定理的内容. 当 $a=-\infty$，$b=+\infty$ 时，则得 $f(x)=0$ 实根个数；当 (a,b) 内只有一个根且 $b-a$ 很小，则可解决实根的隔离问题.

斯图姆序列(Sturm sequence)　见“斯图姆定理”.

罗思定理(Ruth theorem)　判断实系数代数方程在复右半平面根的个数的定理. 设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

则方程在虚轴及右半平面上没有根的充分必要条件是它的斯图姆序列

$$\{f_0(x),f_1(x),\cdots,f_n(x)\}$$

内每个多项式的次数比前一个多项式低一次且首项系数均为正数. 若上述 $n+1$ 个非零函数首项系数不全为正数，则首项系数组成数列的变号次数就是方程在右半平面根的个数.

罗思表格法(Ruth tabular method)　求实系数代数方程根的最大实部及复根隔离的方法. 设方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

计算罗思表格如下：

1	a_2	a_4	$\cdots$
a_1	a_3	a_5	$\cdots$
$a_2-\dfrac{a_3}{a_1}$	$a_4-\dfrac{a_5}{a_1}$	$\cdots$	$\cdots$

其他行计算公式为

$$本数=上二行右数-\frac{上二行最左数\times上行右数}{上行最左数}.$$

根据罗思定理，由罗思表格得到判断：如表上最左列自上而下的 $n+1$ 个数 $(1,a_1,a_2-a_3/a_1,\cdots)$ 均为正数，则虚轴上及右半平面上都没有根；若最左列系数都不为零，则虚轴上没有根，在右半平面上根的个数等于最左列系数的变号次数. 利用罗思表可求出根的实部，这只要通过原点平移到新原点 $(\alpha,0)$，求出 $f(x)$ 在 α 点展开式系数，利用新系数构造在 α 点的罗思表，若 α 足够大，则新原点右半平面没有根，最大实部根的实部必在 $(0,\alpha)$ 内. 再构造 $\alpha/2$ 点罗思表，可判断出最大实部根的更小范围. 逐次分割与判断，则可求得最大实部根的实部充分好的近似值. 用罗思表还可将方程所有根隔离开来.

劈因子法(Bairstov method)　亦称贝尔斯多夫法.利用二次因子求解高次方程的一种方法.求解高次方程时,可先求出二次因子,再通过解二次方程求得高次方程的一对复根或两个实根.设 n 次方程为

$$f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n, a_0\neq 0,$$

用一个近似的二次因子 $w(x)=x^2+ux+v$ 除 $f(x)$ 得商 $q(x)$和余式 $r(x)=r_1x+r_2$,r_1 及 r_2 由 $w(x)$的系数 u,v 所确定,即

$$f(x)=w(x)q(x)+r(x).$$

若 $r_1=r_2=0$,则$w(x)$就是 $f(x)$的一个二次因子,否则可令

$$w^*(x)=x^2+(u+\Delta u)x+(v+\Delta v),$$

要求使

$$r^*(x)=(r_1+\Delta r_1)x+(r_2+\Delta r_2)=0,$$

即由Δu,Δv引起的 Δr_1 及 Δr_2 应满足方程 $\Delta r_1+r_1=0$,$\Delta r_2+r_2=0$,由此得到修正量 Δu,Δv 的联立方程

$$\frac{\partial r_1}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial r_1}{\partial v}\Delta v+r_1=0$$

及

$$\frac{\partial r_2}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial r_2}{\partial v}\Delta v+r_2=0.$$

利用已知关系可求出方程系数

$$\frac{\partial r_1}{\partial u},\ \frac{\partial r_1}{\partial v},\ \frac{\partial r_2}{\partial u},\ \frac{\partial r_2}{\partial v},$$

从而可求得 Δu 及 Δv,得到的

$$w^*(x)=x^2+u^*x+v^*$$

是比 $w(x)$更好的二次因子.重复该过程,直到求出收敛的二次因子为止.最后,求出二次因子$w^*(x)$的根就是高次方程 $f(x)=0$ 的一对根.这种方法称为劈因子法,它的收敛速度与求复根的牛顿法等价.但它不用复数运算,这是该方法的优点,其缺点是程序比较复杂.

秦九韶方法(Qin Jiushao method)　亦称霍纳法则.计算多项式值的简便方法.设多项式

$$f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

为计算 $f(x_0)$ 的值可令

$$f(x)=p(x)(x-x_0)+f(x_0),$$

其中

$$p(x)=b_0x^{n-1}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}.$$

比较上式两边 x 的同次幂系数,则得

$$b_0=a_0,$$
$$b_i=a_i+x_0b_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n),$$
$$f(x_0)=b_n,$$

这就是秦九韶方法.计算一个n次多项式的值只用n个乘法和 n 个加法运算,它也可表示为

$$f(x_0)=(\cdots((a_0x_0+a_1)x_0+a_2)x_0+\cdots+a_{n-1})x_0+a_n,$$

这种算法计算量少,程序简单,并且若对 $p(x)$ 再用同样算法令

$$c_0=b_0, c_i=b_i+x_0c_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n-1),$$

则得 $f'(x_0)=c_{n-1}$.

类似地,可求出各阶导数值.秦九韶于 1247 年在《数书九章》中,第一次用上述方法计算高次方程的函数值,并通过逐次变换与累试,使最后某个累试值 x_k,计算出的 $b_n=f(x_k)=0$ 为止.秦九韶给出的例题都是求正实根,为说明他的求根方法,用现代数学记号并以 $n=3$ 为例加以说明.设

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

若 x_0 为一近似根,用 $x-x_0$ 除,相当于在 x_0 处作泰勒展开

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\\&\quad+f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\&=\left\{\left[\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\right](x-x_0)\\&\quad+f'(x_0)\right\}(x-x_0)+f(x_0).\end{aligned}$$

秦九韶的计算公式用表格表示如下:

(x_0)	a_0	a_1	a_2	a_3
	‖			
	b_0	b_1	b_2	$\boxed{b_3}=f(x_0)$
	‖			
	c_0	c_1	$\boxed{c_2}=f'(x_0)$	
	‖			
	$\boxed{d_0}$	$\boxed{d_1}=\frac{f''(x_0)}{2}$		

这里计算规则是

$$\boxed{\text{本数}=\text{上数}+(\text{左数}\times x_0)}$$

而$f(x)$在 x_0 的泰勒展开式就是

$$f(x)=d_0(x-x_0)^3+d_1(x-x_0)^2+c_2(x-x_0)+b_3.$$

例如,求 $x^3-67x^2+1494x-11086=0$ 的根.先估出近似 $x_0=20$.

⑳	1	−67	1494	−11086
	1	−47	554	$-6=b_3$
	1	−27	$14=c_2$	
	1	$-7=d_1$		

令 $y=x-20$,方程变为 $f_1(y)=y^3-7y^2+14y-6$.估计 $y_0=3$.计算

3	1	−7	14	−6
	1	−4	2	$0=b_3$
	1	−1	$-1=c_2$	
	1	$2=d_1$		

因 $b_3=0$,故 $f_1(y)=0$ 的根为 $y^*=3$.代入 $x^*=y^*+20=23$,即 $f(x)=0$ 的根为 $x^*=23$.这就是秦九韶法的计算步骤.但秦九韶法通常是指他的计算高

次多项式的算法，它比霍纳(Horner，W. G.)于1819年提出的同一算法早570多年.

霍纳法则(Horner rule) 即“秦九韶方法”.

林士谔-赵访熊法(Lin Shie-Zhao Fangxiong method) 一种求高次代数方程根的简单劈因子法. 设

$$f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n, a_0\neq 0.$$

用$xw(x)$除$f(x)$得二次余式$r(x)$，即

$$f(x)=xw(x)s(x)+r(x),$$

其中$s(x)$是商式，$r(x)=r_0x^2+r_1x+r_2$. 设$r_0\neq 0$，则

$$r(x)=r_0\left[x^2+\frac{r_1}{r_0}x+\frac{r_2}{r_0}\right]=r_0w^*(x),$$

其中

$$w^*(x)=x^2+\frac{r_1}{r_0}x+\frac{r_2}{r_0}=x^2+u^*x+v^*,$$

$$u^*=\frac{r_1}{r_0},$$

$$v^*=\frac{r_2}{r_0}.$$

假设$f(x)=0$没有零根，则$w(x)$是$f(x)$的二次因子的充分必要条件是：

$$w(x)=w^*(x),$$

把从$w(x)$定出$w^*(x)$的过程当做一个迭代过程，如果这个迭代过程收敛，那么极限二次式就是$f(x)$的二次因子，这就是林士谔提出的劈因子法. 赵访熊证明了当所求的二次因子对应着$f(x)$的一对最小根(共轭虚根或实根)时，方程是收敛的，其他情况方程可能发散. 两次林士谔-赵访熊法的计算工作量比一次劈因子法工作量小，而效果大致与一次劈因子法相同，而此法的程序比劈因子法简单得多，因此，它是劈因子法的一种改进.

伯努利方法(Bernoulli method) 按模最大根求解高次方程的一种方法. 设n次代数方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

它可看成线性差分方程

$$f(E)u_k=u_{n+k}+a_1u_{n+k-1}+\cdots+a_{n-1}u_{k+1}+a_nu_k=0$$

的特征方程，设方程的n个根为$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足

$$|x_1|>|x_2|\geqslant\cdots\geqslant|x_n|,$$

则差分方程的一般解可表为

$$u_k=c_1x_1^k+c_2x_2^k+\cdots+c_nx_n^k,\ c_1\neq 0.$$

将此式改写为

$$u_k=c_1x_1^k\left[1+\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k+\cdots+\frac{c_n}{c_1}\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^k\right],$$

由于$|x_1|>|x_2|$，故有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=x_1,$$

这就是方程$f(x)=0$按模最大的实根. 计算时可令

$$u_0=u_1=\cdots=u_{n-2}=0,\ u_{n-1}=1.$$

由

$$u_{n+k}=-a_1u_{n+k-1}-\cdots-a_{n-1}u_{k+1}-a_nu_k\quad(k=0,1,\cdots),$$

逐次计算到比值$u_{k+1}:u_k$趋于极限x_1即为所求，这就是伯努利法. 这种方法也可用于求高次方程按模最小根，只要令$x=1/z$代入$f(x)=0$求对z按模最大根即可. 如果按模最大根x_1为复根，则

$$|x_1|=|x_2|>|x_3|,$$

可令$x_1=re^{i\theta}$，$x_2=re^{-i\theta}$，$r>|x_3|$，此时有

$$\frac{(u_k^2-u_{k+1}u_{k-1})}{(u_{k-1}^2-u_ku_{k-2})}\to r^2,$$

$$\frac{(u_ku_{k-1}-u_{k+1}u_{k-2})}{(u_{k-1}^2-u_ku_{k-2})}\to 2r\cos\theta,$$

求$x^2-(2r\cos\theta)x+r^2=0$，则可得复根$x_1$及$x_2$.

圆盘迭代法(circular disc iterative method) 一类求复多项式全部根的迭代方法. 设复多项式函数

$$f(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-\xi_j),$$

其中$\xi_j(j=1,2,\cdots,n)$表示方程$f(z)=0$的n个根，记$Z=[z_0;r]=\{z\in C\mid |z-z_0|\leqslant r,r\geqslant 0\}$为以$z_0$为圆心，$r$为半径的圆盘. 记$z_0=\mathrm{mid}\,Z$，$r=\mathrm{rad}\,Z$，当$r=0$，$Z=[z_0;r]=z_0$为点圆. 设$Z_i=[z_i;r_i](i=1,2)$. 定义两圆盘的四则运算为

$$Z_1\pm Z_2=[z_1\pm z_2;r_1+r_2],$$

$$Z_1\cdot Z_2=[z_1z_2;|z_1|r_2+|z_2|r_1+r_1r_2],$$

$$\frac{1}{Z_2}=\frac{1}{|z_2|^2-r_2^2}[\bar{z}_2;r_2],0\overline{\in}Z_2,$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=Z_1\cdot\frac{1}{Z_2},$$

$0\overline{\in}Z_2$，这里$\bar{z}_2$表示z_2的共轭复数，$|\cdot|$表示复数模. 设复多项式方程$f(z)=0$的n个根$\xi_i\in W_j^{(0)}(j=1,2,\cdots,n)$，$W_j^{(0)}=[z_j^{(0)};r_j^{(0)}]$是已知的$n$个圆盘，则圆盘迭代程序为

$$W_j^{(k+1)}=z_j^{(k)}-\frac{h_j^{(k)}}{1-Z_j^{(k)}},$$

$$0\overline{\in}(1-Z_j^{(k)})\ (j=1,2,\cdots,n;k=0,1,2,\cdots).$$

其中

$$Z_j^{(k)}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{h_i^{(k)}}{z_i^{(k)}-W_i^{(k)}},$$

$$h_j^{(k)}=\frac{f(z_j^{(k)})}{Q'(z_j^{(k)})},$$

$$Q'(z_j)=\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(z_j-z_i).$$

引进记号

$$r^{(k)} = \max_j \operatorname{rad} W_j^{(k)} \quad (k = 0,1,\cdots),$$

$$\rho_0 = \min_{i \neq j}\{|z| \mid z \in z_i^{(0)} - W_j^{(0)}\},$$

$$z_i^{(0)} = \operatorname{mid} W_i^{(0)}.$$

若给定的初始圆盘 $W_j^{(0)}(j=1,2,\cdots,n)$ 互不相交，则在条件

$$\rho_0 > 3(n-1)r^{(0)}, \quad n \geqslant 3$$

时，上述圆盘迭代产生的序列 $\{W_j^{(k)}\}_{j=0}^{\infty}$ 具有立方收敛速度，且有根

$$\xi_i \in W_j^{(k)} \ (j=1,2,\cdots,n; k=0,1,2,\cdots)$$

和

$$r^{(k+1)} < \frac{7(n-1)}{(\rho_0 - \theta(n)r^{(0)})^2}(r^{(k)})^3,$$

其中

$$\theta(n) = \left(n + \frac{4}{3}\right) \Big/ \left(n - \frac{16}{9}\right).$$

此法最早由亨里西（Henrici，P.）和伽甘蒂尼（Gargantini，I.）于 1969 年提出的，随后相继出现许多好的算法，这些算法的特点是能求多项式方程的全部根，收敛快，还可进行并行计算.

非线性方程数值解法

非线性方程的数值解法（numerical method of nonlinear equation） 求一元非线性方程根的数值计算方法. 当方程不能用公式直接求根时，就要用数值方法求具有足够精确度的近似根，为此要解决三个问题：

1. 根的存在性.
2. 根的隔离.
3. 近似根的精确化.

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数，且 $f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根，并称 $[a,b]$ 为有根区间. 这就解决了前两个问题. 因此求根的数值方法就是在有根区间取一点 x_0 作为初始近似根，再对 x_0 精确化逐次求得满足精度要求的近似根. 常用的非线性方程的数值解法有二分法、迭代法、牛顿法、割线法、抛物线法等.

二分法（bisection method） 计算连续函数实单根的简便方法. 设有根区间 $[a,b]$ 满足 $f(a)f(b)<0$，取 $x_0=(a+b)/2$，计算 $f(x_0)$ 的值.

若 $f(x_0)=0$，则 x_0 为所求的根；

若 $f(x_0)f(a)<0$，则取 $a_1=a, b_1=x_0$，作为新的区间端点；

若 $f(x_0)f(a)>0$，则取 $a_1=x_0, b_1=b$，得新的有根区间为 $[a_1,b_1]$，取 $x_1=(a_1+b_1)/2$.

重复上述步骤，经过 k 步后可得 $[a_k,b_k]$，它满足 $f(a_k)f(b_k)<0$，且 $b_k-a_k=(b-a)/2^k$. 当 b_k-a_k 达到精度要求时，则取 $x_k=(a_k+b_k)/2$ 为方程的近似解，它与精确解 x^* 的误差不超过 $(b-a)/2^{k+1}$. 此法程序简单，安全可靠，但收敛较慢，且不适合于求偶数重根.

迭代法（iterative method） 亦称皮卡逐次逼近法. 非线性方程的数值解法之一. 指利用递推公式构造序列使之逐步逼近方程根的数值方法. 将方程改写为 $x=g(x)$，令

$$x_{k+1}=g(x_k) \quad (k=0,1,\cdots),$$

由 x_0 出发逐次计算得 $x_1,x_2,\cdots$，称 $\{x_k\}$ 为迭代序列，$g(x)$ 为迭代函数. 更一般的迭代算法可表示为

$$x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-m+1}) \quad (k = 0,1,\cdots),$$

称为 m 步迭代法，$m=1$ 称单步迭代法. 计算时要先给 m 个初始近似 $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-m+1}$，逐次算得迭代序列 $\{x_k\}$. 若存在极限

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

则称迭代序列收敛. 若存在 $1 \leqslant p < \infty$ 及正常数 $c<1$ 使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p}=c,$$

则称迭代序列 $\{x_k\}$ 对于 x^* 具有 p 阶收敛速度或 p 阶收敛的. $p=1$ 称为线性收敛，$p>1$ 称为超线性收敛，$p=2$ 为平方收敛，c 称为收敛因子. 当单点迭代法 $x_{k+1}=g(x_k)$ 收敛于 x^* 时，则 x^* 为方程 $x=g(x)$ 的根. 若假定方程有一个根 x^*，且在区间 $|x-x^*| \leqslant \rho$ 内 $g'(x)$ 存在并满足条件

$$|g'(x)| \leqslant \alpha < 1,$$

则对所有

$$x_0 \in J = \{|x-x^*| \leqslant \rho\},$$

有 $x_k \in J(k=0,1,\cdots)$，且

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

x^* 是方程 $x=g(x)$ 在 J 内的惟一解. 这表明迭代法是否收敛取决于迭代函数 $g(x)$ 在根 x^* 附近的性质. 构造求方程根的迭代法必须使迭代序列收敛. 且收敛阶越大收敛越快.

皮卡逐次逼近法（Picard successive approximation method） 即“迭代法”.

迭代序列（iterative sequence） 见“迭代法”.

迭代函数（iterative function） 见“迭代法”.

收敛因子（convergence factor） 见“迭代法”.

牛顿法（Newton method） 亦称切线法，又称牛顿-拉弗森法. 求非线性方程根的一种常用的迭代法：设函数 $f(x)$ 在方程 $f(x)=0$ 根 x^* 的邻域内连续可微，且 $f'(x)$ 不为零，若给定 x^* 的一个近似 x_k，曲线 $y=f(x)$ 通过点 $(x_k, f(x_k))$ 的切线为

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

若用切线的零点 x_{k+1} 近似曲线零点，则得牛顿迭代序列

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ (k=0,1,\cdots),$$

当给定初始近似 x_0 后，就可逐次计算 $x_1,x_2,\cdots$ 若 $f(x)$ 在 x^* 邻域内二次可微，且 $f'(x^*)\neq 0$，则当 x_0 在 x^* 邻域内时，牛顿法至少二阶收敛，且当 k 充分大时，估计式

$$\| x_{k+1}-x^* \| \leqslant c \| x_k-x^* \|^2$$

成立，c 为确定常数. 牛顿法一般只具有局部收敛性，但若 $f(x)$ 为实连续函数，且在 $[a,b]$ 上 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不变号，$f(a)f(b)<0$，则当 x_0 满足 $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ 时，牛顿迭代序列收敛到方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上的惟一根 x^*. 牛顿法的优点是收敛快，其缺点是对初始近似 x_0 选择有较强限制.

切线法(tangent(line) method)　即“牛顿法”.

牛顿-拉弗森法(Newton-Raphson method)　即“牛顿法”.

牛顿下山法(Newton down-hill method)　牛顿法的一种变形. 它是为减弱牛顿法对初始近似 x_0 的限制而提出的一种算法. 算法的迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\omega_k\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ (k=0,1,\cdots),$$

其中 $\omega_k>0$ 为迭代参数，并由条件

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

确定，计算时可先选 $\omega_k=1$，逐次减半，直到条件

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

满足为止. 这个方法的迭代序列是大范围收敛的，但收敛速度只是线性的.

割线法(secant method)　亦称弦截法，又称线性插值法. 一种迭代法. 指用割线近似曲线求方程根的 2 步迭代法. 此法用通过点 $(x_k,f(x_k))$ 及 $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ 的割线

$$y=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_k)+f(x_k)$$

近似曲线 $y=f(x)$，用割线的根作为方程根的新近似 x_{k+1}，从而得到方程求根的割线法迭代程序

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)$$

$$(k=1,2,\cdots,n),$$

其中 x_0,x_1 为初始近似. 若 $f(x)$ 在根 x^* 的邻域内有二阶连续导数，且 $f'(x^*)\neq 0$，则当 x_0,x_1 在 x^* 邻域内时，割线法收敛于 x^*，其收敛阶为

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618.$$

弦截法(chord method)　即“割线法”.

线性插值法(linear interpolation method)　即“割线法”.

试位法(method of false position)　割线法的一种变形. 即以左右夹击方式求方程实根的一种方法. 此法选择 $(x_k,f(x_k))$ 及 $(x_m,f(x_m))$ 的割线代替通过 $(x_k,f(x_k))$ 及 $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ 的割线，其中 m 是满足 $m<k$，又使

$$f(x_m)f(x_k)<0$$

成立的最大下标. 当然初始近似 x_0 及 x_1 应选得使

$$f(x_0)f(x_1)<0,$$

迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_m}{f(x_k)-f(x_m)}f(x_k)$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

此法的优点是：对连续函数总是收敛的，但与割线法不同，一般只有一阶收敛.

平行弦法(parallel-chord method)　一种迭代法. 指用斜率不变的直线近似曲线得到迭代序列的求根方法. 用牛顿法及割线法求根时，每步迭代用直线近似曲线其直线斜率都在变化，为简化计算，若逼近 $y=f(x)$ 的直线斜率 c 保持不变，直线取为

$$y=f(x_k)+c(x-x_k),$$

则得平行弦法的迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{1}{c}f(x_k)\ (k=0,1,\cdots),$$

若取 $c=f'(x_0)$，则称方法为简化牛顿法，平行弦法计算简单，每步只需算一个 $f(x_k)$ 值，但它只有线性收敛速度，一般较少使用.

抛物线法(parabolic method)　亦称米勒法，又称二次插值法. 指用抛物线近似曲线求方程根的迭代方法. 此法用通过样点

$$(x_k,f(x_k)),\ (x_{k-1},\ f(x_{k-1})),\ (x_{k-2},\ f(x_{k-2}))$$

的二次插值多项式导出求根的迭代算法，其几何意义就是用通过曲线 $y=f(x)$ 上三点的抛物线的根近似方程 $f(x)=0$ 的根. 迭代算式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{b_k\pm\sqrt{b_k^2-4f(x_k)f(x_k,x_{k-1},x_{k-2})}}$$

$$(k=2,3,\cdots),$$

式中 $b_k=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1})$，“±”号选成与 b_k 同号，而符号 $f[\cdot,\cdot]$ 及 $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ 分别表示 $f(x)$ 在相应点的一阶与二阶均差. 若 $f(x)$ 在根 x^* 三次可微，且 x_0,x_1,x_2 均在 x^* 的邻域内，则抛物线法是收敛的，且收敛阶为 $p=1.839\cdots$. 此法可用于求方程的复根.

米勒法(Miller method)　即“抛物线法”.

二次插值法(quadratic interpolation method)　即“抛物线法”.

双曲插值法(hyperbolic interpolation method)　亦称线性分式插值法. 指用双曲线近似曲线求方程

根的迭代方法. 设已知曲线 $y=f(x)$ 上三个点

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2),$$

通过这三点构造形如

$$\omega(x)=\frac{x-a}{bx+c}$$

的线性分式函数，并用 $\omega(x)=0$ 的根 x_3 作为方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 的新近似，得

$$x_3=x_2+\lambda_2(x_2-x_1),$$

$$\lambda_2=\frac{f_2(\delta_2 f_1-\mu_2 f_0)-f_2 f_0}{f_2(\delta_2 f_0-\mu_1 f_1)-f_1 f_0},$$

其中

$$\mu_2=(x_2-x_1)/(x_1-x_0),$$

$$\delta_2=1+\mu_2,$$

$$f_i=f(x_i)=y_i,$$

重复上述步骤可算出 $x_3,x_4,\cdots$，其几何意义就是用双曲线的零点近似曲线 $y=f(x)$ 的零点 x^*，故称此迭代法为双曲插值法. 若 $f(x)$ 在根 x^* 附近三次可微，且 x_0,x_1,x_2 与 x^* 充分接近，则双曲插值迭代序列收敛，且收敛阶为 $p=1.839\cdots$

线性分式插值法(linear fractional interpolation method) 即"双曲插值法".

平方根迭代法(square root iterative method) 一种具有大范围收敛性的方程求根迭代法. 设 $f(x)$ 是阶数小于 2 的整函数，若 $f(x)$ 只含实零点，则求方程 $f(x)=0$ 根的下述迭代法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{|f(x_n)|}{\sqrt{f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n)}}$$

$$(n=0,1,\cdots),$$

称为平方根迭代法. 此法是 1973 年由奥斯特洛夫斯基(Ostrowski, A. M.)与徐利治各自独立发现的(事实上，徐利治于 1964 年，在吉林大学讨论班上就曾报告过此方法)，而且他们都证明了平方根迭代法具有大范围收敛性.

埃特金方法(Aitken method) 亦称 δ^2 加速法. 一种提高迭代法收敛速度的有效算法. 设迭代序列为 $x_{k+1}=g(x_k)$，并已算出

$$x_1=g(x_0),\quad x_2=g(x_1),$$

若 x_0 与所求解 x^* 充分接近，x_1 应是比 x_0 更好的近似，因此可对 $x-g(x)=0$ 应用弦截法，用 y_0 表示用弦截法得到的近似值，则有

$$y_0=x_0-\frac{(x_1-x_0)[x_0-g(x_0)]}{[x_1-g(x_1)]-[x_0-g(x_0)]}$$

$$=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}.$$

利用差分记号 $\delta x_i=x_{i+1}-x_i$，上式可改写为

$$y_0=x_0-\frac{[\delta x_0]^2}{\delta^2 x_0}.$$

从 y_0 出发，重复上述过程又可得到新的近似，如此继续下去得到的序列 $y_0,y_1,\cdots$，就称为 δ^2 加速过程，即埃特金方法. 这个迭代过程不管原迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)$ 是否收敛，只要 $f(x)$ 在其根 x^* 附近充分光滑，$f'(x^*)\neq 0$，则序列 $\{y_k\}$ 都收敛，若 $\{x_k\}$ 为 $p(>1)$ 阶收敛，则 $\{y_k\}$ 为 $2p-1$ 阶收敛.

δ^2 加速法(δ^2-speed-up method) 即"埃特金方法".

斯蒂芬森方法(Steffensen method) 一种不需计算导数又具有二阶收敛速度的方程求根迭代法. 在割线法中取 x_k 及 $x_k+f(x_k)$ 两点做割线，则得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{[f(x_k)]^2}{f(x_k+f(x_k))-f(x_k)}$$

$$(k=0,1,\cdots),$$

称此方法为斯蒂芬森方法. 实际上它是对 $g(x)=x+f(x)$ 使用 δ^2 加速法得到的，它具有二阶收敛速度，是一个常用的求方程根的方法.

切比雪夫迭代法(iterative method of Chebyshev) 一种具有三阶收敛速度的方程求根迭代法. 其算式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f''(x_k)[f(x_k)]^2}{2[f'(x_k)]^3}$$

$$(k=0,1,\cdots).$$

当 $f(x)$ 在根 x^* 的邻域内 3 次可微，且 $f'(x^*)\neq 0$ 时，方法三阶收敛.

效能指数(efficiency index) 亦称效率. 衡量迭代法优劣的一个重要指标. 迭代法收敛阶不能完全表明迭代法的好坏，因还需考虑每步迭代计算量. 1962 年，奥斯特洛夫斯基(Ostrowski, A. M.)引进了效能指数概念. 设迭代法收敛阶为 p，每步迭代计算函数值及导数值的总次数为 w. 定义效能指数为

$$\mu=p^{\frac{1}{w}},$$

后来有的文献定义 $\mu=\ln p/w$，它们本质上是一致的. 效能指数越大表明效率越高，所用代价越小，机器时间越省. 常用方法的效能指数如下表

方法名称	牛顿法	割线法	抛物线法	斯蒂芬森法	切比雪夫法
效能指数	$\sqrt{2}=1.414\cdots$	$1.618\cdots$	$1.839\cdots$	$1.414\cdots$	$\sqrt[3]{3}=1.442\cdots$

多元非线性方程组数值解法

多元非线性方程组数值解法(numerical methods of nonlinear equations in several variables) 用数值方法求多元非线性方程组解的各种迭代法的总称. 设 n 个变量和 n 个方程的方程组为

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\ (i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2),$$

若 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个是关于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的非线性函数，则称此方程组为非线性方程组. 若记

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in \mathrm{R}^n,$$
$$F=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T\in \mathrm{R}^n,$$

则方程组可简写为 $F(x)=0$，F 是定义在域 $D\subset \mathrm{R}^n$ 上的非线性映射，记为 $F:D\subset \mathrm{R}^n\to \mathrm{R}^n$. 若存在点 $x^*\in D$ 使 $F(x^*)=0$，则称 x^* 为方程组 $F(x)=0$ 的一个解. 非线性方程组解的情况较复杂，它在域 D 中可能有解也可能无解，有解时可能有一个解，也可能有多个解甚至无穷多个解，因此，数值解法是在方程组解存在惟一的条件下讨论求解的数值方法. 对非线性方程组，除极特殊情况可用直接方法求解外，通常都是用迭代方法逐次求方程组解的近似值，使它达到所要求的精度.

求非线性方程组解的迭代方法，其基本思想是将方程 $F(x)=0$ 改写为不动点形式 $x=G(x)$，然后构造迭代序列 $x^{k+1}=G(x^k)$ $(k=0,1,\cdots)$. 通过给定初始近似 x^0，逐次计算出 $x^1,x^2,\cdots$，如果

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*，且\ x^* = G(x^*),$$

则当 k 充分大，x^k 就是方程组 $F(x)=0$ 的解 x^* 的近似. 这里 G 为迭代函数，对 $F(x)=0$ 构造出不同的 G 就可得到不同迭代法. 更一般的迭代形式是

$$x^{k+1}=G(x^k,\cdots,x^{k-m+1})\quad (k=m-1,m,\cdots),$$

初始近似为 $x^0,x^1,\cdots,x^{m-1}$，逐步算出 $x^m,x^{m+1},\cdots$，称为 m 步迭代法. 假定方程组的解 x^* 存在，在 x^* 邻域内取 x_0 所构造的迭代序列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 x^*，则称迭代法具有局部收敛性. 如果迭代序列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 对给定初始近似 x^0 能证明在 x^0 附近取初始近似所构造的迭代序列收敛于 x^*，且 x^* 为方程组的解，就称迭代法具有半局部收敛性. 如果对任何初始近似 $x^0\in D$ 都能证明迭代序列收敛于方程的解 x^*，则称此迭代法具有大范围收敛性.

迭代法中经典的方法是牛顿法，在此基础上发展的各种牛顿法变形以及割线法和拟牛顿法都是具有局部收敛性的算法. 20 世纪 60 年代以后提出的较有特色的算法有连续法、单纯形算法以及区间迭代法等. 随着计算机发展和科学计算的需要，20 世纪 80 年代以后，又发展了多分裂并行算法，而且一批效率较高或大范围收敛的算法已编成数学软件，为科学计算提供了方便.

压缩映射原理(contraction mapping principle) 非线性方程(组)解存在惟一和迭代序列收敛的基本定理. 将方程 $F(x)=0$ 写成不动点形式 $x=G(x)$，G 为 R^n 到 R^n 映射，记 $G:D\subset \mathrm{R}^n\to \mathrm{R}^n$，若存在常数 $\alpha\in(0,1)$ 使对任何 $x,y\in D_0\subset D$ 有

$$\| G(x) - G(y) \| \leqslant \alpha \| x - y \|,$$

则称 G 为 D_0 上的压缩映射，α 称为压缩系数. 压缩映射原理是：设 G 为 D_0 上的压缩映射，且 G 映 D_0 到自身，则 G 在 D_0 上存在惟一的不动点 x^*. 该条件也是方程(组)$F(x)=0$ 在 D_0 上解存在惟一的条件，满足此条件时，迭代法

$$x^{k+1}=G(x^k)\quad (k=0,1,\cdots)$$

生成的序列 $\{x^k\}$，当 $x^0\in D_0$ 时，有

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*.$$

压缩映射(contraction mapping) 见“压缩映射原理”.

压缩系数(coefficient of contraction) 见“压缩映射原理”.

(非线性方程组的)牛顿(解)法(Newton method (of nonlinear equations)) 解非线性方程组的一种经典方法. 它是方程求根牛顿法的推广. 当已知 x^k 是非线性方程组 $F(x)=0$ 的解 x^* 的一个近似时，用 $F(x)$ 在点 x^k 的泰勒展开线性部分近似 $F(x)$，从而得到方程组解 x^* 的新近似，记为 x^{k+1}. 即由

$$F(x)\approx F(x^k)+F'(x^k)(x-x^k)=0,$$

当 $F'(x^k)$ 非奇，得

$$x^{k+1}=x^k-F'(x^k)^{-1}F(x^k)\ (k=0,1,\cdots),$$

这就是牛顿法，其中

$$F'(x^k)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

是 F 在 x^k 处的雅可比矩阵. 牛顿法计算时先给初始近似 x^0，逐次求出 $x^1,x^2,\cdots$，由 x^k 出发算 x^{k+1}，先要计算 $F(x^k)$ 及 $F'(x^k)$，然后解线性方程组

$$F'(x^k)\Delta x^k = - F(x^k),$$

此方程组称为牛顿方程，求得解 Δx^k，于是有

$$x^{k+1}=x^k+\Delta x^k.$$

若 $F'(x)$ 在解 x^* 附近连续、非奇异，并且 $F'(x)$ 在 x^* 邻域满足条件

$$\| F'(x) - F'(x^*) \| \leqslant r \| x - x^* \|,$$

常数 $r>0$，则牛顿法是二阶收敛的. 牛顿法的优点是收敛快，缺点是初始近似值 x^0 在 x^* 附近时才能保证其收敛，且每步要算 $F(x^k)$ 及 $F'(x^k)$ 的值，计算量较大.

在 R^n 空间中，牛顿法局部收敛性定理是由龙格(Runge, C. D. T.)于 1899 年给出的，范因(Fine, H. B.)于 1916 年第一次在不假定方程解存在的情况下证明了牛顿法收敛性，而最著名的收敛性定理是

俄国数学家坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)于1948年给出的.以后有关牛顿法收敛性及误差估计还有不少研究成果.

坎托罗维奇定理(Kantorovich theorem) 牛顿迭代法的半局部收敛定理.它是俄国数学家坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)于1948年首先给出的,在迭代法收敛性研究中有深远影响.定理内容为:假定 $F:D\subset \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 及初始近似 x^0 满足下列条件:

1. $F'(x^0)^{-1}$ 存在,且 $\|F'(x^0)^{-1}\|\leqslant\beta$, $\|F'(x^0)^{-1}F(x^0)\|\leqslant\eta$;

2. 在 x^0 的邻域 $S(x^0,\delta)\subset D$ 内 $F'(x)$ 存在,且满足条件:

$$\|F'(x)-F'(y)\|\leqslant r\|x-y\|,$$

对任何 $x,y\in S(x^0,\delta)$,并且

$$\rho=r\beta\eta\leqslant\frac{1}{2},\quad \delta\geqslant\frac{1-\sqrt{1-2\rho}}{\rho}\eta,$$

则方程 $F(x)=0$ 于 $S(x^0,\delta)$ 有解 x^* 存在,同时,由牛顿法

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)})\ (k=0,1,\cdots),$$

产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^*,且有误差估计

$$\|x^{(k)}-x^*\|\leqslant\frac{\theta^{2^k-1}}{2^{k-1}\sum\limits_{j=0}^{2^k-1}\theta^{2j}}\eta,$$

其中

$$\theta=\frac{1-\sqrt{1-2\rho}}{1+\sqrt{1-2\rho}}.$$

简化牛顿法(simplified Newton method) 一种减少计算量的牛顿型方法.为了减少牛顿法的计算量,在每步计算中用 $F'(x^0)$ 代替 $F'(x^k)$,得简化牛顿程序

$$x^{k+1}=x^k-F'(x^0)^{-1}F(x^k)\ (k=0,1,\cdots).$$

于是由 x^k 算 x^{k+1} 只需计算 $F(x^k)$,不再计算 $F'(x^k)$ 及求逆,使每步计算量大大减少,这是此算法的优点,其缺点是收敛慢,只有线性收敛速度.

牛顿-萨曼斯基方法(Newton-Šamanski method) 一种提高计算效率的牛顿型迭代法.利用牛顿法收敛快和简化牛顿法计算量省的优点,将 m_k 步简化牛顿法合并为一步.令

$$x^{k,0}=x^k,$$
$$x^{k,j}=x^{k,j-1}-F'(x^k)^{-1}F(x^{k,j-1})$$
$$(j=1,2,\cdots,m_k),$$

取 $x^{k+1}=x^{k,m_k}$,对 $k=0,1,\cdots$,逐次计算得到序列 $\{x^k\}$,称为牛顿-萨曼斯基方法.当 $m_k=m$ 时,方法是 $m+1$ 阶收敛的,它每步要算 m 个 $F(x)$ 值和一次 $F'(x)$(即 n 个分量导数值),故工作量为 $n+m$,方法效率为

$$e_{N_m}=\frac{\ln(m+1)}{n+m}.$$

当 $m=1$ 时,就是牛顿法,它的效率为

$$e_{N_1}=\frac{\ln 2}{n+1};$$

当 $m\geqslant2$ 时,有 $e_{N_m}>e_{N_1}$,它比牛顿法效率高.例如,当 $n=m=2$ 时,有 $e_{N_m}/e_{N_1}=1.20$;$n=m=5$,$e_{N_m}/e_{N_1}=1.55$;当 $n=50,m=22$ 时,有 $e_{N_m}/e_{N_1}=3.20$ 等.

牛顿-萨曼斯基方法是萨曼斯基(Шаманский, В.)于1967年给出并证明它具有 $m+1$ 阶收敛,但 $m=2$ 的情形,已由特劳勃(Traub, J.)于1964年证明了它具有三阶收敛性.

牛顿-斯蒂芬森方法(Newton-Steffensen method) 具有二阶收敛速度的离散牛顿法.在解非线性方程组 $F(x)=0$ 的牛顿法中,若在 F 的雅可比矩阵 $F'(x^k)$ 中用差商近似导数就得到离散牛顿法

$$x^{k+1}=x^k-[J(x^k,h^k)]^{-1}F(x^k)\ (k=0,1,\cdots),$$

其中 $J(x^k,h^k)=$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{h_1^k}[f_1(x^k+h_1^ke_1)-f_1(x^k)] & \cdots & \frac{1}{h_n^k}[f_1(x^k+h_n^ke_n)-f_1(x^k)]\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{h_1^k}[f_n(x^k+h_1^ke_1)-f_n(x^k)] & \cdots & \frac{1}{h_n^k}[f_n(x^k+h_n^ke_n)-f_n(x^k)]\end{pmatrix}$$

$$h^k=(h_1^k,h_2^k,\cdots,h_n^k)^T,$$

若在此迭代法中取 $h^k=F(x^k)$,得

$$x^{k+1}=x^k-[J(x^k,h^k)]^{-1}F(x^k)\ (k=0,1,\cdots)$$

就是牛顿-斯蒂芬森迭代法.此法不用算导数但仍具有二阶收敛速度.每步算 $n+1$ 个 $F(x)$ 函数值,效率与牛顿法一样,都是 $\ln 2/(n+1)$.

牛顿下降法(Newton descent method) 具有大范围收敛的牛顿型迭代法,它是牛顿下山法在多元非线性方程组情况的推广.其迭代程序为

$$x^{k+1}=x^k-\omega_kF'(x^k)^{-1}F(x^k)\ (k=0,1,\cdots),$$

其中 $\omega_k>0$ 称为松弛参数,ω_k 应适当选择使它满足下降条件 $\|F(x^{k+1})\|<\|F(x^k)\|$.计算开始可令 $\omega_k=1$,若条件不满足再取 $\omega_k=1/2$,逐次分半,直到下降条件成立为止.由于牛顿下山法每步都使下降条件成立,故有

$$\lim_{k\to\infty}\|F(x^k)\|=0,$$

因此,只要 $F'(x)$ 非奇异,对任何 x^0 迭代序列 $\{x^k\}$ 均收敛,故当 k 充分大时,可取 $x^k\approx x^*$.此法优点是大范围收敛,缺点是收敛慢,计算量大.牛顿下山法最早是1955年由克罗克特(Crockett, J. B.)和切诺夫(Chernoff, H.)给出的.

布朗方法(Brown method) 离散牛顿法的一种改进算法.用牛顿法解非线性方程组 $F(x)=0$ 时,每步迭代要解方程组

$$F'(x^k)\Delta x^k = -F(x^k),$$

如果计算时先按分量方程逐个线性化并逐个消元，得到一个线性三角方程组，再回代求出新的 $x^{k+1}=x^k+\Delta x^k$，计算时偏导数$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$用 x^k 点的差商近似. 这是布朗(Brown, K.)于 1966 年提出的. 后来又证明了方法同样具有二阶收敛性，而每步迭代只需计算 $(n+3)/2$ 个函数值，比牛顿法减少近一半. 此法特别适用于方程组中只有少数方程为非线性的情形，计算时先将线性的排在前面，非线性的也应按次数由低次到高次排列，这样计算效果较佳.

布伦特方法(Brent method)　布朗方法的一种改进算法. 具体做法是将解非线性方程组的牛顿-萨曼斯基技巧用于布朗方法，即每步求布朗线性方程组时将系数矩阵中$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$的值重复使用 m 次，$m=1$ 即为布朗方法. 新的方法具有 $m+1$ 阶收敛性，是一种效率很高的算法，由此算法编成的数学软件是目前求解非线性方程组的常用算法，已被普遍使用. 此法是布伦特(Brent, R. P.)于 1973 年给出的.

割线法(secant method)　一种迭代法. 指一类通过线性插值得到的多步迭代法. 若已知非线性方程组 $F(x)=0$ 的解 x^* 的一个近似 x^k，在 x^k 附近给出 n 个辅助点 $x^{k,j}(j=1,2,\cdots,n)$，用这 $n+1$ 个点做 $F(x)$ 的线性插值，若记 $L_k(x)=A_k(x-x^k)+F(x^k)$，A_k 由 $L_k(x^{k,j})=F(x^{k,j})\ (j=1,2,\cdots,n)$ 确定，记

$$H_k=(x^{k,1}-x^k,\cdots,x^{k,n}-x^k),$$

$$\Gamma_k=(F(x^{k,1})-F(x^k),\cdots,F(x^{k,n})-F(x^k)),$$

则得 $A_kH_k=\Gamma_k$. 如果 n 个向量 $x^{k,j}-x^k\ (j=1,2,\cdots,n)$ 线性无关，则 H_k 非奇异，此时 $A_k=\Gamma_kH_k^{-1}$. 同样，如果向量 $F(x^{k,j})-F(x^k)\ (j=1,2,\cdots,n)$ 线性无关，则 Γ_k 非奇异并有 $A_k^{-1}=H_k\Gamma_k^{-1}$. 割线法就是用 $A_k(x-x^k)+F(x^k)=0$ 的解 $x=x^{k+1}$ 作为新近似得到的迭代法：

$$x^{k+1}=x^k-A_k^{-1}F(x^k)\ (k=0,1,\cdots),$$

辅助点 $x^{k,j}(j=1,2,\cdots,n)$ 取值不同，就得到不同形式的割线法. 例如，取 $x^{k,j}=x^k+h_j^ke^j$ 得到单点迭代法，此时 A_k 就是用差商代替导数的雅可比矩阵 $J(x^k,h^k)$，方法也就是离散牛顿法. 若取 $h^k=x^k-x^{k-1}$，则得到两点割线法

$$x^{k+1}=x^k-[J(x^k,h^k)]^{-1}F(x^k)\ (k=0,1,\cdots),$$

其中

$$J(x^k,h^k)=\left(\frac{1}{h_1^k}\left[F(x^k+h_1^ke_1)-F(x^k)\right],\right.$$

$$\cdots,\frac{1}{h_n^k}\Big[F(x^k+\sum_{j=1}^{n}h_j^ke_j)$$

$$\left.-F(x^k+\sum_{j=1}^{n-1}h_j^ke_j)\Big]\right),$$

它是超线性收敛的，收敛阶为 1.618. 若取

$$x^{k,j}=x^{k-j}\ (j=1,2,\cdots,n),$$

则得到 $n+1$ 点割线法，它每步只需算一个新函数值 $F(x^k)$，计算量最省，但由于稳定性差，一般不能使用. 在 $\mathbb{R}^n$ 上研究割线法最早是黑里奇(Heinrich, H.)于 1955 年前后提出的，而最早的严格分析是比特纳(Bittner, L.)于 1959 年给出的，沃尔夫(Wolfe, P.)于 1959 年独立提出了 $n+1$ 点割线法. 在 20 世纪 60 年代以后，有很多作者对割线法的不同形式及其收敛性、稳定性等做了很多研究，有不少好的结果.

广义线性方法(generalized linear method)　一类双层迭代法. 指将解线性方程组迭代法用于解非线性方程组的线性化方程时，所构造出的一种方法. 对非线性方程组 $F(x)=0$，若已知 k 次近似解 x^k，则

$$A_k\Delta x^k+F(x^k)=0$$

为 $F(x)=0$ 在点 x^k 的线性方程. 若 A_k 为 $n\times n$ 阶非奇异矩阵，用直接法解此线性化方程得到

$$x^{k+1}=x^k-A_k^{-1}F(x^k),$$

这就是解非线性方程组的一类迭代法，当 $A_k=F'(x^k)$ 即为牛顿法. 如果在每迭代步中求解线性化方程

$$A_k\Delta x^k=-F(x^k)$$

也采用迭代法，这样每步迭代求 x^{k+1} 时又要进行线性迭代，从而得到一种非线性-线性迭代的双层迭代法，称为广义线性方法. 例如非线性迭代用牛顿法，解牛顿线性化方程用 m 步的雅可比迭代，则得到 m 步牛顿-雅可比迭代法，其算式为

$$x^{k+1}=x^k-[I+H_k+\cdots+H_k^{m-1}]D_k^{-1}F(x^k)$$

$$(k=0,1,\cdots),$$

其中 $A_k=F'(x^k)=D_k-C_k$，D_k，$-C_k$ 分别为 A_k 的对角部分和非对角部分，并记 $H_k=D_k^{-1}C_k$. 类似地，若将矩阵 A_k 分解为 $A_k=D_k-L_k-U_k$，其中 D_k，$-L_k$ 与 $-U_k$ 分别为 A_k 的对角、严格下三角与严格上三角部分. 取

$$B_k=\frac{1}{\omega_k}[D_k-\omega_kL_k],$$

$$C_k=\frac{1}{\omega_k}[(1-\omega_k)D_k+\omega_kU_k],$$

$$H_k=H_k(\omega_k)=B_k^{-1}C_k,$$

$\omega_k>0$ 为松弛因子. 当 $A_k=F'(x^k)$ 时，则得到牛顿 SOR 迭代法

$$x^{k+1}=x^k-\omega_k[I+H_k(\omega_k)+\cdots+H_k^{m-1}(\omega_k)]$$

$$\times(D_k-\omega_kL_k)^{-1}F(x^k).$$

当 $\omega_k=1$ 时，就得到 NGS 迭代法. 若 A_k 是按割线法

得到的矩阵，则可得到割线 SOR 迭代. 由于 A_k 可作不同选择，且解线性方程

$$A_k\Delta x^k+F(x^k)=0$$

时迭代法也可取的不同，从而可构造出多种非线性-线性双层迭代. 所有这些方法都是广义线性方法，一般情况下它们都只是线性收敛. 但若线性迭代步数 m 不固定，而改为 m_k，且令 $m_k=k$ 或 $m_k=2^k$，则迭代序列可达到超线性收敛. 有关这类方法的讨论在 20 世纪 60 年代开始，有不少人提出很多分析和计算结果，特别对牛顿 SOR 迭代法，不但有理论分析，还应用于解非线性边值问题的差分方程，并取得较好效果.

牛顿SOR 迭代法(Newton SOR method) 见“广义线性方法”.

NGS 迭代法(Newton-Gauss-Seidel iterative method) 见“广义线性方法”.

非线性迭代法(nonlinear iterative method) 亦称解非线性方程组松弛法. 一种双层迭代法. 它是将解线性方程组迭代法原则直接用于非线性方程，再用解一元非线性方程迭代程式构造出的一种方法. 例如，将雅可比迭代用于解非线性方程组 $F(x)=0$，若已知 k 次近似解 $x^k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)^T$，则求 $k+1$ 次近似 x^{k+1} 的方法是求方程

$$f_i(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_{i-1}^k,x_i,x_{i+1}^k,\cdots,x_n^k)=0 \quad (i=1,2,\cdots n)$$

的解 x_i，并令 $x_i^{k+1}=x_i$，这样每个方程都是一元非线性方程. 若用牛顿法解此分量方程，则得到雅可比-牛顿迭代，若解方程用割线法，则得到雅可比-割线迭代法. 如果解非线性方程牛顿法只算 m 步，则得 m 步雅可比-牛顿法. $m=1$ 时为一步雅可比-牛顿法，其算式为

$$x_i^{k+1}=x_i^k-\frac{f_i(x^k)}{\partial_i f_i(x^k)} \quad (i=1,2,\cdots n;k=0,1,2,\cdots).$$

类似地，若用高斯-赛德尔迭代，就要解分量方程

$$f_i(x_1^{k+1},\cdots,x_{i-1}^{k+1},x_i,x_{i+1}^k,\cdots,x_n^k)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

得到 x_i，并令 $x_i^{k+1}=x_i$，依次由 $i=1,2,\cdots,n$，解这 n 个非线性方程，得到 x^{k+1}，就称为非线性高斯-赛德尔迭代法. 若解非线性方程用牛顿法则得到高斯-赛德尔-牛顿法. 如果在解非线性方程得到 x_i 后，令

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\omega(x_i-x_i^k),$$

其中 $\omega>0$ 为松弛因子，则方法称为非线性 SOR 迭代，而解非线性方程用牛顿法，则得 SOR 牛顿迭代法，它是双层迭代法. 但若解分量方程只用一步牛顿法，则得一步 SOR 牛顿法为

$$x_i^{k+1}=x_i^k-\frac{\omega f_i(x^{k,i})}{\partial_i f_i(x^{k,i})} \quad (i=1,2,\cdots,n;k=0,1,\cdots),$$

其中

$$x^{k,i}=(x_1^{k+1},\cdots,x_{i-1}^{k+1},x_i^k,\cdots,x_n^k)^T.$$

类似地，可得到 SOR 割线法，SOR 斯蒂芬森法和其他线性非线性组合的双层迭代法. 这种迭代法计算简单，节省存储空间且适合于并行计算，缺点是收敛较慢，只有线性敛速. 这类方法最早是利伯斯坦(Liebarstein, H.)于 1959 年提出的，后来很多作者研究了这类算法的其他计算公式并给出计算结果和应用，从而形成了非线性迭代法.

解非线性方程组松弛法(relaxation method for solving nonlinear equations) 即“非线性迭代法”.

非线性高斯-赛德尔迭代法(nonlinear Gauss-Seidel iterative method) 见“非线性迭代法”.

拟牛顿法(quasi-Newton method) 解非线性方程组及最优化计算中最有效的方法之一. 它是一类使每步迭代计算量少而又保持超线性收敛的牛顿型迭代法. 解方程组 $F(x)=0$ 的拟牛顿法的迭代公式为

$$\begin{cases}x^{k+1}=x^k-A_k^{-1}F(x^k) \quad (k=0,1,\cdots),\\ A_{k+1}(x^{k+1}-x^k)=F(x^{k+1})-F(x^k),\\ A_{k+1}=A_k+\Delta A_k,\mathrm{rank}\Delta A_k=m\geqslant 1,\end{cases}$$

其中第二个方程称为拟牛顿方程，它表征在这类方法中矩阵 A_{k+1} 具有“差商”性质. ΔA_k 是一个秩 m 的修正矩阵，常取 $m=1$ 或 2. 拟牛顿法是割线法的一种推广，而 $n+1$ 点割线法则属于拟牛顿法类. 由于拟牛顿方程只给出 n 个条件，而 A_{k+1} 的元素为 n^2 个，因此 A_{k+1} 的选择有很大灵活性，即拟牛顿法是很广的一类算法，其中较为重要的是秩 1 和秩 2 的一些算法. 当 $m=1$ 时，称为布罗依丹方法，公式为

$$\begin{cases}x^{k+1}=x^k-A_k^{-1}F(x^k),\\ A_{k+1}=A_k+\dfrac{[y^k-A_ks^k](s^k)^T}{(s^k)^Ts^k} \quad (k=0,1,\cdots),\end{cases}$$

其中

$$s^k=x^{k+1}-x^k,$$
$$y^k=F(x^{k+1})-F(x^k).$$

拟牛顿法还有不求逆的算法，称为逆秩 m 拟牛顿法，公式为

$$\begin{cases}x^{k+1}=x^k-H_kF(x^k) \quad (k=0,1,\cdots),\\ H_{k+1}[F(x^{k+1})-F(x^k)]=x^{k+1}-x^k,\\ H_{k+1}=H_k+\Delta H_k,\mathrm{rank}\Delta H_k=m\geqslant 1.\end{cases}$$

当 $m=1$ 时，对应的逆布罗依丹方法是

$$\begin{cases}x^{k+1}=x^k-H_kF(x^k),\\ H_{k+1}=H_k+\dfrac{(s_k-H_ky^k)(s^k)^TH_k}{(s^k)^TH_ky^k}.\end{cases}$$

拟牛顿法还有很多具体算法，这类算法最早是由戴维登(Davidon，W. D.)于1959年提出的，弗莱彻(Fletcher，R.)和鲍威尔(Powell，M. J. D.)于1963年给出了后来称为DFP的秩2拟牛顿法，布罗依丹(Broyden，C. G.)于1965年给出了秩1拟牛顿法．方法的收敛性是20世纪60年代末到20世纪70年代才逐渐被证明的．由于这类方法受到广泛注意，从20世纪60年代到20世纪70年代近20年中，前后发表了一千多篇文章，提出了很多不同的算法及收敛性证明．中国也有一些学者在这方面做出很好的结果．

布罗伊丹法(Broyden method)　见“拟牛顿法”．

逆秩拟牛顿法(inverted rank quasi-Newton method)　见“拟牛顿法”．

DFP **算法**(Davidon-Fletcher-Powell algorithm)　一种秩2拟牛顿法．方法的计算公式为

$$\begin{cases} x^{k+1}=x^k-A_k^{-1}F(x^k) \quad (k=0,1,\cdots), \\ A_{k+1}=A_k+\dfrac{(y^k-A_ks^k)(y^k)^T+y^k(y^k-A_ks^k)^T}{(s^k)^Ty^k} \\ \qquad -\dfrac{(y^k-A_ks^k,s^k)y^k(y^k)^T}{(y^k,s^k)^2}, \end{cases}$$

其中

$$s^k=x^{k+1}-x^k,$$
$$y^k=F(x^{k+1})-F(x^k).$$

当 $A_k\in L(\mathrm{R}^n)$ 为非奇异对称矩阵，向量 y^k,s^k 满足 $(y^k,s^k)\neq 0$，则当 $(y^k,H_ky^k)\neq 0$ 时，A_{k+1}^{-1} 存在且 $A_{k+1}^{-1}=H_{k+1}$，此处 $H_k=A_k^{-1}$，于是算法可改为以下的算式：

$$x^{k+1}=x^k-H_kF(x^k) \ (k=0,1,\cdots),$$
$$H_{k+1}=H_k+\frac{s^k(s^k)^T}{(s^k,y^k)}-\frac{H_ky^k(y^k)^TH_k}{(y^k,H_ky^k)}.$$

这是一种逆秩2的拟牛顿法．DFP算法由戴维登(Davidon，W. D.)于1959年导出，并由弗莱彻(Fletcher，R.)和鲍威尔(Powell，M. J. D.)于1963年进行了改善．

BFGS **算法**(BFGS algorithm)　一种逆秩2拟牛顿法．其算式为

$$x^{k+1}=x^k-H_kF(x^k) \ (k=0,1,\cdots),$$
$$H_{k+1}=H_k+\frac{(s^k-H_ky^k)(s^k)^T+s^k(s^k-H_ky^k)^T}{(s^k,y^k)} -\frac{(s^k-H_ky^k,y^k)s^k(s^k)^T}{(s^k,y^k)^2},$$

其中

$$s^k=x^{k+1}-x^k,$$
$$y^k=F(x^{k+1})-F(x^k),$$

H_{k+1}满足拟牛顿方程的逆形式 $H_{k+1}y^k=s^k$．当 H_k 正定且 $(s^k,y^k)>0$ 时 H_{k+1} 也正定，因此，由BFGS修正确定的算法 $x^{k+1}=x^k-H_kF(x^k)$ 是具有正定性、传递性的拟牛顿法，它也是无约束优化中最常用的、最稳定的算法之一．这种算法是布罗依丹(Broyden，C. G.)于1969年，以及弗莱彻(Fletcher，R.)、戈德福布(Goldforb，D.)、香诺(Shanno，D. F.)于1970年分别得到的，故称为BFGS算法．

下降法(descent method)　亦称极小化方法．一类重要的迭代法．这类方法将方程组求解问题转化为求泛函极小问题．设给出方程组 $F(x)=0$，其中 $F=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T$，令

$$\varphi(x)=F(x)^TF(x)=\sum_{i=1}^n f_i^2(x)\geqslant 0,$$

则 $F(x)=0$ 的充分必要条件是 $\varphi(x)=0$．若 $\varphi(x)$ 的极小点 x^* 使 $\varphi(x^*)=0$，则 x^* 也是方程组 $F(x)=0$ 的解．只要构造迭代序列 $\{x^k\}$ 使

$$\varphi(x^{k+1})<\varphi(x^k),$$

且满足

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x^k)=0,$$

就可求得方程组的足够好的近似解．

具体做法是选初始近似 x^0，沿一个使 $\varphi(x)$ 下降的方向 p_0，令 $x^1=x^0+\mu p_0$，$\mu>0$．然后选步长因子 $\mu=\mu_0$，使 $\varphi(x^0+\mu_0p_0)<\varphi(x^0)$，得 $x^1=x^0+\mu_0p_0$．一般情况是从 x^k 出发，沿 $\varphi(x)$ 下降方向 p_k 求出

$$x^{k+1}=x^k+\mu_kp_k \quad (k=0,1,\cdots),$$

且 $\varphi(x^{k+1})<\varphi(x^k)$，直到 $\varphi(x^m)<\varepsilon$ 为止，x^m 就作为方程组解 x^* 的近似．上述算法中也可选 μ_k 使

$$\varphi(x^k+\mu_kp_k)=\min_\mu\varphi(x^k+\mu p_k),$$

这是一个求一维的极小问题．以上算法即为下降法．如果 p_k 选择不同，就可得到不同的下降法，特别地，若选 p_k 为 φ 的负梯度，即 $p_k=-\nabla\varphi(x^k)$，则得梯度算法

$$x^{k+1}=x^k-\mu_k\nabla\varphi(x^k),$$

其中

$$\varphi(x^k+\mu_kp_k)=\min_\mu \varphi(x^k+\mu p_k).$$

此算法也称最速下降法．此法的优点是计算量少，程序简单，但收敛慢．在下降法中可取下降方向 p_k 为牛顿方向，即

$$p_k=-F'(x^k)^{-1}F(x^k).$$

特别地，当 $\mu_k=1$ 时，就得到牛顿法，此外还可取沿坐标方向下降的方法，实际上就是一步的SOR牛顿法．

另一类较重要的下降法为共轭梯度法．共轭梯度法是最简单的下降法，早在1847年就由法国数学家、力学家柯西(Cauchy，A. -L.)提出，以后坦普尔(Temple，G.)、柯里(Curry，H.)等人也进行过研究

并证明了方法的收敛性. 20 世纪 50 至 60 年代，又有不少学者对下降法做了很多研究，提出不少具体算法并建立了收敛性理论，使这类算法在解非线性方程组和最优化计算中得到广泛应用.

极小化方法(minimization method)　即"下降法".

最速下降法(steepest descent method)　见"下降法".

共轭梯度法(conjugate direction method)　具有二次终止性的下降算法. 所谓二次终止性是指对 R^n 中二次泛函 $\varphi(x)$ 最多经过 n 步迭代，即可求得精确解的算法. 这种算法用于解非线性方程组 $F(x)=0$ 时，得到的泛函 $\varphi(x)=F(x)^TF(x)$ 并非二次，但得到的迭代序列却比其他下降法收敛快，因此，它是下降法中最常用的一种方法. 共轭梯度法的算式是：

$$x^{k+1}=x^k+\mu_k p_k,$$
$$\varphi(x^k+\mu_k p_k)=\min_{\mu}\varphi(x^k+\mu p_k),$$
$$p_{k+1}=-\nabla\varphi(x^{k+1})+\upsilon_k p_k,$$
$$\upsilon_k=\frac{(\nabla\varphi(x^{k+1}),\nabla\varphi(x^{k+1}))}{(\nabla\varphi(x^k),\nabla\varphi(x^k))},$$
$$p_0=-\nabla\varphi(x^0)$$
$$(k=0,1,\cdots).$$

这种算式是弗莱彻(Fletcher，R.)和里维斯(Reeves，C.)于 1964 年给出的. 共轭梯度法还有其他形式的算式.

连续法(continuation method)　亦称延拓法，又称嵌入法. 初值不受限制的一类求解非线性方程组的迭代法. 方法的基本思想是引入参数 t，构造一簇映射 $H:\mathrm{R}^{n+1}\rightarrow\mathrm{R}^n$，使 $H(x^0,0)=0$ 的解 x^0 已知，而 $H(x,1)=F(x)$. 如果方程 $H(x,t)=0$ 有解曲线 $x=x(t)$，则当 $t=0$ 时 $x(0)=x^0$ 已知，而 $t=1$ 时 $x(1)=x^*$ 就是非线性方程组 $F(x)=0$ 的解. 连续法从一个给定点 x^0 出发，通过求带参数方程，也称同伦方程 $H(x,t)=0$ 的解曲线 $x=x(t)$，求得 $t=1$ 的解 $x(1)=x^*$ 得到原方程组的解. 解曲线 $x=x(t)$ 是 R^n 上的一条空间曲线，它的一端为已知点 x^0，另一端为方程组的解 x^*. 为了求出 $x=x(t)$，常见的同伦 H 可取为

$$H(x,t)=F(x)+(t-1)F(x^0),$$

或

$$H(x,t)=tF(x)+(1-t)A(x-x^0),$$

$A\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 为已知.

求解同伦方程方法可用数值延拓法，方法大意是，将 $t\in[0,1]$ 分割为 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=1$，用迭代法求方程

$$H(x,t_j)=0\quad(j=1,2,\cdots,N)$$

的解 x^j，初始近似取 x^{j-1}，最后得到 x^N. 它是 $F(x)=0$ 的一个较好近似，由此出发可用牛顿法或其他方法求得方程组 $F(x)=0$ 的解 x^* 的更为精确的近似.

另一种方法称为参数微分法，它将同伦方程 $H(x,t)=0$ 等价于常微分方程的初值问题

$$x'(t)=-H_x'(x,t)^{-1}H_t'(x,t),\ x(0)=x^0,$$

若用数值方法从 $t=0$ 到 $t=1$ 求得 $x=x(t)$ 在各点的数值解 $x^1,x^2,\cdots,x^N$，则 x^N 是方程 $F(x)=0$ 的一个较好近似，由此可求得 x^* 更精确的近似. 上述两种具体算法表明用延拓法求解非线性方程组其作用主要是扩大收敛范围，使得从任给的初始点 x^0 出发都可得到一个足够好的近似 x^N，作为迭代初值.

延拓法作为研究算子方程的理论工具可追溯到 19 世纪，但作为求解方程的一种数值方法，由莱海(Lahaye，E.)于 1934 年提出，用于求解非线性方程组也是他于 1948 年提出的. 直到 20 世纪 60 年代以后，又有不少学者对此做了进一步研究. 参数微分法最早是戴维登戈(Davidenko，D.)于 1953 年给出的，故也称为戴维登戈方法，以后也有不少发展. 20 世纪 70 年代以后，对延拓法的研究比较侧重于对同伦方程解的存在惟一性条件及曲线跟踪算法和它的应用. 这种严格跟踪解曲线 $x=x(t)$ 的算法又称为同伦连续法.

延拓法(continuation method)　即"连续法".

嵌入法(embedding method)　即"连续法".

参数微分法(parametric differentiation)　见"连续法".

戴维登戈法(Davidenko method)　见"连续法".

同伦连续法(homotopy continuation method)　见"连续法".

区间迭代法(interval iterative method)　一类迭代法. 它是以区间为变量求解的线性方程组的迭代解法. 在 R^n 中区间可表示为

$$X=[\underline{x},\overline{x}]=\{\underline{x}\leqslant x\leqslant\overline{x}\,|\,x\in\mathrm{R}^n\}.$$

求解非线性方程组 $f(x)=0$ 的区间迭代法，最早是穆尔(Moore，R. E.)于 1966 年对一维方程给出的区间牛顿法，但当方法推广到方程组时需要计算 $f'(x)$ 的区间扩展 $F'(X)$ 的逆，计算量太大，不能用于实际计算. 在此基础上，克拉丘克(Krawczyk，R.)于 1969 年给出一个称为克拉丘克算子的区间算子

$$K(X,y)=y-Yf(y)+[I-YF'(X)](X-y),$$

其中 $y\in X=[\underline{x},\overline{x}]$ 是任一点，$Y\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 是一个已知矩阵，通常可取为区间矩阵 $F'(X)$ 的中点矩阵，$F'(X)$ 是 $f'(x)$ 的区间扩展. 这个算子有以下性质：

1. 若 $x^*\in X$ 是 $f(x)=0$ 的解，则

$$x^*\in K(X,y).$$

2. 若 $X\cap K(X,y)=\varnothing$，则 $f(x)=0$ 在 X 中无解.

3. 当 $K(X,y)\subset X$ 时，则 $f(x)=0$ 在 X 中有解存在，若半径 $r(K(X,y))<r(x)$，则解惟一.

根据这些性质构造的区间迭代法

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}\cap K(X^{(k)},y^{(k)})\ (k=0,1,\cdots),$$
$$X^{(k)}=(\underline{x}^k,\overline{x}^k),y^{(k)}\in X^{(k)},$$

可判断解的存在惟一性. 并且当

$$\|r(X^{(k)})\|\leqslant\varepsilon$$

时，可得到解 x^* 的近似

$$\widetilde{x}^*=\frac{\underline{x}^k+\overline{x}^k}{2},$$

其误差 $\|\widetilde{x}^*-x^*\|\leqslant\varepsilon$. 这种迭代法后来经穆尔改进并给出解存在惟一的检验，称为克拉丘克-穆尔算法，它与通常点迭代相比的优点是迭代过程中能判断解是否存在惟一，并且能得到误差估计，缺点是用区间运算计算量较大.

20 世纪 70 年代以后，又有很多作者提出了不少新的改进，特别是尼克(Nickel，K.)于 1980 年提出的球形牛顿法，在 R^n 中以 n 维球代替 n 维长方体，是另一种很有特色的区间迭代法.

克拉丘克-穆尔算法(Krawczyk-Moore algorithm)　见“区间迭代法”.

单纯形算法(simplicial algorithm)　亦称不动点算法. 一类迭代法. 它是计算不动点和求非线性方程组零点的一种新算法. 特别适用于经济平衡及有关问题中函数导数不存在的方程. 该算法是拓扑学与计算数学结合的产物，其理论基础是斯佩纳(Sperner，E.)引理. 1967 年，美国学者斯卡夫(Scarf，H.)首先给出了映射不动点的构造性证明，体现了算法思想，1968 年和 1969 年，库恩(Kuhn，H. W.)提出了具体寻找全标号单纯形的加层算法和变维数算法，此为第一代算法.

20 世纪 70 年代以后，有不少学者提出其他算法，如重启动算法、三明治算法及同伦单纯形算法等. 在闭凸集 $D\subset\mathrm{R}^n$ 上，求非线性方程组 $f(x)=0$ 解的单纯形算法，首先是将域 D 进行三角剖分，使 D 成为两两规则相连的 n 维单纯形，其次对每个 n 维单纯形顶点按一定规则进行标号，使每个全标号单纯形都含有 $f(x)=0$ 的一个零点，最后通过一定规则搜索全标号单纯形，得到方程的一个近似解. 只要三角剖分时，单纯形直径任意小，则近似解误差也可任意小，由这种思想得到的各种具体算法都称为单纯形算法. 方法的优点是不用求 $f(x)$ 导数，缺点是计算量较大，特别对维数高的问题更为严重.

不动点算法(fixed point algorithm)　即“单纯形算法”.

线性方程组数值解法

线性方程组数值解法(numerical methods of linear equations)　计算数学的一个最基本的组成部分. 它是通过数值计算求线性方程组的近似解的算法. 线性方程组是形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1}$$

的方程组. 采用矩阵和向量的符号可将(1)简写为

$$Ax=b,\tag{2}$$

其中 A 是由方程组(1)的系数 a_{ij} 构成的 $n\times n$ 矩阵，通常称为系数矩阵；b 是由 b_i 构成的 n 维向量，称为右端向量；x 是由 x_i 构成的 n 维向量，称为未知向量. 现在经常使用的线性方程组的数值解法大体上可分为直接法和迭代法两大类，它们各有优缺点. 在实际计算时，应根据待解问题的情况和要求以及所使用的计算机的条件，来决定方法的取舍.

线性方程组求解问题是一个十分古老的数学问题. 早在东汉以前，中国的古典数学名著《九章算术》就比较完整地叙述了解线性方程组的消元法；到 19 世纪初，西方也有了高斯消去法. 然而求解未知数很多的大型线性方程组，则是在 20 世纪中叶，电子计算机问世以后才成为可能. 到目前为止，如何利用计算机快速、有效地求解大型线性方程组仍然是计算数学研究中的一个最基本而又十分重要的课题.

直接法(direct method)　解线性方程组的一类重要方法. 指在不考虑舍入误差的情况下，经过有限次运算可得到方程组精确解的数值方法. 如消元法，三角分解法等，都是直接法. 直接法普遍实用，对中小规模的问题工作量较少，精确度较高. 但直接法在计算过程中要变换系数矩阵，所以程序较复杂，需要较大的存贮量. 因此，在实际使用时，由于受到计算机存储量的限制，一般来说直接法仅适宜于系数矩阵阶数不是太高的问题. 由于直接法的准确性和可靠性，是解中等规模的线性方程组的首选方法.

消元法(elimination method)　亦称消去法或高斯消去法. 解线性方程组的常用方法之一. 消元法就是利用方程组的同解变形逐步消去某些未知数，最后得到只剩一个未知数的方程，进而求得方程组的解. 求解过程可分为消去过程和回代过程两大步.

消去法(elimination method)　即“消元法”.

高斯消去法(Gaussian elimination method)　即“消元法”.

消去过程(elimination process)　数值代数术语. 指消元法的一个主要步骤. 设方程组为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{1}$$

若 $a_{11}\neq 0$，则以 $-a_{i1}/a_{11}$ 乘以第一个方程再加到第 i 个方程($i=2,3,\cdots,n$)，就消去了后 $n-1$ 个方程中的未知数 x_1，方程组(1)变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad a_{n2}^{(1)}x_2+\cdots+a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)}. \end{cases} \tag{2}$$

若 $a_{22}^{(1)}\neq 0$，对方程组(2)的后 $n-1$ 个方程施行类似的处理，就可消去后 $n-2$ 个方程组中的未知数 x_2. 如此进行下去，若 $a_{kk}^{(k-1)}$ 都不为零，最后得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n= b_2^{(1)}, \\ \quad\quad \ddots \quad \ddots \quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad a_{nn}^{(n-1)}x_n= b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{3}$$

这一过程称为消元过程.

回代过程(back substitution process)　数值代数术语. 指消元法的一个主要步骤. 对给定的线性方程组(1)施行消去过程得到形如(3)的方程组之后(参见“消去过程”)，可反方向推出方程组(1)的解：

$$\begin{cases} x_n=b_n^{(n-1)}/a_{nn}^{(n-1)}, \\ x_{n-1}=(b_{n-1}^{(n-2)}-a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n)/a_{n-1,n-1}^{(n-2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1=(b_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n)/a_{11}. \end{cases}$$

这一过程称为回代过程.

主元(pivot element)　一种变元. 指在消去过程中起主导作用的元素. 在消去过程中，元素 $a_{kk}^{(k-1)}$ 起着重要作用(用作除数，其绝对值愈小，引起的舍入误差就愈大)，故称之为主元. $a_{11}^{(0)}=a_{11}$ 称为第一步的主元；$a_{kk}^{(k-1)}$ 称为第 k 步的主元(参见“消去过程”或“回代过程”).

列主元消去法(elimination method with partial pivoting)　亦称部分主元消去法. 通过行交换实施列主元的一种消去法. 用消去法解线性方程组时，有可能遇到 $a_{kk}^{(k-1)}=0$ 的情况，此时导致消去过程中断；有时，虽然 $a_{kk}^{(k-1)}\neq 0$，但其绝对值很小，计算时往往带来较大的误差，使最后得到的解不够精确，甚至面目全非. 为了避免上述问题的出现，通常采用的措施是，在第 k 步消元之前，先将

$$|a_{k+1,k}^{(k-1)}|, |a_{k+2,k}^{(k-1)}|, \cdots, |a_{n,k}^{(k-1)}|$$

中最大者所在的方程与第 k 个方程进行交换，称其为列主元消去法(参见“消元法”). 当然，亦可在后 $n-k+1$ 个方程的所有系数中找绝对值最大者，而后进行方程和未知数的交换，称其为全元消去法，但这种方法工作量较大，故通常使用列主元消去法.

全元消去法(elimination method with complete pivoting)　见“列主元消去法”.

三角分解法(triangular decomposition method)　亦称因子分解法. 由消元法演变而来的解线性方程组的一类方法. 设方程组的矩阵形式为 $Ax=b$. 三角分解法就是将系数矩阵 A 分解为一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 之积：$A=\mathrm{LU}$，然后依次解两个三角形方程组 $Ly=b$ 和 $Ux=y$，而得到原方程组的解. 例如，杜利特尔分解法、乔莱斯基分解法等就是三角分解法.

因子分解法(factorization method)　即“三角分解法”.

若尔当消去法(Jordan elimination method)　一种无回代过程的消去法. 它是把消去法稍作修改后得到的. 即在消去过程中，第 k 步不仅要消去后 $n-k$ 个方程中的未知数 x_k，而且也要消去前 $k-1$ 个方程中的未知数 x_k. 具体地，假定对方程组已经施行了 $k-1$ 步消元手续，使其变形为

$$\begin{cases} x_1+ \quad a_{1k}^{(k-1)}x_k+\cdots+a_{1n}^{(k-1)}x_n=b_1^{(k-1)}, \\ \quad x_2+ \quad a_{2k}^{(k-1)}x_k+\cdots+a_{2n}^{(k-1)}x_n=b_2^{(k-1)}, \\ \quad\quad \ddots \\ \quad\quad x_{k-1}+a_{k-1,k}^{(k-1)}x_k+\cdots+a_{k-1,n}^{(k-1)}x_n=b_{k-1}^{(k-1)}, \\ \quad\quad\quad a_{kk}^{(k-1)}x_k+\cdots+a_{kn}^{(k-1)}x_n=b_k^{(k-1)}, \\ \quad\quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad\quad a_{nk}^{(k-1)}x_k+\cdots+a_{nn}^{(k-1)}x_n=b_k^{(k-1)}. \end{cases}$$

第 k 步是以 $-a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$ ($a_{kk}^{(k-1)}\neq 0$)乘以第 k 个方程，再加到第 i 个方程上，消去第 i 个方程中的未知数 x_k($i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$)，然后再以 $a_{kk}^{(k-1)}$ 除以第 k 个方程. 这样进行 n 次就可得到原方程组的解. 为了减少解的误差，亦可与适当的主元选取策略相结合. 若尔当消去法比消元法的计算量大得多.

杜利特尔分解法(Doolittle decomposition method)　三角分解法的一种，它是解线性方程组常用的方法之一. 在三角分解法中，取 L 为单位下三角阵，然后比较 $A=LU$ 两边的元素，可知 L 和 U 的元素 l_{ij} 和 u_{ij} 可由下列递推公式给出：

$$u_{kj}=a_{kj}-\sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj}\ (j=k,k+1,\cdots,n),$$

$$l_{ik}=\left(a_{ik}-\sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}\right)\Big/u_{kk}$$

$$(i=k+1,k+2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,n).$$

计算的顺序为先算 U 的第 1 行，再算 L 的第 1 列，然后 U 的第 2 行，L 的第 2 列等. 在分解时为了避免 u_{kk} 为零或 $|u_{kk}|$ 太小，需在 U 的每行元素 $u_{kk}, u_{k\,k+1}, \cdots, u_{kn}$ 算好之后，在这些数中选主元，然后进行列变换. 此时需注意 x 的分量也应作相应的变换.

克劳特分解法(Crout decomposition method) 三角分解法的一种,它是解线性方程组常用的方法之一.设方程组的矩阵形式为 $Ax=b$. 克劳特分解法是先将 A 分解为 $A=\mathrm{LU}$,其中 L 为下三角阵,U 为单位上三角阵,它们的元素 l_{ij} 和 u_{ij} 可由下面的公式递推地求出:

$$l_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\quad (i=j,j+1,\cdots,n),$$

$$u_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right)\Big/ l_{ii}\quad (j=i+1,i+2,\cdots,n).$$

计算的顺序为先算 L 的第 1 列,再算 U 的第 1 行,然后 L 的第 2 列,U 的第 2 行等.得到 L 和 U 之后,再解方程组 $Ly=b$ 和 $Ux=y$,便可求得原方程组的解.为了减少解的误差,在进行因式分解时也可与适当的主元选取策略相结合.

乔莱斯基分解法(Cholesky decomposition method) 亦称平方根法.解对称正定线性方程组的常用方法之一.设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 是 n 阶对称正定矩阵.乔莱斯基分解法是先求 A 的分解 $A=LL^T$,其中 L 为对角元均为正数的下三角矩阵,其元素 l_{ij} 可由下面的公式递推计算:

$$l_{kk}=\left(a_{kk}-\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$l_{ik}=\left(a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj}\right)\Big/ l_{kk}$$

$$(i=k+1,k+2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,n),$$

然后再依次解两个三角形方程组 $L^Ty=b$ 和 $Lx=y$,从而求得原方程组的解.

平方根法(square root method) 即"乔莱斯基分解法".

改进的乔莱斯基分解法(improved Cholesky decomposition method) 解线性方程组的常用方法之一.设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 $A=[a_{ij}]$ 是对称正定矩阵.改进的乔莱斯基方法是先求 A 的分解:$A=\mathrm{LDL}^T$,其中 L 是单位下三角阵,D 是对角阵;它们的元素 l_{ij} 和 d_i 可由下面的公式递推计算:

$$d_i=a_{ii}-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}d_j,$$

$$l_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}d_k\right)\Big/ d_j$$

$$(i=j+1\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n).$$

求得 L 和 D 之后,可按如下公式求得原方程组的解:

$$z_i=b_i-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}z_j\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$y_i=z_i/d_i\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$x_i=y_i-\sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}x_j\ (i=n,n-1,\cdots,1).$$

这一方法的特点是避免了乔莱斯基分解法中的开方运算.

追赶法(chase method) 解一类特殊线性方程组的常用方法.设方程组具有形式

$$a_ix_{i-1}+b_ix_i+c_ix_{i+1}=f_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $a_1=c_n=0$. 追赶法首先由

$$p_i=-\frac{c_i}{b_i+a_ip_{i-1}},\ q_i=\frac{f_i-a_iq_{i-1}}{b_i+a_ip_{i-1}}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

递推地求出 $p_1,q_1,p_2,q_2,\cdots,p_n,q_n$,其中约定 $q_0=p_0=0$,且易知 $p_n=0$,然后再由 $x_i=p_ix_{i-1}+q_i$ $(i=n,n-1,\cdots,1)$,依次求出 $x_n,x_{n-1},\cdots,x_1$. 这两步分别称为"追"和"赶"的过程,是将克劳特分解法应用于上述方程组得到的.可以证明,当 $|b_i|>|a_i|+|c_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$时,计算是稳定的,即舍入误差影响很小.在用差分法求解常微分方程边值问题及一维热传导方程以及建立三次样条函数等实际计算中遇到的三对角线性方程组常用追赶法求解.

三角形方程组的解法(numerical method of triangular linear equations) 解一类特殊线性方程组的方法.系数矩阵为上三角阵或下三角阵的线性方程组称为三角形方程组.这类方程组容易求解:对于上三角方程组 $Ux=b$(即 $U=\{u_{ij}\}$ 满足 $u_{ij}=0,i>j$)可由公式

$$x_n=b_n/u_{nn},\ x_i=(b_i-\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j)/u_{ii}\quad (i=n-1,n-2,\cdots,1),$$

递推地求得其解 x. 对于下三角方程组 $Lx=b$(即 $L=\{l_{ij}\}$ 满足 $l_{ij}=0,i<j$),则可由公式

$$x_1=b_1/l_{11},\ x_i=\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j\right)\Big/ l_{ii}\quad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

递推地求得其解 x.

正交分解法(orthogonal decomposition method) 解线性方程组的一类直接方法.它先将线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 分解为一个正交矩阵 Q 和一个上三角矩阵 R 的乘积 $A=\mathrm{QR}$;然后通过求解上三角方程组 $Rx=Q^Tb$ 而求得原方程组的解.这类方法一般比三角分解法运算量大,但数值稳定性较好.

豪斯霍尔德法(Householder method) 正交分解法的一种.它先在线性方程组 $Ax=b$ 的两边施行 $n-1$ 次豪斯霍尔德变换将其变为等价的上三角方程组 $Rx=\tilde{b}$,然后求解 $Rx=\tilde{b}$,即可得到原方程组的解.这一方法的运算量是高斯消去法的两倍,但其数值稳定性较好.

吉文斯法(Givens method) 正交分解法的一

种.它在线性方程组 $Ax=b$ 的两边施行一系列吉文斯变换将其变为等价的上三角方程组 $\tilde{R}x=\tilde{b}$,然后求解 $\tilde{R}x=\tilde{b}$ 而得到原方程组的解.这一方法的运算是豪斯霍尔德法的两倍,但吉文斯法有较大的灵活性,特别当系数矩阵 A 有较多的零元素时,适当安排吉文斯变换的次序可使运算量大为减少.

豪斯霍尔德变换(Householder transformation) 亦称豪斯霍尔德矩阵,又称镜像映射.一种正交变换.它是形如

$$P=I-\frac{2vv^T}{v^Tv}$$

的矩阵,其中 I 表示 n 阶单位矩阵,v 是一个非零的 n 维实向量,v^T 表示 v 的转置.它既是对称的,又是正交的,它的主要功能是对任意的非零实向量

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,$$

只需取

$$v=(x_1+\mathrm{sign}(x_1)\alpha,x_2,\cdots,x_n)^T,$$

此处

$$\alpha=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

就有 $Px=(-\mathrm{sign}(x_1)\alpha,0,\cdots,0)^T$.豪斯霍尔德变换的这些良好性质使它成为数值代数最基本的工具之一.

豪斯霍尔德矩阵(Householder matrix) 即"豪斯霍尔德变换".

镜像映射(reflection transformation) 即"豪斯霍尔德变换".

吉文斯变换(Givens transformation) 亦称平面旋转变换.数值代数的基本工具之一.它是一种正交变换.该变换为形如

$$G(i,k,\theta)=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&c&&s&&&\\&&&&1&&&&\\&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&1&&\\&&&-s&&&c&&\\&&&&&&&1&\\&&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ k\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} i & \qquad & k\end{matrix}$$

的矩阵,其中 $c=\cos\theta$,$s=\sin\theta$.用 $G(i,k,\theta)$ 作用在一个向量 x 上只改变它的第 i 个分量和第 k 个分量.最常用的吉文斯变换是使变换后的向量的某个分量(例如第 k 个)变为零,这时取

$$c=x_i/\sqrt{x_i^2+x_k^2},\quad s=x_k/\sqrt{x_i^2+x_k^2}.$$

平面旋转变换(plane rotation transformation) 即"吉文斯变换".

高斯变换(Gauss transformation) 亦称初等下三角矩阵.数值代数常用的变换之一.它是指形如

$$L_k=I+v_ke_k^T$$

的单位下三角阵.其中 I 是 n 阶单位阵,e_k 是 I 的第 k 列,$v_k=(0,\cdots,0,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n)^T\in\mathrm{R}^n$,高斯变换的应用是,将 R^n 中的一个向量

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

变换为向量

$$y=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T.$$

这时

$$\alpha_i=-\frac{x_i}{x_k}\ (i=k+1,\cdots,n),$$

这里假定 $x_k\neq0$.

初等下三角矩阵(elementary lower triangular matrix) 即"高斯变换".

迭代法(iterative method) 解线性方程组的一类重要方法.它按照一定的计算公式,从一个初始向量出发,逐步迭代产生一个向量的无穷序列,使这一序列的极限成为方程组的精确解.如简单迭代法,松弛法等都是迭代法.迭代法无需变换系数矩阵,所以需要的存贮量少,但快速收敛性一般难以保证.因此,仅当方程组阶数较高、系数矩阵的非零元素较少时,宜于使用迭代法.迭代法是求解大规模稀疏线性方程组的首选方法.

迭代法的收敛性(convergence of iterative method) 刻画迭代法性能的基本概念.它是对迭代法的基本要求.设线性方程组的矩阵形式为

$$Ax=b.\qquad(1)$$

常见的迭代法取形式

$$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+d\ (k=0,1,\cdots),\qquad(2)$$

其中 $x^{(0)}$ 是人为地给定的初始迭代向量,G 和 d 分别为 $n\times n$ 矩阵和 n 维实向量,且满足

$$QA=I-G,\quad Qb=d,$$

此处 Q 是某一非奇异的 n 阶方阵.若存在 $x^*\in\mathrm{R}^n$ 使对任意的初值 $x^{(0)}$,由(2)式产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 都收敛到 x^*,则称(2)式是收敛的,此时 x^* 就是(1)的解.(2)式收敛的充分必要条件是迭代矩阵 G 的谱半径小于1,即 $\rho(G)<1$,这里

$$\rho(G)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|,$$

λ_i 为 G 的特征值.$\rho(G)$ 越小,收敛越快.通常一个矩阵的谱半径是难以计算的,因而常用是否有 $\|G\|<1$ 来判定(2)式是否收敛,这里 $\|\cdot\|$ 表示某一容易计算的矩阵范数.

雅可比迭代法(Jacobi iterative method) 亦称简单迭代法.解线性方程组最简单的迭代法.设线性方程组为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$
$$(i=1,2,\cdots,n),$$

其中对角元 $a_{ii}\neq0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.简单迭代法的迭代公式为

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/a_{ii}$$
$$(i = 1,2,\cdots,n;k = 0,1,\cdots)$$

从给定的初值 $x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$ 出发，由此公式逐步迭代，直到 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}$ 满足给定的精度要求，即取 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}$ 为方程组的近似解. 当系数矩阵 A 严格对角占优时，简单迭代收敛. 但收敛速度一般很慢，由于其每步迭代各分量的计算是相互独立的，因而适宜于并行计算.

简单迭代法(simple iterative method)　即“雅可比迭代法”.

高斯-赛德尔迭代法(Gauss-Seidel iterative method)　解线性方程组的常用迭代法之一. 设线性方程组为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$(i = 1,2,\cdots,n),$$

高斯-赛德尔迭代法的迭代公式为

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/a_{ii},$$
$$(i = 1,2,\cdots,n;k = 0,1,2,\cdots).$$

当然，此处假定 $a_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 在很多情况下，它比简单迭代法收敛快. 它和简单迭代法的不同点在于计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，利用了刚刚迭代出的

$$x_1^{(k+1)},\ x_2^{(k+1)},\ \cdots,\ x_{i-1}^{(k+1)}$$

的值. 当系数矩阵 A 严格对角占优或对称正定时，高斯-赛德尔迭代法必收敛.

逐次超松弛法(successive over relaxation method)　简称 SOR 方法. 解线性方程组的常用迭代法之一. 它由高斯-赛德尔迭代法经线性加速处理而得到. 设方程组为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

逐次超松弛迭代法的迭代公式为

$$x_i^{(k+1)} = \{\omega b_i + (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\}\Big/a_{ii},$$
$$(i = 1,2,\cdots,n;k = 0,1,2,\cdots),$$

其中 ω 为一参数，称为松弛因子. 为使迭代法收敛，理论分析表明，ω 必需属于(0,2). ω 选取得好，可以大大加速迭代的收敛性. 当系数矩阵 A 对角占优或对称正定时，可保证 SOR 迭代法收敛.

松弛因子(relaxation factor)　见“函数超松弛法”.

对称逐次超松弛法(symmetric successive over relaxation method)　简称 SSOR 方法. 解线性方程组的常用迭代法之一. 它是逐次超松弛法的对称化. 设线性方程组为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

SSOR 方法的迭代公式为

$$x_i^{(k+\frac{1}{2})} = \left\{\omega b_i + (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+\frac{1}{2})} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\right\}\Big/a_{ii}$$
$$(i = 1,2,\cdots,n);$$
$$x_i^{(k+1)} = \left\{\omega b_i + (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k+\frac{1}{2})} - \omega\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+\frac{1}{2})} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)}\right)\right\}\Big/a_{ii}$$
$$(i = n,n-1,\cdots1;k = 0,1,2,\cdots).$$

对称逐次超松弛方法常与切比雪夫加速技巧结合使用而构成一种十分有效的算法.

半迭代法(semi-iterative method)　亦称切比雪夫半迭代法或切比雪夫加速. 解线性方程组的一种加速收敛迭代法. 其基本思想是将由基本迭代法

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d\ \ (k = 0,1,2,\cdots)$$

所产生的 $x^{(0)},x^{(1)},\cdots,x^{(k)}$，进行适当的线性组合得出方程组解的某种最佳近似值 $v^{(k)}$. 其计算公式为

$$\begin{cases} v^{(1)}=Gv^{(0)}+d, \\ \rho_1=2, \\ \xi=\dfrac{2-R-r}{R-r}, \\ \rho_{k+1}=\left(1-\dfrac{1}{4\xi^2}\rho_k\right)^{-1}, \\ v=2/(2-R-r), \\ v^{(k+1)}=\rho_{k+1}\{v(Gv^{(k)}+d)+(1-v)v^{(k)}\} \\ \qquad +(1-\rho_{k+1})v^{(k-1)}, \\ \qquad (k=1,2,\cdots.) \end{cases}$$

此处假定 G 的特征值均为小于 1 的实数，R 和 r 分别为其上、下界，$v^{(0)}$ 为任意给定的初值. 当 R 和 r 的估计比较精确时，常可大大加速基本迭代法的收敛性. 现有在计算过程中自动调整 R 和 r 的算法.

切比雪夫半迭代法(Chebyshev semi-iterative method)　即“半迭代法”.

切比雪夫加速(Chebyshev acceleration)　即“半迭代法”.

最速下降法(steepest descent method)　解线性方程组的一种下降迭代法. 设线性方程组为 $Ax=b$，其中 A 为 $n\times n$ 对称正定矩阵. 此时，方程组的求解问题等价于求二次泛函

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^TAx-x^Tb$$

的极小点的问题. 最速下降法就是从某点出发，每次沿 φ 的最速下降方向求 φ 的极小点，最终到达 φ 的极小点. 其迭代公式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}\ \ (k = 0,1,2,\cdots),$$

其中 $r^{(k)}=b-Ax^{(k)}$ 为 $\varphi(x)$ 在点 $x^{(k)}$ 处的负梯度方向，即 $\varphi(x)$ 在 $x^{(k)}$ 处下降最快的方向，

$$\alpha_k=\frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}},$$

为使 $\varphi(x^{(k)}+\alpha r^{(k)})$ 达到极小值的 α 值. 这一方法简单易行，但有时收敛很慢.

共轭梯度法(conjugate gradient method)　亦称共轭斜量法. 解线性方程组的一种常用算法. 设线性方程组为 $Ax=b$，其中 A 为对称正定矩阵，共轭梯度法的基本迭代格式如下：取初始向量 x_0，计算 $r_0=b-Ax_0$，取 $p_0=r_0$，然后迭代地计算

$$\alpha_k=\frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}},$$
$$x_k=x_{k-1}+\alpha_k p_{k-1},$$
$$r_k=r_{k-1}-\alpha_k A p_{k-1},$$
$$\beta_k=\frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}},$$
$$\beta_k=r_k+\beta_k p_{k-1}\ (k=1,2,\cdots).$$

可以证明，在不考虑舍入误差的情形下，对任意的 j $(1\leqslant j\leqslant n)$，$r_0,r_1,\cdots,r_{j-1}$ 和 $p_0,p_1,\cdots,p_{j-1}$ 分别是克雷洛夫子空间

$$\mathscr{K}(r_0,A,j)=\mathrm{span}\{r_0,Ar_0,\cdots,A^{j-1}r_0\}$$

的正交基和共轭正交基，而且 x_j 是二次泛函

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^T A x-b^T x$$

在仿射空间 $x_0+\mathscr{K}(r_0,A,j)$ 中的惟一的极小点. 因此，共轭梯度法在精确运算时只需有限步(至多 $n-1$ 步)就可得到方程组的精确解. 在这一意义上讲，共轭梯度法是一种直接法，但在误差出现的情形下，正交性很快损失，一般有限步就很难求得方程组的精确解. 因此，实际使用时，常把共轭梯度法作为一种迭代法使用. 它的收敛速度依赖于系数矩阵 A 的特征值的分布情况：当 A 的特征值分布较为集中时，其收敛速度非常之快；当 A 的特征值均匀地分布在一个很长的区间之内时，其收敛速度非常之慢.

共轭斜量法(conjugate gradient method)　即"共轭梯度法".

预优共轭梯度法(preconditional conjugate gradient method)　亦称预条件共轭梯度法. 解线性方程组的有效方法之一. 它是基于共轭梯度法的收敛速度依赖于系数矩阵 A 的特征值分布这一性态，在使用时先对 A 进行预处理使其特征值分布较为集中，进而提高其收敛速度. 具体做法是，先适当选取非奇异矩阵 C，使 $\widetilde{A}=C^{-1}AC^{-T}$ 的特征值分布较为集中，然后应用共轭梯度法于方程组 $\widetilde{A}\widetilde{x}=\widetilde{b}$，其中 $\widetilde{x}=C^T x$，$\widetilde{b}=C^{-1}b$. 当然在实际使用时，并不需事先计算 $\widetilde{A}=C^{-1}AC^{-T}$ 和 $\widetilde{b}=C^{-1}b$，而是直接用 A 和 b 进行迭代，具体公式为：任取初始向量 x_0，计算 $r_0=b-Az_0$，$z_0=M^{-1}r_0$，$p_1=z_0$，然后迭代地计算

$$\alpha_k=\frac{r_{k-1}^T z_{k-1}}{p_k^T A p_k},$$
$$x_k=x_{k-1}+\alpha_k p_k,$$
$$r_k=r_{k-1}-\alpha_k A p_k,$$
$$z_k=M^{-1}r_k,$$
$$\beta_k=\frac{r_k^T z_k}{r_{k-1}^T z_{k-1}},$$
$$p_{k+1}=z_k+\beta_k p_k,$$

其中 $M=CC^T$ 称为预优矩阵. 预优共轭梯度法的效能在于预优矩阵 M 是否取得合适. 一个较好的预优矩阵 M 应该具有如下的特征：

1. M 对称正定.
2. M 应该与 A 的稀疏性相近.
3. $M^{-1}A$(即 $\widetilde{A}=C^{-1}AC^{-T}$)的特征值分布集中.
4. 形如 $Mz=r$ 的方程组易于求解.

预条件共轭梯度法(preconditioned conjugate gradient method)　即"预优共轭梯度法".

预优矩阵(preconditional matrix)　见"预优共轭梯度法".

不完全乔莱斯基分解(incomplete Cholesky decomposition)　对称正定矩阵的一种特殊分解. 指正定对称矩阵 A 的如下分解：$A=LL^T+R$，其中 L 是下三角阵，R 称为剩余矩阵. 当 $R=0$ 时，该分解就是通常的乔莱斯基分解. 由于这一分解中 R 的出现，使得分解有较大的选择性，可以对 L 的稀疏性做事先的规定，亦可对 R 的元素作某些适当的要求.

剩余矩阵(residual matrix)　见"不完全乔莱斯基分解".

不完全乔莱斯基预优共轭梯度法(incomplete Cholesky conjugate gradient method)　简称 ICCG 方法. 解大型稀疏对称正定线性方程组的有效方法之一. 它是利用不完全乔莱斯基分解产生预优矩阵的预优共轭梯度法. 设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 是正定对称的，ICCG 方法的基本步骤为：

1. 计算 A 的不完全乔莱斯基分解：$A=LL^T+R$，其中 L 是具有事先指定的稀疏性的下三角阵，R 是满足某些给定条件的剩余矩阵.

2. 取 $M=LL^T$ 作为预优矩阵，应用预优共轭梯度法求出原方程组的解.

这类方法，由于其运算量往往可与直接法媲美，而又具有迭代法节省内存的优点，因此，近年来得到了广泛的应用，现在仍是国内外研究的热点.

矩阵求逆法(numerical method of inverse of a

matrix） 求已知矩阵的逆矩阵的计算方法. 设矩阵的 A 的逆矩阵 $A^{-1}=X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，则由逆矩阵的定义有 $AX=I$，即 $Ax_i=e_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，其中 e_i 为单位矩阵的第 i 列. 因此，求 A^{-1} 的问题就相当于求解 n 个系数矩阵相同而右端项分别为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性方程组. 这样，求解线性方程组的所有数值方法都可用来作为矩阵求逆的数值方法. 例如，若 A 是对称正定矩阵，则可以利用乔莱斯基分解法来求 A 的逆.

正规化方法（normalization method） 求解非对称正定线性方程组的一种数值方法. 设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 非奇异，正规化方法就是应用共轭梯度法于等价的正规方程组 $A^TAx=A^Tb$ 上，其中 A^T 表示 A 的转置. 当然，为了加速收敛，亦可对 A 进行预处理.

广义共轭残量法（generalized conjugate residual method） 简称 GCR 方法. 求解非对称正定线性方程组的常用方法之一. 它是共轭梯度法的推广. 设线性方程组为 $Ax=b$（A 非奇异），GCR 法的迭代公式为

$$\alpha_k=\frac{r_k^TAp_k}{p_k^TA^TAp_k},$$
$$x_{k+1}=x_k+\alpha_kp_k,$$
$$r_{k+1}=r_k-\alpha_kAp_k,$$
$$\beta_j^{(k)}=\frac{r_{k+1}^TA^TAp_j}{p_j^TA^TAp_j}\ (j=0,1,\cdots,k),$$
$$p_{k+1}=r_{k+1}+\sum_{j=0}^{k}\beta_j^{(k)}p_j,$$

其中 x_0 为给定的初始向量，$r_0=b-Ax_0$，$p_0=r_0$.

方程组的摄动分析（perturbation analysis of linear equations） 数值代数的重要研究课题. 指原始数据的误差对方程组解的影响的分析. 即考察当系数矩阵和右端项有微小变化时，方程组的解如何变化. 此即所谓线性方程组的摄动分析. 它对于线性方程组的数值解法的研究是十分重要的.

向量范数（vector norm） n 维向量“长度”的一种度量. 指定义在 R^n 上并满足下述三个条件的实值函数 $\|\cdot\|$：

1. 正定性 $\|x\|\geqslant0$，且等号成立当且仅当 $x=0$.

2. 齐次性 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.

3. 三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

其中 x,y 为 R^n 中的任意向量，α 为任意的实数.

最常用的向量范数有三种：

1. 1 范数 $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

2. 2 范数 $\|x\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. ∞ 范数 $\|x\|_\infty=(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|)$.

矩阵范数（matrix norm） 矩阵“大小”的一种度量. 指定义在 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 上并满足如下四个条件的实值函数 $\|\cdot\|$：

1. 正定性：$\|A\|\geqslant0$，且等号成立当且仅当 $A=0$.

2. 齐次性：$\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|$.

3. 三角不等式：$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.

4. 相容性：$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$，

其中 A,B 为 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 中的任意两个矩阵，α 为任意实数.

常用的矩阵范数有下面四种：

1. 列范数：$\|A\|_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

2. 谱范数：$\|A\|_2=\sigma_{\max}(A)=\sqrt{\varphi(A^TA)}$，其中 $\sigma_{\max}(A)$ 表示 A 的最大奇异值，$\varphi(\cdot)$ 为谱半径.

3. 行范数：$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

4. 欧几里得范数：$\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

上述四种范数有时亦分别称为矩阵的 1 范数，2 范数，∞范数和弗罗贝尼乌斯范数.

矩阵谱半径（spectral radius of a matrix） 反映矩阵固有特性的一个数量. 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，数

$$\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$$

称为 A 的谱半径.

矩阵条件数（condition number of a matrix） 反映矩阵固有特性的一个数量. 设 A 是 n 阶非奇异矩阵，称数 $\|A\|\,\|A^{-1}\|$ 为矩阵 A 的条件数，通常记为 $\mathscr{K}(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|$ 或 $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|$，其中 A^{-1} 表示 A 的逆矩阵，$\|\cdot\|$ 表示任一矩阵范数. 条件数的大小在一定程度上反映了在对矩阵 A 求逆时解对 A 之微小扰动的敏感程度（参见“病态矩阵”和“摄动定理”）.

病态方程组（ill-conditioned linear equations） 一类特殊的线性方程组. 指系数矩阵条件数很大的方程组. 设线性方程组为 $Ax=b$，其中 A 为 n 阶非奇异矩阵. 若对 A 和 b 的微小扰动，可引起解 x 的巨大变化，则称该方程组是病态的，否则称为良态的. 判定一个方程组是否病态以及衡量其病态程度通常是看条件数

$$\mathscr{K}(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|,$$

其中 A^{-1} 表示 A 的逆矩阵，$\|\cdot\|$ 表示某一矩阵范数，$\mathscr{K}(A)$ 很大时，称方程组是病态的，否则称其是良态的. $\mathscr{K}(A)$ 越大，方程组的病态程度就越严重.

良态方程组（well-conditioned linear equations）

见“病态方程组”.

病态矩阵(ill-conditioned matrix)　一种特殊矩阵. 指条件数很大的非奇异矩阵. 病态矩阵的逆和以其为系数矩阵的方程组的解对微小扰动十分敏感,对数值求解会带来很大困难.

摄动定理(perturbation theorem)　关于方程组摄动的定理. 它是阐明系数矩阵和右端项的小扰动对该方程组解的影响的定理. 设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 非奇异,则其小扰动问题

$$(A+\delta A)\bar{x}=b+\delta b$$

与原问题的解有如下估计式

$$\frac{\|x-\bar{x}\|_2}{\|x\|_2}=\frac{\mathscr{K}}{1-\mathscr{K}\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}}\left(\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}+\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}\right),$$

其中

$$\mathscr{K}=\mathscr{K}_2(A)=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2$$

为 A 关于谱范数 $\|\cdot\|_2$ 的条件数;对矩阵求逆亦有估计式

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|_2}{\|A\|_2}\leqslant\frac{\mathscr{K}}{1-\mathscr{K}\|\delta A\|_2/\|A\|_2}\cdot\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

从上面的估计式可以看出条件数对解方程组和矩阵求逆的影响.

希尔伯特矩阵(Hilbert matrix)　一类典型的病态矩阵. 指 n 阶矩阵 $H_n(h_{ij})$,其中

$$h_{ij}=\frac{1}{i+j-1}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

希尔伯特矩阵的条件数为

$$\mathscr{K}_2(H_n)=\|H_n\|_2\|H_n^{-1}\|_2\approx e^{3.5n},$$

符号 $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的谱范数.

稀疏矩阵(sparse matrix)　一类特殊矩阵. 指非零元素占矩阵全部元素的百分比很小(例如 5%以下)的矩阵. 为了节省存贮空间,对稀疏矩阵一般只存贮其非零元素,即采用压缩存贮的办法. 有的矩阵非零元素占全部元素的百分比较大(例如近50%),但其分布很有规律,利用这一特点仍可以避免存放零元素或避免用零元元素进行运算,这样的矩阵仍可看做稀疏矩阵.

对角占优矩阵(diagonally dominant matrix)　一种特殊的矩阵. 指每一对角元素的绝对值均不小于同行非对角元素绝对值之和的矩阵. 即一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$,如果满足

$$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

则称 A 是弱对角占优的;如果上述不等式中不是对全部 i 严格成立,但至少有一个严格成立,即存在 i_0 $(1\leqslant i_0\leqslant n)$,使

$$|a_{i_0i_0}|>\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0j}|,$$

则称 A 是对角占优的;如果对所有的 i 不等式都严格成立,就称 A 为严格对角占优矩阵.

弱对角占优矩阵(weakly diagonally dominant matrix)　见“对角占优矩阵”.

严格对角占优矩阵(strictly diagonally dominant matrix)　见“对角占优矩阵”.

***M* 矩阵**(*M*-matrix)　一种特殊矩阵. 一个 n 阶方阵,若其对角元均为正数,而非对角元都为非正数,并且其逆矩阵的元素都为非负数,则称这一矩阵为非奇异的 M 矩阵,简称 M 矩阵.

***H* 矩阵**(*H*-matrix)　一种特殊矩阵. 一个 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$,若它的比较矩阵

$$\mathfrak{M}(A)=\begin{pmatrix}|a_{11}|&-|a_{12}|&\cdots&-|a_{1n}|\\-|a_{21}|&|a_{22}|&\cdots&-|a_{2n}|\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-|a_{n1}|&-|a_{n2}|&\cdots&|a_{nn}|\end{pmatrix}$$

是非奇异的 M 矩阵,则称 A 为非奇异的 H 矩阵. 简称 H 矩阵.

正则分裂(regular splitting)　方阵的一种分裂形式. 一个 n 阶非奇异方阵 A,若能表示为

$$A=M-N,$$

其中 M 非奇异,且 M^{-1} 和 N 都是非负矩阵(元素均为非负数的矩阵),则称

$$A=M-N$$

为 A 的一个正则分裂.

相容次序矩阵(consistently ordered matrix)　一种特殊矩阵. 设 $A=[a_{ij}]$ 为一个 n 阶方阵. 记 $W=\{1,2,\cdots,n\}$,若对某个正整数 t,存在 W 的 t 个互不相同的子集 $W_1,W_2,\cdots,W_t$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^{t}W_i=W,$$

并且对每个 $i\in W_k$,若 $j\neq i$ 且 $a_{ij}\neq0$ 或者 $a_{ji}\neq0$,而当 $j>i$ 时,有 $j\in W_{k+1}$,当 $j<i$ 时,有 $j\in W_{k-1}$,则称 A 是具有相容次序矩阵.

性质*A*(property *A*)　用逐次超松弛法解线性方程组对系数矩阵所要求的重要性质. 设 $A=[a_{ij}]$ 是一个 n 阶方阵,若能将足标 $1,2,3,\cdots,n$ 分为两组 W_1 和 W_2,使 $i\neq j$,且 $a_{ij}\neq0$ 或者 $a_{ji}\neq0$,有 $i\in W_1$,$j\in W_2$,或者 $i\in W_2$,$j\in W_1$,则称 A 具有性质 A.

线性最小二乘问题的数值解法(numerical methods of linear least squares problem)　数值代数讨论的三类基本问题之一. 它是方程数多于未知量数的线性矛盾方程组的数值解法. 其基本表述是:给定 $m\times n$ 实矩阵 $A(m>n)$ 和 m 维实向量 b,求 n 维实向量 x 使 $\|Ax-b\|_2$ 达到最小. 目前,求解线

性最小二乘问题的数值方法大致可分为正规化方法和正交化方法两大类:正规化方法是先将最小二乘问题转化为等价的正规线性方程组,然后再用相应的线性方程组的数值方法求解;正交化方法是先利用正交变换将原问题约化为一个等价的易于求解的线性最小二乘问题,然后通过对后者的求解而得到原问题的解.

正规化方法(normalization method) 解线性最小二乘问题的常用方法之一.该方法的基本思想是:将最小二乘问题转化为等价的正规线性方程组,然后用相应的线性方程组的数值方法求解.设线性最小二乘问题为

$$\| Ax-b \|_2 = \min, \tag{1}$$

其中 A 是 $m\times n$ 满秩实矩阵($m>n$),b 是 m 维实向量,x 是待求的 n 维实向量,则求解这一问题等价于求解线性方程组

$$A^TAx=A^Tb.$$

由于 A^TA 是对称正定矩阵,有关求解对称正定线性方程组的各种数值方法都可用来解这一方程组,进而得到求解(1)式的各种相应方法,如乔莱斯基分解法、共轭梯度法、对称超松弛法等.

豪斯霍尔德正交化方法(Householder orthogonalization method) 解线性最小二乘问题的常用方法之一.设线性最小二乘问题为

$$\| Ax-b \|_2 = \min, \tag{1}$$

其中 A 是 $m\times n$ 满秩实矩阵($m>n$),b 是 m 维向量,x 是待求的 n 维实向量.豪斯霍尔德方法的基本步骤为:

1. 利用豪斯霍尔德变换逐步将 A 约化为上三角阵,即求分解 $Q^TA=R$,其中 Q 是由豪斯霍尔德变换的乘积构成的正交矩阵,R 是上三角阵.

2. 求解与问题(1)等价的问题

$$\| Rx-Q^Tb \|_2=\min.$$

这一方法与正规化方法相比有适用范围广和数值稳定性好的优点,但其运算量要比正规化方法大得多.

吉文斯正交化方法(Givens orthogonalization method) 解线性最小二乘问题的常用方法之一.其基本步骤与豪斯霍尔德方法一样,只是在约化过程中使用吉文斯变换(参见"豪斯霍尔德正交化方法").这一方法较豪斯霍尔德正交化方法运算量大,但当 A 稀疏时,适当安排变换的次序,常可使运算量大为减少.

格拉姆-施密特正交化方法(Gram-Schmidt orthogonalization method) 解最小二乘问题的一种正交化方法.设线性最小二乘问题为

$$\| Ax-b \|_2 = \min, \tag{1}$$

其中 A 为 $m\times n$ 满秩实矩阵($m>n$),b 为 m 维实向量,x 为待求的 n 维向量.格拉姆-施密特正交化方法的基本步骤为:

1. 利用标准的格拉姆-施密特正交化手续求 A 的因子分解:$A=Q_1R_1$,其中 Q_1 是列正交的 $m\times n$ 矩阵(即 $Q_1^TQ_1=I$),R_1 是 $n\times n$ 上三角矩阵.

2. 求解与问题(1)等价的问题

$$\| R_1x-Q_1^Tb \|_2=\min.$$

但由于这一方法的数值稳定性差,因此很少用于实际计算,实际常用的是修正的格拉姆-施密特正交化方法.

修正的格拉姆-施密特正交化方法(modified Gram-Schmidt orthogonalization method) 解线性最小二乘问题常用的方法之一.其基本步骤与格拉姆-施密特正交化方法类似,只是在求分解 $A=Q_1R_1$ 时采用修正的格拉姆-施密特正交化手续.

设 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$,修正的格拉姆-施密特正交化过程是对 $i=1,2,\cdots,n$ 依次计算:

$$a_j^{(1)}=a_j \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

$$r_{ii}=\| a_i^{(i)} \|_2,$$

$$q_i=\frac{a_i^{(i)}}{r_{ii}},$$

$$r_{ij}=(a_j^{(i)})^Tq_i,$$

$$a_j^{(i+1)}=a_j^{(i)}-r_{ij}q_i \quad (j=i+1,i+2,\cdots,n).$$

然后,记

$$Q_1=[q_1,q_2,\cdots,q_n],$$

$$R_1=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & r_{nn} \end{pmatrix},$$

即有 $A=Q_1R_1$ 为所求的因子分解.

修正的格拉姆-施密特正交化方法在数值稳定性方面完全可以和豪斯霍尔德正交化方法媲美,但其运算量要比豪斯霍尔德正交化方法大得多.

快速吉文斯变换(fast Givens transformation) 一类能简化运算的变换矩阵.指形如

$$M_1=\begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad M_2=\begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

的矩阵,当 $-1\leqslant\alpha_i\beta_i\leqslant 0$ 时,称为快速吉文斯变换,它是为避免吉文斯变换中的开方运算和减少乘法运算量而构造的.

快速吉文斯方法(fast Givens method) 解线性最小二乘问题的常用方法之一.设线性最小二乘问题为

$$\| Ax-b \|_2 = \min, \tag{1}$$

其中 A 是 $m\times n$ 满秩实矩阵($m>n$),b 是 m 维向量,x 是待求的 n 维向量.快速吉文斯方法的基本步

骤为：

1. 利用快速吉文斯变换将 A 约化为上三角阵，即求分解

$$MA = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$MM^T = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_m),$$

R_1 是非奇异的$n\times n$上三角阵.

2. 求解三角方程组 $R_1x=c$，便可得问题(1)之解，其中 c 是 Mb 的前 n 个分量组成的向量. 该方法的乘除运算次数仅是吉文斯正交化方法的一半，而且省去了大量的开方运算.

矩阵奇异值(singular value of a matrix)　关于 $m\times n$ 阶矩阵的一个重要数量. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，称正半定矩阵 A^*A 的特征值的非负平方根为矩阵 A 的奇异值，其中 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置矩阵.

奇异值分解定理(singular value decomposition theorem)　关于 $m\times n$ 矩阵的一个重要的因子分解定理：设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则存在 m 阶酉阵 U 和 n 阶酉阵 V，使得

$$U^*AV = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}, \quad \begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

其中 U^* 表示 U 的共轭转置矩阵，Σ 是对角元为

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$$

的对角阵. 上述分解称为 A 的奇异值分解. 从这一分解可以立即推出：A 的所有非零奇异值是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$；$A$ 的秩为 r；U 的前 r 列和 V 的后 $n-r$ 列分别为 A 的值域和 A 的零空间的一组标准正交基. 此外，求一个给定矩阵 A 的奇异值分解亦是一个十分良态的矩阵计算问题. 因此，奇异值分解有着广泛的实际应用.

奇异值分解(singular value decomposition)　见“奇异值分解定理”.

奇异值分解法(singular value decomposition method)　解亏秩线性最小二乘问题的常用方法之一. 设线性最小二乘问题为

$$\| Ax - b \|_2 = \min, \tag{1}$$

其中 A 是 $m\times n$ 实矩阵$(m>n)$，$\mathrm{rank}(A)=r<n$，b 是 m 维实向量，x 是待求的 n 维向量. 奇异值分解法的基本步骤为：

1. 求 A 的奇异值分解：$A = U\sum V^T$，其中 $U=[u_1, u_2, \cdots, u_m]$是 $m\times m$ 正交阵，$V=[v_1, v_2, \cdots, v_n]$ 是 $n\times n$ 正交阵，

$$\sum = \begin{pmatrix} \sum_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}, \quad \begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

$$\sum_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r),$$

$$(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0).$$

2. 计算

$$x_{LS} = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

(x_{LS}是问题(1)的最小范数解). 这一方法的数值稳定性好，但运算量较大.

列主元正交分解法(method of orthogonal decomposition with column pivoting)　解亏秩线性最小二乘问题的常用方法之一. 设线性最小二乘问题为

$$\| Ax - b \|_2 = \min, \tag{1}$$

其中 A 为 $m\times n$ 实矩阵$(m>n)$，$\mathrm{rank}(A)=r<n$，b 为 m 维实向量，x 为待求的 n 维实向量. 列主元正交分解法的基本步骤为：

1. 求 A 的正交分解：

$$Q^TA\Pi = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}, \quad \begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

其中 Q 是 $m\times n$ 正交矩阵，Π 是 n 阶排列方阵，

$$R_{11} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1r} \\ & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \gamma_{rr} \end{pmatrix}$$

为上三角阵，且满足

$$\gamma_{11} \geqslant \gamma_{22} \geqslant \cdots \geqslant \gamma_{rr} > 0.$$

这一分解可用豪斯霍尔德正交变换结合适当的列选主元策略来实现.

2. 求解与问题(1)等价的问题

$$\| Ry - Q^Tb \|_2 = \min,$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \Pi^T x.$$

这一方法的数值稳定性比奇异值分解法差一些，但其运算量要少得多.

线性最小二乘问题的摄动定理(perturbation theorem on linear least squares problem)　关于最小二乘问题中系数与右端项有摄动时解的误差估计定理：设 x 和 $\tilde{x}$ 分别是最小二乘问题

$$\| Ax - b \|_2 = \min \text{ 和 } \| \tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b} \|_2 = \min$$

的最小范数解，其中 A 和 $\tilde{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵$(m>n)$，b 和 $\tilde{b}$ 是 m 维向量. 现记

$$\delta A = \tilde{A} - A,$$

$$\delta b = \tilde{b} - b,$$

$$r = b - Ax,$$

$$\varepsilon_A = \| \delta A \|_2 / \| A \|_2,$$

$$\mathscr{K} = \| A \|_2 \| A^+ \|_2,$$

$$\eta = \mathscr{K} \varepsilon_A,$$

此处 A^+ 表示 A 的穆尔-彭罗斯广义逆，则有

$$\|\delta x\|_2\leqslant\frac{\mathscr{K}}{1-\eta}\left(\varepsilon_A\|x\|_2+\frac{\|\delta b\|_2}{\|A\|_2}+\varepsilon_A\mathscr{K}\frac{\|r\|_2}{\|A\|_2}\right)+\varepsilon_A\mathscr{K}\|x\|_2,$$

其中 $\delta x=\tilde{x}-x$，$\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的谱范数和向量的 2-范数.

穆尔-彭罗斯广义逆矩阵(Moore-Penrose generalized inverse matrix) 逆矩阵概念的推广. 彭罗斯(Penrose,R.)于 1995 年证明了对任一 $m\times n$ 阶矩阵 A，都存在惟一的 $n\times m$ 阶矩阵 X，它满足：

1. $AXA=A$；
2. $XAX=X$；
3. $(AX)^*=AX$；
4. $(XA)^*=XA$；

则称 X 为 A 的穆尔-广义逆矩阵，简称 M-P 逆，记为 A^+. 当 A 为 n 阶非异阵时，其逆 A^{-1} 也满足条件 1 到 4，故 M-P 逆确为通常逆矩阵的推广. 在矛盾线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解中，$x=A^+b$ 是范数最小的的一个解. 任意矩阵的广义逆定义，最早是由穆尔(Moore,E. H.)于 1920 年提出来的. 根据实际问题的需要，一些学者还研究了其他各种类型的广义逆矩阵.

线性最小二乘问题的条件数(the condition number of linear least squares problem) 反映线性最小二乘问题解对扰动的敏感程度的一个数量. 线性最小二乘问题的条件数

$$\mathscr{K}=\|A\|\ \|A^+\|,$$

其中 A 为 $\|Ax-b\|_2=\min$ 中的矩阵，A^+ 表示 A 的穆尔-彭罗斯广义逆，$\|\cdot\|$ 表示任一矩阵范数.

代数特征值问题数值解法

代数特征值问题(algebraic eigenvalue problem) 数值代数所讨论的三类最基本的问题之一. 对给定的 n 阶方阵 A，求非零 n 维向量 x 和数 λ，使 $Ax=\lambda x$. 分别称 λ 和 x 为 A 的特征值和特征向量. 在实际应用问题中经常遇到代数特征值问题，例如，动力系统和结构系统中的振动问题，以及某些迭代法的收敛性条件等都与代数特征值问题有密切的联系.

矩阵的特征值(eigenvalue of matrix) 见“代数特征值问题”.

矩阵的特征向量(eigenvector of matrix) 见“代数特征值问题”.

矩阵的特征多项式(characteristic polynomial of a matrix) 以(n 阶)矩阵的(n 个)特征值为根的(n 次)多项式. 对于给定的 n 阶矩阵 A，称多项式

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)$$

为矩阵 A 的特征多项式，其中 I 表示 n 阶单位矩阵，$\det(\lambda I-A)$ 表示 $\lambda I-A$ 的行列式. 一个数 λ 是 A 的特征值的充分必要条件是：λ 是它的特征多项式 $p(\lambda)$ 的根.

矩阵的谱(spectrum of a matrix) 一个给定的 n 阶方阵 A 的所有特征值组成的集合.

代数特征值问题的数值解法(numerical methods for algebraic eigenvalue problem) 数值代数的主要研究课题之一. 指对给定的 $n\times n$ 矩阵 A，求它的特征值 λ 和相应的特征向量 x. 到目前为止，虽然已有不少有效而可靠的数值方法，但如何利用计算机快速、有效地求解大型矩阵的特征值问题仍然是一个十分重要的研究课题. 由于矩阵的特征值是它的特征多项式

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)$$

的根，而次数超过 4 的多项式一般不能用有限次初等运算求出其根，因而代数特征值问题的计算方法本质上都是迭代性质的，按其计算过程是否破坏原矩阵，大致可分为向量迭代法和变换法两大类. 它们各有优缺点，在实际使用时，应根据所考虑的问题的特点来决定方法的取舍.

向量迭代法(vector iteration method) 一类常用的解特征值问题的数值方法. 其基本点是利用矩阵对某些向量作运算产生迭代向量. 其特点是整个计算过程始终保持原矩阵不变，因而特别适用于求高阶稀疏矩阵的部分特征值和相应的特征向量. 如幂法、兰措什方法等就属于此类.

变换法(transformation method) 一类常用的解特征值问题的数值方法. 其基本点是利用三类基本变换(高斯变换、豪斯霍尔德变换和吉文斯变换)，从给定的矩阵出发逐步进行相似变换，使变换产生的矩阵序列趋向于一个容易求其特征值的特殊类型的矩阵(如对角阵、三角阵等). 这类方法的优点是，收敛速度快，计算结果可靠，而且在理论上可同时求得矩阵之全部特征值和相应的特征向量. 但计算过程破坏原矩阵，一般不保持原有的稀疏性. 因而这类方法适用于求阶数不太高的矩阵之全部特征值和相应的特征向量. 雅可比方法、QR 方法均属于此类.

幂法(power method) 一种解特征值问题的向量迭代法. 主要用来求矩阵的按模最大的特征值和相应的特征向量. 其迭代格式是

$$y_k=Az_{k-1},\quad m_k=\max(y_k),$$

$$z_k=\frac{y_k}{m_k}\ (k=1,2,\cdots),$$

其中 z_0 为取定的初始向量，$\max(y_k)$ 指 y_k 中绝对值最大的一个分量. 其优点是算法简单，易在计算机上实现；缺点是收敛速度慢，其有效性依赖于矩阵 A 的特征值分布情况. 当 A 有 n 个线性无关的特征向

量，其特征值满足

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$$

时，

$$|m_k|\to|\lambda_1|, z_k\to\frac{u_1}{\max(u_1)}\quad(k\to\infty),$$

其中 u_1 是对应于 λ_1 的某一特征值向量. 其收敛速度依赖于 $|\lambda_2|/|\lambda_1|$，当 $\lambda_1\neq\lambda_2$，但

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|>|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$$

时，幂法不收敛. 在实际使用时常将幂法和某些加速技巧联合使用，常见的加速技巧有原点位移法和埃特金加速法. 此外，欲求 A 的其他特征值，还需结合使用某些降阶技术.

同时迭代法(simultaneous iteration method) 亦称子空间迭代法. 幂法的直接推广. 它是大型稀疏矩阵特征值问题的一种有效解法. 基本迭代格式为：取定一个 $n\times p$ 的列正交的矩阵 Q_0(即 $Q_0^TQ_0=I$)，计算

$$Z_k=AQ_{k-1};$$
$$Z_k=Q_kR_k(Q_k\in\mathrm{R}^{n\times p}, Q_k^TQ_k=I)$$
$$(k=1,2,\cdots).$$

将 Q_k 看做一个 p 维子空间的正交基，则上述迭代将产生一个子空间序列；可以证明，在一定条件下，这一子空间序列将逼近于 A 的一个 k 维不变子空间. 为了加速收敛速度，在迭代过程中，在每个 p 维子空间上可应用里茨原理进行加速.

子空间迭代法(subspace iteration method) 即"同时迭代法".

反幂法(inverse power method) 亦称反迭代. 一种计算矩阵按模最小特征值及相应特征向量的数值方法. 将幂法应用于 A^{-1} 而导出. 实际使用的反幂法是带原点位移的，其迭代格式为

$$(A-\tilde{\lambda}I)w_k=z_{k-1},$$
$$z_k=\frac{w_k}{\|w_k\|_\infty}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 z_0 为取定的初始向量，$\tilde{\lambda}$ 是某一常数. 设 A 的特征值为 λ_i，对应的特征向量为

$$u_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

如果选取 $\tilde{\lambda}$ 使

$$|\lambda_i-\tilde{\lambda}|<|\lambda_j-\tilde{\lambda}|\quad(i\neq j),$$

则 z_k 按方向收敛于 A 的特征向量 u_i，收敛速度是

$$|\lambda_i-\tilde{\lambda}|/\min_{j\neq i}|\lambda_j-\tilde{\lambda}|,$$

$\tilde{\lambda}$ 越靠近 λ_i，收敛速度就越快，但 $A-\tilde{\lambda}I$ 就越接近于一个奇异矩阵，因而迭代过程中就需要求解一个十分病态的方程组. 然而已经证明，这个病态性对于反幂法按方向收敛于特征向量是无关紧要的，而且当 $\tilde{\lambda}$ 是 λ_i 的相当精确的近似值时，一般只要一、二次反迭代就可求得 λ_i 的相当精确的特征向量. 因此，反幂法是已知近似特征值求对应的特征向量的一种最有效的算法.

反迭代(inverse iteration) 即"反幂法".

瑞利商迭代法(Rayleigh quotient iteration method) 一种用瑞利商作位移的反幂法. 其迭代格式为

$$\rho_{k-1}=z_{k-1}^*Az_{k-1}(\text{瑞利商}),$$
$$(A-\rho_kI)w_k=z_{k-1},$$
$$z_k=\frac{w_k}{\|w_k\|_2}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 z_0 为满足 $\|z_0\|_2=1$ 的初始向量. 可以证明在 A 非对称时，该迭代法的收敛速度是二阶的；而当 A 对称时，其收敛速度是三阶的.

兰措什迭代(Lanczos iteration) 一种向量迭代法. 指用递推的方式将对称矩阵 A 正交相似变换为对称三对角阵的一种算法. 其格式如下：取初始向量 v_1 满足 $\|v_1\|_2=1$，递推地计算

$$\alpha_j=v_j^TAv_j,$$
$$r_j=Av_j-\alpha_jv_j-\beta_{j-1}v_{j-1},$$
$$\beta_j=\|r_j\|_2,$$
$$v_{j+1}=\frac{r_j}{\beta_j}(j=1,2,\cdots,n-1),$$

其中约定 $v_0=0$，$\beta_0=1$，$\beta_j=0$ 时取 v_{j+1} 为任一与 v_1，$v_2,\cdots,v_j$ 正交的单位向量；最后计算 $\alpha_n=v_n^TAv_n$. 上述过程可写成矩阵形式：

$$AV_j=V_jT_j+r_je_j^T,$$

其中 $V_j=[v_1,v_2,\cdots,v_j]$，T_j 是三对角矩阵

$$T_j=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & & 0\\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{j-1}\\ 0 & & \beta_{j-1} & \alpha_j\end{pmatrix}.$$

当精确运算时，$r_n=0$，V_n 是 n 阶正交阵，因而 A 正交相似于 T_n. 但当误差出现时，这一过程产生的向量 v_j 很快失去正交性.

兰措什现象(Lanczos phenomena) 代数特征值问题数值解法中的一个现象. 即在由兰措什迭代产生三对角阵过程中观察到的现象. 对一个给定的对称矩阵 A，由兰措什迭代在计算机上产生三对角阵 T_j 时有如下现象：

1. 对足够大的 m，矩阵 T_m 的特征值包含 A 的所有相异特征值(可能 $m>n$).

2. 对高阶矩阵 A，对不太大的 $m(m\ll n)$，T_m 常包含 A 的两端特征值的相当精确的近似特征值.

上述现象称为兰措什现象，是由大量的数值试验观察得到的.

兰措什方法(Lanczos method) 一种常用的求高阶稀疏对称矩阵的部分或全部特征值及相应特征

向量的方法.设 A 是 n 阶对称矩阵,兰措什方法的基本步骤为:

1.对某个给定的正数 m,利用兰措什迭代计算对称三对角阵 T_m 和列正交矩阵 V_m.

2.利用二分法或对称 QR 方法求 T_m 的部分或全部特征值.

3.选择这些特征值的全部或部分作为 A 的近似特征值.

4.如果需求对应的特征向量,则在步 3 中对选定的每个特征值 μ,利用反幂法求 T_m 对应于 μ 的特征向量 u,然后以 $z=V_m u$ 作为 A 对应于 μ 的近似特征向量.

由于误差出现时,兰措什迭代产生的 V_m 很快失去正交性.有时 V_m 的列甚至是线性相关的,因而长期以来人们认为兰措什方法是数值不稳定的,很少用于实际计算.近年来对兰措什方法作了深入的研究,进行了大量的实际计算和细致的误差分析,发现了所谓的兰措什现象,充分认识到这一方法对于高阶稀疏对称特征值问题是非常有效的数值解法.

吉文斯-豪斯霍尔德方法(Givens-Householder method) 一种常用的求对称矩阵的全部或部分特征值及对应的特征向量的方法.设 A 是一个 n 阶对称矩阵,其具体步骤如下:

1.用吉文斯变换或豪斯霍尔德变换把 A 约化为对称三对角阵,即计算正交阵 Q 和对应三对角阵 T 使得

$$Q^T AQ=T,$$

其中 Q 是一些吉文斯平面旋转变换或豪斯霍尔德变换的乘积.

2.用二分法求 T 的全部或部分特征值和对应的特征向量,再利用 Q 求得 A 的对应的特征向量.

吉文斯-豪斯霍尔德方法速度快,计算过程稳定,但破坏原矩阵,因而适用于求解中小型矩阵的特征值问题.

雅可比方法(Jacobi method) 求对称矩阵全部特征值和特征向量的一种变换法.它是通过一系列特殊的正交相似变换将对称矩阵近似对角化,从而求得其特征值和特征向量的方法.设 A 是一给定的 n 阶对称方阵.雅可比方法就是从 $A_0=A$ 出发,作正交相似序列

$$A_k=R_k^T A_{k-1}R_k \quad (k=1,2,\cdots),$$

其中 R_k 是按如下方式确定的雅可比旋转阵:先在

$$A_{k-1}=[a_{ij}^{(k-1)}]$$

的所有非对角元中选出绝对值最大者 $a_{pq}^{(k-1)}$;然后计算

$$d=a_{pp}^{(k-1)}-a_{qq}^{(k-1)},$$

$$\tan\theta=\frac{2a_{pq}^{(k-1)}\operatorname{sign}(d)}{[|d|+(d^2+4(a_{pq}^{(k-1)})^2)^{\frac{1}{2}}]},$$

$$c=\cos\theta=(1+\tan\theta)^{-\frac{1}{2}},$$

$$s=\sin\theta=\tan\theta\cos\theta;$$

R_k 取作 (p,q) 平面内转角为 θ 的平面旋转变换,即

$$R_k=\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&c&&&s&&\\&&&&1&&&&\\&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&1&&\\&&&-s&&&c&&\\&&&&&&&1&\\&&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\p\\\\\\\\q\\\\\\\\\end{matrix}\quad(p<q)\\\begin{matrix}&&&p&&&q&&&&\end{matrix}&\end{array}.$$

这样得到的 A_k 满足 $a_{pq}^{(k)}=a_{qp}^{(k)}=0$,而且当 $k\to\infty$ 时,A_k 趋向于一个对角阵.此法在每次变换时都要在 $n(n-1)/2$ 个元素中选出绝对值最大者,这是相当费时的,为了避免这种消耗,通常使用循环雅可比方法和阀雅可比方法.雅可比方法简单易行可同时求出对称矩阵的全部特征值和相应的特征向量,但它和对称 QR 方法相比,收敛速度太慢,因此过去很长一段时间内很少有人使用.最近几年,由于它在并行计算中的显著作用,重新受到人们的关注.

循环雅可比方法(serial Jacobi method) 能减少计算量的一种雅可比方法.为避免雅可比方法在每次变换中寻求绝对值最大元素需要大量计算时间的缺点,对每个非对角元不管其大小都消去一次(称为一次扫描),通常采用的消去次序是

$$(1,2),(1,3),\cdots,(1,n);$$

$$(2,3),\cdots,(2,n);\cdots,(n-1,n)$$

(即在确定 R_k 时,(p,q) 所应取的值(参见"雅可比方法").扫描一次之后,再重新进行一次,这样周而复始地进行下去,最终达到近似对角化的目的.

阀雅可比方法(threshold Jacobi method) 亦称过关雅可比方法.循环雅可比方法的一种变形.它是先取定一个正数 r_1 作为阀值,在一次扫描中只对绝对值超过 r_1 的非对角元进行消去.这样反复扫描,直到所有的非对角元的绝对值都小于 r_1 时,再减少 r_1 的值作为新的阀值,然后再以新的阀值进行扫描.如此下去,直至阀值充分小而达到近似对角化(参见"循环雅可比方法").

过关雅可比方法(threshold Jacobi method) 见"阀雅可比方法".

(代数特征值问题的)二分(解)法(bisection method (of algebraic eigenvalue problem)) 一种常用的求对称三对角矩阵的部分或全部特征值和特征向量的方法.设实对称三对角矩阵 T 的对角元为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,次对角元为 $\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n$ $(\beta_i\neq 0)$,则由 $T-\lambda I$ 的顺序主子式组成的多项式序列

$$p_0(x)\equiv 1,$$
$$p_1(\lambda)=\alpha_1-\lambda,$$
$$p_i(\lambda)=(\alpha_i-\lambda)p_{i-1}(\lambda)-\beta_i^2 p_{i-2}(\lambda)$$
$$(i=2,3,\cdots,n),$$

构成一个斯图姆序列. 对实数 α，用$S(\alpha)$表示

$$p_0(\alpha),p_1(\alpha),\cdots,p_n(\alpha)$$

中相邻两数的变号数目，则$S(\alpha)$就是 T 在$(-\infty,\alpha)$内特征值的个数. 二分法就是利用这一性质而得到的. 具体步骤如下：

1. 用圆盘定理确定 T 的全部特征值的上界 M 和下界 m，即 $m\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant M$.

2. 将$[m,M]$二等分，取其中点 $\alpha=(m+M)/2$，计算 $S(\alpha)$，比如 $S(\alpha)=k$，则 T 有 k 个特征值属于$[m,\alpha)$，而有 $n-k$ 个特征值属于$[\alpha,M]$；然后再取$[m,\alpha]$和$[\alpha,M]$的中点 β,γ，计算 $S(\beta)$和 $S(\gamma)$，从而确定对应的四个小区间上所含有的 T 的特征值的个数，如此继续下去，对每个含有特征值的小区间继续进行二分法，直至达到精度要求的特征值为止.

3. 如果求得近似特征值之后还需要计算对应的特征向量，可用带位移的反幂法计算.

上海森伯格矩阵(upper Hessenberg matrix) 一类特殊矩阵. 如果矩阵 $H=[h_{ij}]$满足

$$h_{ij}=0,i>j+1,$$

则称 H 为上海森伯格矩阵.

QR 方法(QR method) 求解代数特征值的一种变换法. 其基本迭代格式如下：

$$A_{k-1}=Q_kR_k,$$
$$A_k=R_kQ_k\ \ (k=1,2,\cdots),$$

其中 $A_0=A$，Q_k 为酉阵，R_k 为上三角阵. 这样得到的每个 A_k 都与 A 相似，且在一定条件下，A_k 趋于一个上三角阵(但上三角部分元素不一定有极限). 因此 QR 方法可用来求 A 的全部特征值. 但因每次迭代的运算量太大，且收敛速度一般也非常慢，因此缺乏实用性. 实际应用中常用的是带位移的 QR 方法.

带位移的QR 方法(shifted QR method) 解代数特征值问题的有效方法之一. 其基本步骤如下：

1. 将 A 用初等正交相似变换(豪斯霍尔德变换或吉文斯变换)约化为上海森伯格阵 H，即

$$Q^* AQ=H,$$

其中 Q 为酉阵，Q^* 表示 Q 的共轭转置.

2. 对 H 进行带位移的 QR 迭代：$H_{k-1}-\mu_kI=Q_kR_k$(Q_k 为酉阵，R_k 为上三角阵)，

$$H_k=R_kQ_k+\mu_kI\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 $H_0=H$，$\mu_k=h_{nn}^{(k-1)}$为 H_{k-1}的最后一个对角元.

3. 如果需求全部特征向量，则可将变换矩阵累积起来而得到所需的特征值向量；如果只需少数几个特征值所对应的特征向量，则可用反幂法去求.

这一方法有数值稳定性好，收敛速度快等优点，但求解过程要破坏原矩阵，因而适应于中小规模的代数特征值问题.

双重带位移的QR 方法(double shifted QR method) 求实矩阵全部特征值和相应的特征向量的有效方法之一. 其基本步骤与带位移的 QR 方法基本相同，只是在进行 QR 迭代时，为了避免重复运算而将相继两步带位移的 QR 迭代合并为一步并按如下方式进行：记 $H_0=H$，然后迭代进行

1. 计算 $H_{k-1}^2-t_kH_{k-1}+s_kI$ 的第一列 v_k，其中

$$t_k=h_{n-1,n-1}^{(k-1)}+h_{n,n}^{(k-1)},$$
$$s_k=h_{n-1,n-1}^{(k-1)}h_{n,n}^{(k-1)}-h_{n-1,n}^{(k-1)}h_{n,n-1}^{(k-1)}.$$

2. 求豪斯霍尔德变换 P_0 使 $P_0v_k=\alpha e_1$.

3. 求豪斯霍尔德变换 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-2}$使

$$H_k=P_{n-2}\cdots P_1P_0H_{k-1}P_0P_1\cdots P_{n-2}$$

是上海森伯格阵.

对称QR 方法(symmetric QR method) 求对称矩阵的全部特征值和特征向量的有效方法之一. 是将带位移的 QR 方法应用于对称矩阵而得到的，此时充分利用对称性可使每步迭代的运算量大为减少，而且此时的收敛速度是 3 次的.

奇异值分解的计算方法(singular value decomposition algorithm) 用双对角化和 QR 方法求矩阵奇异值的方法. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵($m>n$)，其具体步骤如下：

1. 利用初等正交变换将 A 约化为双对角阵，即求正交矩阵 U_0 和 V_0 使

$$U_0AV_0=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix},$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}d_1 & f_1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & f_{n-1}\\ 0 & & & d_n\end{pmatrix}$$

为双对角阵.

2. 对 $T=B^TB$ 应用对称 QR 迭代求得 T 的特征值，再开方就得到 A 的奇异值.

广义特征值问题数值解法(numerical methods for general algebraic eigenvalue problem) 代数特征值问题数值解法的推广. 最常见的广义特征值问题是：给定矩阵 A 和 B，求非零向量 x 和常数 λ 使 $Ax=\lambda Bx$. 该方法是：当 B 非奇异时，可化为通常的特征值问题

$$B^{-1}Ax=\lambda x;$$

当 A,B 对称，且 B 正定时，可化为对称特征值问题

$$(U^{-T}AU^{-1})Ux=\lambda Ux,$$

其中 U 是 B 的乔莱斯基分解 $B=U^TU$ 中的上三角阵.

利用化为通常特征值问题的途径来求解广义特征值问题,有时是很有效的,但当 A 和 B 稀疏时,约化后的矩阵

$$B^{-1}A \text{ 和 } U^{-T}AU^{-1}$$

一般是稠密的;而当 B 关于求逆的性态很差时,直接约化会带来很大误差.针对这些问题,现在已有不少其他有效解法,它们不必预先化为通常特征值问题,如 QZ 法和松弛法等.

广义特征值问题(general(algebraic) eigenvalue problem) 见“广义特征值问题数值解法”.

代数特征值问题的摄动分析(perturbation analysis for algebraic eigenvalue problem) 矩阵 A 有扰动时特征值及特征向量的误差估计.对于特征值问题 $Ax=\lambda x$,摄动分析研究的主要内容就是矩阵 A 的元素经微小扰动 ΔA 之后,对应的特征值和特征向量将如何变化,以及如何利用 $\|\Delta A\|$ 的上界尽可能精确地给出特征值和特征向量改变量的上界估计.这对于特征值问题的数值方法的研究有着重要的意义.

病态特征值问题(ill-conditioned algebraic eigenvalue problem) 一类特殊的特征值问题.指当矩阵元素的微小扰动引起其某个特征值(或特征向量)的巨大变化时的特征值问题.这时称该特征值(或特征向量)是病态的,否则称为良态的.一个特征值(或特征向量)病态与否是特征值问题的固有特性,与计算它们的数值方法无关.一般地,方阵的重特征值是病态的,此时矩阵元素的 ε 量级的变化,可引起特征值的 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ 量级的变化,其中 p 是含此特征值的最大若当块的维数.

良态特征值问题(well-conditioned algebraic eigenvalue problem) 见“病态特征值问题”.

特征值条件数(condition number of eigenvalue) 衡量特征值病态程度的标准.设 λ 是矩阵 A 的单特征值,y 和 x 分别是对应的左、右单位特征向量,即

$$Ax=\lambda x,\ y^TA=\lambda y^T,\ \|x\|_2=\|y\|_2=1,$$

其中 y^T 表示 y 的转置.通常用数

$$s(\lambda)=|y^Tx|$$

的大小来衡量 λ 的病态程度,$s(\lambda)$很小就称 λ 是病态的,$s(\lambda)$愈小,λ 的病态程度就越严重.因此称数 $1/s(\lambda)$为特征值 λ 的条件数.

圆盘定理(disc theorem) 亦称格斯格瑞圆盘定理.判定特征值所在范围的常用定理.该定理断言:设 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$,记复平面上以 a_{ii} 为圆心,以

$$\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$$

为半径的圆盘为 G_i,则 A 的所有特征值必包含在这些圆盘作成的并集

$$\bigcup_{i=1}^{n}G_i$$

内.

格斯格瑞圆盘定理(Gerschgrin disc theorem) 即“圆盘定理”.

鲍尔-法埃克定理(Bauer-Fike theorem) 关于特征值的扰动定理.该定理断言:设 A 和 B 是两个 n 阶方阵,其中 A 可对角化:

$$A=Q^{-1}\Lambda Q,$$

Q 为非奇异阵,$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$;则对 B 的任一特征值 μ,必存在 A 的特征值 λ,使得

$$|\lambda-\mu|\leqslant\|Q\|_2\|Q^{-1}\|_2\|B-A\|_2.$$

霍夫曼-魏兰特定理(Hoffman-Weilandt theorem) 关于特征值的扰动定理.该定理断言:设 A 和 B 是两个 n 阶正规矩阵,则必可将 A 和 B 的特征值作适当的编号 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 和 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i-\mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|A-B\|_F,$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的弗罗贝尼乌斯范数.

常微分方程数值解法

常微分方程数值解法(numerical methods for ordinary differential equations) 计算数学的一个分支.是解常微分方程各类定解问题的数值方法.现有的解析方法只能用于求解一些特殊类型的定解问题,实用上许多很有价值的常微分方程的解不能用初等函数来表示,常常需要求其数值解.所谓数值解,是指在求解区间内一系列离散点处给出真解的近似值.这就促成了数值方法的产生与发展.

作为数值分析的基础内容,常微分方程数值解法的研究已发展得相当成熟,理论上也颇为完善,各类有实用价值的算法已经建立,并已形成计算机软件.它处理问题的思路与方法常可用于偏微分方程的数值求解.主要研究以下三类定解问题的数值解法:初值问题、两点边值问题与特征值问题.初值问题的数值解法应用广泛,是常微分方程数值解法的主要内容.在这方面有突出贡献的学者当推达赫奎斯特(Dahlquist,G.)、巴特赫尔(Butcher,J.C.)及吉尔(Gear,C.W.)等人.两点边值问题及特征值问题的研究相对较为薄弱,其中凯勒尔(Keller,H.B.)的工作影响较大.

构造常微分方程数值算法的基本途径有:

1.用差商替代导数.将微分问题中未知函数及

其导数分别用在某些离散点处函数值的组合与差商近似替代.

2. 数值积分法. 将微分问题转化为等价的积分方程问题,用各种数值积分公式近似计算未知函数的积分.

3. 待定系数法. 把欲构造的计算公式写成在离散点函数值之线性组合的待定系数形式,利用函数的泰勒展开式与对公式的精度要求,确定公式的系数.

4. 加权余量法. 根据微分方程余量极小化的要求,确定计算公式.

常微分方程数值解法研究的基本问题有:

1. 构造计算公式.

2. 研究算法的相容性、精度阶与收敛性,估计局部与整体截断误差.

3. 研究在计算过程中舍入误差传播与积累的规律,即方法的稳定性问题.

4. 算法的数值实现问题,力图以较小的计算工作量与可靠的软件系统,在计算机上给出满足精度要求的计算结果.

常微分方程初值问题数值解法(numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations) 常微分方程数值解法的主要内容. 指研究求解初值问题各类数值方法的构造、理论分析与数值实现问题. 研究的主要对象为一阶方程组初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,$$

式中 y 及 f 均为向量函数. 对于高阶方程的问题,约定已事先用引进新未知数的办法化为一阶方程组. 在研究中,需要把问题区分为两大类:非刚性问题与刚性问题. 这是根据问题之解的数学性质来区分的. 传统的数值方法(例如,经典龙格-库塔法等)适用于非刚性问题,而对刚性问题则需要构造新的计算公式,这是因为,此类问题对数值方法的稳定性有特殊要求.

求解初值问题的数值方法大致分为两大类:一为单步法,包括泰勒级数法与龙格-库塔型方法;二为多步法,包括线性多步法与二阶(及多阶)导数法等. 它们具有不同的特点与适用范围,实践中应根据问题的性质灵活地选用,有时将不同方法结合使用或给予适当加工改造,可以达到提高计算精度与减少计算量的效果. 由于所论及的方法均为步进方法,一个突出的概念是方法的稳定性. 根据对数值解性质的不同要求,文献中提出了多种稳定性概念. 按照在稳定性问题研究中,模型微分方程取为线性方程或非线性方程,方法的稳定性又可区分为线性稳定性与非线性稳定性两大类. 在初值问题数值方法的讨论中,常以 h 表示积分步长,以 y_n 表示 $y(x_n)$的数值近似值,而数列

$$\{y_n\}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

即为所求的数值解. 评价数值方法优劣的基本根据是:

1. 精度阶的高低.

2. 稳定性能的好坏,特别是绝对稳定区域的大小.

3. 计算工作量的多少,其主要标志是所用积分步长 h 的大小与计算右端函数 f 的次数. 步长太小必使计算步数增多,除增加计算量外,还会导致舍入误差的更多积累.

常微分方程数值方法的精度阶(order of accuracy for numerical methods in ordinary differential equations) 常微分方程数值解法的基本概念之一. 指数值方法计算公式局部截断误差阶的估计. 如果 p 是使单步法或多步法的局部截断误差

$$T_{n+1}=O(h^{p+1})$$

的最大正整数,则称该方法的精度阶是 p,或称方法是 p 阶的.

常微分方程初值问题数值方法的稳定性(stability of numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations) 常微分方程初值问题数值方法的基本概念之一. 指研究初始误差与舍入误差在计算过程中传播积累的规律. 设以 h 为步长,以 $\tilde{y}_n$ 与 y_n 分别表示有无初始与舍入误差的数值解,

$$\varepsilon_n=\tilde{y}_n-y_n$$

表示第 n 步的整体计算误差. 若存在正常数 K 及 $h_0>0$,使当 $h\in(0,h_0]$,整体误差 ε_n 满足

$$|\varepsilon_n|\leqslant K|\varepsilon_0|,$$

则称数值方法是稳定的,否则称为是不稳定的. 简言之,稳定性是研究计算误差的积累是否可以控制的问题. 目前,人们根据初值问题的类型与实用上的需要,提出多种具体稳定性概念. 例如,零稳定性、绝对稳定性、相对稳定性与代数稳定性等.

单步法(one step method) 一类重要的数值方法. 设常微分方程初值问题为

$$y'=f(x,y),\quad y(0)=y_0,$$

这种方法在计算 $x=x_{n+1}$处数值解 y_{n+1}时,只用到前一步,即 $x=x_n$ 处的数值解 y_n 及由它给出的其他信息. 欧拉法、泰勒级数法、龙格-库塔法等都是单步法的例子. 单步法的共同特征是,在已知数据 y_n 上添加某种形式的增量得出 y_{n+1},其计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,y_{n+1},h;f),$$

式中 $\varphi(x,y,z,h;f)$称为方法的增量函数. 当增量函数不依赖于 y_{n+1}时,方法称为显式的,否则称为隐式的. 为简便,有时略去增量函数对 f 的依赖关系,简

写为$\varphi(x,y,z,h)$或$\varphi(x,y,h)$(显式).

显式单步法(explicit one step method) 见“单步法”.

隐式单步法(implicit one step method) 见“单步法”.

单步法的相容性(consistency of one-step methods) 单步法必须具备的重要性质之一.指保证计算公式是原微分方程在确定意义下的逼近.对显式单步法,若以$\varphi(x,y,h;f)$表示其增量函数,则当$\varphi(x,y,0;f)=f(x,y)$时,称方法为相容的.相应地,称上述条件为相容性条件.相容性保证单步法至少是一阶精度的.

单步法的局部截断误差(local truncation error of one step methods) 常微分方程数值解法概念之一.是表征单步法计算公式对原微分方程逼近程度的量.对显式单步法,这个量由

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,y(x_n),h;f)$$

给出,式中$y(x)$为初值问题的真解.

单步法的整体截断误差(global truncation error of one step methods) 常微分方程数值解法概念之一.是表征由单步法求出的数值解对真解逼近程度的量.若以$y(x_{n+1})$和y_{n+1}分别表示初值问题在$x=x_{n+1}$处的真解与由单步法求出的数值解(在无舍入误差的情况下),则差

$$e_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

称为单步法的整体截断误差.它是局部截断误差在计算过程中传播积累的总效果.整体截断误差也常称为方法误差.

单步法的收敛性(convergence of one step methods) 单步法应具备的重要性质之一.指当步长趋于零时,数值解应以真解为极限.由增量函数$\varphi(x,y,z,h;f)$确定的单步法称为是收敛的,是指:对任给初值y_0及任取节点$x=x_n$皆有

$$\lim_{h\to 0} y_n = y(x) \quad (x = x_n \in [0,T]),$$

这里$[0,T]$为求解区间.如果整体截断误差$e_n=O(h^p)$,则称单步法是p阶收敛的.

显式单步法的收敛性定理(convergence theorem for explicit one step methods) 判断显式单步法收敛性的一个充分必要条件.考虑显式单步法

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h;f),$$

收敛性定理指出,若增量函数$\varphi(x,y,h;f)$在

$$0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant h\leqslant h_0,|y|<\infty$$

上连续(其中h_0及T为正常数),且关于y满足李普希茨(Lipschitz)条件,则该单步法收敛,当且仅当它是相容的,即

$$\varphi(x,y,0;f)=f(x,y).$$

利用本结论,可判明欧拉法、泰勒级数法及显式龙格-库塔法的收敛性.

单步法的绝对稳定性(absolute stability of one step methods) 常微分方程数值解法的概念.它是刻画单步格式中舍入误差积累性态的一种基本方式.即讨论当步长h固定时,在单步法计算过程中,初始与舍入误差的积累可否控制的问题.将单步法应用于模型微分方程$y'=\lambda y$,λ为常数,则得到一阶差分方程

$$y_{n+1}=R(z)y_n,$$

式中$z=\lambda h$,实部$\mathrm{Re}(\lambda)<0$.$R(z)$称为单步法的稳定函数,对显式方法,$R(z)$常为多项式;对隐式方法,$R(z)$常为有理函数,并且可以选择方法中的系数,使$R(z)$为$\exp(z)$的帕德逼近.若对某z,有$|R(z)|<1$,则称方法在点z是绝对稳定的.复平面上的区域

$$\Omega=\{z\,|\,|R(z)|<1,z\text{ 为复数}\}$$

称为单步法的绝对稳定区域.

单步法的稳定函数(stability function for one step methods) 见“单步法的绝对稳定性”.

单步法的绝对稳定区域(regions of absolute stability of one step methods) 见“单步法的绝对稳定性”.

欧拉法(Euler method) 一种简单的显示单步法.计算公式由

$$y_{n+1}=y_n+hf_n$$

表出,式中$f_n=f(x_n,y_n)$.欧拉法是一阶显式方法,且是收敛的.其稳定函数为一次多项式$R(z)=1+z$,z为复数,绝对稳定区域为复平面上以$(-1,0)$为中心的单位圆内部.

逆欧拉法(inverse Euler method) 一种简单的显式单步法.它是为克服欧拉法绝对稳定区域太小的缺点而设计的一种单步法.它是对单个一阶方程,逆欧拉法的计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{hy_nf_n}{(y_n-hf_n)}=\frac{y_n^2}{(y_n-hf_n)}, \tag{1}$$

式中$y_n-hf_n\neq 0$.为实现算法,对$y(x)$应施加限制:

$$|y(x)|+|y'(x)|\neq 0,\ x\geqslant 0,$$

否则公式(1)退化为$y_{n+1}=y_n$.本方法也可应用于微分方程组,这时只需对每个分量应用公式(1)进行计算.逆欧拉法的稳定函数

$$R(z)=1/(1-z),$$

z为复数,故为A及L稳定的.方法的缺点是,当$y_n=0$时,局部不相容,不能使用;当$y_n\neq 0$时,虽可使用,但误差较大.

隐式欧拉法(implicit Euler method) 一种简单的隐式单步法.它是为克服欧拉法绝对稳定性能太差而设计的,并由计算公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

表出.隐式欧拉法是一阶方法,且是收敛的,但每步计算一般需求解非线性方程.方法的稳定函数

$$R(z)=1/(1-z),$$

z 为复数,其绝对稳定区域为左半复平面,且为 L 稳定的.

泰勒级数法(Taylor series methods) 一种单步法.指利用初值问题真解的截断泰勒级数作为解的近似值的数值解法.设真解 $y(x)$ 具有 $q+1$ 阶连续导数,则在 $x=x_n$ 处,有泰勒展开式

$$y(x_n+h)=y(x_n)+\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{j!}h^j y^{(j)}(x_n)+O(h^{q+1}).$$

取

$$y_{n+1} = y(x_n) + \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{j!}h^j y^{(j)}(x_n),$$

则局部截断误差

$$y(x_n+h)-y_{n+1}=O(h^{q+1}).$$

式中各阶导数 $y^{(j)}(x_n)$ 可利用 $y'=f(x,y)$ 算出.泰勒级数的计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^{q}h^j y_n^{(j)}/j!.$$

由于高阶导数 $y_n^{(j)}$ 的计算量非常大,本方法不常用.

梯形法(trapezoidal method) 一种常用的二阶收敛方法.其计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})].$$

梯形法的稳定函数为

$$R(z) = \left(1+\frac{z}{2}\right)\Big/\left(1-\frac{z}{2}\right),$$

z 为复数,故为 A 稳定的,但不是 L 稳定的.由于方法是隐式的,每步计算需求解非线性方程.在实际应用中,对梯形法常用如下预测-校正格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n), \\ y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})], \end{cases}$$

式中 $k=0,1,2,\cdots$ 表示迭代次数,$y_n=y_n^{(M)}$,M 为根据精度要求指定的迭代次数.

龙格-库塔法(Runge-Kutta methods) 简称 RK 方法.一类应用广泛的单步法.以对单个方程初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

为例,龙格-库塔法的计算公式是

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s}b_iK_i \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{1}$$

$$K_i = f\left(x_n + c_ih, y_n + h\sum_{j=1}^{s}a_{ij}K_j\right) \quad (i=1,2,\cdots,s), \tag{2}$$

这里 y_{n+1} 为真解 $y(x)$ 在 $x=x_{n+1}$ 处的近似值,式中正整数 s 称为 RK 方法的级,c_i 与 $b_i(i=1,2,\cdots,s)$ 分别称为 RK 方法的横标与权系数,$A=(a_{ij})$ 称为 RK 方法的系数矩阵,且满足条件

$$c_i = \sum_{j=1}^{s}a_{ij}.$$

RK 方法可用如下系数表描述:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

如果 A 是主对角元素均为零的下三角阵,相应的公式是显式的.此时,按(2)式计算 K_i 时,其右端仅包含 $K_1,K_2,\cdots,K_{i-1}$.如果 A 是主对角元素非零的下三角阵,相应的公式称为半隐式的.如果 A 的上三角部分至少有一个非零元素,相应的公式称为隐式的.

为了建立具体的公式,需要确定参数向量 c 及 b,参数矩阵 A.通常有两种方法,一是将(2)式在 (x_n,y_n) 点展开并代入(1)式中,然后与真解 $y(x_n+h)$ 在点 x_n 处的泰勒展开式相比较,由此确定上述参数;二是将微分方程化成等价的积分方程,用数值积分法求得 y_{n+1} 的表达式,将它与(2)式的展式代进(1)式的结果相比较,以确定各个参数.

经典龙格-库塔法(classical Runge-Kutta method) 一种显式龙格-库塔法.其计算公式为

$$\begin{aligned} &y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4), \\ &K_1=f(x_n,y_n), \\ &K_2=f\left(x_n+\frac{1}{2}h, y_n+\frac{1}{2}hK_1\right), \\ &K_3=f\left(x_n+\frac{1}{2}h, y_n+\frac{1}{2}hK_2\right), \\ &K_4=f(x_n+h, y_n+hK_3). \end{aligned}$$

这个方法在实轴上的绝对稳定区间为$(-2.78,0)$,且为四阶收敛的.

龙格-库塔法的稳定函数(stability functions for Runge-Kutta methods) 决定龙格-库塔法绝对稳定性质的函数.如果把一般 s 级 RK 方法应用于单个试验方程

$$y'=\lambda y,\quad y(x_0)=y_0,$$

式中 λ 为复数,则可得到

$$y_{n+1}=R(z)y_n,\quad z=h\lambda.$$

此处 $R(z)$ 是实系数多项式或有理函数,称之为 RK 方法的稳定函数:

$$R(z)=1+b^Tz(I-Az)^{-1}e,$$

式中 $e=[1,\cdots,1]^T$,b^T 及 A 分别为公式的权系数与系数矩阵.显然,如果对所有 $\mathrm{Re}(z)\leqslant 0$,有 $|R(z)|$

$\leqslant 1$，则方法是 A 稳定的. 稳定函数 $R(z)$ 又可用下式计算

$$R(z)=\frac{\det(I-zA+zeb^T)}{\det(I-zA)}.$$

多步法(multiple-step methods)　一类具有较高精度的数值方法. 设常微分方程初值问题为

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0.$$

多步法的一般形式是

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\varphi(x_n,y_{n+k},\cdots,y_n,h,f)\quad(k\geqslant 1),$$

其中 $\alpha_j(j=0,1,\cdots,k)$ 为实系数，$\alpha_k=1$；φ 为广义增量函数，满足条件

$$\varphi(x,y_k,\cdots,y_1,h,0)\equiv 0,\quad y_i(i=1,2,\cdots,k)$$

为任意实数. 用这种方法计算 y_{n+k} 时，一般要用到已经算出的 y_{n+k-1}，y_{n+k-2} 等若干个数值解值. 这类方法以熟知的龙格-库塔方法与线性多步法为其特例.

多步法的相容性(consistency of multiple-step methods)　多步法必须具备的重要性质之一. 设 $y(x)$ 为初值问题的精确解，多步法的局部截断误差由下式表示

$$R(x,y,h)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y(x+jh)-h\varphi(x,y(x+h),\cdots,y(x),h,f).$$

如果存在函数

$$\tau(h):\lim_{h\to 0}\tau(h)=0,$$

使 $|R(x,y,h)|\leqslant\tau(h)h$，对所有 $0\leqslant x\leqslant T$，$|y|<\infty$ 成立，则称多步法是相容的. 相容性的意义在于，多步法的计算公式应是微分方程的一个合理近似.

多步法的局部截断误差(local truncation error of multi-step methods)　常微分方程数值解法概念之一. 它是表征多步法计算公式对原微分方程逼近程度的量(参见“多步法的相容性”).

多步法的收敛性(convergence of multiple-step methods)　多步法必须具备的基本性质之一. 设对 k 步法已给出 $k-1$ 个附加初值(出发值)$y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}$，用 $e_n=y_n-y(x_n)$ 表示方法的整体截断误差. 如果附加初值满足条件

$$|e_i|\leqslant\eta(h)\quad(i=0,1,\cdots,k-1),$$

其中

$$\lim_{h\to 0}\eta(h)=0,$$

关系式

$$\lim_{h\to 0}y_n=y(x),\quad h=\frac{x}{n}$$

对所有 $0\leqslant x\leqslant T$ 成立，则称 K 步法是收敛的.

线性多步法(linear multi-step methods)　一类重要的多步法. 指在计算公式中 $f_{n+1},f_n,f_{n-1}\cdots$ 均以线性组合格式出现. 记 k 次多项式

$$\rho(\xi)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\xi^j,\ \sigma(\xi)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\xi^j,$$

其中 $\alpha_k\neq 0$，$|\alpha_0|+|\beta_0|\neq 0$. 以 E 表示移位算子，$Ey_n=y_{n+1}$，则线性 K 步法的计算公式为

$$\rho(E)y_n=h\sigma(E)f_n,$$

式中 $f_n=f(x_n,y_n)$；或者写为

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}.$$

$\rho(\xi)$ 和 $\sigma(\xi)$ 分别称为线性 k 步法的第一和第二特征多项式. 当 $\beta_k\neq 0$ 时，方法为隐式的；当 $\beta_k=0$ 时，方法为显式的.

多步法的出发值(starting values for multi-step methods)　常微分方程数值解法术语. 为应用 k 步法，必须事先给出 k 个初值 $y_0,y_1,\cdots,y_{k-1}$ 才能进行以后各步的计算，这 k 个值称为 k 步法的出发值. 通常利用与 k 步法同阶的单步法给出出发值.

构造线性多步法的数值积分法(method of numerical integration for constructing linear multi-step methods)　构造线性多步计算公式方法之一. 该方法是：将初值问题化为等价的积分方程，则有

$$y(x_{n+k})-y(x_{n-j})=\int_{x_{n-j}}^{x_{n+k}}f(x,y(x))\mathrm{d}x.$$

用等距节点的拉格朗日插值多项式

$$P_q(x)=\sum_{i=0}^{q}f(x_{n-i},y(x_{n-i}))l_i(x)$$

近似替代上式中的被积函数，式中 $\{l_i(x)\}$ 为插值基函数，并以 y_n 替代 $y(x_n)$，则可得到线性多步法公式

$$y_{n+k}=y_{n-j}+h\sum_{i=0}^{q}\beta_{qi}f_{n-i},$$

式中 β_{qi} 为公式的系数. 对 k,j 和 q 作不同选择，可得到不同类型的具体公式. 当取 $k=1,j=0$ 时，得到亚当斯显式法；当取 $k=0,j=1$ 时，得到亚当斯隐式法；当取 $k=1,j=1$ 时，得到尼斯图姆显式公式

$$y_{n+1}=y_{n-1}+h\sum_{i=0}^{q}\beta_{qi}f_{n-i};$$

当取 $k=0,j=2$ 时，得到米伦隐式公式

$$y_{n+1}=y_{n-1}+h\sum_{i=0}^{q}\beta_{qi}f_{n+1-i}.$$

构造线性多步法的待定系数法(method of undetermined coefficients for constructing linear multi-step methods)　构造线性多步计算公式的方法之一. 它是一种适用范围更广的一种多步法. 其基本提法如下：根据线性 k 步法公式

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},$$

算出泰勒展开式

$$\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j y(x+jh)+h\beta_j y'(x+jh)]$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} c_q y^{(q)}(x) h^q,$$

于是可得到 c_q 与 α_j, β_j 之间的关系式

$$c_0 = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j,$$

$$c_q = \frac{1}{q!} \sum_{j=1}^{k} j^q \alpha_j - \frac{1}{(q-1)!} \sum_{j=1}^{q} j^{q-1} \beta_j$$

$$(q = 1,2,3,\cdots).$$

其次,对取定的 $k \geqslant 1$,选择 α_j 和 β_j,使

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_q = 0$$

(一般 $c_{q+1} \neq 0$),由此得出 α_j, β_j 所满足的齐次线性方程组,以其任一非零解为系数,即可构成一个线性多步方法. 称量

$$c_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(x) + O(h^{q+2})$$

为方法的局部截断误差,$c_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(x)$ 为误差主项,c_{q+1} 为误差常数,精度阶为 q,所构造的公式称为线性 k 步 q 阶方法.

线性多步法的根条件(root condition for linear multi-step methods) 常微分方程线性多步法第一特征多项式之根应满足的条件. 如果多项式

$$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j$$

的所有根按模不大于 1,且模等于 1 的根是单重的,则称线性 k 步法满足根条件.

线性多步法的零稳定性(zero stability of linear multi-step methods) 常微分方程数值解法概念之一. 指刻画线性多步法计算过程中当步长 h 充分小时误差函数的性质. 如果根条件成立,则称线性多步法为零稳定的. 这种稳定性对数值方法收敛性质的研究有重要意义. 如果方法是零稳定的,则当初始误差与舍入误差充分小时,整体计算误差也可任意小. 特别地,在零稳定条件下,数值解连续依赖于初值(出发值).

线性多步法的相容性条件(consistency condition for linear multi-step methods) 常微分方程数值解法概念之一. 指判断线性多步法相容性的代数准则. 设 $\rho(\xi)$ 和 $\sigma(\xi)$ 分别为线性 k 步法的第一与第二特征多项式,则方法是相容的,当且仅当

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1).$$

上述条件称为相容性条件. 此时,线性 k 步法至少是一阶的.

线性多步法的收敛性条件(convergence condition for linear multi-step methods) 判断线性多步法收敛性的代数准则. 线性 k 步法是收敛的,当且仅当方法是零稳定的和相容的. 这些条件可以通过考察方法的第一与第二特征多项式 $\rho(\xi)$ 与 $\sigma(\xi)$ 的代数性质得到.

线性多步法的绝对稳定性(absolute stability of linear multi-step methods) 常微分方程数值解法概念之一. 指刻画线性多步法计算过程稳定的性态. 对以固定的正数 h 为步长的线性多步法,考察其对初始误差与舍入误差的敏感性,对模型微分方程 $y' = \lambda y$, λ 为常数,采用线性 k 步法求解,若以 $\tilde{y}_n$ 与 y_n 分别表示有与无初始误差及舍入误差时得到的数值解,则得到整体计算误差 $e_n = \tilde{y}_n - y_n$ 所满足的差分方程

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - h\lambda\beta_j) e_{n+j} = \phi.$$

它的特征多项式为

$$\pi(\xi; z) \equiv \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j - z \sum_{j=0}^{k} \beta_j \xi^j,$$

式中 $z = h\lambda$. 如果对于给定的 z,多项式 $\pi(\xi; z)$ 的所有根 ξ_j 均满足

$$|\xi_j| < 1 \quad (j = 1,2,\cdots,k),$$

则称线性 k 步法关于 z 是绝对稳定的. 若对实轴上某区间(或复平面内某区域)的任意 z,方法都是绝对稳定的,则称此区间(或区域)为绝对稳定区间(区域). $\pi(\xi; z)$ 称为方法的稳定多项式.

线性多步法的稳定多项式(stability polynomial for linear multi-step methods) 一种特殊的多项式. 指确定线性 k 步法绝对或相对稳定性质的多项式(参见"线性多步法的绝对稳定性"). 稳定多项式的根作为 $z = \lambda h$ 的函数,称为方法的稳定函数,常记为

$$\xi_1(z),\ \xi_2(z),\ \cdots,\ \xi_k(z),$$

其中 λ 为模型方程中的系数,h 为固定步长.

线性多步法的绝对稳定区域(regions of absolute stability for linear multi-step methods) 常微分方程数值解法概念之一. 是一个数值方法实用价值大小的重要表征(参见"线性多步法的绝对稳定性"). 方法的绝对稳定区域越大,它的适用性越广.

线性多步法的相对稳定性(relative stability of linear multi-step methods) 常微分方程数值解法概念之一. 它是表征线性多步法计算过程稳定的性态. 考虑在初值问题真解随自变量增长的情况下,初始误差与舍入误差对数值解精度的影响. 对 p 阶收敛的线性 k 步法,令 $z = \lambda h$, λ 为模型方程中的系数,h 为固定步长. 设稳定多项式

$$\pi(\xi; z) \equiv \rho(z) - z\sigma(\xi)$$

的根为 $\xi_m(z)(m = 1,2,\cdots,k)$, ξ_1 为主根,

$$\xi_1 = e^z + O(z^{p+1}),$$

其余的 $\xi_m (m = 2,3,\cdots,k)$ 为寄生根. 如果条件 $|\xi_m| < |\xi_1|$ 成立, $m = 2,3,\cdots,k$,则称线性 k 步法是相对稳定的.

复平面上的区域

$$\Omega = \{z \mid |\xi_m(z)| < |\xi_1(z)|, m = 2,3,\cdots,k\}$$

称为相对稳定区域. 一般说来,计算误差将随着计算步数而增长,但只要方法相对稳定且收敛,则数值解必然随着真解的增长而增长,且计算误差的增长速度远低于数值解的增长速度,并不影响数值解的精度,所得结果仍具有实用价值.

线性多步法的相对稳定区域(regions of relative stability for linear multi-step methods) 见"线性多步法的相对稳定性".

亚当斯显式法(Adams explicit methods) 亦称亚当斯外插法. 一种常用的显式线性多步法. 它的一般形式为

$$y_{n+k}=y_{n+k-1}+h\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j f_{n+j}, f_n=f(x_n,y_n).$$

最常用的是 $k=4$ 的情形

$$y_{n+4}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n).$$

k 步法的精度阶为 k,方法的绝对稳定区域较小(与亚当斯隐式法相比),且随着步数 k 的增大而减小. 此方法是收敛的,且计算过程简单,常用作预测-校正格式的预测式. 亚当斯显式法系数及绝对稳定区间表如下:

($k=1\sim4$)

k \ β_j	β_0	β_1	β_2	β_3	α_E *)
1	1				-2
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$			-1
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$		$-\frac{6}{11}$
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$	$-\frac{3}{10}$

注:绝对稳定区间记为(α_E,0)

亚当斯外插法(Adams extrapolation method) 即"亚当斯显式法".

亚当斯隐式法(Adams implicit methods) 亦称亚当斯内插法. 一类常用隐式线性多步法. 它的一般形式为

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}.$$

最常用的是 $k=3$ 的情形

$$y_{n+4}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(9f_{n+4}+19f_{n+3}-5f_{n+2}+f_{n+1}).$$

对 $k\geqslant1$,k 步法的精度阶为 $k+1$. 方法的绝对稳定区域较大,但随着步数 k 的增大而减小. 隐式欧拉法与梯形法均为其特例. 此方法是收敛的,但每步计算需要解一个非线性方程. 常用作预测-校正格式中的校正式. 亚当斯隐式法系数及绝对稳定区间表如下:

($k=0\sim4$)

k \ β_j	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	α_I *)
0	1					$-\infty$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$-\infty$
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$			-6
3	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$		-3
4	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{90}{49}$

注:绝对稳定区间记为(α_I,0)

亚当斯内插法(Adams interpolation method) 即"亚当斯隐式法".

预测-校正格式(predictor-corrector schemes) 常微分方程的一种数值解法. 指求解隐式方程的迭代格式. 它既利用隐式公式较好的稳定性能与精度,又利用显式公式计算的简易性. 预测-校正格式的步骤是:先用同阶的显式公式确定较好的迭代初值,然后按隐式公式迭代一两次达到精度要求. 例如,以下是亚当斯四阶预测-校正格式的步骤:

$$\text{P}\quad y_{n+4}^{(0)}=y_{n+3}^{(1)}+\frac{h}{24}(55f_{n+3}^{(1)}-59f_{n+2}^{(1)}+37f_{n+1}^{(1)}-9f_n^{(1)}),$$

$$\text{E}\quad f_{n+4}^{(0)}=f(x_{n+4},y_{n+4}^{(0)}),$$

$$\text{C}\quad y_{n+4}^{(1)}=y_{n+3}^{(1)}+\frac{h}{24}(9f_{n+4}^{(0)}+19f_{n+3}^{(1)}-5f_{n+2}^{(1)}+f_{n+1}^{(1)}),$$

$$\text{E}\quad f_{n+4}^{(1)}=f(x_{n+4},y_{n+4}^{(1)}).$$

另一类是带修正算式的预测-校正格式(参见"哈明预测-校正格式"). 这类格式又可减少计算右端函数 f 的次数,但中途改变步长较困难,格式的稳定性讨论也较繁琐.

哈明预测-校正格式(Hamming predictor-corrector schemes) 一种常用的预测-校正格式. 它的预测式采用米伦公式

$$y_{n+4} = y_n + \frac{4h}{3}(2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1}),$$

校正式采用哈明公式

$$y_{n+4}=\frac{9}{8}y_{n+3}-\frac{1}{8}y_{n+1}+\frac{3}{8}h(f_{n+4}+2f_{n+3}-f_{n+2}).$$

带修正算式的哈明预测-校正格式为:

$$\text{P}\quad y_{n+4}^{(0)}=\bar{y}_n^{(1)}+\frac{4h}{3}(2\bar{f}_{n+3}^{(1)}-\bar{f}_{n+2}^{(1)}+2\bar{f}_{n+1}^{(1)}),$$

$$\text{M}\quad \bar{y}_{n+4}^{(0)}=y_{n+4}^{(0)}+\frac{112}{121}(y_{n+3}^{(1)}-y_{n+3}^{(0)}),$$

$$\text{E}\quad \bar{f}_{n+4}^{(0)}=f(x_{n+4},\bar{y}_{n+4}^{(0)}),$$

$$\text{C}\quad y_{n+4}^{(1)}=\frac{9}{8}\bar{y}_{n+3}^{(1)}-\frac{1}{8}\bar{y}_{n+1}^{(1)}+\frac{3h}{8}(\bar{f}_{n+4}^{(0)}+2\bar{f}_{n+3}^{(1)}-\bar{f}_{n+2}^{(1)}),$$

$$\text{M}\quad \bar{y}_{n+4}^{(1)}=y_{n+4}^{(1)}-\frac{9}{121}(y_{n+4}^{(1)}-y_{n+4}^{(0)}),$$

$$\text{E}\quad \bar{f}_{n+4}^{(1)}=f(x_{n+4},\bar{y}_{n+4}^{(1)}).$$

上述格式有时也称为 PMECME 模式.

步长的自适应选取(adaptive selection of step size) 常微分方程数值求解过程中步长选取的一种技术.指通过对步长大小的改变,以提高解的精度或减少求解过程的计算量.以经典 4 阶龙格-库塔法为例,用 $y_{n,h}$ 和 $y_{n,2h}$ 分别表示以 h 与 $2h$ 为步长求出的 $x=x_n$ 处的数值解,则方法的整体截断误差有近似估计

$$y_{n,h}-y(x_n)\approx\frac{1}{15}(y_{n,2h}-y_{n,h}). \qquad (1)$$

设 ε 为容许误差,则最佳步长应满足

$$|y_{n,h}-y(x_n)|\leqslant\varepsilon,\ |y_{n,2h}-y(x_n)|>\varepsilon. \qquad (2)$$

利用(1)式,可对每步计算出 $y_{n,h}-y(x_n)$,并验证估计(2)成立与否.当

$$|y_{n,2h}-y(x_n)|<\varepsilon$$

时,应取 $2h$ 为新步长;当

$$|y_{n,h}-y(x_n)|>\varepsilon$$

时应取 $h/2$ 为新步长,然后重计算(1)并验证(2).单步法步长的改变是简易的,而多步法改变步长则比较困难.吉尔(Gear,C. W.)给出了利用向后差分法的变阶变步长技巧,最大限度地减少计算量.

外推法(extrapolation methods) 一种数值解法.它是利用相同的公式按不同步长算出的数值解的线性组合得到较高阶数值解的方法.记初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(0)=y_0$$

的真解为 $y(x)$.以 h 为步长用某种算法求出的数值解为 $y(x,h)$.设整体截断误差满足关系式

$$y(x,h)-y(x)=\sum_{r=1}^{\infty}a_r(x)h^{\alpha_r}, \qquad (1)$$

$\alpha_r=\beta r$,β 为正整数,则可利用多项式外推或有理外推公式,提高数值解的精度阶.此时,外推表(参见“理查森外推算法”)中第 0 列由序列

$$\{y(x,h_r)\,|\,r=0,1,2,\cdots\}$$

构成,其中步长序列 h_r 是严格递减的,

$$\{h_r\,|\,h_0=h,h_r>h_{r+1},r=0,1,2,\cdots\}.$$

一般利用低阶公式生成外推表的第 0 列.常用的公式有:

1. 适用于非刚性问题的欧拉法、变形中点法.

2. 适用于刚性问题的隐式欧拉法、梯形法、隐式中点法及半隐式中点法.这些方法都是 A 稳定的,但对梯形法要实行整体外推,以保证外推后的 A 稳定性质.

除欧拉法与隐式欧拉法的整体误差展开式(1)中 $\beta=1$ 外,对其余方法,相应的展开式(1)中 $\beta=2$.上述各个方法计算外推表的第 0 列的外推过程,都是收敛的.采用梯形法与各个中点法的情形,收敛速度较快(与 h^2 同阶).

设 y_n 是已知满足精度要求的近似值,现写出在区间$[x_n,x_{n+1}]$上,用变形中点法与半隐式中点法计算外推表第 0 列的步骤.

变形中点法:取特殊的步长序列

$$\{h_r\,|\,h_r=h/2^{r+1},r=0,1,\cdots,M\},$$

M 为最大允许外推次数.相应地有整数序列

$$\{N_r\,|\,N_r=h/h_r,r=0,1,\cdots,M\}$$

与网点序列

$$\{t_s\,|\,t_s=x_n+sh_r,s=0,1,\cdots,N_r\}.$$

此处 $t_0=x_n,t_{N_r}=x_{n+1}$.步骤如下:

$$\begin{cases}z_1=z_0+h_rf(t_0,z_0),\ z_0=y_n,\\ z_{s+1}=z_{s-1}+2h_rf(t_s,z_s)\ (s=1,2,\cdots,N_r-1),\\ y(x_{n+1},h_r)=[z_{N_r-1}+z_{N_r}+hf(t_{N_r},z_{N_r})]/2\\ \qquad (r=0,1,\cdots,M).\end{cases}$$

半隐式中点法:设刚性方程组

$$y'=f(y),\quad J=\frac{\partial f}{\partial y}$$

为雅可比矩阵.令 $\bar{f}(y)=f(y)-Ty$,$2r$ 为指定整数,$h_r=h/2r$.步骤如下:

$$\begin{cases}\eta_0=y_n,\\ \eta_1=(I-h_rJ)^{-1}[y_n+h_r\bar{f}(y_n)],\\ \eta_{k+1}=(I-h_rJ)^{-1}[(I+h_rJ)\eta_{k-1}+2h_r\bar{f}(\eta_k)]\\ \qquad (k=1,2,\cdots,2r),\\ s_{2r}=y(x_n+h,h_r)=\dfrac{\eta_{2r-1}+\eta_{2r+1}}{2}.\end{cases}$$

变形中点法(deformation mid-point method) 见“外推法”.

半隐式中点法(semi-implicit mid-point method) 见“外推法”.

混合法(hybrid methods) 包含非整数步点的多步方法.k 步混合法的计算公式为

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_jy_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_jf_{n+j}+h\beta_\nu f_{n+\nu},$$

式中 $\alpha_k=1,|\alpha_0|+|\beta_0|>0,\nu\notin\{0,1,\cdots,k\}$.可相仿于线性多步法来讨论混合法的相容性、精度阶与零稳定性.混合法的优点在于,在相同步数的情形下可达到较高的精度阶,误差常数较小,并保持零稳定性.例如,对 2 步混合法公式

$$y_{n+2}+\alpha_1y_{n+1}+\alpha_0y_n=h[\beta_2f_{n+2}+\beta_1f_{n+1}+\beta_0f_n+\beta_\nu f_{n+\nu}],$$

当取

$$\alpha_1=-16/(8+5\sqrt{3}),$$

$\alpha_0=(8-5\sqrt{3})/(8+5\sqrt{3})$,

$\nu=1+1/\sqrt{3}$,

$\beta_\nu=6\sqrt{3}/(8+5\sqrt{3})$,

$\beta_2=(\sqrt{3}+1)/(8+5\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$,

$\beta_1=8\sqrt{3}/3(8+5\sqrt{3})$,

$\beta_0=(\sqrt{3}-1)/(8+5\sqrt{3})(3+\sqrt{3})$

时,方法的精度阶是6,误差常数为

$$-\frac{8\sqrt{3}}{8+5\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{9\cdot 7!}\approx-0.183\times 10^{-4},$$

且为零稳定的.

刚性初值问题(stiff initial value problems) 一类具有特殊性质的常微分方程初值问题. 主要特点是:问题之解包含快变分量与慢变分量,且它们的变化速度相差非常大. 先考虑常系数线性系统

$$y'(x)=Ay(x),\quad y(0)=y_0,\tag{1}$$

式中

$$y(x)=[y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)]^T$$

为 m 维向量函数,A 为 m 阶常数矩阵. 设 A 的特征值为 λ_j $(j=1,2,\cdots,m)$. 当 $\mathrm{Re}\lambda_j<0$ 时,$\{-\mathrm{Re}\lambda_j\}$ 中大者对应快变分量,小者对应慢变分量. 如果矩阵 A 满足下列条件,则称问题(1)为刚性的.

1. 矩阵 A 的所有特征值的实部不是很大的正数值.

2. 矩阵 A 至少有一个特征值,其实部是模根大的负数.

3. 问题的解是变化缓慢的(相对于矩阵 A 的具有模最大的负实部的特征值而言).

对于非线性系统

$$y'(x)=f(x,y(x)),\quad y(0)=y_0,\tag{2}$$

设 $\tilde{y}(x)$ 为其真解. 在解 $\tilde{y}(x)$ 的邻域内,上述非线性方程可用线性摄动方程

$$y'=J(x)y+[f(x,\tilde{y}(x))-\tilde{y}(x)]$$

来近似,其中 $J(x)$ 是在点 $(x,\tilde{y}(x))$ 处计算的 $f(x,y)$ 的雅可比矩阵

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

的值. 如果 $J(x)$ 在求解区间上变化平稳,则可用某个固定的 $J(x_0)$ 代替,x_0 为求解区间内固定点. 当 $J(x_0)$ 的特征值具有负实部且局部刚性比远大于1时,则称系统(2)为刚性的.

在刚性问题的数值解法研究中,常考虑如下的刚性问题类:右端函数 f 满足单侧李普希茨条件,即对任意 $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^m$,

$$\langle f(x,\xi_1)-f(x,\xi_2),\xi_1-\xi_2\rangle\leqslant\nu\|\xi_1-\xi_2\|^2,$$

式中 ν 为常数,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示给定的内积. 当 $\nu=0$ 时,上述不等式称为压缩性条件. 常以符号 $\mathscr{F}_\nu$ 记上述问题类. 刚性问题又称坏条件问题或病态问题、具大差别时间常数问题或具大李普希茨常数问题. 这类问题在控制系统、电子网络、生物学、物理学及化学动力学中经常遇到,是一类有广泛应用价值的问题.

刚性初值问题数值解法(numerical methods of stiff initial value problems) 刚性问题的一类数值解法. 它是针对刚性方程的特点,为克服传统算法上的困难而建立的数值方法. 刚性性质为数学模型本身所固有,非数值方法所能消除,这个性质使得仅具有有限绝对稳定区域的数值方法遇到极大困难. 为简单起见,考虑常系数线性系统

$$y'(x)=Ay(x),\tag{1}$$

式中 m 阶矩阵 A 是可对角化的,

$$A=S\Lambda S^{-1},\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m).$$

令 $z=Sy$,则有

$$z'_k(x)=\lambda_k z_k(x)\ (k=1,2,\cdots,m).\tag{2}$$

对具有有限绝对稳定区域的方法,$|\lambda_k|$ 越大,选取的步长应越小. 当求刚性方程组(1)的数值解时,近似解中包含各 $\exp(\lambda_k x)$ 的近似,它们将由(2)求出. 对应于 $-\mathrm{Re}\lambda_k$ 大的方程,其近似暂态成分 $\exp(\lambda_k x)$ 将很快衰减到可以忽略的程度,即认为已达到对应方程的稳态解. 往后的求解可以看成是求对应于 $-\mathrm{Re}\lambda_k$ 取小值的(2)的稳态解. 此时(1)的数值解的量值将由稳态解的近似及对应于 $-\mathrm{Re}\lambda_k$ 为小值的方程(2)的近似来确定. 如果要积分到稳态解,则求解区间长度的量级应为

$$\frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(-\mathrm{Re}\lambda_i)}.$$

这是因为无论每个暂态分量 $\exp(\lambda_k x)$ 的近似对(1)的近似解是否起作用,对(1)进行数值求解的同时,也必须看成是对(2)中每个方程也进行求解. 此时选取的步长 h 应使所有的 $h\lambda_k(k=1,2,\cdots,m)$ 均在方法的绝对稳定区域内,于是步长的量级为

$$\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(-\mathrm{Re}\lambda_i)}.$$

总的求解步数的量级不小于刚性比

$$r=\frac{\max\limits_i(-\mathrm{Re}\lambda_i)}{\min\limits_i(-\mathrm{Re}\lambda_i)}.$$

当刚性比很大时,用具有有限绝对稳定区域的算法求解刚性方程的花费太大,有时甚至无法实现. 实际上,上述步长的选取是不合理的,即步长选取不必要地考虑了对解不起作用的成分. 正是为了克服这个不合理性,才开创了刚性方程数值解法的研究领域.

刚性振荡问题(stiff oscillatory problems) 一类坏条件常微分方程组问题. 考虑初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(0)=y_0.$$

若对应雅可比矩阵

$$J=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

的特征值

$$\lambda_j = a_j + b_j i(i = \sqrt{-1})\ (j = 1,2,\cdots,m),$$

具有如下性质：$a_j<0$，刚性比

$$\max_{i,j}\frac{|a_i|}{|a_j|}\gg 1,$$

且存在 j_0，使 $|a_{j_0}|\ll|b_{j_0}|$，则称此问题为刚性振荡问题. 若仅满足条件 $|a_{j_0}|\ll|b_{j_0}|$，则称为高(频)振荡问题. 这两类问题的数值求解比单纯刚性问题更为困难，即更难建立既绝对稳定又收敛的算法. 目前对这类问题数值解的研究还是初步的.

高频振荡问题(high-frequency oscillatory problems) 见“刚性振荡问题”.

A **稳定性**(*A*-stability) 数值方法的一种线性稳定性质. 对于求解初值问题的某一数值方法，如果其绝对稳定区域包含在左半复平面内(不包含虚轴) $\mathrm{Re}(z)<0$，z 为复数，则称之为 A 稳定的. 这个概念是达赫奎斯特(Dahlquist, G.)于 1963 年在研究刚性问题数值解时首先给出的. 目前已成为这类问题研究中最重要的概念之一. 对 A 稳定的方法而言，步长 h 可任意选取，而不影响计算过程的稳定性，这正是求解刚性方程时所期望的.

达赫奎斯特壁垒定理(Dahlquist barrier theorem) 关于 A 稳定方法的某些限制性结果. 其内容为：显式线性多步法与显式龙格-库塔法不可能是 A 稳定的；A 稳定的线性多步法的精度阶不大于 2；在所有 A 稳定的 2 阶方法中，以梯形法的局部截断误差为最小，误差常数为 $-1/12$. 这个定理对刚性问题数值解法的进一步探索有重大影响. 其一为减弱对绝对稳定区域的要求，只要它包含左半复平面的一个无穷子区域. 此时，所构造的方法的精度阶可大于 2；其二为在保持对绝对稳定区域要求的前提下，构造新形式的方法，以突破壁垒定理的限制.

L **稳定性**(*L*-stability) 表征求解刚性方程的数值方法稳定性的概念. 由埃尔(Ehle, B. L.)于 1969 年引入. 有些方法虽是 A 稳定的，但可能出现下面的现象，当

$$\mathrm{Re}(z)\to-\infty$$

时(z 为复数)，有

$$|y_{n+1}/y_n|\to 1.$$

这种现象使得在解析解中一些极快衰减到零的分量，在数值解中表现为缓慢衰减，可能变为振荡的分量. 针对上述现象，给出如下定义：若数值方法是 A 稳定的；并以定步长 $h>0$ 应用于模型方程 $y'=\lambda y$，得到的序列 $\{y_n\}$，具有递推关系式

$$y_{n+1}=Q(z)y_n,$$

式中 $z=\lambda h$，当

$$\mathrm{Re}(z)\to-\infty$$

时，有 $|Q(z)|\to 0$，则称该方法是 L 稳定的.

A **可接受性**(*A*-acceptability) 指数函数有理逼近的一种性质. 它在刚性问题单步方法的稳定性研究中有重要应用. 设 z 为复数，$R(z)$ 为指数函数 $\exp(z)$ 的有理逼近. 若对所有满足 $\mathrm{Re}(z)\leqslant 0$ 的 z，有 $|R(z)|\leqslant 1$，则称 $R(z)$ 为 A 可接受的. 许多隐式龙格-库塔法，其稳定函数常取 $\exp(z)$ 的帕德逼近形式

$$R(z)=\frac{P_k(z)}{Q_m(z)},$$

式中 $P_k(z)$ 与 $Q_m(z)$ 分别为 k 与 m 次多项式. 已经证明，上述帕德逼近 $R(z)$ 是 A 可接受的，当且仅当 $m-2\leqslant k\leqslant m$.

A(*α*)**稳定性**(*A*(*α*)-stability) 放宽 A 稳定性要求的一种稳定性概念. 一个数值方法称为是 $A(\alpha)$ 稳定的，$\alpha\in(0,\pi/2)$，如果方法的绝对稳定区域包含复平面上的集合 $\{z\,|\,z=\lambda h$ 为复数，$|\arg(-z)<\alpha, z\neq 0, h>0\}$. 如果对充分小的 $\alpha\in(0,\pi/2)$，方法是 $A(\alpha)$ 稳定的，则称该方法是 $A(0)$ 稳定的；如果对所有 $\alpha\in(0,\pi/2)$，方法是 $A(\alpha)$ 稳定的，则称之为 $A(\pi/2)$ 稳定的. $A(\pi/2)$ 稳定性就是 A 稳定的. 这种稳定性概念是由威德隆(Widlund, O. B.)于 1967 年引进的.

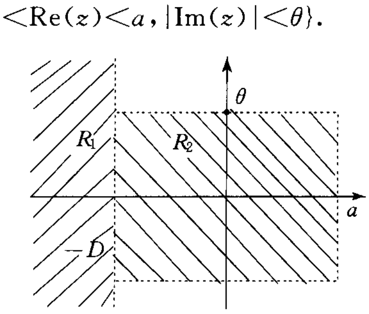
A_0 **稳定性**(A_0-stability) 针对只具有实特征值刚性问题的一种稳定性概念. 如果数值方法的绝对稳定区域包含整个负实轴，则称之为 A_0 稳定的. 显然，A 稳定或 $A(\alpha)$ 稳定的格式必定是 A_0 稳定的，即 A_0 稳定的格式类包含 A 稳定与 $A(\alpha)$ 稳定的格式类. 通过研究 A_0 稳定的格式的性质，能够确定适合于求解刚性方程的数值方法必须具备的一些条件. A_0 稳定性是由克瑞尔(Cryer, C. W.)于 1973 年引进的.

刚性稳定性(stiff stability) 一种考虑了方法精度的稳定性概念. 以 $\mathbf{C}$ 记复数集合，对于正数 D，a 和 θ，定义集合

$$R_1=\{z\in\mathbf{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)\leqslant -D\},$$

$$R_2=\{z\in\mathbf{C}\,|\,-D<\mathrm{Re}(z)<a, |\mathrm{Im}(z)|<\theta\}.$$

如果数值方法是收敛的，且集合 R_1 包含在该方法的绝对稳定区域内，而方法在区域 R_2 上具有高精度与绝对或相对稳定性，则称之为刚性稳定的.



刚性稳定性是由吉尔(Gear,C. W.)于1969年引进的.

无限稳定性(infinite stability)　表征求解刚性方程的数值方法稳定性的一个概念.同L稳定性的概念一样,这个概念也是为充分反映对求解刚性方程的数值方法的要求而引进的.如果存在实数$w<0$,使得数值方法以定步长$h>0$应用于$y'=\lambda y$,所得的序列$\{y_n\}$满足关系式

$$\sup_{\mathrm{Re}(h\lambda)<w}\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|=c<1,$$

则称此方法为无限稳定的.当应用无限稳定或L稳定的格式于刚性方程的数值求解时,解析解中极快衰减到零的分量保持其原有性质.

AN **稳定性**(AN-stability)　A稳定性概念对于变系数线性非自治方程情形的推广.考虑模型方程

$$y'=q(x)y,\quad \mathrm{Re}\,q(x)<0.$$

将其应用于s级龙格-库塔法,则有

$$y_{n+1}=(1+b^T\xi(I-A\xi)^{-1}e)y_n,$$

式中

$$\xi=\mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s),\quad \xi_i=hq(x_n+hc_i),$$

当$c_i=c_j$时,有$\xi_i=\xi_j$.如果对上述所有ξ,有理函数

$$K(\xi)=1+b^T\xi(I-A\xi)^{-1}e,$$

其中e为分量均为1的向量,满足$|K(\xi)|\leqslant 1$,则称龙格-库塔法是AN稳定的.由此知,若方法AN稳定,则必A稳定.

非线性稳定性(nonlinear stability)　当模型方程取为非线性刚性方程时所引进的一类稳定性概念.此时模型方程取为非自治系统$y'=f(x,y)$,且满足压缩性条件

$$\langle f(x,y)-f(x,z),y-z\rangle\leqslant 0,$$

这里f,y及z均为同维数的函数向量,$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示内积.这类稳定性的基本要求仍然是,数值方法对计算误差是不敏感的,在计算过程中可把它控制在允许范围内.目前文献中出现的B稳定性、BN稳定性及代数稳定性等均为非线性稳定性.而A稳定性、刚性稳定性等均为所谓线性稳定性,因为讨论时考虑的模型微分方程为线性的.

B **稳定性**(B-stability)　非线性稳定性的特例.设考虑满足压缩性条件的自治系统$y'=f(y)$.如果从不同的初值出发,由隐式龙格-库塔法求出的数值解序列$\{y_n\}$及$\{z_n\}$,满足关系式

$$\|y_n-z_n\|\leqslant\|y_{n-1}-z_{n-1}\|,$$

其中$\|\cdot\|$表示向量范数,则称方法为B稳定的.这个概念是巴特赫尔(Butcher,J. C.)于1975年引进的,并给出了一系列判别条件.显然,由B稳定性可推出A稳定性.

BN **稳定性**(BN-stability)　非线性稳定性的特例.B稳定性概念的推广.设所考虑的非自治系统满足压缩性条件.如果从不同的初值出发,由s级隐式龙格-库塔法算出的数值解序列$\{y_n\}$和$\{z_n\}$,满足关系式

$$\|y_n-z_n\|\leqslant\|y_{n-1}-z_{n-1}\|,$$

其中$\|\cdot\|$表示向量范数,则称方法为BN稳定的.这个概念是由巴特赫尔(Butcher,J. C.)等人于1979年引进的,并给出了代数判别准则:设二次型

$$Q(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)=\sum_{i,j=1}^{s}m_{ij}\xi_i\xi_j,$$

其中$m_{ij}=b_ia_{ij}+b_ja_{ji}-b_ib_j$,而$b_i$及$a_{ij}$为龙格-库塔法计算公式中的系数(参见"龙格-库塔法"),则当

$$b_i\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,s),$$

且二次型Q非负定时,方法是BN稳定与B稳定的.

代数稳定性(algebraic stability)　非线性稳定性的特例.如果s级龙格-库塔法满足条件:权系数

$$b_i\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

及二次型

$$Q(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)$$

是非负定的,则称之为代数稳定的.其中,二次型$Q(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)$的表示式见"BN稳定性".这个概念由巴特赫尔(Butcher,J. C.)等人于1979年引入的.显然,代数稳定的方法必定是BN稳定的.

各种稳定性质间的关系(relations between various stability properties)　常微分方程横标互异的s级龙格-库塔法的各种稳定性质间的关系:从方法AN稳定性推出A稳定性,从BN稳定性推出B稳定性.方法为代数稳定的,当且仅当为AN稳定的;方法为AN稳定的,当且仅当为BN稳定的.上述结果有重要意义,因为它将非线性问题的稳定性质与线性问题的相应性质建立了联系,并用一定的代数准则来刻画.这些条件之间的联结与所考虑的模型方程的非自治性质有关.但在A稳定性与B稳定性之间尚未发现存在类似的充分必要条件.

压缩性(contractivity)　反映数值方法对计算误差敏感程度的性质.它保证计算误差不因步数的增加而增长.若对给定的刚性问题类,存在与问题类刚性无关的实数$h_0>0$和$0<C\leqslant 1$,使得对任意$h\in(0,h_0]$,方法的精确数值解y_{n+1}与扰动解(即实际求出的带有计算误差的数值解)z_{n+1},满足关系式

$$\|y_{n+1}-z_{n+1}\|\leqslant C\|y_n-z_n\|,$$

则称方法是压缩的.若$C<1$,方法称为严格压缩的.若上述关系式对任意$h>0$成立,方法称为是无条件压缩的.显然,压缩性与所取范数有关.这里,所考虑的刚性问题类通常满足压缩性或耗散性条件:对任意y及$z\in\mathbb{R}^m$,有

$$\langle f(x,y)-f(x,z),y-z\rangle\leqslant 0.$$

C 稳定性(C-stability)　数值方法应具备的一种重要性质. 对于满足压缩性条件的刚性问题类(参见"压缩性"), 存在实数 $h_0>0$ 和 C_0, 使方法的精确数值解 y_{n+1} 与扰动解 z_{n+1} 之差, 对任意 $h\in(0,h_0]$满足关系式

$$\| y_{n+1}-z_{n+1}\| \leqslant (1+C_0h)\| y_n-z_n\|,$$

则称方法为 C 稳定的. 这里, h_0 及 C_0 与问题类的刚性无关.

B 相容性(B-consistency)　刚性问题数值方法局部误差应满足的一种性质. 对单步法, 其局部误差为

$$\hat{R}_{n+1}=y(x_{n+1})-\hat{y}_{n+1},$$

式中

$$\hat{y}_{n+1}=y(x_n)+h\varphi(x_n,y(x_n),\hat{y}_{n+1},h),$$

φ 为增量函数. 对刚性问题类 $\mathscr{F}_\nu$, 若局部误差对任意 $h\in(0,h_0]$满足估计式

$$\|\hat{R}_{n+1}\|\leqslant Dh^{q+1},$$

这里实数 D 和 h_0 与问题类 $\mathscr{F}_\nu$ 的刚性无关, 则称单步法是 q 阶 B 相容的.

B 收敛性(B-convergence)　刚性问题数值方法整体误差应满足的一种性质. 对刚性问题类 $\mathscr{F}_\nu$, 若整体误差对任意 $h\in(0,h_0]$, 满足关系式

$$\| y(x_{n+1})-y_{n+1}\|\leqslant Ch^r,$$

这里实数 C 和 h_0 与问题类 $\mathscr{F}_\nu$ 的刚性无关. 则单步法称为是 r 阶 B 收敛的.

BSI 稳定性(BSI-stability)　数值方法的一种内部稳定性质. 该性质在龙格-库塔法 B 收敛理论中有重要作用. 用龙格-库塔法计算刚性问题在 $x=x_{n+1}$处数值解 y_{n+1}, 则有

$$y_i=y_n+h\sum_{j=1}^{s}a_{ij}f(x_n+c_jh,y_j)\ (1\leqslant i\leqslant s),$$

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{s}b_if(x_n+c_ih,y_i).$$

但由于计算误差的影响, 实际算出的数值解 z_{n+1}满足扰动方程

$$z_i=y_n+h\sum_{j=1}^{s}a_{ij}f(x_n+c_jh,z_j)+\delta_i\ \ (1\leqslant i\leqslant s),$$

$$z_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{s}b_if(x_n+c_ih,z_i)+\delta_{s+1},$$

式中 $\delta_i(1\leqslant i\leqslant s+1)$为扰动向量. 若不等式

$$\sum_{j=1}^{s}\langle y_j-z_j,y_j-z_j\rangle\leqslant C\sum_{j=1}^{s}\langle\delta_j,\delta_j\rangle\quad (h\in(0,h_0]),$$

对刚性问题类 $\mathscr{F}_\nu$ 一致成立, 这里 h_0 及 C 仅依赖于单侧李普希茨常数 ν, 则称龙格-库塔法在 $\mathscr{F}_\nu$ 上是 BSI 稳定的. 若 h_0, C 与 ν 无关, 则简称方法是 BSI 稳定的.

BS 稳定性(BS-stability)　数值方法的一种内部稳定性质. 主要用来估计内部扰动的影响. 若由龙格-库塔法求出的数值解 y_{n+1}与扰动方程之解 z_{n+1}之差, 对任意 $h\in(0,h_0]$和刚性问题类 $\mathscr{F}_\nu$ 一致地满足不等式

$$\| y_{n+1}-z_{n+1}\|\leqslant C\max_{1\leqslant i\leqslant s+1}\|\delta_i\|,$$

则称方法是 BS 稳定的, 式中 δ_i 为局部扰动问题(参见"BSI 稳定性"). BS 稳定性不是通常意义下的逐步稳定性, 它不能处理计算过程中误差的传播问题.

B 收敛性的充分条件(sufficient conditions for B-convergence)　判断求解刚性问题的龙格-库塔法 B 收敛性的一些准则:

1. 如果方法在问题类 $\mathscr{F}_\nu$ 上是代数稳定的, BSI 稳定及 BS 稳定的, 则它在 $\mathscr{F}_\nu$ 上是 B 收敛的.

2. 设具有正权系数的龙格-库塔法是代数稳定的, 又存在正对角矩阵

$$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_s),$$

以使 $\psi_D(A)>0$, 则方法在 $\mathscr{F}_\nu$ 上是 B 收敛的, 式中 A 是 s 级方法的系数阵,

$$\psi_D(A)=\min_{\xi\neq 0}\frac{\langle A\xi,\xi\rangle_D}{\langle\xi,\xi\rangle_D},$$

$$\langle\xi,\eta\rangle_D=\sum_{j=1}^{s}d_j\xi_j\eta_j,$$

而 ξ 及 $\eta\in\mathbb{R}^s$.

利用上述条件, 可以证明, 高斯方法、拉道 ⅠA 方法、拉道 ⅡA 方法及二级勒贝陶 ⅢC 方法都是 B 收敛的.

隐式龙格-库塔法(implicit Runge-Kutta methods)　解刚性初值问题的一类重要方法(参见"龙格-库塔法"). 这类方法稳定性能好且精度阶高, 但求解计算量很大.

隐式龙格-库塔法的A 稳定性(A-stability of implicit Runge-Kutta methods)　描述 s 级隐式龙格-库塔法的稳定性态. 对于利用高斯型、拉道及勒贝陶型求积公式构造的计算公式, 它们的稳定函数 $R(z)$是指数函数 $\exp(z)$的对角帕德逼近或第一、二下对角帕德逼近, 即其分母为 s 次多项式, 分子为 $s-d$ 次多项式, $d=0,1,2$. 如果 $\mathrm{Re}(z)<0$, 则有 $|R(z)|<1$, 即隐式龙格-库塔法是 A 稳定的. 进而, 当 $d=1$ 或 2 时, $R(z)$的分母次数高于分子的次数. 如果 $\mathrm{Re}(z)<0$, 且当 $\mathrm{Re}(z)\to-\infty$时, 有 $|R(z)|\to 0$, 即方法是 L 稳定的(参见"龙格-库塔法的稳定函数").

隐式龙格-库塔法的实现(implementation of implicit Runge-Kutta methods)　隐式龙格-库塔法的实际计算问题. 隐式龙格-库塔法是高阶的 A 稳定方法, 但若将其应用于非线性微分方程组的求解, 一

般存在很大困难. 当使用 s 级方法求解含 m 个方程的一阶方程组时，每积分一步，需要求解 sm 阶非线性方程组. 如果用牛顿法或它的变形来求解上述方程组，则每迭代一步所需乘法次数的数量级为 s^3m^3，因而方法的实用性受到限制. 为克服上述困难，迄今提出的主要办法有：等效代换迭代法，即构造一个新的微分方程组代替原方程组，进而得到新迭代格式；修改的牛顿法；基于简化原龙格-库塔法算法结构而导出的半隐式方法，例如对角隐式龙格-库塔法以及罗森布罗克法等.

罗森布罗克法(Rosenbrok methods) 一类半隐式龙格-库塔方法. 设自治系统为

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0,$$

其中 y 与 f 均为 m 维向量. 它的计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{s} b_iK_i,$$
$$K_1=f(y_n)+d_1hJ(y_n)K_1,$$
$$K_r=f\left(y_n+h\sum_{j=1}^{r-1} a_{rj}K_j\right)+d_rhJ\left(y_n+h\sum_{j=1}^{r-1} e_{rj}K_j\right)K_r$$
$$(r=2,\cdots,s),$$

式中 $J=\frac{\partial f}{\partial y}$ 为雅可比导数矩阵. 这类公式既保持隐式龙格-库塔方法的 A 稳定性质，又避免对非线性方程组的迭代求解. 它是隐式龙格-库塔方法具体实现的一个有效方法. 实际计算时，K_i 可从相应的公式解出：

$$K_1=[I-d_1hJ(y_n)]^{-1}f(y_n),$$
$$K_r=\left[I-d_rhJ\left(y_n+h\sum_{j=1}^{r-1} e_{rj}K_j\right)\right]^{-1}\cdot f\left(y_n+h\sum_{j=1}^{r-1} a_{rj}K_j\right)\ (r=2,3,\cdots,s),$$

式中，$d_j(j=1,2,\cdots,s)$，e_{rj}及 $a_{rj}(r=2,3,\cdots,s;j=1,2,\cdots,r-1)$均为给定系数. 例如，二级三阶公式的系数为

$$d_1=1+\frac{\sqrt{6}}{6},$$
$$d_2=1-\frac{\sqrt{6}}{6},$$
$$a_{21}=e_{21}=\frac{\{-6-\sqrt{6}+\sqrt{58+20\sqrt{6}}\}}{(6+2\sqrt{6})},$$
$$b_1=-0.41315432,$$
$$b_2=1.41315432.$$

二级二阶公式的系数为

$$d_1=d_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$a_{21}=\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$
$$e_{21}=0, \quad b_1=0, \quad b_2=1.$$

对角隐式龙格-库塔法(diagonally implicit Runge-Kutta methods) 一类特殊的半隐式龙格-库塔法. 方法的系数阵 A 是下三角阵，对角元 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,s)$非零且互等. 常用的是一级二阶公式(隐式中点公式)

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array},$$

二级三阶公式

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}} & \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

和三级四阶公式. 它们都是 A 稳定的. 这类方法适用求解高频振荡问题.

单隐式龙格-库塔法(singly implicit Runge-Kutta methods) 一类具有特殊性质的龙格-库塔法. 在对 s 级隐式方法使用牛顿迭代中，雅可比矩阵的求值与相应线性方程组的处理花费了主要计算时间. 当矩阵 A 只有实特征值，特别是恰有 s 重实特征值的情形，就可大大减少机时. 由系数表

$$\begin{array}{c|c} C & V_sA_sV_s^{-1} \\ \hline & b^T \end{array}$$

确定的方法称为 s 级单隐式龙格-库塔法. 式中横标 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 互异，$b^T=(1,1/2,\cdots,1/s)V_s^{-1}$，

$$V_s=\begin{bmatrix} 1 & C_1 & \cdots & C_1^{s-1} \\ 1 & C_2 & \cdots & C_2^{s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_s & \cdots & C_s^{s-1} \end{bmatrix},$$

$$A_s=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1s} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2s} \\ 0 & 1/2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(s-1) & \alpha_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{ks}=(-1)^{s-k}\binom{s}{k-1}\frac{(s-1)!}{(k-1)!}\gamma^{s-k+1}$$
$$(k=1,2,\cdots,s),$$

γ 为非零实数. 方法的系数阵恰有 s 重实特征值. 单隐式方法的精度阶一般为 s，最大可达到 $s+1$. 方法的 A 及 L 稳定性质依赖于 γ 的取值.

向后差分法(backward difference methods) 亦称吉尔方法. 一种多步法. 指由公式

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\nabla^{j}y_{n+k}=hf_{n+k},$$

或者

$$y_{n+k}=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{j}y_{n+j}+h\beta_{k}f_{n+k}$$

给出的线性 k 步法,其中∇表示向后差分算子. 本方法的精度阶是 k,并在无穷远处具有好的稳定性质,即刚性稳定性. 在计算过程中,可随时改变步长和方法的阶,每前进一个时间步解隐式方程组所需要的计算量较小. 人们对求解刚性方程的许多算法进行比较,结果表示,这类方法是效果最好的方法之一. 多年来,虽已建立许多有效算法,但向后差分法仍然是最有效的通用算法. 几个常用的吉尔方法公式:

$$y_{n+1}=y_{n}+hf_{n+1},$$

$$y_{n+2}=-\frac{1}{3}y_{n}+\frac{4}{3}y_{n+1}+\frac{2}{3}hf_{n+2},$$

$$y_{n+3}=\frac{2}{11}y_{n}-\frac{9}{11}y_{n+1}+\frac{18}{11}y_{n+2}+\frac{6}{11}hf_{n+3}.$$

吉尔方法(Gear methods) 见“向后差分法”.

二阶导数法(second derivative methods) 一种亚当斯型多步法. 它是为克服达赫尔斯特壁垒定理对线性多步方法阶的限制而设计的,适于求解刚性问题. 对自治系统,k 步二阶导数法的计算公式为

$$y_{n+k}=y_{n+k-1}+h\sum_{j=0}^{k}\beta_{j}y'_{n+j}+h^{2}\gamma_{k}y''_{n+k}.$$

通过对系数 $\beta_j(j=0,1,\cdots,k)$及 γ_k 的选取,可使方法具有比向后差分法更好的刚性稳定性质,且直至 4 阶方法是 A 稳定的,直至 9 阶方法是 $A(\alpha)$稳定的. k 步方法的精度阶为 $k+2$. 对于刚性振荡问题,它的效果比向后差分法好. 上述计算公式作为隐式方程,常用牛顿迭代法及其变形求解. 两个最简单的二阶导数法公式是:

$$y_{n+1}=y_{n}+h\left(\frac{2}{3}y'_{n+1}+\frac{1}{3}y'_{n}\right)-\frac{1}{6}h^{2}y''_{n+1},$$

$$y_{n+2}=y_{n+1}+h\left(\frac{29}{48}y'_{n+2}+\frac{5}{12}y'_{n+1}-\frac{1}{48}y'_{n}\right)-\frac{1}{8}h^{2}y''_{n+2}.$$

指数拟合法(exponential fitting methods) 解刚性初值问题的一种数值方法. 如果当一个数值方法以精确的初始条件应用于模型方程

$$y'=\lambda y,\quad y(0)=y_0$$

时,在 $\lambda=\lambda_0$ 处将得到一个精确的理论解,则称该方法为在(复)值 λ_0 处是指数拟合的. 按上述意义得到的数值方法称为指数拟合法. 例如考虑含参数 μ 的线性单步法 F:

$$y_{n+1}=y_{n}+h[(1-\mu)y'_{n+1}+\mu y'_{n}].\qquad(1)$$

将其应用于模型方程,则有

$$y_{n+1}=r(z)y_n,$$

其中

$$r(z)=\frac{1+\mu z}{1-(1-\mu)z},\quad z=\lambda h.$$

模型方程的真解 $y(t_{n+1})=e^{z}y(t_n)$,为求参数 μ,应使 $r(z)$逼近的误差

$$\varepsilon(z)=r(z)-e^{z}$$

于 $\lambda=\lambda_0$ 即 $z=z_0=\lambda_0 h$ 处为 0;$\varepsilon(z_0)=0$,这使得方法 F 在 $\lambda=\lambda_0$ 处得到的数值解是精确的. 从 $\varepsilon(z_0)=0$,对 $z_0\neq0$,可确定参数

$$\mu=-z_0^{-1}-e^{z_0}(1-e^{z_0})^{-1}\equiv\mu_1(z_0),$$

即 F 当 $\mu=\mu_1(z_0)$时,在 $z_0\neq0$ 处是指数拟合的.

具有可变系数线性多步法(linear multistep methods with variable coefficients) 线性多步法的一种. 指为克服达赫尔斯特壁垒定理的限制,设计的一种适用于刚性方程的带有变系数的多步法. 对微分方程组初值问题,形如

$$\sum_{j=0}^{k}\left[a_j^{(0)}I+\sum_{t=1}^{s}a_j^{(t)}h^{t}Q_n^{t}\right]y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\left[b_j^{(0)}I+\sum_{t=1}^{s-1}b_j^{(t)}h^{t}Q_n^{t}\right]f_{n+j}\qquad(1)$$

的计算公式,称为具有可变矩阵系数的 k 步方法,式中 Q_n 是依赖于 n 的实矩阵. 实际应用时,若函数 f 的雅可比导数阵$\frac{\partial f}{\partial y}$在$[x_n,x_{n+1}]$上存在,可以选取 Q_n 为$-\frac{\partial f}{\partial y}$在此区间内某种近似. 如果 $b_k^{(t)}=0$ $(t=0,1,\cdots,s)$,方法(1)称为线性隐式的. 对这类方法,每步只需解一个以

$$I+\sum_{t=1}^{s}a_k^{(t)}h^{t}Q_n^{t}$$

为系数阵的线性方程组. 对方法(1),可用与常系数线性多步法情形相仿的办法,讨论它的精度阶与稳定性问题等. 已经构造出一批线性隐式的高阶方法,且具有 A 稳定性. 例如,$s=2,k=4$ 和精度阶 $p=4$ 的方法,其中的常系数为

$a_4^{(0)}=1,a_3^{(0)}=-1,a_2^{(0)}=a_1^{(0)}=a_0^{(0)}=0,$

$b_4^{(0)}=0,b_3^{(0)}=\frac{55}{24},b_2^{(0)}=-\frac{59}{24},b_1^{(0)}=\frac{37}{24},b_0^{(0)}=-\frac{9}{24},$

$a_4^{(1)}=\frac{1}{2},a_3^{(1)}=-\frac{43}{24},a_2^{(1)}=\frac{59}{24},a_1^{(1)}=-\frac{37}{24},a_0^{(1)}=\frac{9}{24},$

$b_4^{(1)}=0,b_3^{(1)}=\frac{1}{6},b_2^{(1)}=-\frac{1}{4},b_1^{(1)}=\frac{1}{12},b_0^{(1)}=0,$

$a_4^{(2)}=\frac{1}{12},a_3^{(2)}=-\frac{1}{4},a_2^{(2)}=\frac{1}{4},a_1^{(2)}=-\frac{1}{12},a_0^{(2)}=0.$

单支多步法(one-leg multistep methods) 用于刚性问题数值求解的一类多步法. 由达赫奎斯特(Dahlquist,G.)于 1975 年建立,其计算公式为

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = hf\Big(\sum_{j=0}^{k}\beta_j x_{n+j}, \sum_{j=0}^{k}\beta_j y_{n+j}\Big),$$

式中

$$\sum_{j=0}^{k}\beta_j = 1.$$

这类方法的优越之处在于，每个积分步只需 k 个函数值需要存贮（内存量小），对变系数线性刚性方程来说，变步长的单支法的稳定性能优于相应的线性多步法. 它还可以较方便地应用于微分代数方程 $F(x,y,y')=0$ 的求解.

组合方法（composite methods） 一类数值解法. 指由快慢变化不同的子组所构成的微分方程组的数值解法. 对维数较高的微分方程组，根据其内每个子组快变慢变的不同情形，分别采用不同的数值方法. 设已给初值问题

$$y' = H(x,y), y(0) = y_0, \tag{1}$$

式中 y 及 H 为 $m+n$ 维向量，可分解为两个子方程组问题

$$u' = f(x,u,z),\ u(0) = u_0, \tag{2}$$

$$z' = g(x,u,z),\ z(0) = z_0, \tag{3}$$

式中 u 与 f 为 m 维向量，z 与 g 为 n 维向量. 方程组(2)为刚性的(3)为非刚性的（有时，也可分成更多个数的子方程组）. 由于整个方程组(1)是刚性的，需要采用适于刚性问题的数值方法求解. 但在许多方程组中，刚性方程组(2)仅占方程组(1)的很少一部分($m \ll n$)，且右端函数相当简单. 整个右端函数的计算量主要集中在非刚性方程组(3)上. 函数 f 的雅可比导数矩阵特征值之模要比函数 g 的大得多. 整个方程组(1)的积分步长 h 的上界又由方程组(2)决定，需要很小的 h，计算量很大. 故对整个方程组采用同一个数值方法求解是不合理的. 一个适宜的办法是，分别对方程组(2)与(3)采用不同的数值方法，即对方程组(2)采用刚性问题的算法，而对方程组(3)采用通常（显式）的方法，其中右端函数计算中用到的另一个子方程组的解值通过插值得到. 这就是所谓组合方法.

块方法（block methods） 每步同时计算出一组新网点上的值的数值方法. 以 r 块隐式单步法为例，在得到 $y_n, n=mr$ 后（m 为正整数），往后计算一步可同时得到 r 个值 $y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{n+r}$，它们由公式

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}y_{n+j} = e_i y_n + hd_i f_n + h\sum_{j=1}^{r} b_{ij}f_{n+j}$$

$$(i=1,2,\cdots,r)$$

来计算. 此时往往需要求解非线性方程组. 若记 $A=(a_{ij})$，则以 $A=I$ 的情形最常用. A 稳定的块方法的精度阶可超过 2，例如由公式

$$\begin{cases} y_{n+1} - \dfrac{1}{2}y_{n+2} = \dfrac{1}{2}y_n + \dfrac{h}{4}f_n - \dfrac{h}{4}f_{n+2}, \\ y_{n+2} = y_n + \dfrac{h}{3}f_n + \dfrac{4}{3}hf_{n+1} + \dfrac{h}{3}f_{n+2} \end{cases}$$

所给出的 2 块方法是四阶 A 稳定的.

奇异初值问题数值解法（numerical methods of singular initial value problems） 具有奇异性的初值问题的数值解法. 它主要包括两类初值问题的数值处理：一是真解本身在求解区间内有奇点（间断点或极点）；二是右端函数 f 及其某些导数有有限间断点. 这两类问题都有广泛的实际背景. 通常间断点的位置是未知的. 这类问题等同于具有无界李普希茨常数的情形，不满足初值问题解的存在惟一性定理的条件，基于多项式插值的通常数值方法失效. 目前人们对这类问题提出的一些数值处理技巧有：开关函数技巧、扰动多项式技巧、有理函数插值特别是逆多项式插值、外推过程、局部误差估计技巧等.

二阶微分方程数值解法（numerical methods of second order differential equations） 二阶微分方程初值问题的数值解法. 对通常的单个二阶方程问题

$$y''=f(x,y,y'),\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y'_0,$$

将其化为一阶方程组

$$y'=z,\quad z'=f(x,y,z)$$

问题，应用一阶方程组的各类方法（单步法或多步法）求解. 这种方法是合理的，既不损失精度，也没有花费不必要的计算量. 但对特殊形式的二阶方程

$$y''=f(x,y),$$

如果不需要一阶导数的计算，则人为地把它化为一阶方程组是不必要的. 这类方程，在应用中特别是天体力学中常常出现. 针对上述方程的特点，建立相应的数值方法及其理论分析是二阶方程数值解的主要内容.

二阶微分方程线性多步法（linear multistep methods for second order differential equations） 二阶微分方程的数值解法之一. 二阶微分方程初值问题

$$y'' = f(x,y), y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \tag{1}$$

有形如

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j} \tag{2}$$

的求解公式，此处 $|\alpha_0|+|\beta_0|>0, k\geqslant 2$. 称由求解公式(2)求解的方法为线性 k 步法. 为使这类方法具有实用价值，必须具备一些重要性质：记

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j,$$

$$\sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j,$$

当

$$\rho(1)=\rho'(1)=0,\quad \rho''(1)=2\sigma(1)$$

时，该方法称为相容的，精度阶至少是1；如果多项式 $\rho(\lambda)$ 的所有根按模不大于1，且每个按模为1的根的重数不大于2，则称该方法是零稳定的；该方法收敛，当且仅当它是相容的与零稳定的.由于问题(1)的解常具有高振荡性质，用通常的线性多步法求解时，常出现所谓轨道不稳定性.为了克服这种不稳定性，人们提出了对称线性 k 步法，它满足下列条件：k 为偶数，

$$\alpha_j=\alpha_{k-j},\beta_j=\beta_{k-j}\ (j=0,1,\cdots,k/2).$$

同时还要求，多项式 $\rho(\lambda)$ 与 $\sigma(\lambda)$ 互质，方法是相容的与零稳定的.

P 稳定性(P-stability)　常微分方程数值解法概念之一.是为克服二阶方程问题求解中的轨道不稳定性而提出的概念.设将线性 k 步法应用于模型方程

$$y''+\lambda^2y=0,$$

则得到差分方程

$$\sum_{r=0}^{k}Q_r(z^2)y_{n+r}=0,z=i\lambda h,i=\sqrt{-1},\quad(1)$$

式中 $Q_r(z^2)$ 是 z^2 的多项式.由公式(1)确定的求解方法称为具有周期性区间 $(0,q_0)$，如果对所有

$$q=(\lambda h)^2\in(0,q_0),$$

公式(1)的特征方程之根 μ_j 满足：对实数 $\theta(q)$，$\mu_1=e^{i\theta(q)}$，$\mu_2=e^{-i\theta(q)}$ $(|\mu_j|\leqslant1,j=3,4,\cdots,k)$，当周期性区间为 $(0,\infty)$ 时，该方法称为 P 稳定的.步数 $k=2,4,6$ 的对称线性多步法有非零周期性区间.与达赫尔斯特壁垒定理类似，对 P 稳定方法，有下列理论结果：P 稳定的线性多步法必是隐式的，其阶不能超过2，且精度最好的 P 稳定方法的公式为

$$y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n=\frac{1}{4}h^2(f_{n+2}+2f_{n+1}+f_n).\quad(2)$$

单支法也可用于二阶方程的情形，与由公式(2)确定的求解方法相对应的单支法公式为

$$y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n$$
$$=h^2f(x_{n+2},\frac{1}{4}(y_{n+2}+2y_{n+1}+y_n)).$$

P 稳定方法(P-stable methods)　提高 P 稳定性的阶的方法.为此，构造其他类型(不同于线性多步法)的 P 稳定计算公式.这常借助于指数函数 $\exp(z)$ 的帕德逼近.这类方法主要有多步混合法、单支混合法及多阶导数法等.例如，四阶 P 稳定的2步混合法(仅用一个非整数步点)的计算公式为

$$y_{n+2}-2y_{n+1}-y_n$$
$$=\frac{h^2}{12}[f_{n+2}+(10-\gamma)f_{n+1}+f_n+\gamma f(x_{n+1},\bar{y}_n)],$$

$$\bar{y}_n=y_{n+1}-\frac{h^2}{12\gamma}[f_{n+2}-2f_{n+1}-f_n],$$

式中 $\gamma\neq0,(\lambda h)^2\neq12$.

两点边值问题数值解法(numerical methods of two point boundary value problems)　常微分方程定解问题数值解法的重要部分.指解常微分方程两点边值问题的数值方法，并给出相应的理论分析及算法的实现.两点边值问题有广泛的实际背景，在其他数学分支的理论研究中也有重要应用.由于边值问题解的存在惟一性比初值问题复杂得多，至今没有很好解决，因此求解边值问题无论在理论上或数值解法上都比初值问题困难，成果较少.很多数值方法都是在假设边值问题解存在的前提下讨论的.在数值解法研究中，通常考虑一阶非线性边值问题

$$\begin{cases}y'(x)=f(x,y(x)),a<x<b,\\ g(y(a),y(b))=0.\end{cases}$$

此处，y，f 及 g 均为 m 维函数向量，并设上述问题有孤立解.有时也以以下一阶线性问题为研究对象：

$$\begin{cases}y'(x)-A(x)y(x)=f(x),a<x<b,\\ B_1y(a)+B_2y(b)=\beta.\end{cases}$$

此处，$A(x)$，B_1 及 B_2 为 $m\times m$ 矩阵，$y(x)$，$f(x)$ 及 β 为 m 维向量.有时也考虑单个二阶方程的情形：

$$\begin{cases}y''=f(x,y,y'),a<x<b,\\ \alpha_0y(a)-\alpha_1y'(a)=\alpha,\\ \beta_0y(b)+\beta_1y'(b)=\beta.\end{cases}$$

对两点边值问题，主要有以下几类数值方法：

1.转化为初值问题的方法，以打靶法为主要代表；此外，还有连续法与不变嵌入法，它们主要是解决打靶中对初始打靶点要求太苛刻的困难而提出的.

2.差分法，这是一种有广泛应用的方法.

3.加权余量法，包括配置法、子域法、矩量法与最小二乘法，特别是伽辽金有限元法.关于矩量法、最小二乘法请参见数值分析其他部分的有关条目.关于有限元法，它是一种应用广泛的有效方法，请参见偏微分方程数值解法部分的有关条目.

打靶法(shooting method)　亦称试射法.求解常微分方程两点边值问题的一种有效方法.其基本思路是，通过适当选择和调整初始条件，求解一系列初值问题，使之逼近给定的边界条件.如果将两点边值问题确定的曲线视作弹道，则求解过程即为不断调整试射条件使之达到预定的靶子.这类方法的关键是设计选取初值的步骤.

试射法(shooting method)　即"打靶法".

线性问题打靶法(shooting method for linear problems)　适用于线性问题的打靶法.指打靶法应用于线性微分方程时，变为线性组合法，即根据常微分方程理论适当选取初值可得到一组线性无关解，

利用它们的线性组合导出边值问题的解. 例如,对具有惟一解的线性边值问题

$$\begin{cases} Ly \equiv -y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ \qquad (a < x < b), \\ \alpha_0 y(a) - \alpha_1 y'(a) = \alpha, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

可转化为两个初值问题

$$\begin{cases} Lu = r(x),\ a < x \leqslant b, \\ u(a) = -c_1\alpha,\ u'(a) = -c_0\alpha \end{cases} \tag{2}$$

和

$$\begin{cases} Lv = 0,\ a < x \leqslant b, \\ v(a) = \alpha_1,\ v'(a) = \alpha_0, \end{cases} \tag{3}$$

式中,c_0 与 c_1 是两个常数,但应满足条件

$$c_0\alpha_1 - c_1\alpha_0 = 1.$$

设初值问题(2)与(3)的解分别为 $u(x)$ 与 $v(x)$,则由

$$y(x) = u(x) + sv(x) \tag{4}$$

确定的函数 $y(x)$ 满足(1)中方程及第一个边界条件. 使 $y(x)$ 满足第二个边界条件,只需取常数 s 为

$$s = \frac{\beta - (\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b))}{\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)}.$$

利用稳定且具有某阶精度的初值问题数值解法,可求出在节点

$$x_j = a + jh \quad (j = 0,1,2,\cdots,N)$$

处的数值解 u_j 及 v_j,$h=(b-a)/N$,再由(4)即可得到节点 x_j 处边值问题(1)的数值解 y_j.

非线性问题打靶法(shooting method for nonlinear problems) 适用于非线性问题的打靶法. 对于非线性问题,打靶法仍为一个有效解法:设考虑具有惟一解的非线性边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'),\ a < x < b, \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

用打靶法求解,先适当选择 $y'(a)$ 之值 s,然后求出初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'),\ a < x \leqslant b, \\ y(a) = \alpha, y'(a) = s \end{cases} \tag{2}$$

的惟一解 $y(x;s)$. 若 $y(b;s) = \beta$,则 $y(x;s)$ 为边值问题(1)之惟一解. 由此知,参数 s 的理想值应满足

$$\varphi(s) \equiv y(b;s) - \beta = 0.$$

这是非线性方程,通常用牛顿迭代法解之,得到迭代序列 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 以 s_k 替代问题(2)中的 s,得到 $y(x;s_k)$. 当

$$|y(x;s_k) - \beta| < \varepsilon$$

成立时,以 $y(x;s_k)$ 作为边值问题(1)之近似解. 对问题(2),通常总是化为一阶方程组初值问题,然后用相应的数值方法求解.

并行打靶法(parallel shooting method) 亦称多重打靶法. 一类打靶法. 指为提高计算精度,并避免因求解区间太长导致计算误差增长而设计的一种方法. 设给定一阶方程组两点边值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\ (a < x < b), & (1) \\ Ay(a) + By(b) = \alpha, & (2) \end{cases}$$

式中 y, f 及 α 均为 m 维向量,A 及 B 为 m 阶矩阵. 并行打靶法的过程是,先用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

将区间 $[a,b]$ 分成 N 个子区间

$$[x_{j-1}, x_j],\ j = 1,2,\cdots,N;$$

然后在每个子区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上求解初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\ (x_{j-1} < x \leqslant x_j), \\ y(x_{j-1}) = \tau_j \quad (j = 1,2,\cdots,N), \end{cases}$$

其中 τ_j 为待选 m 维参数向量. 设上述初值问题之解为

$$y(x;x_{j-1},\tau_j) \quad (j = 1,2,\cdots,N).$$

为使这 N 个函数能构成方程组

$$y' = f(x,y)$$

在整个区间 $[a,b]$ 上的连续解,在点

$$x_j \quad (j = 1,2,\cdots,N-1)$$

处必须满足连接性条件

$$y(x_j;x_{j-1},\tau_j) = \tau_{j+1} \quad (j = 1,2,\cdots,N-1). \tag{3}$$

τ_1 和 τ_N 的选取应使边界条件(2)成立,即满足

$$A\tau_1 + By(x_N;x_{N-1},\tau_N) = \alpha. \tag{4}$$

式(3)与(4)构成非线性方程组. 用牛顿迭代法解之,以得到近似参数向量序列

$$\tau_j^{(k)} \quad (k = 1,2,\cdots; j = 1,2,\cdots,N).$$

多重打靶法(multi-shooting method) 即"并行打靶法".

微分方程组打靶法(shooting method for systems of differential equations) 适用于常微分方程组两点边值问题的打靶法. 对于一阶常微分方程组两点边值问题

$$\begin{cases} y'_i = f_i(x, y_1, \cdots, y_m) \\ \qquad a < x < b\ (i = 1,2,\cdots,m), & (1) \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j(a) = c_i\ (i = 1,2,\cdots,r), \\ \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} y_j(b) = d_i\ (i = 1,2,\cdots,m-r). & (2) \end{cases}$$

用打靶法求解时,先把它们转化为 $x=a$ 为初始点的初值问题. 设

$$y_i(a) = s_i \quad (i = 1,2,\cdots,m-r),$$

引进记号

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m-r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r,m-r} \end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix} a_{1,m-r+1} & a_{1,m-r+2} & \cdots & a_{1m} \\ a_{2,m-r+1} & a_{2,m-r+2} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,m-r+1} & a_{r,m-r+2} & \cdots & a_{rm} \end{bmatrix},$$

必要时,适当调整 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之次序,以使矩阵 A_2 非奇异.则由(2)中第一组条件,有

$$\begin{bmatrix} y_{m-r+1}(a) \\ y_{m-r+2}(a) \\ \vdots \\ y_m(a) \end{bmatrix} = A_2^{-1}C - A_2^{-1}A_1S,$$

式中 $C=[c_1,\cdots,c_r]^T$,$S=[s_1,s_2,\cdots,s_{m-r}]^T$,于是构造出相应的初值问题

$$\begin{cases} y_i'=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_m)\ (i=1,2,\cdots,m), \\ y_j(a)=s_j\ \ (j=1,2,\cdots,m-r), \\ \begin{bmatrix} y_{m-r+1}(a) \\ y_{m-r+2}(a) \\ \vdots \\ y_m(a) \end{bmatrix}=A_2^{-1}C-A_2^{-1}A_1S. \end{cases}$$

设此问题之解为 $y_i(x;s)$,参数向量 s 的选取应满足问题(2)中第二组条件,即

$$\varphi_i(s)\equiv\sum_{j=1}^{m}b_{ij}y_j(b;s)-d_i=0$$
$$(i=1,2,\cdots,m-r).$$

这是非线性方程组,可用牛顿迭代法解之.

线性微分特征值问题数值解法(numerical methods of linear differential eigenvalue problems) 一类近似解齐次边值问题的特征值及相应特征函数(向量)的一类数值方法.对给定的齐次边值问题(即齐次线性方程(组)及齐次边界条件),例如,考虑线性微分特征问题

$$\begin{cases} y' = A(x,\lambda)y \quad (a<x<b), & (1) \\ y_i(a) = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,k), \\ y_{i_l}(b) = 0 \qquad (l=1,2,\cdots,k). & (2) \end{cases}$$

式中 y 为 m 维向量,$m=2k$,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$,$A(x,\lambda)$ 为 m 阶矩阵.原则上,两点边值问题的数值解法都适用于上述特征问题.特别地,当采用差分法或加权余量法时,从问题(1),(2)得到代数特征问题 $B(\lambda)z=0$,这里 $B(\lambda)$ 是依赖于 λ 的矩阵.在差分法的情形,z 是在网点 $x=x_j$ 处逼近 $y(x)$ 的向量;在加权余量法的情形,z 是 $y(x)$ 的展开式系数构成的向量.如果

$$A(x,\lambda) = C(x) + \lambda D(x),$$

当采用适当的逼近方式时,有

$$B(\lambda) = E + \lambda F,$$

这里矩阵 E 及 F 与 λ 无关.一般地,对差分法,矩阵 $B(\lambda)$ 的阶很高,求其所有特征值是困难的,通常用逆迭代法或子空间迭代法求一个或几个特征值.当适当选择加权余量法时,矩阵 $B(\lambda)$ 的阶较小,可求出其所有特征值.当对特征问题采用打靶法时,对由边值问题转化得到的初值问题,要用稳定的高精度算法求解.

线性边值问题差分法(difference method of linear boundary value problems) 解线性常微分方程两点边值问题的基本数值方法.考虑线性边值问题

$$\begin{cases} -y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)\ (a<x<b), \\ y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta. \end{cases}$$

在等距网点

$$x_j = a + jh, h = \frac{b-a}{N}\ (j=0,1,\cdots,N)$$

上,例如可建立差分方程边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}+p_j\dfrac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}+q_jy_j=r_j \\ \qquad (j=1,2,\cdots,N-1), \\ y_0=\alpha,\ y_N=\beta. \end{cases}$$

这个以 $y_j(j=1,2,\cdots,N-1)$ 为未知量的线性方程组惟一可解(当 $q(x)\geqslant\sigma>0$,$x\in[a,b]$),系数阵是三对角的,可采用有效的追赶法求解之.另外,已经证明,上述差分方程对微分方程的逼近具有二阶精度,且当 $h\to0$ 时,差分方程边值问题之解 y_j 收敛于微分边值问题之解 $y(x)$ 于 $x=x_j$ 处之值.

加权余量法(method of weighted residues) 解微分方程边值问题的一种有效方法.其基本特征是,把近似解表示成某基函数组的线性组合,并代进微分方程,根据所得余量的极小化来确定组合系数.例如,考虑线性边值问题

$$\begin{cases} Ly(x)-f(x)=0\ \ (a<x<b), \\ By(x)-g(x)=0\ \ (\text{在 } x=a \text{ 及 } x=b \text{ 处}). \end{cases} \quad (1)$$

以下列线性组合形式的函数

$$\bar{y}(x;C) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{N}c_i\varphi_i(x) \qquad (2)$$

作为近似解,其中 $C=[c_1,c_2,\cdots,c_N]^T$ 为待定的展开系数向量,函数 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$ 是给定的基函数,φ_0 的选取应满足边界条件,而 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$ 是选定的一组线性无关函数,且满足对应的齐次边界条件

$$B(\varphi_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,N),$$

当 $x=a$ 及 $x=b$ 时,将式(2)代进式(1),称所得

$$R(x;C)=Ly(x;C)-f$$

为微分方程的余量.为使余量极小化,常取定一组权函数

$$w_k(x)\ \ (k=1,2,\cdots,N),$$

并令余量的加权平均为零,即

$$(w_j,R)\equiv\int_a^b w_j(x)R(x;C)\mathrm{d}x = 0$$
$$(j=1,2,\cdots,N).$$

利用此式确定 $c_j(j=1,2,\cdots,N)$ 的方法,称为加权

余量法.

两点边值问题差分法(difference methods of two point boundary value problems) 解两点边值问题的基本数值方法.它以差商近似替代微分方程中的导数.例如,考虑问题

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \ (a < x < b), \\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

如果取等距网点

$$x_j = a + jh \ (j = 0,1,\cdots,N),$$

$$h = \frac{b-a}{N},$$

则可构成差分边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2} = f\left(x_j, y_j, \dfrac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}\right) \\ \qquad (j=1,2,\cdots,N-1), \\ y_0=\alpha,\ y_N=\beta. \end{cases} \quad (2)$$

由此可求得解 $y(x)$ 于 $x=x_j$ 处的近似值

$$y_j \ (j=1,2,\cdots,N-1).$$

如同初值问题差分法中的讨论,可以定义差分法的相容性、截断误差、精度阶与收敛性,并根据边值问题的特点引进稳定性概念.由(2)给出的非线性差分方程组,采用牛顿迭代法求解,对充分小的 h,它是平方收敛的.

对于一阶方程组两点边值问题

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, \cdots, y_m) \ (a<x<b), \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j(a) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j(b) = \alpha_i \\ \qquad (i=1,2,\cdots,m), \end{cases}$$

改在网点

$$\bar{x}_j = x_j + \frac{h}{2} \ (j = 0,1,\cdots,N-1)$$

上建立差分方程,得到差分边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i,j+1} - y_{ij}}{h} \\ = f\left(x_{j+1/2}, \dfrac{y_{1,j+1}+y_{1j}}{2}, \cdots, \dfrac{y_{m,j+1}+y_{mj}}{2}\right) \\ \qquad (j = 0,1,\cdots,N-1), \\ \sum_{l=1}^{m} a_{il} y_{l0} + \sum_{l=1}^{m} b_{il} y_{lN} = \alpha_i \ (i = 1,2,\cdots,m). \end{cases}$$

仍用牛顿迭代法求解这个由 mN 个非线性方程构成的方程组.

配置法(collocation method) 一种对应特定权函数的加权余量法.设在所给两点边值问题求解区间 $[a,b]$ 内,取 N 个点 x_j 作为配置点,取 δ 函数为权函数,即

$$w_j(x) = \delta(x - x_j) \quad (j = 1,2,\cdots,N).$$

根据关系式

$$R(x_j;C) = \int_a^b \delta(x - x_j) R(x;C) \mathrm{d}x = 0$$

$$(j = 1,2,\cdots,N)$$

来确定近似解的展开系数

$$c_j \ (j = 1,2,\cdots,N),$$

其中 $R(x;C)$ 为微分方程的余量(参见“加权余量法”).最常用的是样条配置法,即把近似解表示为以配置点为样条结点的样条函数,然后根据配置法原理确定其所含的未知系数.

子域法(subdomain method) 一种对应特定权函数的加权余量法.把两点边值问题求解区间 $[a,b]$ 划分为 N 个子区间

$$[x_{j-1}, x_j] \ (j=1,2,\cdots,N),$$

并取权函数

$$w_j(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [x_{j-1}, x_j]), \\ 0 & (x \notin [x_{j-1}, x_j],\ j=1,2,\cdots,N). \end{cases}$$

然后根据关系式

$$\int_a^b w_j(x) R(x;C) \mathrm{d}x = \int_{x_{j-1}}^{x_j} R(x;C) \mathrm{d}x = 0$$

$$(j = 1,2,\cdots,N),$$

来确定近似解的展开系数

$$c_1, c_2, \cdots, c_N,$$

其中 $R(x;C)$ 为微分方程的余量(参见“加权余量法”).

偏微分方程数值解法

偏微分方程数值解法(numerical methods for partial differential equations) 现代计算数学的主要分支.指解偏微分方程各种定解问题的数值方法.它包括(双曲型、抛物型)偏微分方程初值问题和混合初边值问题,椭圆型偏微分方程边值问题,不适定问题的数值解法的研究和应用等.

偏微分方程的数值解法主要分有限差分方法和有限元方法两大类.有限差分方法的离散化思想非常自然,将偏微分方程中的偏微商用差商来替代,就得到相应的差分方程.差分方法历史悠久,可以追溯到牛顿(Newton, I.)和欧拉(Euler, L.)时代,1928年,库朗(Courant, R.)、弗里德里希斯(Friedrichs, K. O.)和卢伊(Lewy, H.)在他们的经典性论文中证明了三大典型方程的典型差分格式的收敛性定理,开现代偏微分方程差分方法理论分析的先河.差分方法算法简单,有高度的通用性,适于任何类型方程,便于程序化,易于在计算机上实现.随着电子计算机的诞生和发展,它在理论分析上和应用上都得到很大发展.

有限元方法是针对椭圆型方程边值问题的一种离散化方法,它是古典的变分方法与分片多项式插值逼近相结合的产物,它具有通用、简便、几何上灵活适应的突出优点,便于在计算机上实现,因此特别

适合于解决复杂的大型科学工程计算问题.它已发展成为求解定常问题的主导方法,并推广应用于非定常问题,也开辟了理论研究的新方向,理论分析研究和应用研究都取得了重大进展.

各种类型偏微分方程、特别是非线性方程的差分格式与有限元格式的构造、快速解法、稳定性和收敛性理论、自适应方法、多重网格方法等都是重要的研究方向.

有限体积方法是通过把积分型守恒律直接离散来求解原微分守恒律的一类求解偏微分方程的数值方法,它自动满足离散守恒、它既具有差分方法算法简单,又具有有限元方法在几何上灵活适应的优点,成为有限差分方法和有限元法之外的求解偏微分方程数值解的第三类主要方法,至 20 世纪末,该方法得到很大发展,被广泛应用.

区域分解法是将复杂区域上的大型偏微分方程问题,分解为简单区域上的小型问题来求解的一种数值方法,从而达到并行计算的目的,这种方法随着多处理器和并行计算机的发展,在理论研究上和应用上都在快速发展中.

有限差分法(finite difference method)　简称差分法,是数值解常微分方程、偏微分方程和积分-微分方程的一种主要的数值方法.它的基本思想是:把自变量连续变化的定解区域用由有限个离散点构成的网格来代替,称这些离散点为网格的结(节)点,或简称网格点;把在连续定解区域上定义的连续变量函数用在网格上定义的离散变量函数来近似;用适当的数值微分公式把原方程和定解条件中的导数换成差商,用积分有限和来近似积分,于是原方程和定解条件就近似的被换成代数方程组;解此代数方程组就得到原方程的定解问题的近似解.

有限差分方法算法简单、有高度的通用性,而它的计算公式又是程式化了的,便于程序化,易于在计算机上实现,因此也常称为差分格式.差分法的主要研究内容是:如何根据定解问题的特点将求解区域剖分成网格;如何将待求解的方程和定解条件离散成有限差分方程组;如何求解这个差分方程组;为保证计算过程可行及结果可靠,研究差分方程组解的存在性、惟一性,解法的稳定性,当网格间距趋于零时差分解对原问题真解的收敛性.差分方法因方程类型不同、定解问题提法不同而有各自的特点和不同的内容(参见“椭圆型偏微分方程边值问题的差分方法”和“偏微分方程初值问题的差分方法”).

差分格式(difference schemes)　见“有限差分法”.

网格(mesh, grid)　剖分待解问题的连续求解区域所得的由离散点构成的集合.例如,利用有限差分方法求解微分方程问题时,首先要把原方程自变量连续变化的区域离散化,即用某一离散点的集合代替这一区域,这一步骤称为网格剖分,这一离散点集称为网格.网格剖分最常用的方法是以一定间隔作平行于坐标轴的直线族,以不同族直线的交点为网格点.例如考虑抛物型扩散方程的柯西问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (\sigma>0,-\infty<x<+\infty,t>0),$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\ \ (-\infty<x<+\infty),$$

或双曲型对流方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0\ \ (-\infty<x<+\infty,t>0),$$

$$u(x)=\psi(x)\ (-\infty<x<+\infty).$$

可取 $\Delta t,\Delta x>0$,令

$$x=x_j=j\Delta x\ \ (j=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$t=t_n=n\Delta t\ \ (n=0,1,2,\cdots),$$

为网格直线,此时对每一整数对(j,n),(x_j,t_n)均为网格点.特别是 $n>0$ 的格点称网格内点,$n=0$ 的格点称边界格点,所有边界格点构成网格边界.本例中的网格称矩形网格;$\Delta t,\Delta x$ 称网格间距,或依次分别称为时间步长与空间步长.上例中在整个上半平面 $\Delta t,\Delta x$ 为常数,这样的网格称等距网格;网格间距可以不一定处处相等,特别是发展方程数值求解过程中,往往允许 Δt 随时间变化,这样的网格称不等距网格.

为使差分近似有足够的精度,网格间距要适当地小;为保证计算稳定性,Δt 与 Δx 之间还必须保持一定关系.例如对前述扩散方程采用四点显式格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

必须有

$$r=\frac{\sigma\Delta t}{\Delta x^a}\leqslant\frac{1}{2};$$

对上述对流方程的拉克斯格式

$$\frac{u_j^{n+1}-\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=0,$$

必须有 $r=|a|\Delta t/\Delta x\leqslant1$.在以上两种情形下,

$$r=\frac{\sigma\Delta t}{\Delta x^2}\ 和\ r=\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}$$

均称为网格比.对于实际科学与工程计算问题,求解区域常常具有复杂的几何形态,解的性态随空间与时间坐标的变化也很不同.因此往往需要用不同的曲线族构成网格线,网格形式是不规则的,且需随时调整.在求解此类问题时,网格的自动生成是一项专门的技术.

矩形网格(rectangular net)　见“网格”.

等距网格(isometric net)　见“网格”.

网格比(ratio of mesh size)　见“网格”.

网格函数(mesh function)　差分方法中定义在

网格点上的离散变量函数.

椭圆型偏微分方程边值问题差分法(finite difference methods for boundary-value problem of elliptic partial differential equations) 一种求解椭圆型偏微分方程边值问题的数值方法.其基本思想是:把问题的求解区域剖分成网格,待定函数用网格函数替代,用适当的数值微分公式在网格的节点上把微分问题中的导数换成差商,从而把微分方程和边界条件离散成相应的差分格式,解所得差分格式就得到原问题的近似解(参见"有限差分方法").从偏微分方程边值问题所得差分方程组的特点是,系数矩阵中非零元素很少,即是稀疏矩阵,此类差分方程组的解法主要有直接法和迭代法.直接法大多是高斯消去法的变形,目的是采取适当的消去顺序,使得在不影响解的精度的前提下,尽可能在运算量、存储量及程序复杂性等方面受益或达到某种平衡.迭代法用逐次逼近方法求得差分方程组的解,它的存储量小,程序简单,故常用于椭圆型偏微分方程的差分方程组的求解.迭代法种类很多,最基本的有三种:

1. 简单迭代法.
2. 高斯-赛德尔迭代法.
3. 超松弛法.

三种方法中超松弛法收敛最快,是常用的方法之一.

偏微分方程初值问题差分法(finite difference methods for initial-value problem of partial differential equations) 一种求解偏微分方程初值问题和初边值问题的主要数值方法.它具有简单、灵活以及通用性强等特点,容易在计算机上实现(参见"有限差分方法").它包含下列步骤:对问题的求解区域进行网格剖分;在网格的格子点上用适当的数值微分公式把问题中的微商换成差商,从而把微分问题离散化得到差分格式;利用该差分格式按步进方式,从初始层开始逐步求得各时间层的解.离散化所得差分格式必需和原微分方程是相容的(参见"差分格式的相容性");它必需是稳定的(参见"差分格式的稳定性"):当网格步长趋于零时,该差分格式的解必需收敛到原微分问题的真解,即该差分格式应该是收敛的(参见"差分格式的收敛性"和"拉克斯等价性定理").

偏微分方程初值问题,主要包括双曲型方程和抛物型方程的初值问题,它们的差分方法又各有其特点(参见"双曲型方程差分法"和"抛物型方程差分法"等条目).

两层差分格式(two-level difference schemes) 差分格式的一种.指仅涉及 $t=t_n$ 与 $t=t_{n+1}$ 两个相继时间层格点的差分格式.例如,近似一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

是两层格式.这样的格式仅需利用初值,便可逐层求解.

多层差分格式(multi-level difference schemes) 差分格式的一种.指联系多于两个时间层上格点的解值的差分格式.例如近似一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分格式

$$\frac{\frac{3}{2}u_j^{n+1}-2u_j^n+\frac{1}{2}u_j^{n-1}}{\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

是三层格式.为使用这一格式,除初值 u_j^0 外,尚需由其他方法,例如幂级数展开等,计算出 $t=\Delta t$ 时刻的格点函数值 u_j^1 才能开始计算.多层格式一般具有较高的精确度.

显式差分格式(explicit difference schemes) 一类每个格点可独立求解的格式.指利用已知值,不必求解代数方程组即可由格式逐点直接计算下一时刻所有格点值的差分格式.这种格式计算简便,但为使格式稳定一般对时间步长限制较严.

隐式差分格式(implicit difference schemes) 一类所有格点必须联立求解的格式.指需经求解联立代数方程组才能从已知值计算出下一时刻所有格点的解值的差分格式.这样的格式一般有较好的稳定性.

拉克斯等价性定理(Lax equivalence theorem) 揭示差分方程相容性、稳定性与收敛性三者之间关系的重要定理.该定理表述为:对于适定的线性偏微分方程组初值问题,一个与之相容的线性差分格式收敛的充分必要条件是该格式是稳定的.该定理以美国数学家拉克斯(Lax,P. D.)命名,利用这一定理,可把困难的收敛性研究转化成对相容性与稳定性的讨论.

差分格式局部截断误差(local truncation error of a finite difference scheme) 度量微分方程的光滑解对一个差分格式近似满足程度的量.一般地,微分方程的解不精确满足用以近似它的差分方程,将微分方程的充分光滑解代入一个差分格式,并将差分格式中所有的项在适当格点作带有余项的泰勒展开,再利用微分方程将展开式化简,就会得到一个误差项,这个误差项反映了微分方程的解满足差分格式的程度,称为局部截断误差.简言之,局部截断误差是在各网格点上,用差分方程代替微分方程所产

生的误差.

差分格式相容性(consistency of a finite difference scheme) 偏微分方程数值解法概念之一.指微分方程与逼近它的某一个差分方程间的关系.把微分方程的光滑解代入所考虑的差分格式,记格点(j,n)处的局部截断误差为R_j^n.对一般的二层差分格式,若网格间距$\Delta x,\Delta t$趋于零时,R_j^n也趋于零,就称此格式与原微分方程是相容的,或者说此格式是原微分方程的一个相容近似.为使多层差分格式与原微分方程相容,除局部截断误差趋于零外,还应要求该格式是稳定的.显然,只可以使用相容的差分格式来代替所要研究的微分方程.

差分格式精确度阶(order of accuracy of a finite difference scheme) 偏微分方程数值解法概念之一.指度量差分方程与微分方程近似程度的量.对于一个相容近似,局部截断误差一般形式为

$$R_j^n=O[(\Delta t)^{\rho_1}+(\Delta x)^{\rho_2}],\rho_1,\rho_2>0.$$

为满足稳定性要求,差分格式的空间步长Δx与时间步长Δt应保持一定关系,因此R_j^n可仅由Δt的幂次来表示,使$R_j^n=O[(\Delta t)^\rho]$成立的最大正实数ρ称为局部截断误差的阶,又称差分格式精确度的阶.对精确度更为准确的另一种表述是,分别指明R_j^n中Δt与Δx的幂次.精确度的阶越高,差分格式对微分方程的近似程度也越高,它的解收敛到微分方程解的速度也越快.

差分格式收敛性(convergence of a finte difference scheme) 偏微分方程数值解法概念之一.指差分方程解与其所近似的微分方程解之间的关系.令(x,t)是差分方程求解区域中的一个定点,$u(x,t)$表示微分方程在该点的精确解.适当选取一差分网格序列$\{\Delta_k x\}$及$\{\Delta_k t\}(k=1,2,\cdots)$,使$k$趋于无穷时,$\Delta_k x$及$\Delta_k t$趋于零;相应选取整数序列$\{j_k\}$及$\{n_k\}$,使同时有$j_k\Delta_k x\to x,n_k\Delta_k t\to t$.以$u_{j_k}^{n_k}$记差分方程在格点$(j_k\Delta_k x,n_k\Delta_k t)$上的解,若$\Delta_k x,\Delta_k t$趋于零时,$u_{j_k}^{n_k}-u(x,t)$也趋于零,则称此差分格式是收敛的,或者说,此格式是相应微分方程的一个收敛近似.当网格间距足够小时,收敛近似的解可以作为微分方程的近似解.

差分格式依赖区域(numerical domain of dependence of a finite difference scheme) 初值线上的某一点集.用一差分格式求解偏微分方程初值问题时,在求解区域内坐标为(x,t)的网格点处,数值解由初值线上某一格点集合的初始函数值完全决定;当时间与空间步长按某种确定方式趋于零,但永远保持(x,t)为网格点时,影响(x,t)处数值解的初值点集化为一个区域,这就是(x,t)处差分格式的依赖区域.对于初边值混合问题,依赖区域还可能包括边界线上的点.

差分格式稳定性(stability of a finite difference scheme) 偏微分方程数值解法概念之一.指差分格式误差传播的性态.初值问题差分方法的计算是按时间顺序,以步进方式实现的,即利用t_n及以前时刻的已知函数值,计算t_{n+1}时刻的格点函数值,依次向前推进.在这一推进过程中,初始误差及每步计算引入的舍入误差均会向以后时刻传播.这一积累误差可否保持有限,亦或按步数n的某一幂次增长,还是随时间增加以指数方式恶性放大,是表征差分格式的一个重要性质,这一性质就是差分格式的稳定性.设对某发展方程有差分格式

$$u^{n+1}=C(\Delta t)u^n \tag{1}$$

其中$C(\Delta t)$为有限差分算子,Δt为时间步长.若在任意确定的有限时间范围$[0,T]$内,对某个正数τ,若存在常数$\alpha(\geqslant 0)$,使得满足条件$0<\Delta t<\tau,0\leqslant n\Delta t\leqslant T$的$\Delta t$和$n$有

$$\|C^n(\Delta t)\|\leqslant \text{const.}(\Delta t)^{-\alpha}\leqslant \text{const.}\,n^\alpha$$

式中$\|\cdot\|$表示某种适当选定的范数,则称差分格式(1)是稳定的.若$\alpha=0$,则称格式(1)是强稳定的或者是在拉克斯-里希特迈耶意义下稳定;而在$\alpha>0$时,则称差分格式(1)是弱稳定的或者是在福赛思-瓦索(Forsythe-Wasow)意义下稳定.显然,强稳定格式的积累误差保持有界,弱稳定格式的积累误差按步数n的幂次形式增长.而不稳定格式的积累误差则是指数增长的.只有稳定的格式才有实际价值,当以不稳定格式进行计算时,误差会很快掩盖真解,导致计算失败.

差分格式强稳定性(strong stability of a finite difference scheme) 见“差分格式稳定性”.

差分格式弱稳定性(weak stability of a finite difference scheme) 见“差分格式稳定性”.

克赖斯弱稳定性定理(Kreiss theorem on weak stability) 判定差分格式是否弱稳定的一个定理.克赖斯(Kreiss,H.O.)于1962年证明了:对于常系数线性初值问题,如果差分格式的放大矩阵G一致有界,则冯·诺伊曼条件是弱稳定的充分必要条件.

不稳定性(instability) 偏微分方程数值解法的基本概念之一.指利用不稳定格式进行计算时,或稳定差分格式使用不当时所产生的现象.此时由初值不准或舍入等原因引入的偶然误差便会在计算过程中积累、放大,并在不多的步数后增大到不能容许的程度,使数值解完全丧失意义.这种现象称为差分格式的不稳定性.

不稳定格式(unstable scheme) 对任何实际计算允许的时间步长与空间步长均不稳定的差分格式.

无条件稳定性(unconditional stability) 偏微

分方程数值解法的基本概念之一.一个差分格式如果对于任何时间步长与空间步长都是稳定的,则称该格式具有无条件稳定性.

稳定性条件(stability condition) 偏微分方程数值解法术语.指使差分格式稳定所必需满足的条件.为保证发展方程差分格式的数值稳定性,内点及边界差分格式的构造方式、数值边界条件的给定、网格间距及可能出现的其他参数的选取等诸多因素必须满足一定的要求,这些要求统称稳定性条件.

傅里叶方法(Fourier method) 研究发展方程的纯初值问题的线性常系数差分格式稳定性的一种方法.该方法把差分方程的解对空间变量作傅里叶级数展开,利用方程的线性性质,把稳定性归结为级数所有各项傅里叶系数的模随时间变化之一致有界性.这种方法称为傅里叶方法.对于一维空间的单个差分方程,这一方法只需考虑所有形为 $u_j^n=G(\Delta t,k)e^{ijk\cdot\Delta x}$ 的解,其中 k 为波数,G 称为放大系数,其具体形式由所考虑的差分格式决定.若对于一切波数 k 和一切适合 $0<\Delta t<\tau,0\leqslant n\Delta t\leqslant T$ 的 Δt 与 n,都有 $|G^n|\leqslant C_0$,C_0 为一常数,则可知差分格式是(强)稳定的,否则是不稳定的.当把同样的方法用于差分方程组时,放大系数 G 转化成一个矩阵,称为放大矩阵,稳定性归结为 G^n 的模一致有界.

放大矩阵(amplification matrix) 偏微分方程数值解法概念之一.指差分算子在波数空间的等价表示.设常系数线性差分方程组形为 $u^{n+1}(x)=C(\Delta t)u^n(x)$,$u^n(x)$ 为一 p 维向量,以 $v^n(k)$ 表示 $u^n(x)$ 波数为 k 的傅里叶系数,则有 $v^{n+1}(k)=G(\Delta t,k)v^n(k)$,$G(\Delta t,k)$ 称为放大矩阵,差分方程组的稳定性归结为对一切波数 k 和一切满足条件 $0<\Delta t<\tau$ 及 $0<n\Delta t\leqslant T$ 的 Δt 与 n,$G^n(\Delta t,k)$ 的模一致有界性(参见"傅里叶方法").

放大系数(amplification coefficient) 亦称放大因子.偏微分方程数值解法概念之一.指近似发展方程的两层常系数线性差分格式的放大矩阵.此时,放大矩阵退化为一个数,故称为放大系数(参见"傅里叶方法").

放大因子(amplification factor) 即"放大系数".

冯·诺伊曼稳定性必要条件(von Neumann necessary condition for stability) 近似发展方程的常系数线性差分格式稳定的一个必要条件.这一条件的具体表述是:存在常数 C 及 $\tau>0$,使得对一切适合 $0<\Delta t<\tau$ 的时间步长 Δt 与任意波数向量 $\boldsymbol{k}$,由傅里叶方法所得到的放大矩阵 $G(\Delta t,\boldsymbol{k})$ 的所有特征根均满足 $|\lambda|\leqslant 1+C\cdot\Delta t$.当 $G(\Delta t,\boldsymbol{k})$ 满足某些附加条件,例如为正规矩阵时,这一条件也是数值稳定的充分条件.

克赖斯矩阵定理(Kreiss matrix theorem) 发展方程线性常系数差分格式的稳定性理论中的一个重要定理.发展方程线性常系数差分格式稳定的一个充分必要条件是其放大矩阵 $G(\Delta t,\boldsymbol{k})$ 满足条件

$$\|(G(\Delta t,\boldsymbol{k}))^n\|\leqslant C$$

$(0<\Delta t<\tau,0\leqslant n\Delta t\leqslant T$,任意波数向量 $\boldsymbol{k})$,

其中 C 是一常数,不妨设 $C>1$.定义矩阵族 F:

$$\{e^{-\alpha\Delta t}G(\Delta t,\boldsymbol{k})\}\ \ (\alpha=\frac{1}{T}\ln C).$$

则该差分格式稳定的一个充分必要条件是矩阵族 F 满足命题(A).

命题(A):对于任一矩阵 $A\in F$ 及一切正整数 l,有常数 C_1 存在,使 $\|A^l\|\leqslant C_1(l=1,2,3,\cdots)$ 成立.这时称 F 是稳定的矩阵族.于是把差分格式的稳定性等价地转化为矩阵族的稳定性.

克赖斯(Kreiss,H.O.)于1962年给出了包含三种刻画矩阵族稳定性命题的定理——克赖斯矩阵定理:定义矩阵族 $F=\{A\}$ 的稳定性的命题(A)与命题(R)、命题(S)及命题(H)都互相等价.

命题(R):对一切 $A\subset F$,一切复数 $z(|z|>1)$,存在常数 C_R,使 $(A-zI)^{-1}$ 存在,且

$$\|(A-zI)^{-1}\|\leqslant\frac{C_R}{|z|-1}.$$

命题(S):有常数 C_S 及 C_B 存在,使对每个 $A\in F$ 都存在非奇异矩阵 S,使下列两个条件同时成立:

1. $\|S\|$ 及 $\|S^{-1}\|\leqslant C_S$.
2. $B=SAS^{-1}$ 为上三角形矩阵

$$B=\begin{bmatrix}\lambda_1 & B_{12} & \cdots & B_{1p}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & B_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p\end{bmatrix}.$$

B 中的对角线元素是按绝对值大小排列的:

$$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_p|\leqslant 1,$$

且 $$|B_{ij}|\leqslant C_B(1-|\lambda_j|)\ \ (i<j).$$

命题(H):对每个 $A\in F$,存在常数 $C_H>0$ 及正定的埃尔米特(Hermite)矩阵 H,使如下性质成立:

$$C_H^{-1}I\leqslant H\leqslant C_HI,\quad A^*HA\leqslant H.$$

布加南稳定性判据(Buchanan stability criterion) 判断差分格式稳定性的一个矩阵族稳定的充分必要条件.设 $k_1,k_2,\cdots,k_p$ 是一个复数序列,如果

$$|k_r-k_s|\leqslant K|k_l-k_m|\ \ (l\leqslant r\leqslant s\leqslant m),$$

则称该复数序列构成常数为 K 的嵌套.由此,布加南稳定性判据表述为:设有一矩阵族 $\mathscr{F}$,其元素 A 是上三角矩阵,其全部特征值构成常数为 K_1 的嵌套,则 $\mathscr{F}$ 是稳定的,当且仅当冯·诺伊曼条件满足,即它的特征值 $|k_i|\leqslant 1$,而其非对角元素满足

$$|A_{ij}|\leqslant K_2\max(1-|k_i|,1-|k_j|,|k_i-k_j|),$$

其中 K_2 是一个与 A 无关的常数.

拉克斯-温德洛夫条件(Lax-Wendroff condition) 常系数线性发展方程差分格式稳定的一个充分条件. 这一条件表述为:对任何向量 $\boldsymbol{V}$,如果放大矩阵 G 满足不等式 $|\boldsymbol{V}^* G\boldsymbol{V}| \leqslant [1+O(\Delta t)]|\boldsymbol{V}|^2$,则所考虑的差分格式稳定.

加藤条件(Kato condition) 常系数线性发展方程差分格式稳定的一个充分条件. 以 $G(\Delta t,\boldsymbol{K})$ 记差分格式的放大矩阵,则加藤条件表述为:假定 $\|G(\Delta t,\boldsymbol{K})\|$ 一致有界,而且满足冯·诺伊曼条件;又假定,对每一个 G,在圆 $|\lambda| \leqslant R$ 内,可引一条闭的可求长的曲线 Γ(这里 R 是 G 的谱半径),使 Γ 的长度一致有界,而且 Γ 与 G 的谱的距离一致地有不为零的下界. 又如果,存在一个常数 $\delta>0$(δ 与 Δt 和 $\boldsymbol{K}$ 无关),使得在 Γ 外边的每一个不同特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,q)$ 的指数为 1,而且满足下列条件,则差分格式是稳定的:

1. λ_i 与所有其他特征值的距离大于 δ.

2. 对于不满足条件 1 的这组 λ_i,所有对应特征向量所构成的格拉姆行列式值为 Δ^2,且 $\Delta>\delta$.

弗里德里希斯条件(Friedrichs condition) 线性变系数对称双曲型方程组差分格式稳定的一个充分条件. 条件表述为:假定 $\Delta t=\Delta x, T^{\beta}u(x)=u(x+\beta\Delta x)$,差分格式 $u^{n+1}=Cu^n\equiv[\Sigma_{(\beta)}C^{(\beta)}(x)T^{\beta}]u^n$ 有性质:

1. $C^{(\beta)}(x)$ 是埃尔米特矩阵,与 Δt 无关,而且对变量 x 李普希茨连续.

2. $C^{(\beta)}(x)$ 非负,则此差分格式稳定.

局部稳定性(local stability) 变系数非线性差分格式稳定性的一个概念. 设 $u^n(x)$ 为一非线性差分方程的解,令 $u^n(x) = u(x,n\Delta t) + v^n(x)$,式中 $u(x,n\Delta t)$ 为所要逼近的微分方程的精确解,$v^n(x)$ 视为一阶小量,将此表达式代入所讨论的差分格式,经过适当手续得到以 $v^n(x)$ 为未知数的一阶变分方程,这一方程是线性的,其系数只与零阶量 $u(x,t)$ 有关. 在每个点(x,t) 将变分方程的系数视为常数,则可用常系数线性差分方程稳定性理论讨论其稳定性,这就是所谓的局部稳定性. 一般地,局部稳定既不是一个变系数问题全局稳定性的必要条件,也不是其充分条件.

局部放大矩阵(local amplification matrix) 差分算子在波数域的对应表示. 指对于系数仅依赖于空间变量 x 的发展方程的一种差分近似. 例如,考虑对称双曲型方程组的差分近似 $u^{n+1} = C(\Delta t)u^n$,令 $\Delta x_j = \Delta t$,而 $C(\Delta t)$ 是带有矩阵系数的位移算子的有限和,即

$$(C(\Delta t)u)(x) \equiv \sum\nolimits_{(\beta)} C^{\beta}(x,\Delta t)u(x + \beta\Delta t),$$

式中 $C^{\beta}(x,\Delta t)$是埃尔米特矩阵,则局部放大矩阵定义为 $G(x,\Delta t,\xi)=\sum_{(\beta)}C^{\beta}(x,\Delta t)e^{i\beta\cdot\xi}$,式中 $\xi=\Delta t\cdot\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{k}$ 为波数向量.

局部稳定性条件(local stability condition) 保证变系数差分格式局部稳定的条件. 令 $G(x,\xi)$是变系数线性对称双曲型方程组差分格式的局部放大矩阵,则局部稳定条件表示为:对一切 x 和 ξ,

$$\| G(x,\xi) \| = \| \sum\nolimits_{(\beta)} C^{(\beta)}(x)e^{i\beta\cdot\xi} \| \leqslant 1,$$

式中 $\|\cdot\|$ 为某种范数,$C^{(\beta)}(x)$为系数矩阵.

能量法(energy method) 研究差分格式稳定性的一般性方法. 它可用于变系数乃至非线性方程. 该方法的基本步骤是:首先对差分格式的解向量设计一个范数,其次证明经过每一时间步,该范数的增长不超过 $1+O(\Delta t)$倍,这就是差分格式在所考虑范数下的稳定性. 能量法的名称来源于在一些简单情况下,所使用的范数恰为系统的物理能量. 能量法尚可用来得到差分格式解的误差增长估计或收敛速度估计,也可用来选择数值边界条件和恰当的非线性项逼近形式.

希尔特方法(Hirt method) 亦称启发式稳定分析. 研究差分格式稳定性的一种实用方法. 这一方法首先假定差分方程的解 $u(x,t)$对变量的一切连续值有意义,且充分光滑;然后将格式所有各项在同一点(x,t)形式地展开成泰勒级数,再利用这一展开式的形式微分,逐次消去原展开式中关于时间变量 t 的除最低阶导数外的高阶导数与混合导数,由此形式上得到一包含无穷多项的微分方程,这一方程称为原格式的等价微分方程. 希尔特方法通过讨论等价微分方程是否含有随时间指数增长的解,给出差分格式稳定的必要条件. 这样的条件称为启发式稳定性条件.

希尔特方法由希尔特(Hirt,C. W.)于 1968 年提出. 该方法在数学上是不严密的,但往往给出在实用上有意义的稳定性条件.

启发式稳定性分析(heuristic stability analysis) 即“希尔特方法”.

启发式稳定性条件(heuristic stability condition) 见“希尔特方法”.

微分近似方法(method of differential approximation) 研究差分格式性质的一种方法. 它是以等价微分方程为工具来分析差分格式的性质,如稳定性的方法,即希尔特方法(参见“希尔特方法”).

等价微分方程(equivalent differential equation) 亦称修正微分方程. 分析差分格式的解及差分格式本身性质的一种工具. 指和所研究差分格式等价的微分方程. 通过把差分格式的每一项在某节点$(j\Delta x,n\Delta t)$展成泰勒展式,并消去阶数高于原偏微分方程的阶数的时间导数项,所得微分方程就是该

差分格式的等价微分方程. 例如,通过研究等价微分方程的定解问题的适定性来研究该差分格式的稳定性. 这种分析方法也称为微分近似方法,即希尔特方法. 设微分方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu,$$

其差分格式的等价的微分方程就是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \varepsilon T,$$

其中 εT 是截断误差部分. 例如,对单向波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(a 为常数)的拉克斯格式

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\sigma}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

$$\left(\sigma = a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

的等价微分方程是

$$u_t + au_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}(1-\sigma^2)u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{3}(1-\sigma^2)u_{xxx} + \cdots$$

修正微分方程(modified differential equation) 即"等价微分方程".

非线性不稳定性(nonlinear instabilities) 偏微分方程数值解法的基本概念之一. 指由差分格式的线性稳定性分析不能预示的不稳定性. 例如,用未加额外耗散项的拉克斯-温德洛夫格式(参见"拉克斯-温德洛夫方法")计算间断解可能产生摆动,这些摆动就引起非线性不稳定性,并可能导致收敛到非物理解.

稳定性阈(stability threshold) 偏微分方程数值解法术语. 指使非线性发展方程差分格式的解保持非指数增长的扰动上限. 在用差分方程逼近某些非线性偏微分方程初值问题时,即使原问题的解充分光滑且有界,一般线性化格式稳定与收敛的要求均满足,但只要初始扰动幅度超过一极限值,数值解就会按指数增长,这一扰动幅度的界限即是稳定性阈.

CFL 收敛性条件(Courant-Friedrichs-Lewy convergence condition) 亦称库朗条件. 双曲型偏微分方程差分近似收敛的一个必要条件. 如果在每个网格结点上,差分格式的数值依赖区域都将相应微分方程在该点解的依赖区域包含在内,则称这一格式满足 CFL 条件. 差分方程的解不能脱离它所近似的微分方程的定解条件,因此,不满足 CFL 条件的格式是不可能收敛的. 例如双曲型对流方程初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ (|x| < \infty, t > 0),$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \ (|x| < \infty),$$

微分方程在任何一点$(\tilde{x},\tilde{t})$处的解依赖于点 $\tilde{x} - a\tilde{t}$ 处的初值. 若考虑差分格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{a}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

$$u_j^0 = \varphi(j\Delta x, 0),$$

则格点$(\tilde{x},\tilde{t}) = (j\Delta t, n\Delta t)$处差分方程的解依赖初值线上$[(j-n)\Delta x, (j+n)\Delta x]$中的格点值. 令 $r = \Delta t/\Delta x$ 为固定常数,且使 Δt 趋于零,则可得差分格式在点$(\tilde{x},\tilde{t})$的依赖区域为$[\tilde{x} - \tilde{t}/r, \tilde{x} + \tilde{t}/r]$,故 CFL 条件表示为

$$\tilde{x} - \frac{\tilde{t}}{r} \leqslant \tilde{x} - a\tilde{t} \leqslant \tilde{x} + \frac{\tilde{t}}{r},$$

即

$$|ar| = \left|a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| \leqslant 1,$$

式中 $ar = a\Delta t/\Delta x$,称为库朗数.

库朗条件(Courant conditon) 即"CFL 收敛性条件".

库朗数(Courant number) 见"CFL 收敛性条件".

数值耗散系数(coefficient of numerical dissipation) 差分格式的等价微分方程的截断误差部分中的最低偶阶导数项的系数(参见"等价微分方程"和"色散").

耗散项(dissipative term) 偏微分方程数值解法术语. 指微分方程或差分格式中,表达相当于粘性、热传导与扩散等使机械能耗散的项. 对于一个不含这些项的偏微分方程,耗散项可能由于区域与方程的离散化而引入差分格式,它使得数值解的每个傅里叶分量振幅随时间衰减,是差分格式的稳定因素.

耗散效应(dissipative effect) 偏微分方程数值解法的概念. 指由于粘性、热传导或扩散等输运过程,使规则运动的机械能转化为分子运动能量的效应. 这一效应是使差分格式稳定的因素.

色散(dispersion) 差分格式的重要属性. 用差分格式求解双曲型方程(组)定解问题时,通常解的不同波数成分以不同的速度传播,因而随着时间的增长,波形就被破坏,这就是差分格式的色散现象. 以简单的单向波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C\frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

为例来说明色散现象. 设初值为 $u_0(x) = \bar{u}e^{i\beta x}$,取

$$u(x,t) = \bar{u}e^{i\beta(\omega t + x)},$$

代入方程(1)得 $\omega = C$,于是

$$u(x,t) = \bar{u}e^{i\beta(x+ct)},$$

故不同的波数分量都以与波数 β 无关的同一速度 C 传播,因而在传播过程中波形不变. 对差分格式,如

$$u_j^{n+1}=u_j^n+C\lambda(u_{j+1}^n-u_j^n),\qquad(2)$$

其中 $\lambda=\Delta t/\Delta x$，$\Delta t$ 和 Δx 分别是时间和空间步长，$u_j^n=u(j\Delta x,n\Delta t)$，取

$$u_j^n=\bar{u}e^{i\beta(\omega n\Delta t+j\Delta x)},\qquad(3)$$

以(3)式代入(2)式，得

$$e^{i\beta\omega\Delta t}=(1-C\lambda)+C\lambda e^{i\beta\Delta x}=\rho(\beta\Delta x),$$

其中 ρ 是该格式的增长系数，于是得到离散色散关系式 $\omega=\omega(\beta,\Delta t,\Delta x)$，$\omega$ 是和 β 有关的，即解的不同波数(β)成分将以不同速度传播，故产生色散现象.于是，如 ω 是 β 的函数，则该差分格式就是色散的.

通过取单向波方程(1)的任一 q 阶差分格式中的等价微分方程的截断误差部分的最低奇阶导数项和偶阶导数项得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial^{q+1}u}{\partial x^{q+1}}+b\frac{\partial^{q+2}u}{\partial x^{q+2}}.\qquad(4)$$

如 $q+1$ 是奇(偶)，则 a 是数值色(耗)散系数而 b 是数值耗散(色散)系数.故截断误差余项中的偶阶项产生耗散或扩散，而截断误差余项中的奇阶项产生色散.

离散色散关系式(discrete dispersion relation) 一种代数式.指表征差分格式色散现象的离散频率和波速以及时空步长的关系式：$\omega=\omega(\beta,\Delta t,\Delta x)$.式中 ω 是离散频率，β 是傅里叶分量的波数，Δt 和 Δx 分别是差分格式的时间和空间步长(参见"色散").

数值色散系数(coefficient of numerical dispersion) 差分格式的等价微分方程的截断误差部分中的最低奇阶导数项的系数(参见"等价微分方程"和"色散").

抛物型方程差分法(finite difference methods of parabolic equations) 数值求解抛物型偏微分方程初值问题和初边值问题的一种基本方法.它的基本步骤和研究内容见"偏微分方程初值问题差分法"、"有限差分法".对最简单的抛物型方程——一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \sigma=\text{常数}>0,$$

常采用如下几个典型的差分格式：

1. 显式格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{(\delta^2u)_j^n}{\Delta x^2},$$

$$e=O(\Delta t)+O[(\Delta x)^2].$$

其中 $(\delta^2u)_j^n=u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n$ 为 u 在 x 方向的二阶差分.稳定性条件

$$\frac{\sigma\Delta t}{\Delta x^2}=\text{常数}<\frac{1}{2}.$$

2. 克兰克-尼科尔森格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{(\delta^2u)_j^n+(\delta^2u)_j^{n+1}}{2\Delta x^2},$$

$$e=O(\Delta t^2)+O[\Delta x^2].$$

隐式格式绝对稳定.

3. 全隐格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{(\delta^2u)_j^{n+1}}{\Delta x^2},e=O(\Delta t)+O[(\Delta x)^2].$$

隐式格式绝对稳定.

4. 加权隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{\theta(\delta^2u)_j^{n+1}+(1-\theta)(\delta^2u)_j^n}{(\Delta x)^2},$$

其中 $\theta=$常数，$0\leqslant\theta\leqslant1$，

$$e=O\left[\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\Delta t+\Delta t^2\right]+O[(\Delta x)^2].$$

对于 $0\leqslant\theta<1/2$，当

$$\frac{\sigma\Delta t}{(\Delta x)^2}=\text{常数}\leqslant\frac{1}{2-4\theta}$$

时稳定，对于 $1/2\leqslant\theta\leqslant1$，格式绝对稳定.

5. 理查森格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=\sigma\frac{(\delta^2u)_j^n}{(\Delta x)^2}$$

绝对不稳定.

6. 杜福特-弗兰克尔格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

$$e=O[(\Delta t)^2]+O[(\Delta x)^2]+O\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right],$$

其中当 $\Delta t,\Delta x\to0$ 时，$\frac{\Delta t}{\Delta x}\to0$，显式格式绝对稳定.其中 e 表示截断误差.

从以上诸格式可见，差分格式的步长 $\Delta t,\Delta x$ 的选取要受到截断误差和稳定性两方面的限制.显式格式的稳定性条件是 $\Delta t=O(\Delta x^2)$，即时间步长 Δt 为空间步长 Δx 的二阶小量，这是相当苛刻的条件.对于隐式格式，每个时间步要解一个代数方程组，其系数矩阵是三对角线带状阵，有像追赶法这样有效的解法.如把以上诸格式推广到二、三维问题，隐式格式每步要解一个类似于椭圆型的差分方程，其系数阵不再是三对角线带状阵，没有像追赶法那样简便有效的算法，计算量随维数按幂方增加，于是发展了交替方向隐式法和局部一维方法等高效的经济差分格式.

克兰克-尼科尔森格式(Crank-Nicholson scheme) 一种二阶精度、无条件稳定的隐式差分格式.对于热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

σ 是正常数，克兰克-尼科尔森格式是

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}\sigma\left[\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right].$$

该格式的截断误差 $e=O[(\Delta t)^2]+O[(\Delta x)^2]$. 它是克兰克(Crank, J.)和尼科尔森(Nicholson, P.)于1947年提出的.

杜福特-弗兰克尔格式(DuFort-Frankel scheme) 一种绝对稳定的显式三层差分格式. 对于热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 σ 是正的常数, 理查森(Richardson, L. F.)曾提出一个显式中心差分格式——理查森格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2},$$

它是二阶精度格式, 但它是绝对不稳定的. 若将理查森格式中的中心结点值 u_j^n 用平均值 $(u_j^{n-1}+u_j^{n+1})/2$ 来代替, 便得到绝对稳定的杜福特-弗兰克尔格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_{j-1}^n}{\Delta x^2},$$

其截断误差是

$$e=O[(\Delta t)^2]+O[(\Delta x)^2]+O\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right].$$

该格式是杜福特(Du Fort, E. C.)和弗兰克尔(Frankel, S. P.)于1953年对抛物型方程提出的.

理查森格式(Richardson scheme) 见"杜福特-弗兰克尔格式".

交替方向隐式法(alternating direction implicit method) 一种计算多维热传导和扩散问题的分步数值方法, 简称 ADI 法. 它使用时间分裂技术, 得到只需对三对角矩阵求逆的一种多维隐式方法, 从而把隐式的无条件稳定性和一维问题的简单性结合起来. 对于二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

ADI 法是

$$\begin{cases} u_{i,j}^{n+1/2}-u_{i,j}^n=\dfrac{\sigma\Delta t}{2}\left(\dfrac{\delta_x^2u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}+\dfrac{\delta_y^2u_{i,j}^n}{\Delta y^2}\right), \\ u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1/2}=\dfrac{\sigma\Delta t}{2}\left(\dfrac{\delta_x^2u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}+\dfrac{\delta_y^2u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2}\right) \end{cases} \tag{2}$$

式中 Δt 和 $\Delta x, \Delta y$ 分别是时间和空间步长,

$$u_{i,j}^n=u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t),$$

$$u_{i,j}^{n+1/2}=u\left(i\Delta x, j\Delta y, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right),$$

$\delta_x^2(\delta_y^2)$ 为 $x(y)$ 方向二阶中心差分算子. 从(2)可见, 该方法由两步合成一个循环. 第一步 x 方向取隐式, y 方向取显式; 第二步则相反, 故称它作交替方向隐式方法. 该格式是相容且无条件稳定的, 每步只需解一个三对角线代数方程组, 可直接利用追赶法, 从而大大简化了计算.

这种形式的 ADI 法, 是皮斯曼(Peaceman, D. W.)和拉什福德(Rachford, H. H.)以及道格拉斯(Douglas, J.)等人于1955年发展起来的, 也称 PRD 法, 如直接推广到三维情况将损失精度且也不再无条件稳定了. 道格拉斯于1962年和布赖恩(Brian, P. L. T.)于1961年各自独立地发展了一种三维 ADI 法, 它是一个三步方法, 在一个时间步长 Δt 内, 逐次求两个中间值 $u_{i,j,k}^{n,1/3}$ 和 $u_{i,j,k}^{n,2/3}$, 最后求得 $u_{i,j,k}^{n+1}$, 也称它为道格拉斯-布赖恩方法. 对于三维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

此种差分格式是

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i,j,k}^{n,1/3}-u_{i,j,k}^n}{\sigma\Delta t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta_x^2(u_{i,j,k}^{n,1/3}+u_{i,j,k}^n)}{\Delta x^2}+\dfrac{\delta_y^2u_{i,j,k}^n}{\Delta y^2} \\ \qquad\qquad +\dfrac{\delta_z^2u_{i,j,k}^n}{\Delta z^2}, \\ \dfrac{u_{i,j,k}^{n,2/3}-u_{i,j,k}^n}{\sigma\Delta t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta_x^2(u_{i,j,k}^{n,1/3}+u_{i,j,k}^n)}{\Delta x^2} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta_y^2(u_{i,j,k}^{n,2/3}+u_{i,j,k}^n)}{\Delta y^2}+\dfrac{\delta_z^2u_{i,j,k}^n}{\Delta z^2}, \\ \dfrac{u_{i,j,k}^{n+1}-u_{i,j,k}^n}{\sigma\Delta t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta_x^2(u_{i,j,k}^{n,1/3}+u_{i,j,k}^n)}{\Delta x^2} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta_y^2(u_{i,j,k}^{n,2/3}+u_{i,j,k}^n)}{\Delta y^2} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta_z^2(u_{i,j,k}^{n+1}+u_{i,j,k}^n)}{\Delta z^2}, \end{cases} \tag{4}$$

式中一些差分记号类似于二维情况定义. 该格式由三步合成一个循环, 第一步 x 方向取隐式, y 和 z 方向取显式; 第二步 y 方向取隐式, x 和 z 方向取显式; 第三步 z 方向取隐式, x 和 y 方向取显式, 每步都是克兰克-尼科尔森型的格式, 只需解一个三对角线方程组, 可直接利用追赶法, 大大节省了计算工作量. 该格式可明显地推广到任意多个空间变量情形, 它是绝对稳定的.

交替方向法除上面两种形式外, 还有其他各种变形格式. 对于格式中出现的辅助未知量, 如格式(2)中的 $u_{i,j}^{n+1/2}$, 格式(4)中的 $u_{i,j,k}^{n,1/3}, u_{i,j,k}^{n,2/3}$, 在计算中就产生了如何给定边界条件的问题. 为了保持精度和稳定性, 边界条件必需仔细处理. ADI 法出现后, 许多人进一步发展了各种形式的分步格式(参见"局部一维方法"、"分步法"、"算子分裂法"), 这些方法构成了求解偏微分方程计算问题的一大类经济格式.

ADI 法(ADI method)　交替方向隐式法的简称.

道格拉斯-布赖恩法(Douglas-Brian method)　见"交替方向隐式法".

局部一维法(locally one dimensional methods)　一种数值求解多维热传导和扩散问题的分步法. 它把一个 P 维问题,在时间变量 t 的每个子区间上,化为 P 个一维问题来求解,简称它为 LOD 法. 对于二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

LOD 格式是

$$\begin{cases}\dfrac{u_{i,j}^{n+1/2}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\dfrac{\sigma}{\Delta x^2}\delta_x^2\left(\dfrac{u_{i,j}^{n+1/2}+u_{i,j}^{n}}{2}\right),\\ \dfrac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t}=\dfrac{\sigma}{\Delta y^2}\delta_y^2\left(\dfrac{u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j}^{n+1/2}}{2}\right),\end{cases}$$

式中 Δt 和 $\Delta x,\Delta y$ 分别是时间和空间步长;$u_{i,j}^n=u(i\Delta x,j\Delta y,n\Delta t)$,$\delta_x^2(\delta_y^2)$ 为 $x(y)$ 方向二阶中心差分算子. 该格式由两步组成一个循环,显然第一步和第二步分别是 x 方向和 y 方向克兰克-尼科尔森格式(参见"克兰克-尼科尔森格式"),故 LOD 格式可看做二维克兰克-尼科尔森格式的分步形式. 因为克兰克-尼科尔森格式是绝对稳定的,故 LOD 格式也是绝对稳定的. 又因为每步都只需解一个三对角线代数方程组,可直接利用追赶法,故 LOD 格式比二维克兰克-尼科尔森格式大大简化了计算. 利用 LOD 法,要处理好中间量 $u^{n+1/2}$ 的边界条件,否则会降低精度或产生不稳定性.

LOD 法(LOD method)　局部一维方法的简称.

算子分裂法(method of splitting operators)　一类偏微分方程数值解法. 指把复杂的算子分裂成几个较简单的子算子之积而导出的数值解法. 它既适用于典型的双曲型方程和抛物型方程,也适用于更复杂方程的初边值问题之求解. 例如,麦科马克(MacCormack,R. W.)把多维麦科马克格式分裂成数个一维算子的积. 对二维情况,麦科马克格式是

$$u_{i,j}^{n+1}=Lu_{i,j}^n=L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_x(\Delta t)L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{i,j}^n,$$

式中 $\Delta t,\Delta x,\Delta y$ 分别为 t 方向,x 方向和 y 方向的网格步长;$u_{i,j}^n$ 记 $u(i\Delta x,j\Delta y,n\Delta t)$;$L_x$ 和 L_y 分别为 x 方向和 y 方向的一维麦科马克差分算子(参见"麦科马克格式"). 显见,通过算子分裂简化了格式结构,减少了计算工作量.

分步法(method of fractional steps)　亦称分裂法. 一类偏微分方程数值解法,即把一个较复杂的问题的每个时间步分裂成几个较简单的问题,用差分方法解这些较简单的问题,以便能得到原问题的近似解,而且节省工作量的数值解法,它不只限于典型的热传导方程和双曲型方程,而且对其他许多科学计算问题都有应用. 例如 ADI 法使用时间分裂来达到只需要对三对角线矩阵求逆的多维隐式方法;LOD 法把一个 P 维问题在每个时间步上化为 P 个一维问题来求解;算子分裂法把复杂的算子分裂成几个较简单的子算子之积来求解都属此类方法(参见"ADI 法"、"LOD 法"和"算子分裂法"),它们都达到了结构简单、使用方便、计算量节省的目的. 对这类方法来说,由于每个时间步被分解成几个中间步,故也称为时间分裂法. 如原时间步长算作整数步长,则中间步就用分数时间步长,故也把它称为分数步长法. 大约和交替方向法(ADI 法)发展的同时,苏联数学家发展了与此方法关系密切的分步法(或分裂法),其基本思想由巴格里诺夫斯基(Bagrinovski-i,K. A.)和戈杜诺夫(Годунов,С. К.)于 1957 年提出,亚年科(Yanenko,N. N.)于 1964 年作了更广泛的分析和发展.

分裂法(splitting method)　即"分步法".

时间分裂法(time-splitting method)　见"分步法".

分数步长法(fractional step method)　见"分步法".

双曲型方程差分法(finite difference methods of hyperbolic equation)　数值求解双曲型偏微分方程初值问题和初边值问题的主要方法. 它的基本步骤和研究内容见"偏微分方程初值问题差分法"、"有限差分法". 双曲型方程描写波动现像,其特征理论反映了它的本质性质,扰动恒以有限速度沿特征方向传播,依赖域和影响域的有界性也反映了波动以有限速度传播,这是双曲型方程的本质特点. 拟线性及非线性双曲型方程和方程组,如双曲型守恒律方程的定解问题,即使初、边值充分光滑,一般也只能在 t 的局部范围内得到光滑解,而在有限时间内其解可能产生奇性,如在气体力学问题中产生激波等自然现象. 因此,如何能算好激波之类的强间断解是双曲型方程的差分方法研究的中心课题. 激波捕捉(差分)方法是计算双曲型守恒律方程间断解的主导方法.

20 世纪 50 年代,发展了人工粘性法,以及迎风格式、拉克斯格式、戈杜诺夫格式为代表的一阶激波捕捉格式. 人工粘性法需要人为调节粘性系数;一阶格式由于数值(格式)粘性效应导致激波过渡区过分拉平.

20 世纪 60 至 70 年代,守恒型差分格式理论得到很大发展,出现了拉克斯-温德洛夫格式和麦科马克格式为代表的二阶格式. 虽然在解的光滑区域精

度得到改善，间断过渡陡峭，但由于色散效应，在间断附近数值解结果产生非物理振荡，有时导致非线性不稳定性.

20 世纪 70 年代末以来，发展了许多现代高分辨率激波捕捉格式，如高阶戈杜诺夫方法、TVD 格式等，它们具有如下特点：

1. 在解的光滑区至少有二阶精度.

2. 激波过渡陡峭，不产生非物理振荡.

3. 无需预先确定人工粘性，具有自适应耗散性.

目前，高分辨率差分格式的研究仍是热点课题.

双曲型方程混合初边值问题差分法的稳定性 (stability of difference methods for mixed initial-boundary-value problems for hyperbolic equations) 研究双曲型偏微分方程(组)混合初边值问题的差分格式的稳定性. 实际要求解的双曲型方程(组)往往提为初边值问题，此时相应差分格式的稳定性问题变得更为复杂. 对于规则求解区域、等距规则网格情况，稳定性分析的困难来自于：

1. 必须考虑边界条件的离散方式，若对边界条件采用不恰当的数值离散格式，可能引起计算上的不稳定.

2. 由于内点差分格式计算上的需要，往往需要人为地补充原微分方程定解问题所没有的，附加的数值边界条件，若这(些)条件选用不当也会引起计算精度降低甚至不稳定现象.

例如，考虑一维常系数双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (x > 0, t > 0), \qquad (1)$$

其中 $U = U(x,t) = (U_1, U_2, \cdots, U_m)^T$ 是 m 维向量，A 是 m 阶常矩阵，它具有 m 个非零相异实特征值：$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0 > \lambda_{r+1} > \cdots > \lambda_m$. 由于求解区域是第一象限($x>0, t>0$)，根据双曲型方程的特征理论，为使原方程有解，不仅需要初始条件

$$U(x,0) = U_0(x) \quad (0 \leqslant x < +\infty), \qquad (2)$$

还必须在左边界 $x=0, t>0$ 的点上给出 r 个独立的边界条件，使该初边值问题是适定的.

利用如下三层显式格式求解上述初边值问题，设这一格式在前面两层上都利用相邻三个网格点，记为

$$V_i^{n+1} = Q_0 V_i^n + Q_1 V_i^{n-1}, \qquad (3)$$

其中 V_i^n 表示在网格点 $(i\Delta x, n\Delta t)$ 上 $U(i\Delta x, n\Delta t)$ 的近似值.

$$Q_k = \sum_{j=-1}^{1} A_{jk} T^j \quad (k = 0, 1), \quad TV_i = V_{i+1}, \qquad (4)$$

A_{jk} 是独立于网格步长的常数矩阵，当使用格式(3)进行计算时，除了必须有两层初始值之外，还必须能够逐层确定边界网格点上的值 V_0，即必须给出左边界条件，设它们被表示为

$$V_0^{n+1} = S(\{V_i^n\}_{0\leqslant i\leqslant \mu}, \{V_i^{n-1}\}_{0\leqslant i\leqslant \mu}, \{V_i^{n+1}\}_{1\leqslant i\leqslant \mu}), \qquad (5)$$

其中 μ 是一给定的正整数，S 是诸变元的线性齐次函数. 因为 V_0 是一个 m 维向量，故(5)式实际表示 m 个线性关系式，比原微分方程定解问题的边界条件数 r 多 $m-r$ 个，它们来自于需补充的 $m-r$ 个数值边界条件.

在考虑初边值问题的差分格式的稳定性时，自然要求对纯初值问题而言差分格式(3)是稳定的，即至少要求满足冯·诺伊曼条件. 既然引入了边界格式，就要考虑它(们)对整个稳定性的影响，即必须满足初边值问题差分格式的稳定性的必要条件——戈杜诺夫-雅宾克稳定性判据(若差分格式(3)，(4)，(5)是稳定的，则它不允许有如下形式的解：$V_j^n = Z^n \varphi_j$ (Z 为复数，φ_j 是和 V_j^n 同维的向量)，其中

$$|Z| > 1, \varphi_j \neq 0,$$

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j|^2 \Delta x < +\infty).$$

以及其他附加条件.

数值边界条件 (numerical boundary conditions) 偏微分方程数值解法术语. 指由于内点差分格式计算的需要，人为地补充的微分方程定解问题所没有的，附加的边界条件. 例如，考虑单向波方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} & (x > 0, t > 0), \\ u(x,0) = f(x) & (x \geqslant 0). \end{cases} \qquad (1)$$

其特征线为 $x+t=\text{const}$，沿特征线 $u(x,t)$ 保持常数值. 问题(1)的解是 $u(x,t)=f(x+t)$，故 $u(0,t)=f(t)$，因此在左边界 $x=0, t>0$ 上不需要任何边界条件. 若用蛙跳格式

$$v_j^{n+1} - v_j^{n-1} = r(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \qquad (2)$$

来求解，式中 $r=\Delta t/\Delta x$，是时间步长和空间步长的比值. v_j^n 表示在网格点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ 上 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ 的近似值. 因(2)式是三层格式，故必须在 $t=0$ 和 $t=\Delta t$ 两个时间层上给定初值，从问题(1)已知 $v_i^0 = f_i = f(i\Delta x)$，而 v_i^1 可以用适当方式被定出，例如用二层显式格式事先求出 v_i^1. (2)式是对称中心型格式，故在左边界 $x=0, t>0$ 上应补充一个数值边界条件，设取作

$$B(v_0^n) = 0, \qquad (3)$$

其中 B 为边界差分算子，如以微分方程定解问题真解 $u(x,t)$ 代入(3)式，得到数值边界格式的截断误差 $\tau(u_0^n) \equiv B(u_0^n)$，取 $r=\Delta t/\Delta x=\text{const}$. 按泰勒级数展开式估计出 $\tau(u_0^n) = O(\Delta x^{p+1})$ (当 $\Delta x \to 0$ 时)，则称此数值边界格式具有 p 阶精度，若 $p \geqslant 0$，则称它与微分方程定解问题相容. 显然增补的数值边界条件必须和微分方程定解问题相容，关于数值边界条件对稳定性的影响(参见"双曲型方程混合初边值问

题差分法的稳定性").

边界产生的不稳定性(instability generated from boundary)　偏微分方程数值解法术语. 指在用差分方法求解双曲型方程(组)初边值问题时,由于对边界条件采用不恰当的数值离散格式,或由于采用了不恰当的人为数值边界条件而引起的计算不稳定性现象(参见"双曲型方程混合初边值问题差分法的稳定性").

戈杜诺夫-雅宾克稳定性条件(Godunov-Ryabenkii condition)　亦称戈杜诺夫-雅宾克判据. 初边值问题差分格式的稳定性必要条件(参见"双曲型方程混合初边值问题差分法的稳定性").

特征线方法(method of characteristics)　一种双曲型偏微分方程数值解法. 指以特征理论为基础,求解双曲型偏微分方程的近似计算方法. 它产生于19世纪末,20世纪三四十年代,曾应用此算法作人工计算,解决了一些问题,电子计算机出现之后,得到进一步发展和广泛应用. 以两个自变量两个未知函数的一阶拟线性双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x}=F(x,t,U) \qquad (1)$$

为例说明此方法,式中

$$U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$$

为二维向量,A 为二阶方阵. 如(1)是狭义双曲型的,则存在可逆矩阵

$$G=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}$$

和实对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$

使 $A=G^{-1}\Lambda G$,其中 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 为矩阵 A 的实特征值. 特征方向

$$\tau_i:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda_i\ (i=1,2), \qquad (2)$$

确定方程(1)的第 i 族特征线,沿这族特征线的特征关系是

$$g_{i,1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+g_{i,2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=g_{i,1}f_1+g_{i,2}f_2\ (i=1,2), \qquad (3)$$

或

$$g_{i,1}\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\tau_i}+g_{i,2}\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\tau_i}=f_i^*(i=1,2), \qquad (4)$$

式中

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\right)_{\tau_i}(i,j=1,2)$$

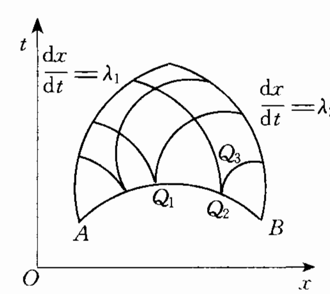
表示函数 u_j 沿特征方向 τ_i 的方向导数,$f_i^*=g_{i,1}f_1+g_{i,2}f_2(i=1,2)$. 特征线方法就是利用特征线(2)上的特征关系(4)来求方程(1)的近似解的数值方法. 设在两个邻近的点 $Q_1(x^{(1)},t^{(1)})$ 和 $Q_2(x^{(2)},t^{(2)})$ 上已知函数值相应为 $(u_1^{(1)},u_2^{(1)})$ 和 $(u_1^{(2)},u_2^{(2)})$,则可按如下方法近似地求出过 Q_1 的第一族特征线与过 Q_2 的第二族特征线的交点的位置 $Q_3(x^{(3)},t^{(3)})$ 以及其上的函数值 $(u_1^{(3)},u_2^{(3)})$. 对 $i=1,2$ 差分化特征线方程(2)得

$$\begin{cases}x^{(3)}-x^{(1)}=\lambda_1^{(1)}(t^{(3)}-t^{(1)}),\\x^{(3)}-x^{(2)}=\lambda_2^{(2)}(t^{(3)}-t^{(2)}).\end{cases} \qquad (5)$$

对 $i=1,2$ 差分化特征关系(4)得

$$\begin{cases}g_{11}^{(1)}(u_1^{(3)}-u_1^{(1)})+g_{12}^{(1)}(u_2^{(3)}-u_2^{(1)})\\\quad=f_1^{*(1)}(t^{(3)}-t^{(1)}),\\g_{21}^{(2)}(u_1^{(3)}-u_1^{(2)})+g_{22}^{(2)}(u_2^{(3)}-u_2^{(2)})\\\quad=f_2^{*(2)}(t^{(3)}-t^{(2)}),\end{cases} \qquad (6)$$

式中上标 (j) 表示在 Q_j 点上求值. 从(5)式可解得交点 Q_3 的坐标的近似值 $x^{(3)}$ 和 $t^{(3)}$;从(6)式可解出交点 Q_3 上的函数的近似值 $u_1^{(3)}$ 和 $u_2^{(3)}$. 如果(5)式和(6)式中的系数和右端项取为 Q_1 和 Q_3(Q_2 和 Q_3)上相应量的平均值,就把计算结果从一阶精度提高到二阶精度. 利用上述方法逐点计算可得到特征线网格(见示意图)及其上各网格点的解.



特征线网格示意图

耗散型差分格式(dissipative difference schemes)对称双曲型方程组的一类差分格式. 设差分格式的局部放大矩阵为 $G(x,\Delta t,\xi)$,式中 $\xi=\Delta xk$,以 λ_v 记 G 的特征值. 如果存在一个常数 $\delta>0$,使得对满足 $\max_j|\xi_j|\leqslant\pi$ 的所有 ξ,所有 x 以及小于某个数 $\tau>0$ 的所有 Δt,有 $|\lambda_v(x,\Delta t,\xi)|\leqslant 1-\delta|\xi|^{2r}$,式中 $|\xi|$ 表示 ξ 的欧氏向量范数,r 是正整数,则称该差分格式为 $2r$ 阶耗散的.

克赖斯耗散型差分格式稳定性定理(Kreiss Stability theorem for dissipative difference scheme)　判定耗散型差分格式是否稳定的一个定理. 对于双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}=A(x)\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad (1)$$

其中 $U=U(x,t)$ 是 P 维向量,$A(x)$ 是 P 阶矩阵. 设其差分格式是

$$U^{n+1}=\sum_{(\beta)}C^\beta(x,\Delta t,\Delta x)U(x+\beta\Delta x). \quad (2)$$

克赖斯(Kreiss,H. O.)于1964年证明了如下定理:假定在微分方程(1)和它的差分格式(2)中 $A(x)$ 和

$C^{\beta}(x,\Delta t,\Delta x)$都是埃尔米特矩阵，一致有界且关于$x$一致李普希兹连续，如对某个正整数$r$，差分格式(2)是$2r$阶耗散的，而且具有$2r-1$阶精确度，则差分格式(2)是稳定的.

对于$A(x)$有相异实特征值，即方程组(1)为正则双曲型的情况，帕莱特(Parlett,B. N.)于1966年证明$2r-2$阶精确度就足以保证差分格式(2)是稳定的(参见"耗散型差分格式").

伪粘性法(pseudo-viscosity method) 亦称人工粘性法，又称冯·诺伊曼-里希特迈耶伪粘性法.简称V-R法.一种差分方法.它是通过引进显式人工粘性项计算无粘流激波间断解的差分方法，它不考虑激波而使激波在应出现的地方自动呈现或被捕捉.此方法在无粘非定常流体力学方程中，把压力项附加上VR人工粘性(参见"人工粘性")项，用差分法解所有修正方程，即把原方程的激波间断解代之以修正方程的连续过渡解.一维平板对称情况，在附加人工粘性后的拉格朗日型修正方程是

$$\frac{\partial X}{\partial t}=u, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(p+q)}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-(p+q)\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{3}$$

$$V=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial X}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\varepsilon=F(p,\rho). \tag{5}$$

其中t是时间坐标，x是拉格朗日坐标，ρ_0是具有密度量纲的常数，X是欧拉坐标；u,p,ε,V,ρ分别是速度、压力、内能、比容和密度.q是VR人工粘性项，方程(5)是状态方程.VR法的差分格式是：

$$\frac{X_j^{n+1}-X_j^n}{\Delta t}=u_j^{n+1}, \tag{6}$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n+q_{j+1/2}^n-q_{j-1/2}^n}{\Delta x}, \tag{7}$$

$$V_{j+1/2}^{n+1}=\frac{1}{\rho_0}\frac{X_{j+1}^{n+1}-X_j^{n+1}}{\Delta x}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{j+1/2}^{n+1}-\varepsilon_{j+1/2}^n+\left(\frac{p_{j+1/2}^{n+1}+p_{j+1/2}^n}{2}+q_{j+1/2}^{n+1}\right)\cdot(V_{j+1/2}^{n+1}-V_{j+1/2}^n)=0, \tag{9}$$

$$p_{j+1/2}^{n+1}=f(\varepsilon_{j+1/2}^{n+1},V_{j+1/2}^{n+1}), \tag{10}$$

$$q_{j+1/2}^n=\begin{cases}\dfrac{2b^2}{V_{j+1/2}^n+V_{j+1/2}^{n-1}}(u_{j+1}^n-u_j^n)^2 & (u_{j+1}^n-u_j^n<0),\\ 0 & (u_{j+1}^n-u_j^n\geqslant 0),\end{cases} \tag{11}$$

式中b为无量纲常数，$\Delta t,\Delta x$分别是时间和拉格朗日空间步长.$u_j^n=u(j\Delta x,n\Delta t)$，$X_j^{n+1}=X(j\Delta x,(n+1)\Delta t)$，$X_j^n,u_j^n,\cdots$等类似定义.此方法算法简单、易于在计算机上实现，它对于求解非定常可压缩流体力学中的激波、接触间断计算问题是相当有效的.

伪粘性法是美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann,J.)和里希特迈耶(Richtmyer,R. D.)首创的(1950).从冯·诺伊曼以后，在流体力学方程中加上人工粘性项以处理间断解已成为一项普遍采用的技巧，只是在不同方法中所采用的人工粘性项的形式有所不同.故此类凭借引入人工粘性项的方法也可统称为伪粘性方法.它的原则同样适用于一般双曲型守恒律微分方程的间断解计算.

人工粘性法(artificial viscosity method) 即"伪粘性方法".

冯·诺伊曼-里希特迈耶伪粘性法(von Neumann-Richtmyer method) 即"伪粘性方法".

VR法(VR method) 伪粘性方法的简称.

人工粘性(artificial viscosity) 亦称伪粘性或人为粘性.非线性双曲型偏微分方程间断解数值解法的基本概念之一.为数值计算激波和接触间断而在流体力学方程组中人为增加的一项的名称，在一维拉格朗日坐标系方程中引入的人工粘性的表达式为

$$q=-\rho(b_1\Delta x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x},$$

式中ρ为流体密度，u为速度，Δx为空间步长，b_1为可调常数.后来罗森卢思(Rosenbluth,M.)提出了改进的形式

$$q=\begin{cases}\rho(b_1\Delta x)^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}<0\right),\\ 0 & \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\geqslant 0\right).\end{cases}$$

对于压缩情况这两种形式完全一致，而对于膨胀情况前者为负值，后者为零值.对于大多数问题来说，这两个公式都是令人满意的，因为除激波区外，q总是很小的.当出现极度膨胀时后者要好一些，故近年通用后者，一般就称它为冯·诺伊曼-里希特迈耶(人工)粘性，简称VR粘性.

人工粘性概念首先由匈牙利-美国数学家冯·诺伊曼(von Neumann,J.)于1944年提出，并由他和里希特迈耶(Richtmyer,R. D.)于1950年公开发表.他们的思想概括为：在动量方程和能量方程中加入人工粘性项，用差分法解所得方程，使得在激波阵面上的间断解变成一个光滑过渡的激波过渡区，这个过渡区的宽度应与计算步长同一量级、而与激波强度、计算时间步数无关，该项仅在激波过渡区起作用，远离过渡区其作用可以忽略.从冯·诺伊曼以后，一些学者发展了若干不同形式的人工粘性项，当用差分法解流体力学方程组时，在方程中加上人工粘性项以处理间断解就成为一种普遍采用的技术.

伪粘性(pseudo viscosity)　即"人工粘性".

冯·诺伊曼-里希特迈耶粘性(von Neumann-Richtmyer viscosity)　见"人工粘性".

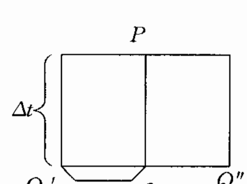
VR 粘性(VR viscosity)　冯·诺伊曼-里希特迈耶粘性的简称.

库朗-艾萨克桑-里斯法(Courant-Issacson-Rees method)　一种有限差分格式. 指以拟线性双曲型一阶偏微分方程的特征形式为基础的数值解法,简称 CIR 格式或 CIR(差分)法. 对已化为特征型的拟线性双曲型方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\left(\frac{\partial u_j}{at}+c_i\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)=d_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\quad(1)$$

其中 $a_{i,j}, c_i$ 和 d_i 均为 x, t 和 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的函数. 建立矩形网格,Δx 和 Δt 分别是 x 方向和 t 方向的网格步长,令 $\Delta t/\Delta x=r$. 设 Q',Q 和 Q''是某一时间层上相邻三个结点,而 P 是在 Q 之上的下一时刻的结点(如图),如已知 Q',Q 和 Q''的解的近似值$u_i(Q')$,$u_i(Q)$ 和$u_i(Q'')$ $(i=1,2,\cdots,n)$,求 $u_i(P)$的差分格式:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(Q,u(Q))\Big[\frac{u_j(P)-u_j(Q)}{\Delta t}\\ \qquad\displaystyle+c_i(Q,u(Q))\frac{u_j(Q)-u_j(Q')}{\Delta x}\Big]\\ =d_i(Q,u(Q))\ \ (c_i(Q,u(Q))\geqslant 0),\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(Q,u(Q))\Big[\frac{u_j(P)-u_j(Q)}{\Delta t}\\ \qquad\displaystyle+c_i(Q,u(Q))\frac{u_j(Q'')-u_j(Q)}{\Delta x}\Big]\\ =d_i(Q,u(Q))\ \ (c_i(Q,u(Q))<0)\\ \quad(i=1,2,\cdots,n).\end{cases}\quad(2)$$



即格式(2)是由方程(1)系数在点 Q 取值,时间差分取前差,而对每个特征方程,按相应特征线斜率的符号取空间向前差分或向后差分而构成的. 它实质上是迎风格式(参见"迎风格式"),它的稳定性条件是$r|c_i|_{\max}\leqslant 1$. 该格式反映了双曲型方程的特征理论的本质,在它之后以特征理论为基础的各种迎风格式得到很大发展. 该方法是库朗(Courant,R.)、艾萨克桑(Issacson,E.)、里斯(Rees,M.)于 1952 年提出的.

CIR 法(CIR method)　库朗-艾萨克桑-里斯法的简称.

激波捕捉法(shock capture methods)　亦称激波抹平法. 一种激波数值处理方法. 它们是一种在差分格式中直接或间接加入相当于粘性的项使间断光滑化的方法,它不考虑激波,在光滑区和间断处采用统一格式求解,使激波在应出现的地方自动呈现或被捕捉. 直接加入 VR 人工粘性项的 VR 伪粘性法,通过差分格式结构间接引入粘性项的拉克斯格式、TVD 法、戈杜诺夫方法等都属此类. 自从美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)和里希特迈耶(Richtmyer, R. D.)于 1950 年发表 VR 伪粘性法以来,激波捕捉法得到很大发展,它们算法简单、易于在计算机上实现,是现代计算流体力学的主导方法.

激波抹平法(shock smearing methods)　即"激波捕捉法".

激波装配法(shock-patching method)　一种激波数值处理方法. 它把激波当做未知的运动边界,按照激波间断条件——兰金-雨贡纽激波关系式把激波分离出来,准确算出激波位置,在光滑区用近似方法求解微分方程,而在间断处用兰金-雨贡纽关系式求解. 激波装配法具有精度高,激波位置精确,物理图象清楚等优点. 但计算十分繁复,因此它只适用于那些激波运动情况较简单,流场图案清楚的流动.

迎风格式(upwind method)　亦称上风格式. 数值求解双曲型偏微分方程的一种重要的差分方法. 指在对空间导数进行离散时,该格式依据特征线的不同方向(风向),分别取向前或向后差分,以保证在计算任何一点的数值解时,都利用了沿特征线传播的上游信息. 例如对双曲型对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

依据 a 的不同符号,迎风格式分别为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0\quad(a>0),$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=0\quad(a<0).$$

无论 a 取何值,格式精度均为 $O(\Delta t+\Delta x)$. 在 $|a\Delta t/\Delta x|\leqslant 1$ 时,格式稳定、收敛. 迎风格式的一个优点是,它能保持解的单调性质.

上风格式(upwind method)　即"迎风格式".

拉克斯-弗里德里希斯格式(Lax-Friedrichs scheme)　解双曲型守恒律方程的一种一阶守恒型差分格式,简称拉克斯格式. 对于守恒型方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0,$$

拉克斯格式为

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{i-1}^n+u_{i+1}^n)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}[F(u_{i+1}^n)-F(u_{i-1}^n)],$$

式中 $F(v)$为通量,Δt 和 Δx 分别为时间和空间步长,$u_i^n=u(i\Delta x,n\Delta t)$,令

$$\begin{aligned}G_{i+1/2}^n&=G(u_i^n,u_{i+1}^n)\\&=\frac{1}{2}[F(u_i^n)+F(u_{i+1}^n)]-\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}(u_{i+1}^n-u_i^n),\end{aligned}$$

则拉克斯格式成为

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(G_{i+1/2}^n-G_{i-1/2}^n).$$

故拉克斯格式是守恒型格式(参见“守恒型格式”).该格式的特点是它极其简单,但其分辨能力较差.它出现在拉克斯(Lax,P. D.)于1954年发表的关于守恒型方程的基础性论文中.

拉克斯格式(Lax scheme) 拉克斯-弗里德里希斯格式的简称.

鲁沙诺夫格式(Rusanov scheme) 解非定常流体力学方程的一种守恒型差分格式.对于一维非定常流体力学方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0,$$

鲁沙诺夫格式是

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(G_{i+1/2}^n-G_{i-1/2}^n),$$

式中

$$G_{i+1/2}^n=G(u_i^n,u_{i+1}^n)=\frac{1}{2}(F(u_i^n)+F(u_{i+1}^n))-\frac{1}{4}(\alpha_i^n+\alpha_{i+1}^n)(u_{i+1}^n-u_i^n)\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$G_{i-1/2}^n=G(u_{i-1}^n,u_i^n)=\frac{1}{2}(F(u_{i-1}^n)+F(u_i^n))-\frac{1}{4}(\alpha_{i-1}^n+\alpha_i^n)(u_i^n-u_{i-1}^n)\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

Δx 和 Δt 分别是空间和时间步长,

$$\alpha_i^n=\omega\frac{\Delta t}{\Delta x}(v_i^n+c_i^n),$$

ω 是可调参数,$v_i^n=v(i\Delta x,n\Delta t)$是速度,$c_i^n=c(i\Delta x,n\Delta t)$是当地声速.该格式由苏联数学家鲁沙诺夫(Rusanov,V. V.)于1961年发表的.

正系数有限差分法(finite difference method with positive coefficients) 单个双曲型守恒律的一类差分方法.以单向波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

(其中 a 为常数)的差分格式为例.它的二层显式格式可写为

$$u_j^{n+1}=\sum_{k=-J}^{J}c_k u_{j+k}^n,$$

其中 $u_j^{n+1}=u(j\Delta x,(n+1)\Delta t)$,$\Delta t$ 和 Δx 分别是时间和空间步长.若常系数 $c_k\geqslant 0(k=0,\pm 1,\cdots,\pm J)$,就称此类格式为正系数有限差分法,简称正型格式.迎风格式,拉克斯格式都是此类格式.它的相容性条件是

$$\sum_{k=-J}^{J}c_k=1 \text{ 和 } \sum_{k=-J}^{J}kc_k=-a\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

正型格式具有一个重要性质,即它保持解的单调性.正型格式是单调格式(参见“单调差分法”).可以证明它的截断误差只能是一阶的.

单调差分法(monotone difference methods) 单个双曲型守恒律的一类差分方法.有限差分法

$$u_i^{n+1}=Qu_i^n=H(u_{i-q}^n,u_{i-q+1}^n,\cdots,u_{i+q}^n)$$

称为是单调的,若对 H 的 $2q+1$ 个变量中的每一个 H 均为单调非减函数,即

$$H_j\equiv\frac{\partial H}{\partial u_{i-j}^n}\geqslant 0\ (-q\leqslant j\leqslant q).$$

哈坦(Harten,A.),海曼(Hyman,J. M.)和拉克斯(Lax,P. D.)于1976年证明了:若单个守恒律的守恒型差分格式是单调的,则它的截断误差是一阶的.如果初始值是单调的,可证单调差分方法的解也应保持这种单调性,具有这种性质的格式称为保持单调性的.对线性情况,戈杜诺夫(Годунов,С. К.)于1959年证明单调格式和保持单调性格式是等价的,实际上对线性情况,戈杜诺夫就直接称保持单调性的格式为单调格式(参见“正系数有限差分法”);但对于非线性差分格式,两者却并不是等价的.范利尔(Van leer,B.)于1974年和哈坦于1978年等都构造出二阶的保持单调性格式.

保持单调性的差分格式(monotonicity preserving difference schemes) 单个双曲型守恒律的一类差分方法.如果初始值是单调的,差分格式的解仍然保持这种单调性,则称具有此种性质的格式为保持单调性的格式.单调差分方法就是保持单调性的(参见“单调差分法”);TVD格式也是保持单调性的(参见“有界变差非增格式”).

戈杜诺夫法(Godunov method) 亦称戈杜诺夫格式.它是以黎曼问题解为基础的求解非定常可压缩无粘流动问题的一种守恒型差分方法,它同样适用于一般双曲型守恒律微分方程.设待解双曲型守恒律微分方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$u_i^n=u(i\Delta x,n\Delta t)$已知,$\Delta x$ 和 Δt 分别是空间和时间步长,该法考虑 x 的分段常数函数

$$u^n(x)=u_i^n\quad(x\in I_i^{1/2}), \tag{2}$$

其中

$$I_i^{1/2}=[(i-\frac{1}{2})\Delta x,(i+\frac{1}{2})\Delta x],$$

为从 $n\Delta t$ 到$(n+1)\Delta t$ 求解,研究由(1)和(2)所给出的初值问题,在每个区间 $I_i=[i\Delta x,(i+1)\Delta x]$上这个初值问题确定一个黎曼问题,故初值问题(1)和(2)形成一系列黎曼问题.设这些黎曼问题可解出,对CFL条件适当加以限制使这些黎曼问题的解互不相交,于是初值问题(1)和(2)有解 $v^e(x,t)$:

$$v^e(x,t)=R\left(\frac{x-(i+1/2)\Delta x}{t-n\Delta t},u_i^n,u_{i+1}^n\right)\quad(x\in I_i), \tag{3}$$

这里 R 表 I_i 区间黎曼问题的解. 从而得到 v^e 在格子交界面 $x=x_{i+1/2}$ 上的解值 $R(0,u_i^n,u_{i+1}^n)$. 为得到 u_i^{n+1},在矩形 $I_i^{1/2}\times[n\Delta t,(n+1)\Delta t]$ 上积分(1),利用格林公式可得到

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}[F(R(0,u_i^n,u_{i+1}^n))-F(R(0,u_{i-1}^n,u_i^n))]=u_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}[F_{i+1/2}^n-F_{i-1/2}^n], \quad (4)$$

其中 $F_{i+1/2}^n=F(u_{i+1/2}^n)$, $u_{i+1/2}^n=R(0,u_i^n,u_{i+1}^n)$. 类似地可确定 $F_{i-1/2}^n$ 和 $u_{i-1/2}^n$.

总之,戈杜诺夫格式是两步差分方法,它把 $t_n=n\Delta t$ 的数值解近似取作分段常数函数,计算下一时间层 $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ 的数值近似分两步进行:

1. 从黎曼问题求出格子交界面上的函数值 $u_{i+1/2}^n$.

2. 从格式(4)求出时间层 t_{n+1} 的数值近似 u_i^{n+1}.

戈杜诺夫法是守恒型格式. 原始的戈杜诺夫格式是一阶格式,但由于把黎曼问题的解析解的结果引入到格式的构造中,计算激波之类间断解的效果不仅胜于一般的一阶格式,甚至胜于拉克斯-温德洛夫之类的经典二阶格式. 该方法是由苏联数学家戈杜诺夫(Годунов,С. К.)于 1959 年提出的. 范利尔(Van leer,B.)于 1979 年提出把分段常数函数(2)以分段线性函数代替,从而发展了具高分辨率的二阶戈杜诺夫方法,也称 Muscl 格式.

戈杜诺夫格式(Godunov scheme)　即"戈杜诺夫方法".

随机选取法(random choice method)　亦称格里木法. 求解非线性双曲型守恒律方程组的一类数值方法. 一个空间变量的守恒律方程组形为

$$\partial_t \underline{u}+\partial_x \underline{F}(\underline{u})=0, \underline{u}(x,0)=\underline{u}_0(x).$$

在用随机选取法求解时,与差分方法相同,也要先将求解区域剖分成网格,按离散时间逐层求解. 在每个时间步,随机选取法包括两个步骤:

1. 在初始时刻 $t=t_n$,用阶梯函数近似初值,令

$$\underline{\tilde{u}}(x,t_n)=u_j^n\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)\Delta x<x<\left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta x\right).$$

由此每个 $x_{j+1/2}$ 点都是间断点. 在每个间断点上计算任意间断分解,即求解如下形式的一系列黎曼问题

$$\partial_t \underline{u}+\partial_x \underline{F}(\underline{u})=0,$$

$$\underline{u}(x,0)=\begin{cases}\underline{\tilde{u}}_L & (x<0),\\ \underline{\tilde{u}}_R & (x>0).\end{cases}$$

式中 $\underline{\tilde{u}}_L,\underline{\tilde{u}}_R$ 为两个常向量,依次表示间断点左和右的初始状态.

2. 在 $t=t_{n+1}$,利用随机抽取,在每个区间 (x_j,x_{j+1}) 上确定一点 $\tilde{x}_{j+1/2}=x_{j+1/2}+\xi_n\Delta x$,式中 ξ_n 是在 $(-1/2,1/2)$ 上均匀分布随机变量的抽样值. 以任意间断分解在点 $(\tilde{x}_{j+1/2},t_{n+1})$ 的值作为整个区间上的值. 按照上述步骤,计算可在交错网格上持续进行. 此外,该方法还有另外一种由科尔拉(Colella,P.)提出的,在一般网格上的实现方式. 这一方法是无条件稳定的,但为保证从相邻间断点上出发的波不交,CFL 条件必须满足.

1965 年,格里木(Glimm,J.)在一篇讨论非线性双曲型方程组大范围解存在性的论文中,创造性地借助于随机抽样对解加以构造,1976 年,乔里恩(Chorin,A. J.)将这一方法稍加改造,使之成为独具特色的数值方法. 使用随机选取法的前提是相应的黎曼问题可解. 但求解一系列黎曼问题工作量极大. 为克服这一困难,哈坦(Harten,A.),拉克斯(Lax,P. D.)和罗(Roe,P. L.)等人相继提出了用近似解代替黎曼问题精确解的多种不同方法.

格里木法(Glimm method)　即"随机选取法".

黎曼问题(Riemann problem)　双曲型守恒律方程组的一类特定初值问题. 其数学形式为求解初值问题:

$$\partial_t \underline{u}+\partial_x \underline{F}(\underline{u})=0, \quad (1)$$

$$\underline{u}(x,0)=\begin{cases}\underline{u}^{(0)} & (x<0),\\ \underline{u}^{(n)} & (x>0).\end{cases} \quad (2)$$

其中方程组(1)是严格双曲型方程组,x 与 t 分别为空间与时间变量,$\underline{u}^{(0)}$,$\underline{u}^{(n)}$ 是 R^n 中的两个常向量.

拉克斯(Lax,P. D.)于 1957 年证明了,当方程组(1)是真正非线性时,则存在 $\underline{u}^{(0)}$ 的一个邻域 U,使当 $\underline{u}^{(n)}\in U$ 时,方程组(1),(2)在 $t\geqslant 0$ 有解;这个解一般由 $n+1$ 个常数区域及 n 个初等波构成. 当所有中间状态均限定在 $\underline{u}^{(0)}$ 的一个邻域时,解还是惟一的.

德国数学家黎曼(Riemann,(G. F.)B.)于 1860 年首先研究了上述问题的一个特例,即气体力学中的激波管问题,故以黎曼命名.

线性化黎曼问题(linearized Riemann problem)　黎曼问题的线性化近似. 一般双曲型守恒律方程组黎曼问题为求解

$$\partial_t \underline{u}+\partial_x \underline{F}(\underline{u})=0, \quad (1)$$

$$\underline{u}(x,0)=\begin{cases}\underline{u}_L & (x<0),\\ \underline{u}_R & (x>0).\end{cases} \quad (2)$$

若将方程组(1)用其局部线性化方程组代替,即用

$$\partial_t \underline{u}+A(\underline{u}_L,\underline{u}_R)\partial_x \underline{u}=0 \quad (3)$$

代替,式中 $A(\underline{u}_L,\underline{u}_R)$ 表示对 $\underline{F}(\underline{u})$ 之雅可比矩阵的近似,则称由方程组(3)和(2)所组成的问题为原问题的线性化黎曼问题.

黎曼解算器(Riemann solver)　黎曼问题的若干特定近似解法. 例如罗(Roe,P. L.)的方法,其实

质是计算线性化黎曼问题的精确解；又如哈坦(Harten，A.)和海曼(Hyman，J. M.)的方法，该方法对罗的解算器加以修改，目的在于保证所得到的近似解在物理上是合理的.除上述二者外，尚有多种不同的解算器构造方式.

蛙跳格式(leap frog scheme) 一种差分格式.指求解双曲型方程的一种时间和空间都用中心差分的显式三层二阶差分格式.对双曲型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

式中未知函数 u 是 n 维向量，A 为 n 阶方阵.蛙跳格式是

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}+A\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}=0,$$

式中 n 和 i 分别为 t 和 x 方向的节点编号，Δt 和 Δx 分别是时间和空间步长，$u_i^{n+1}=u(i\Delta x,(n+1)\Delta t)$，$u_i^{n-1}$ 等类似定义.若已知$(n-1)$和(n)层的差分解，则可显式得到$(n+1)$层的解.它的稳定性条件是

$$\left|\lambda\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 1,$$

其中 λ 是矩阵 A 的谱半径.蛙跳格式是由库朗(Courant，R.)等人于1928年发表的.

欧拉差分法(Eulerian difference methods) 一类偏微分方程数值解法.指利用欧拉坐标系，从欧拉形式流体动力学方程出发的求解流体力学问题的差分方法的总称，简称欧拉方法.其特征是在固定的实验室参考坐标系中观察流场的变化，即速度分量和其他物理量都是欧拉空间坐标 x,y,z 和时间 t 的函数.欧拉方法是适用于解多维空间中流体具大畸变的流动问题的数值方法，但对多物质流动问题，如不加特殊处理，由于不同物质区域间会产生严重的物质扩散使界面和自由面的位置难于准确确定.拉格朗日方法却无此缺点，因此，综合欧拉方法和拉格朗日方法优点的一些数值方法得到发展，例如 PIC 法以及任意拉格朗日-欧拉法(ALE 法)等.

拉格朗日差分法(Lagrangian difference methods) 一类偏微分方程数值解法.指利用拉格朗日坐标，从拉格朗日形式流体动力学方程出发求解流体力学问题的差分方法的总称，简称拉格朗日法.

拉格朗日坐标建立在流体质团上，跟踪质团的运动，因此，拉格朗日法就是数值的研究固定质团的位置、速度和其他力学量的变化的差分方法.通常取 $t=0$ 时的质点坐标(x_0,y_0,z_0)和时间 t 作为拉格朗日坐标，即质点坐标(x,y,z)是时间 t 和表示质点初始位置的(x_0,y_0,z_0)的函数.一维问题经常利用质量坐标.

拉格朗日法有许多优点：方程形式比较简单，不出现输运项，因而容易建立精度高而又稳定的格式.由于它跟踪固定的质团，能够精确表示界面和自由面，所以可以用来计算包含多种物质的系统.由于一维流体力学运动中的质团是"有序的"，因此拉格朗日方法特别适于计算一维流动问题.因它不能处理大畸变和不同物质间剪切间断的滑移现象，故对于一些复杂的具大畸变的二、三维多物质流动问题会遇到困难，但借助滑移面技术和再分区技术在一定程度上可以克服这些困难.

任意拉格朗日-欧拉法(arbitrary Lagrangian-Eulerian computing methods) 综合拉格朗日法和欧拉法优点，而避免两者缺点的一种多步差分法，简称 ALE 法.它可以像拉格朗日法一样，让网格与流体成一体和流体一起运动，或像欧拉法一样让网格固定在空间，它也可以让网格以任意方式运动，因而有一种连续重分网格的能力，它比纯粹的拉格朗日法有更大的优点，因它可以处理较大畸变的流体运动；它比纯粹的欧拉法能提供更仔细的结果.如果把格式取成隐式，则它可以计算从低速流到高速流的任意流速的运动.该方法是希尔特(Hirt，C. W.)，阿姆斯丹(Amsden，A. A.)和库克(Cook，J. L.)于1974年发表的.

贡献网格法(donor cell method) 亦称第二迎风差分法或施主格子法.一种差分化方法.指对流体力学方程中的输运项按照迎风原则作差分离散的一种差分化方法.如对一维质量守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}=0$$

中的对流项$\frac{\partial\rho u}{\partial x}$，在离散化时各种物理量都在格子中心点 $x=x_i$ 取值，在格子左、右边界 $x_l=x_{i-1/2}$ 和 $x_r=x_{i+1/2}$上定义某种平均界面速度，如

$$u_l=u_{i-1/2}=\frac{u_{i-1}+u_i}{2},$$

$$u_r=u_{i+1/2}=\frac{u_i+u_{i+1}}{2}.$$

按照迎风原则确定差分化时用那个格子的密度 ρ 值

$$\frac{\partial\rho u}{\partial x}\approx\frac{\langle\rho u\rangle_{i+1/2}-\langle\rho u\rangle_{i-1/2}}{\Delta x},$$

其中

$$\langle\rho u\rangle_{i+1/2}=\begin{cases}\rho_{i+1}u_{i+1/2} & (u_{i+1/2}<0),\\ \rho_i u_{i+1/2} & (u_{i+1/2}>0).\end{cases}$$

类似地确定$\langle\rho u\rangle_{i-1/2}$，$\Delta x$ 是空间步长.在流体网格法(参见"流体网格法")中就是用贡献网格法差分化输运项的.

第二迎风差分法(second upwind differencing method) 即"贡献网格法".

质点网格法(particle-in-cell method) 简称 PIC 法.一种计算非定常可压缩理想流动问题的欧拉-拉格朗日混合法.它结合了欧拉法和拉格朗日法

的优点，适于计算二维和二维以上的多种物质和大变形流动的问题. 此方法的基本要点是，把含有多种物质的流动区域分成有限个欧拉网格，每个网格中的每种流体用一组特定的离散化拉格朗日质点表示，每个质点具有一定的质量、速度和能量，根据流体流动的初始状态确定每个网格内的质点的数目和分布. 计算开始后，质点在欧拉网格间迁移，模拟流体的运动. 在每个时间步内，计算分两步进行.

1. 欧拉步：忽略输运效应用差分法计算由压力分布所引起的欧拉网格上速度和能量的变化.

2. 拉格朗日步：根据第一步的结果，用加权平均方法计算出每个质点的速度，从而确定它们在一个时间步长后的新位置，质点在运动过程中携带着其质量及相应的动量和能量.

在 PIC 法基础上，又发展出 FLIC 法和 MAC 法等. PIC 法以及由它演变出来的一些方法都具有物理模拟的特点，受数学方程的约束较小，故能广泛用于流体动力学的各个领域. PIC 法的缺点在于它需要占用大量计算机存贮空间和耗费大量计算机时间. 此外，由于采用离散质点，故网格的密度和压力计算会产生跳动.

质点网格法是美国哈洛(Harlow, F. H.)等人于 1955 年提出的.

PIC 法(PIC method)　即“质点网格法”.

流体网格法(fluid-in-cell method)　求解非定常可压缩流动问题的一种欧拉差分法. 欧美简称它为 FLIC 法，苏联称它为大粒子法. 它和 PIC 法不同之处在于在第二步计算中不计算质点的迁移，而计算连续流体的迁移，即先算出通过网格边界的质量输运量，从而得到每个网格的新密度，再算出通过网格的质量所携带的动量和能量的输运量，最后得到每个网格的新速度和能量. 该方法的突出特点是对于复杂的流动问题用比较适中的计算机时间就可得到相当准确的解. 它特别适于包含大流动畸变的单种物质的流动问题.

流体网格法是里奇(Rich, M.)于 1963 年，金特里(Gentry, R. A.)、马丁(Martin, R. E.)、戴利(Daly, B. J.)于 1966 年以及别洛柴可夫斯基(Белоцерковский, О. М.)、达维多夫(Довыдов, Ю. М.)于 1971 年在哈洛的质点网格法基础上将单一网格元看做一个大粒子而发展起来的.

FLIC 法(FLIC method)　即“流体网格法”.

大粒子法(large particle method)　即“流体网格法”.

标记网格法(marked-and-cell method)　简称 MAC 法. 一种偏微分方程数值解法. 它是用差分法和标记点相结合的求解不可压缩自由表面流动问题的数值方法. 它采用原始变量型纳维-斯托克斯方程，把压力和速度作为基本未知量，将计算区域划分成欧拉矩形网格单元，压力定义在格子中心，而 x 方向速度分量沿格子左、右边界中点定义，y 方向速度分量沿格子上、下边界中点定义，用差分方法由动量方程和泊松方程分别计算出速度和压力. 此外，该方法还在网格中布置适量的无质量的标记点，由它们来确定自由表面，每个质点的位置由拉格朗日坐标来表示，它们不直接参加计算. 使用双变量线性插值计算标记点的速度，在整个计算过程中跟踪每个标记点，从而可确定自由表面的形状、位置及其演变情况.

标记网格法是哈洛(Harlow, F. H.)和韦尔奇(Welch, J. E.)在质点网格法基础上提出的.

MAC 法(MAC method)　即“标记网格法”.

守恒型差分格式(conservative finite difference schemes)　数值求解双曲型守恒律微分方程的一大类差分格式. 它们在离散意义下和原方程保持同样的守恒性质，可以说它们是守恒律的离散形式. 对双曲型守恒律方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

其中 v 是具 n 个分量的 x 和 t 的未知向量函数，$F(v)$ 是通量，它是给定的 v 的向量函数. 若方程(1)的差分格式

$$u_i^{n+1}=Q(u_{i-q}^n,u_{i-q+1}^n,\cdots,u_{i+q}^n) \tag{2}$$

的右端项可写为

$$Q(u_{i-q}^n,u_{i-q+1}^n,\cdots,u_{i+q}^n)$$
$$=u_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(G_{i+1/2}^n-G_{i-1/2}^n),$$

式中 $G_{i+1/2}^n=G(u_{i-q+1}^n,u_{i-q+2}^n,\cdots,u_{i+q}^n)$，$G_{i-1/2}^n=G(u_{i-q}^n,u_{i-q+1}^n,\cdots,u_{i+q-1}^n)$，$u_i^n=u(i\Delta x,n\Delta t)$，$\Delta t$ 和 Δx 分别表示时间和空间步长，则称差分格式(2)为守恒型差分格式. 向量函数 G 被称为数值通量. 若 G 满足 $G(v,v,\cdots,v)=F(v)$，则称差分格式(2)与守恒型微分方程(1)相容.

守恒型差分格式是由拉克斯(Lax, P. D.)和温德洛夫(Wendroff, B.)提出来的. 拉克斯格式、拉克斯-温德洛夫格式、戈杜诺夫格式和 TVD 格式等著名格式都属此类格式. 守恒性质反映出所解物理问题的整体性质，可用它来检验差分格式的优劣，对于间断解问题守恒格式特别重要. 从守恒律或积分守恒关系式出发容易得到守恒型差分格式.

拉克斯-温德洛夫法(Lax-Wendroff method)　简称 LW 法. 求解双曲型方程的一种二阶守恒型差分格式. 它在双曲型方程的差分格式发展历史中有很重要的地位. 对一维双曲型守恒律方程(组)

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0,$$

LW 格式为

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{F_{i+1}^n-F_{i-1}^n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \cdot [A_{i+1/2}^n(F_{i+1}^n-F_i^n)-A_{i-1/2}^n(F_i^n-F_{i-1}^n)],$$

式中 n 和 i 分别是 t 和 x 方向的节点编号，Δt 和 Δx 分别是网格时间和空间步长，$A=\frac{\partial F}{\partial v}$，当原方程为方程组时 A 是通量 $F(v)$的雅可比矩阵.

$$A_{i+1/2}^n=A\left(\frac{u_i^n+u_{i+1}^n}{2}\right),\quad u_i^n=u(i\Delta x,n\Delta t),A_{i-1/2}^n$$

等其他量类似定义. 为避免雅可比矩阵 A 的计算，减少计算时间，里希特迈耶(Richtmyer, R. D.)把 LW 格式加以改进给出了二步 LW 格式

$$\begin{cases}U_{i+1/2}^{n+1/2}=\frac{1}{2}(U_i^n+U_{i+1}^n)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n-F_i^n),\\ U_i^{n+1}=U_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^{n+1/2}-F_{i-1/2}^{n+1/2}).\end{cases}$$

对线性常系数 $F(v)=Av$ 情况，一步 LW 法和二步 LW 法是完全等价的. 在多维情况，二步 LW 法较之一步 LW 法优点更明显. 该方法是拉克斯(Lax, P. D.)和温德洛夫(Wendroff, B.)于 1960 年发表的.

LW 法(Lax-Wendroff method)　即“拉克斯-温德洛夫法”.

麦科马克格式(MacCormack scheme)　一种解可压缩流体流动问题的二步二阶差分格式. 它可看做 拉克斯-温德洛夫格式的预估-校正形式，在两步中交替使用向前和向后差分. 对一阶双曲型偏微分方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0,$$

麦科马克格式为

$$\begin{cases}\overline{U}_i^{n+1}=U_i^n-\Delta t\left[\frac{F_{i+1}^n-F_i^n}{\Delta x}\right],\\ U_i^{n+1}=\frac{1}{2}\{U_i^n+\overline{U}_i^{n+1}-\Delta t\left[\frac{\overline{F}_i^{n+1}-\overline{F}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right]\},\end{cases}$$

式中 Δt 和 Δx 分别为时间和空间步长，$U_i^n=U(i\Delta x,n\Delta t)$，$F_i^n=F(U_i^n)$，$\overline{F}_i^{n+1}=F(\overline{U}_i^{n+1})$，其他量类似定义. 该格式中第一步用向前差分，第二步用向后差分；也可以反过来，即第一步用向后差分，第二步用向前差分. 对于二维问题，可在 x 和 y 方向不同地用向前-向后差分，且在二个或四个完整的时间步上循环地应用. 由于此格式简单，要求计算机内存少，已普遍地应用于气动问题的计算. 该格式是麦科马克(MacCormack, R. W.)于 1969 年发表的.

伯斯坦-米林法(Burstein-Mirin method)　亦称鲁沙诺夫法. 求解双曲型方程的三步三阶显式差分格式. 对一维双曲型方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0,$$

伯斯坦-米林格式为

$$\begin{cases}u_{j+1/2}^{(1)}=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_j^n)-\frac{1}{3}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1}^n-F_j^n),\\ u_j^{(2)}=u_j^n-\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^{(1)}-F_{j-1/2}^{(1)}),\\ u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{24}\frac{\Delta t}{\Delta x}(-2F_{j+2}^n+7F_{j+1}^n-7F_{j-1}^n+2F_{j-2}^n)\\ \qquad -\frac{3}{8}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1}^{(2)}-F_{j-1}^{(2)})\\ \qquad -\frac{\omega}{24}(u_{j+2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n),\end{cases}$$

式中 i 和 n 分别是 x 方向和 t 方向的节点编号，Δt 和 Δx 分别是网格时间和空间步长，$u_j^n=u(j\Delta x,n\Delta t)$，$F_j^n=F(u_j^n)$，$u_{j+1}^n$和 F_{j+1}^n等可类似定义.

伯斯坦-米林法是由鲁沙诺夫(Rusanov, V. V.)、伯斯坦(Burstein, S. Z.)和米林(Mirin, A. A.)于 1970 年各自独立发展的.

鲁沙诺夫法(Rusanov method)　即“伯斯坦-米林法”.

沃明-库勒-洛马克士法(Warming-Kutler-Lomax method)　简称 WKL 法. 一种求解双曲型方程的三步三阶显式差分格式. 对于一维双曲型方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0,$$

WKL 法是

$$\begin{cases}u_j^{(1)}=u_j^n-\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1}^n-F_j^n),\\ u_j^{(2)}=\frac{1}{2}\left[u_j^{(n)}+u_j^{(1)}-\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_j^{(1)}-F_{j-1}^{(1)})\right],\\ u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{24}\frac{\Delta t}{\Delta x}[-2F_{j+2}^n+7F_{j+1}^n-7F_{j-1}^n+2F_{j-2}^n]\\ \qquad -\frac{3}{8}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1}^{(2)}-F_{j-1}^{(2)})\\ \qquad -\frac{\omega}{24}(u_{j+2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n),\end{cases}$$

式中 i 和 n 分别是 x 方向和 t 方向的节点编号，Δt 和 Δx 分别为网格时间和空间步长，$u_j^n=u(j\Delta x,n\Delta t)$，$F_j^n=F(u_j^n)$，$F_{j+1}^n$和 $u_j^{(1)}$等可类似定义. 显然该格式的头两步相当于取 2/3Δt 作 Δt 的麦科马克格式(参见“麦科马克格式”)，而第三步和鲁沙诺夫三阶格式的第三步完全相同(参见“伯斯坦-米林法”). 该方法消除了在半点上量的计算，故它是鲁沙诺夫或伯斯坦-米林三阶格式的改进. 该方法是沃明(Warming, R. F.)、库勒(Kutler, P.)、洛马克士(Lomax, H.)于 1973 年发表的.

WKL 法(WKL method)　即“沃明-库勒-洛马克士法”.

高分辨法(high resolution methods)　一种差

分格式.指用于计算含激波的流体力学问题时,激波过渡区限制在数目很少(两三个甚至一个)网格内的差分方法.哈坦(Harten,A.)(1983)发展的二阶TVD格式,范利尔(Van leer,B.)(1979)发展的Muscl格式都是著名的高分辨方法.

高分辨法具有如下特点:

1.激波过渡区陡峭,不产生非物理振荡.

2.在解的光滑区域,至少有二阶精度.

3.无需预先确定人工粘性,具有自适应耗散性.

此外,虽然在一般光滑解区差分解能达到二阶精度,但在光滑区的局部极值附近格式退化为一阶格式,数值解中会削去局部极值的峰值,造成较大误差;在接触间断计算中,接触间断的宽度也仍会随时间的发展而增加.因此,这两个方面是该类计算格式中需要加以解决的问题.

反扩散法(anti-diffusion method) 亦称通量校正传输法.一种偏微分方程数值解法.指计算流体力学中通过减少扩散来提高解的分辨能力的一种数值方法,它同样适用于一般双曲型守恒律微分方程,它的主要思想如下:双曲型守恒律方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

的一阶有限差分格式

$$u_i^{n+1}=Qu_i^n, \qquad (2)$$

也和扩散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial}{\partial x}v\right] \qquad (3)$$

相容,其中 $\beta(v,\Delta t/\Delta x)$ 是数值扩散系数.设 $r(v,\Delta t/\Delta x)$ 是一正函数并考虑修正扩散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\beta\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)-r\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial x}\right\}, \qquad (4)$$

若

$$\beta\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)-r\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\geqslant 0,$$

则扩散方程(4)较之(3)有较小的扩散系数,故可由数值解(4)来代替解方程组(1).设方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left[r\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial}{\partial x}v\right]$$

的有限差分格式是 $u_i^{n+1}=Du_i^n$.于是数值解扩散方程(4)的两步格式是

$$\tilde{u}_i^{n+1}=Qu_i^n, \qquad (5)$$

$$u_i^{n+1}=D\tilde{u}_i^{n+1}, \qquad (6)$$

其中第二步(6)就是反扩散步.结合两步得到

$$u_i^{n+1}=DQu_i^n. \qquad (7)$$

如果原格式(2)是稳定的,而且

$$\beta\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)-r\left(v,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\geqslant 0,$$

则格式(7)也是稳定的,即两步格式(5)和(6)是稳定的.反扩散法由鲍里斯(Boris,J. P.)和布克(Book,D. L.)所首创.从1973年发表以来,现在已发展成为处理激波和其他具有大梯度参量问题的一种有效的数值方法.

通量校正传输法(flux correction transport method) 即"反扩散法".

人工压缩法(artificial compression method) 简称AC法.一种数值解双曲型守恒律方程(组)的数值校正技术.它通过修正标准差分格式,以防止接触间断的过分拉开,并改善激波的分辨率.对于守恒型方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

AC法在通量项中附加一人工压缩通量项 $g(v,t)$ 使得方程(1)的激波和接触间断都成为修正方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial[F(v)+g(v,t)]}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

的激波,并使激波宽度缩小,再利用通量向量分裂法(参见"通量向量分裂法")数值求解修正方程.AC法很容易和各种单调差分格式结合使用,并取得较好效果.人工压缩法是哈坦(Harten,A.)于1977年发表的.

AC法(AC method) 即"人工压缩法".

通量向量分裂法(flux-vector splitting methods) 通过通量分裂离散化双曲型守恒律的一类差分方法.该类方法把双曲型守恒方程组的通量分裂成两部分,一部分相应于正特征值,另一部分相应于负的特征值,对第一部分用向后差分,而对第二部分用向前差分进行离散.即该类方法把守恒型方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F(v)}{\partial x}=0$$

的通量 $F(v)$ 分裂成两项之和:$F(v)=F^+(v)+F^-(v)$,其差分格式为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=-\frac{F^+(u_j^n)-F^+(u_{j-1}^n)}{\Delta x}-\frac{F^-(u_{j+1}^n)-F^-(u_j^n)}{\Delta x},$$

故数值通量是:$f_{j+1/2}^n=F^+(u_j^n)+F^-(u_{j+1}^n)$ 和 $f_{j-1/2}^n=F^+(u_{j-1}^n)+F^-(u_j^n)$,$\Delta t,\Delta x$ 分别是时间和空间步长.通量分裂的方法不是惟一的,例如可根据 $F(v)$ 的雅可比的特征值的正负进行矩阵分解,再取此分解矩阵的对应分裂通量.

斯蒂格(Steger,J. L.)、沃明(Warming,R. F.)以及范利尔(Van leer,B.)分别对完全气体的欧拉方程发展了不同的通量向量分裂法,但前者所得到的分裂后的流通向量在驻点 $u=0$ 处和声速线上不

再是连续可微的，从而导致数值解的振荡，而后者所得的分裂后的流通向量则是连续可微的. 因这类方法考虑了特征方向，使离散化时所用网格节点尽可能靠近特征线，所以实际计算效果较好.

总变差不增格式(total variation diminishing schemes) 简称 TVD 格式. 一类差分格式. 是非线性双曲守恒律的一类高分辨差分格式. 对于网格函数 $u=\{u_j\}$，它的总变差 TV(u)定义为

$$\mathrm{TV}(u)=\sum_j |u_{j+1}-u_j|.$$

一守恒型格式 $u_i^{n+1}=Qu_i^n$ 是总变差非增的或 TVD，若对所有具有有界总变差的网格函数 $u=\{u_j\}$，即 $\mathrm{TV}(u)<\infty$，$\mathrm{TV}(Qu)\leqslant\mathrm{TV}(u)$成立.

TVD 格式的概念是哈坦(Harten，A.)于 1983 年提出来的，他把一阶 TVD 格式应用于适当修改了通量的方程构造出二阶精度的 TVD 格式. 可以证明单调差分格式是 TVD 格式；TVD 格式是单调保持的. 从 1983 年以来 TVD 格式成为重要的研究方向，发展了不少新的 TVD 格式. TVD 格式提高了对激波的捕捉能力，其不足之处是在局部极值点附近格式只有一阶逼近精度. 为了克服这一不足，哈坦等后来提出了一种称之为基本不振荡的 ENO 格式(Essentially Nonoscillatory Scheme)，它允许差分解的总变差有微小增加. 对于二维情况，古德曼(Goodman，J. B.)和利维奎(Leveque，R. J.)于 1985 年证明：对于二维标量守恒方程任何 TVD 格式至多是一阶精度的.

TVD 格式(TVD schemes) 即“总变差非增格式”.

ENO 格式(ENO Schemes) 一类差分格式. 是能达到一致高阶精度的基本不振荡格式. ENO 格式与 TVD 格式的重要区别是它允许差分解的总变差有微小增加，从而取消了对差分格式的单调性限制，这一限制是 TVD 格式的本质部分，也是在极值点附近差分格式只有一阶逼近精度的重要原因. ENO 格式的另一个特点是在构造插值多项式时采取了自适应选取插值节点的技术，从而避免引入振荡.

ENO 格式是哈坦(Harten，A.)等人于 1980 年至 1987 年间提出的.

有限体积法(finite volume methods) 简称 FV 法. 一类偏微分方程数值解法. 它是通过在物理空间中选定的网格的每个单元上，把积分型守恒律直接离散来求解原微分守恒律的数值方法. 下面就二维标量双曲型守恒律来简述有限体积方法的基本思想.

二维标量双曲型守恒律为

$$u_t+(f(u))_x+(g(u))_y=0, \qquad (1)$$

其中 $u=u(t,x,y)$，$f(u)$和 $g(u)$是通量函数. 方程(1)的积分型形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}F(u)\cdot n\mathrm{d}s=0, \qquad (2)$$

其中
$$\bar{u}=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (3)$$

Ω 是任意以 $\partial\Omega$ 为边界的区域，$|\Omega|$是区域 Ω 的面积，$n=(n_x,n_y)$是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，$\bar{u}$ 是 u 在 Ω 上的平均值；$F(u)=(f(u),g(u))$. 设求解区域为 D，则求解方程(1)的有限体积法的基本框架如下：

网格剖分：把区域 D 剖分成互不重叠的小单元 Ω_j ($j=1,2,\cdots,\mathrm{N}$)，$D=\bigcup_j\Omega_j$，Ω_{j1}和 Ω_{j2}若相交，则或共顶点或共边界，对每个单元 Ω_j 求出解 u 的平均值 $\bar{u}_j$，待求解的自由度就是各单元上的平均值 $\bar{u}_j$.

空间离散：

1. 根据各单元的平均值 $\bar{u}_j$，求出 $u(x,t)$在单元 Ω_i 的边界上积分点上的近似值.

2. 利用适当的求积公式，通常用高斯型公式，去近似(2)中在单元 Ω_i 的边界 $\partial\Omega_i$ 上的积分

$$\int_{\partial\Omega_i}F\cdot n\mathrm{d}s \approx \sum_j|\partial\Omega_{ij}|\sum_k\omega_kF(u_{jk})\cdot n(x_k^j,y_k^j), \qquad (4)$$

其中(x_k^j,y_k^j)是边界 $\partial\Omega_{ij}$上的积分结点，ω_k 是积分权，j 指单元 Ω_i 的第 j 个边，$|\partial\Omega_{ij}|$是单元 Ω_i 的第 j 边的边长.

3. 利用精确或近似黎曼解算器构成数值通量 H，去近似(4)中的物理通量 $F(u_{jk})\cdot n(x_k^j,y_k^j)$，于是有

$$F(u_{jk})\cdot n(x_k^j,y_k^j) \approx H(u(x_k^{j-},y_k^{j-}),u(x_k^{j+},y_k^{j+})), \qquad (5)$$

其中 $u(x_k^{j-},y_k^{j-})$表示从 Ω_i 内所得函数 u 在点(x_k^j,y_k^j)的近似值，而 $u(x_k^{j+},y_k^{j+})$表示从与 Ω_i 有共同边界 $\partial\Omega_{ij}$的相邻单元内所得 u 在同一点的近似.

时间离散：在空间离散后得到常微分方程(组)，用适当常微分方程解算器进行时间离散.

从上述有限体积法的离散思想，显见它自动满足离散守恒，故有限体积法是守恒律的最自然的离散方法. 它可方便地利用各种类型的网格，如对二维平面问题可利用矩形网格，也可利用任意四边形网格或三角形网格，从而适于任意复杂的几何形状的求解区域. 它综合了有限差分法和有限元法的优点，可看做有限差分法和有限元法之外的求解偏微分方程数值解的第三类主要方法，近 20 余年来取得很大发展，被广泛应用.

FV 法(finite volume method) 即“有限体积法”.

积分关系法(method of integral relations) 一

种偏微分方程数值方法.指用积分关系式代替微分守恒律,并将偏微分方程组化为常微分方程组求解的数值解法,可视为广义直线法.古典的直线法直接求解非守恒型偏微分方程组,积分关系法则从 N 维散度型方程组出发,先对 $N-1$ 个自变量求积,获得一组积分关系式,再用合理选取的内插公式代替积分关系式中的被积函数,最后导出近似常微分方程组.积分关系法由苏联著名计算力学家多罗德尼岑(Дородницын, A. A.)于1951年提出的.该法与直线法相比有以下不同特点:

1.积分关系法的原始方程为散度型,它代表某些物理守恒律,通过间断面也是正确的.

2.因积分后的函数比起被积函数更光滑,当被积函数有第一类间断点时,该函数的积分仍连续,采用少数插值基点,积分关系法就能达到较高的精度.

3.积分关系法的积分区域是由曲线(面)划分的,它们的形式取决于积分区域边界的形状.

1960年,多罗德尼岑进一步提出广义积分关系法,该法用逐段连续的权函数乘原方程组中的每一个方程并进行积分,对梯度变化较大的被积函数,可选取适当的权函数加以平滑,结果采用低阶逼近就能获得高精度的数值解.积分关系法被广泛用来解流体力学中的亚音流及跨音流问题.

20世纪50年代初期,别洛柴可夫斯基(Белоцерковский, О. М.)利用积分关系法计算钝头体超音速绕流的亚、跨音流场首获成功,受到国际计算流体力学界的高度评价.

直线法(method of lines)　将偏微分方程(组)化为常微分方程组求解的一种数值解法.其基本做法如下:先将求解区域用一族直线分割成若干条带,保留原偏微分方程(组)中沿直线方向的连续偏导数,其余方向的偏导数则用差商或内插公式来代替,把偏微分方程(组)的求解问题化为一组近似常微分方程初边值问题.由于常微分方程组的数学理论及数值解法较为成熟,问题会容易解决.现以两个自变量的热传导方程为例来说明直线法的基本思想.考虑初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a\,\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & (0<x<1,t\geqslant 0),\\ u(x,0)=f(x) & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ u(0,t)=g_1(t),\ u(1,t)=g_2(t) & (t\geqslant 0).\end{cases}\qquad(1)$$

其中 x 为空间坐标,t 为时间,$a>0$ 为常数,$f(x)$,$g_1(t)$,$g_2(t)$ 为初值及边值函数.设用直线 $x_i=ih$ ($i=0,1,2,\cdots,n;h=1/n$) 将求解区间 $[0,1]$ 分割成 n 个条带,未知解在直线 $x=x_i$ 上的值记为 $u_i(t)=u(x_i,t)$ 并在直线 $x=x_i$ 上满足方程

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=a\,\frac{\partial^2 u(x_i,t)}{\partial x^2}.\qquad(2)$$

假定用二阶差商代替方程(2)右端的偏导数,则问题(1)近似地变成下列常微分方程组的初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=a\,\dfrac{u_{i+1}(t)-2u_i(t)+u_{i-1}(t)}{h^2},\\ u_i(0)=f(ih),\\ u_0(t)=g_1(t),\ u_n(t)=g_2(t)\\ \qquad (i=1,2,\cdots,n-1).\end{cases}\qquad(3)$$

对问题(3)可用常微分方程数值方法求出近似解 $u_i(t)$ ($i=1,2,\cdots,n-1$),它代表问题(1)的解 $u(x,t)$ 在直线 $x=x_i$ 上的近似值.再利用内插公式便可得到整个区间 $[0,1]$ 上的近似解.直线法可用来解非线性抛物型、双曲型、椭圆型及混合型偏微分方程,在各种数学物理问题中都有广泛的应用.

时间相关法(time-dependent methods)　将偏微分方程(组)边值问题化为初边值问题求解的一种数值解法.物理学中大多数定常态问题,数学上大都表述为定常偏微分方程(组)的边值问题;动态问题则用非定常偏微分方程(组)的初边值问题来描述.若时间无限增大时,非定常问题若有稳态解,则此稳态解可视为相应定常问题的解,这就是时间相关法的基本思想.在这种意义上,时间相关法又称稳定法.下面举一简单例子来阐明时间相关法的数学描述.考虑矩形区域 $G=\{0<x,y<\pi\}$ 上的拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\ u(x,y)\,|_\Gamma=f(x,y),\end{cases}\qquad(1)$$

其中 Γ 为区域 G 的边界,$f(x,y)$ 为已知的边值函数.对问题(1)可构造一个热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ u(x,y,t)\,|_\Gamma=f(x,y),\\ u(x,y,0)=g(x,y),\end{cases}\qquad(2)$$

其中 $g(x,y)$ 为任意给定的初始函数.假定 $U(x,y)$ 是定常问题(1)的解,$u(x,y,t)$ 是非定常问题(2)的解.可以证明:当时间 $t\to\infty$ 时,

$$\|u(x,y,t)-U(x,y)\|\to 0.$$

在一般的非线性方程情况下,要严格证明解的收敛性是困难的.在实际问题中,定常偏微分方程(组)往往是非线性、混合型的,直接用离散方法求其边值问题的数值解极为困难;非定常方程(组)虽增加一个时间变量,但其数学类型单一,便于构造普遍适应的数值解法,因而问题变得更容易解决.时间相关法的基本思想表明,数值求解过程完全对应于真实的物理过程.由于此法有明确的物理意义,适定的数学提法及普适的数值解法,在流体力学中被广泛用来计算跨音流和复杂的定常流动问题.

伪非定常法(pseudo-unsteady methods)　亦称

预处理法．一种偏微分方程数值解法．是在时间相关法中，用人工构造的时间相关方程(组)代替具有物理意义的非定常方程(组)，从而达到加速收敛到稳态解的一种迭代方法．由于时间相关法沿时间方向步进的数值过程完全对应于真实的物理过程，通常从动态解达到稳态解的时间相当长．这是因为有些微分方程组的最大与最小特征速度之比值(即条件数)很大时，便会导致时间步进法的收敛速度大大减慢，即类似于常微分方程组的刚性问题．为了避免出现上述情况，可以在原来的非定常偏微分方程组中引进一些人为的时间导数项，使新方程组的条件数尽量接近 1，从而达到使动态解快速收敛到稳态解的目的．例如，流体力学中的人工压缩法就是伪非定常方法的一个典型代表．人工构造的时间相关方程本身虽不代表真实的物理变化过程，但人们所关心的是最终的稳态解，伪非定常方法是一种有效的快速迭代解法．

预处理法(pre-processing methods)　即“伪非定常方法”．

格气自动机(lattice gas automata)　亦称格气模型．20 世纪 80 年代取得重大进展的利用计算机模拟流体运动的一类新方法．它的原理完全不同于对纳维-斯托克斯方程进行离散处理的传统作法，而是放弃连续介质假设，建立一种完全离散的流体模型，直接模拟粒子在具一定几何结构的网格上的运动，单个粒子服从简单的动力学规则，而它们的集体行为，即系统状态在一定尺度范围内的统计平均，则给出可压或不可压流体运动所产生的性状．这类模型的共同特点是：

1．空间离散：模型用网格代替流场，网格可以有不同的几何结构．例如模拟二维流场的正方形网格，正三角形网格等．

2．流体离散：将流体视为由大量只有质量不具体积的粒子所组成．粒子只能存在于网格结点上，并在单位时间内，沿网格连线方向，从一个结点“跳跃”到另一相邻结点．

3．时间离散：粒子移动与彼此相互作用是在离散时间 $t=0,1,2,\cdots$ 内完成的．任何离散时刻，所有粒子的移动与相互作用是同步进行的．

4．状态离散：相邻格点的联线方向是粒子的运动方向．任何时刻在任何结点处，对于一个给定的速度方向最多只允许有一个粒子存在．这一要求使得结点的可能状态有限．

5．局域演化规则：在任何相继时刻，粒子只能从一个格点移动到一个相邻格点；同一时刻来到同一格点但具不同速度方向的粒子可能发生散射，即按照一组保证粒子数守恒、动量守恒及能量守恒，但又不引入虚假守恒律的规则，重新安排它们的速度方向．

上述规定使得格点状态的变化规则是“局域”的，即只取决于前一时刻所有相邻格点的状态．从粒子某种适当的初始分布，或称初始位形出发，按照给定规则模拟粒子位形的演化，实际上即达到了模拟流体运动的目的．此类模型的优点是：

1．内部格点状态按同一规则变化，程序实现极为简单，可以有效地利用存贮空间，而且可实现并行运算．

2．边条件易于引入，且不需要额外的计算量．

3．无舍入误差，因而是数值稳定的．

4．物理守恒律精确满足．

格气模型是更为一般的物理模型“元胞自动机”的一种．元胞自动机于 20 世纪 50 年代初由美国数学家乌拉姆(Ulam，S. M.)和美籍匈牙利数学家冯・诺伊曼(von Neumann，J.)所提出，它为今天诸多科学领域模拟不同自然现象的全离散模型提供了一般框架．第一个格气模型于 20 世纪 70 年代初由英国数学家哈代(Hardy，J.)、庞梅奥(Pomeau，Y. P.)和迪帕齐斯(de Pazzis，O.)所提出，称 HPP 模型，但此模型导出的流体宏观方程不具各向同性性质．1986 年，弗里施(Frisch，U.)、哈斯拉克尔(Hasslacher，B.)和庞梅奥提出了模拟二维流体运动的正六边形网格模型，称 FHP 模型．理论上，在低速流动条件下，此模型导出的宏观流动方程与纳维-斯托克斯方程有几乎全同的结构．实践上，此模型成功地模拟了诸如平板绕流、圆柱绕流、楔形物绕流以及开尔文-亥姆霍兹不稳定性等一系列重要流动现象．此后格气模型的研究进入了新阶段，在多相流，传热问题，磁流体模型，多孔介质流动与其他若干领域均取得进展．

格气模型也存在若干局限，例如仅能考虑低速流动，为克服有关缺陷现在已提出了格点变量取连续值的格点波尔兹曼模型，加之对碰撞项的改进，有关研究已取得重大进展，至今仍是热门课题．

格气模型(lattice gas model)　即“格气自动机”．

有限元法(finite element method)　微分方程的一类主要的数值解法．它是解微分方程，特别是椭圆边值问题的一种现代化、系统化的数值解法．它具有通用简便，适应灵活，数学基础牢靠等多方面的优点，特别适合于解决复杂的大型问题，并便于在计算机上实现．

直至 20 世纪末，有限元法是在求解偏微分方程数值解方面影响最大、发展最快的计算方法之一，是计算数学的一项重大成就，已有逾十万篇文献，并仍在快速发展．有限元法的三个基本要素是：

1．问题的变分形式．

2. 区域的剖分.

3. 分片插值.

下面用一个简单例子来说明有限元方法的基本点. 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^2$ 是平面上的一个多边形区域,其边界记为 $\partial\Omega$. 考虑泊松方程齐次狄利克雷问题

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\\ u=0,\ (x,y)\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1}$$

与上述微分方程边值问题等价的变分问题为

$$\begin{cases}\text{求 } u\in H_0^1(\Omega),\text{使得}\\ a(u,v)=f(v)\ \ (\forall v\in H_0^1(\Omega)),\end{cases}\tag{2}$$

其中双线性泛函 $a(u,v)$ 为

$$a(u,v)=\int_\Omega \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

线性泛函 $f(v)$ 为

$$f(v)=\int_\Omega f\cdot v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $H_0^1(\Omega)$ 是如下的索伯列夫空间

$$H_0^1(\Omega)=\{v:v,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\in L^2(\Omega),v=0\text{ 在 }\partial\Omega\text{ 上}\}.$$

令 $\mathscr{T}_h$ 是 Ω 的一个拟正则三角形剖分,其单元为三角形,记为 $\tau\in\mathscr{T}_h$,满足下列条件:

1. 每个三角形单元 τ 的每一条边或者是与其相邻单元的一条边,或者是 $\partial\Omega$ 的一部分.

2. 设 $h_\tau=\mathrm{diam}(\tau)$,即单元 τ 的直径,

$$h=\max_{\tau\in\mathscr{T}_h}h_\tau,$$

ρ_τ 为包含在 τ 中的最大圆的直径,满足 $\sigma h_\tau\leqslant\rho_\tau\leqslant h_\tau$, $\forall\tau\in\mathscr{T}_h$,其中 σ 是与 h 无关的常数. 有时对于剖分 $\mathscr{T}_h$ 还要加上限制条件,即所谓反假设:$h_\tau\leqslant h\leqslant\nu h_\tau$, $\forall\tau\in\mathscr{T}_h$,其中 ν 是与 h 无关的常数. 令 X_h 是相应于剖分 $\mathscr{T}_h$ 的分片线性连续函数空间,称为线性有限元空间,而令 $V_h=\{v_h\in X_h:v_h=0\text{ 在 }\partial\Omega\text{ 上}\}$. 问题(2)的线性有限元逼近如下

$$\begin{cases}\text{求 } u_h\in V_h,\text{使得}\\ a(u_h,v_h)=f(v_h)\quad(\forall v_h\in V_h).\end{cases}\tag{3}$$

V_h 是有限维空间,其维数等于剖分 $\mathscr{T}_h$ 的内部顶点(即不落在边界 $\partial\Omega$ 上的顶点)的个数. 将内部顶点编序为 $P_1,P_2,\cdots,P_N$. 令 $\varphi_j(x,y)\in V_h$,满足 $\varphi_j(P_j)=1$, $\varphi_j(P_i)=0\ (i\neq j)$. 实际上,$\varphi_j(x,y)$ 只在以 P_j 为顶点的三角形单元上非零,余者皆为零,称为屋顶函数. 则 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N\}$ 组成空间 V_h 的一组基函数. 设

$$u_h=\sum_{j=1}^N u_j\varphi_j,$$

令 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^T$,则问题(3)等价于解下述线性代数方程组

$$KU=F,\tag{4}$$

其中

$$K=[a(\varphi_j,\varphi_i)]_{1\leqslant i,j\leqslant N},$$
$$F=(f(\varphi_1),f(\varphi_2),\cdots,f(\varphi_N))^T.$$

由于 V_h 的基函数 $\varphi_j(x,y)$ 只在以 P_j 为顶点的三角形单元上非零,即 φ_j 的支集 $\mathrm{supp}\varphi_j$ 等于以 P_j 为顶点的三角形单元之和,因此 K 是稀疏矩阵. 若原始问题(2)中的 $a(u,v)$ 是对称双线性泛函,则 K 亦是对称的;更进一步,若 $a(u,v)$ 是强制的,即存在常数 $\alpha>0$,使得

$$a(v,v)\geqslant\alpha\|v\|_V^2\ \ (\forall v\in V),$$

其中 V 是原始问题的求解函数空间,对于(2),$V=H_0^1(\Omega)$,则 K 是正定的.

根据索伯列夫空间中的插值理论,可以证明,当 $h\to0$ 时,在相应范数的意义下 $u_h\to u$. 对于问题(2),(3)的解 u_h 在 $H^1(\Omega)$ 范数的意义下收敛于(2)的解 u,同时也建立了相应的误差估计.

有限元法在中国与西方从不同的实践背景,沿着不同的学术道路,各自独立平行地发展起来.

在西方,有限元思想是库朗(Courant,R.)在1943年的一篇论文中明确地提出过,但一直未受到重视. 20世纪50年代中期,欧美工程界以航空工程为背景,在结构分析和矩阵方法基础上提出了结构有限元的雏形. 20世纪60年代初期,引进连续体的单元剖分;20世纪60年代中期,逐渐明确有限元方法是变分原理和剖分逼近的有机结合的思想. 1966年,西方数学家对一维问题,1968年对高维问题的有限元法进行数学分析,开始了有限元法在计算数学中的黄金时代.

在中国,20世纪50年代末至20世纪60年代初,中国数学家冯康领导的研究集体在研究解决一系列大型水坝建设的应力分析计算问题的基础上,于1964年系统地创造了现代的有限元法,同时早于西方奠定了方法的数学基础. 它本质上是变分原理和剖分逼近的有机结合,所以当时命名为基于变分原理的差分方法.

线性有限元空间(linear finite element space) 见"有限元法".

变分形式(variational formulation) 数学物理问题的一种数学表达形式. 它常借助于数学物理的某种变分原理而导出,常用的一种抽象变分形式如下. 设 V 是希尔伯特空间,$a(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $V\times V$ 上的连续双线性泛函,且是强制的,$f\in V'$(V 的对偶空间),则变分问题可表述为

$$\begin{cases}\text{求 } u\in V,\text{使得}\\ a(u,v)=f(v)\ \ \forall(v\in V).\end{cases}\tag{1}$$

可以证明(1)有惟一解. 若 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的,即 $a(u,v)=a(v,u)$, $\forall v,u\in V$,问题(1)等价于下述泛

函极小问题

$$\begin{cases}\text{求 } u\in V\text{,使得}\\ J(u)=\min\limits_{v\in V} J(v),\end{cases} \tag{2}$$

其中

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-f(v).$$

称(1)为数学物理问题的变分形式(或弱形式,伽辽金意义的变分形式),称(2)是里茨意义的变分形式.

分片插值(piecewise interpolation) 根据单元插值形成总体插值的方法. 给定区域 Ω 上的函数 v,及区域 Ω 的一个剖分 $\mathscr{T}_h$,设 v 在每个有限单元 $\tau\in\mathscr{T}_h$ 上的插值为 $\Pi_\tau v$,令 $\Pi_h v$ 定义如下 $\Pi_h v|_\tau=\Pi_\tau v$,称 $\Pi_h v$ 为 v 在 Ω 上相应于剖分 $\mathscr{T}_h$ 的分片插值.

有限元空间(finite element space) 一种线性有限维函数空间. 定义在区域 Ω 上相应于剖分 $\mathscr{T}_h$ 的分片多项式(或其他简单函数)空间 V_h,而且当 $v_h\in V_h$ 时,v_h 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的值应根据原始变分问题的求解空间 V 的相应边界条件,而附加限制.

有限元逼近(finite element approximation) 变分形式的一种逼近方式. 指原始变分问题的相应逼近问题,即

$$\begin{cases}\text{求 } u_h\in V_h\text{,使得}\\ a(u_h,v_h)=f(v_h)\quad(\forall v_h\in V_h).\end{cases}$$

当有限元空间 V_h 为原始变分问题的求解空间 V 的子空间时,称为协调有限元逼近,否则称为非协调有限元逼近.

协调有限元(conforming finite elements) 见"有限元逼近".

非协调有限元(nonconforming finite elements) 见"有限元逼近".

有限元法的收敛性(convergence of finite element methods) 有限元法的基本概念之一. 指对于区域 Ω 的剖分族 $\{\mathscr{T}_h\}_{h>0}$,当 $h\to 0$ 时,在某种度量下,有限元逼近问题的解 u_h 收敛到原始变分问题的解 u. 通常考虑在能量范数意义下的收敛性. 即当双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 连续、对称且强制时,$a(v,v)^{1/2}$ 称为能量范数,它等价于原始变分问题求解空间 V 上的范数. 称 $a(u-u_h,u-u_h)^{1/2}$ 为能量范数误差. 也考虑在其他范数(比如对二阶问题的 L^2-范数,对四阶问题的 H^1 及 L^2-范数)下的收敛性问题;特别要考虑一致范数下的收敛性,即

$$\| u-u_h \|_{0,\infty,\Omega}\equiv\sup_{x\in\Omega}|u(x)-u_h(x)|.$$

超收敛(superconvergence) 有限元法的一种重要性质. 误差 $u-u_h$ 在区域 Ω 的某些部分,特别是某些点处的收敛速度呈现出高于在 Ω 上作整体估计时所具有的收敛速度,称为在这些部分或这些点处呈现超收敛.

混合有限元法(mixed finite element method) 一种有限元法. 是基于混合变分原理的有限元方法. 在混合变分原理中,未知函数除函数值本身外还有函数的导数,于是,混合有限元方法不仅要计算函数本身的近似值,同时也计算导数的近似值. 因此适于需要计算函数本身及导数的科学与工程计算问题,高阶方程可由降阶以后再化为混合变分问题求解,故该方法适于高阶方程求解. 考虑混合变分问题

$$\begin{cases}\text{求 } \varphi\in W,\lambda\in M\text{,使得}\\ a(\varphi,\psi)+b(\psi,\lambda)=f(\psi)\ (\forall\psi\in W),\\ b(\varphi,\mu)=g(\mu)\ (\forall\mu\in M),\end{cases} \tag{1}$$

其中 W,M 是两个希尔伯特空间,$a(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $W\times W$ 上的连续双线性泛函,且是强制的,$b(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $W\times M$ 上的连续双线性泛函,$f\in W'$ (W 的对偶空间),$g\in M'$ (M 的对偶空间). 设 W_h,M_h 分别为 W,M 的某一有限元子空间,则下述离散问题称为(1)的混合有限元逼近

$$\begin{cases}\text{求 } \varphi_h\in W_h,\lambda_h\in M_h\text{,使得}\\ a(\varphi_h,\psi_h)+b(\psi_h,\lambda_h)=f(\psi_h)\quad(\forall\psi_h\in W_h),\\ b(\varphi_h,\mu_h)=g(\mu_h)\quad(\forall\mu_h\in M_h).\end{cases} \tag{2}$$

若双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续且强制的;双线性泛函 $b(\cdot,\cdot)$ 是连续的,且

$$\inf_{\mu_h\in M_h}\sup_{\psi_h\in W_h}\frac{b(\psi_h,\mu_h)}{\|\mu_h\|_M\cdot\|\psi_h\|_W}\geqslant\beta, \tag{3}$$

其中 β 是正的常数,则问题(2)存在惟一解 (φ_h,λ_h),且

$$\begin{aligned}&\|\varphi-\varphi_h\|_W+\|\lambda-\lambda_h\|_M\\ &\leqslant C\{\inf_{\psi_h\in W_h}\|\varphi-\psi_h\|_W+\inf_{\mu_h\in M_h}\|\lambda-\mu_h\|_M\}.\end{aligned}$$

条件(3)称为 LBB 条件,它取自拉德仁斯卡娅(Ладыженская,O. A.)(1949),巴布什卡(Babuška, I.)(1971)及布雷齐(Brezzi,F.)(1974)姓名的第一个字母.

LBB 条件(LBB-condition) 见"混合有限元法".

边界元法(boundary element method) 椭圆边值问题的一种数值解法. 是将椭圆边值问题归化为边界上的积分方程,然后利用有限元离散化技术求数值解的方法. 边界元法的主要特点是将所处理问题的空间维数降低一维,即对区域的边界进行单元剖分,求出边界节点上解函数的数值解,就可求出区域内任意点的解函数的数值解. 从而缩小了解题规模,减少了计算量. 单纯的边界元法的局限在于,它不适应于变系数,非线性问题以及复杂区域的问题. 对上述最后一种局限性,可通过与有限元方法的结合而得以克服. 因此,它对于无界区域上的问题的数值求解特别有意义.

边界归化的思想及其理论在 19 世纪就已出现,

但将此应用于数值计算并为此目的而深入研究边界归化理论则始于20世纪60年代，并且以边界元法命名出现于20世纪70年代后期. 从此，它被计算数学家和工程师看做继有限元法之后出现的一种新的、重要的数值计算方法，大量的理论和应用研究也随之开始. 边界归化有很多途径，可以将同一个边值问题归化成多种不同的边界积分方程，从而导致不同的边界元法.

目前，国际上有三种边界元法. 第一种为间接方法，即从基本解及位势理论出发得到弗雷德霍姆积分方程，它引入新变量，然后进行离散化数值求解；第二种为直接方法，即从格林公式及基本解出发得到积分方程，而并不引入新变量，然后进行离散化数值求解. 上述两种边界元法起源于西方，它们都不能保持原边值问题的某些基本特性，特别是自伴性与椭圆性；第三种是在直接方法基础上发展起来的，从格林函数和格林公式出发，得到边界上的强奇异积分方程，然后化成相应的变分形式，在边界上离散求解的数值法. 这种方法由中国数学家冯康于20世纪70年代中期首创，并称之为自然边界元方法. 这种方法保持能量不变，从而保持原问题的自伴性、椭圆性等一系列特征.

伽辽金法(Galerkin method)　一种求解变分问题的近似解法. 对于一般椭圆方程边值问题 $Lu=f, u\in H$，其中 L 是线性算子. 当算子 L 非自伴时，则不存在与其等价的泛函极小问题，因此里茨方法不适用，可用下述伽辽金法. 考虑与上述边值问题等价的变分问题：求 $u\in H$，使得

$$\iint_\Omega (Lu-f)\cdot v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\ \text{对一切}\ v\in H_0,$$

其中 H_0 是相应于 H 的具有齐次边界条件的空间. 设 $w_1, w_2, \cdots$ 是 H 的一组完备基，$w'_1, w'_2, \cdots$ 是 H_0 的一组完备基. 求上述变分问题近似解的伽辽金法如下：令

$$u_n=\sum_{j=1}^n c_j w_j,$$

使得

$$\iint_\Omega (Lu_n-f)\cdot w'_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\ \ (i=1,2,\cdots,n),$$

即

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j=f_i\ \ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中

$$a_{ij}=\iint_\Omega Lw_j\cdot w'_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ f_i=\iint_\Omega f\cdot w'_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 L 为自伴的椭圆算子时，伽辽金法与里茨法是同一的. 因此，伽辽金法可看做里茨法的推广，其应用范围比里茨法广.

瑞利-里茨法(Rayleigh-Ritz method)　求泛函极小问题的极小化序列的一种直接方法. 设 $J(u)$ 是定义在某个空间 H 上的泛函，考虑泛函极小问题：$J(u)=\min$. 假定

$$\min_{u\in H} J(u)=d,$$

这样就存在一个函数序列 $u_1, u_2, \cdots$，使得

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n)=d.$$

函数序列 $u_1, u_2, \cdots$ 称为泛函极小问题的极小化序列. 里茨法如下：设 $w_1, w_2, \cdots$ 构成空间 H 的一组完备基，因此极小化序列中每个 u_n 均可表示为

$$u_n=\sum_{i=1}^n c_i w_i.$$

从而确定 u_n 就等价于确定系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，且为下述方程之解

$$\frac{\partial J\left(\sum_{j=1}^n c_j w_j\right)}{\partial c_i}=0\ \ (i=1,2,\cdots,n).$$

现举一简单例子来说明里茨法以及它与当代有限元法的关系. 仍考虑有限元法中的问题(1)(参见"有限元法")，可以证明它与下述问题等价，即求 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$J(u)=\frac{1}{2}\iint_\Omega |\mathrm{grad}\,u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_\Omega f\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\min.$$

按里茨法，由线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j=f_i(i=1,2,\cdots,n),$$

其中

$$a_{ij}=\iint_\Omega \mathrm{grad}\,w_j\cdot \mathrm{grad}\,w_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$f_i=\iint_\Omega f\cdot w_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解出 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，则

$$u_n=\sum_{i=1}^n c_i w_i.$$

即为 u 的近似解. 因此问题归结为如何确定 $H_0^1(\Omega)$ 中的完备基. 当区域 Ω 是典型区域(如正方形)，则可选取代数或三角多项式之类的解析函数，作为空间 $H_0^1(\Omega)$ 的完备基，这就是经典的里茨法. 但当区域 Ω 为一般区域时，要寻找解析函数作为基函数，就极其困难，或根本不可能. 此时有限元法却可行. 首先构造空间 $H_0^1(\Omega)$ 的有限元子空间 V_h，则 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$(对线性有限元空间，即为屋顶函数，参见"有限元法")，组成 V_h 的一组基函数，$n=\mathrm{diam}V_h$. 这样以 φ_i 代替 w_i 即为有限元法.

瑞利-里茨法是由瑞士物理学家、数学家里茨

(Ritz,W.)于1911年提出来的,在此之前,瑞利(Rayleigh,L.)曾成功地运用过类似的概念,故称瑞利-里茨法.

区域分解法(domain decomposition method) 数学物理问题的一种数值求解方法.指将复杂区域上大规模的数学物理问题的数值求解,分解为简单区域上小规模问题的数值求解的方法,从而达到并行计算的目的.这是一种从思想到内容,本质上全新的并行计算方法,而不是仅仅将现有计算方法的并行实现.

最早的区域分解法,应该追溯到19世纪60年代,法国数学家施瓦兹(Schwarz,H.A.)的工作,称为施瓦兹交替迭代方法.当时是作为一种证明复杂区域上偏微分方程边值问题的解的存在性的数学方法.当然子结构和块迭代方法也是早期区域分解方法.随着多处理器、并行计算机的出现,刺激了区域分解方法在应用上,从而也在理论研究上的快速发展.

自从1987年1月在法国巴黎召开第一届国际区域分解法学术讨论会以来,基本上每年一次地在世界各地连续举行.由此足见区域分解法作为求解数学物理问题的数值方法的重要性,并且其发展非常迅速.

施瓦兹交替迭代法(Schwarz alternating iterative method) 见"区域分解方法".

多重网格法(multi-grid method) 求解偏微分问题离散方程的一种快速迭代方法.是求解由椭圆边值问题离散化而得的线性代数方程组的非常有效的快速迭代方法.通常的迭代方法(比如雅可比迭代法,高斯-塞德尔迭代法以及SOR法等)都是在一个固定网格上的方程组的迭代方法.其迭代矩阵的谱半径依赖于h,且当$h\to 0$时,谱半径趋于1,其中h是网格长度.这意味着网格越细,迭代收敛越慢.而多重网格法,是在多层网格上求解方程组的一种迭代方法,其迭代矩阵的谱半径和压缩因子被一个远小于1的正数一致地界定,与网格长度无关.这又意味着迭代的有效性不因网格长度减小而下降.多重网格迭代的构造,基于下述观察.通常的迭代法(比如雅可比迭代),虽然其总体收敛得很慢,但解的高频分量却是快速收敛的,整体的缓慢收敛性仅仅是由低频分量引起的.因此,方法的基本结构在细网格上迭代(称为磨光),而在粗网格上校正.

20世纪60年代初,苏联数学家对二阶椭圆边值问题的差分格式,提出了多重网格法,并进行了理论分析.自20世纪70年代以后,多重网格法无论在理论方面,还是应用方面都受到了计算数学界及工程界的极大重视,并有了飞速发展,现在已成为求解椭圆边值问题离散方程,以及一般的线性代数方程组的最有效的迭代方法,在发展型问题数值求解的研究中也开始应用.

谱方法(spectral method) 寻求微分方程级数展开形式逼近解的一种数值方法.该方法首先把逼近解表示成已知光滑函数作为基函数的截断级数,基函数通常选取三角多项式、切比雪夫多项式和勒让德多项式等正交多项式.然后选取检验函数使截断级数在某种意义下满足微分方程.随检验函数的不同选取,谱方法又分为伽辽金法、τ方法和配置(拟谱)法.伽辽金法选取检验函数与基函数相同,它们逐个满足微分方程的边界条件,微分方程在变分形式下被满足.τ方法与伽辽金法类似,但检验函数不需要满足边界条件,它是靠补充基函数的个数,使级数整体满足边界条件的.在配置法中,检验函数选为中心在某些特殊点(配置点)上的δ函数,微分方程在配置点上被满足,因而它具有实施方便,计算量小等优点.特别对于非线性问题,配置法比另两种方法更容易处理非线性项,故在实际问题的计算中,一般都采用此方法.

谱方法与差分法和有限元法相比,它的最大优点是精度高.快速傅里叶变换的应用,可使谱方法的计算工作量大大减少,因此,谱方法被广泛应用于各种实际问题的计算.例如,湍流的数值模拟,数值天气预报,海洋问题,非线性波和孤立子的计算和研究等.谱方法现已成为计算流体力学的又一强有力工具.

不适定问题数值解法(numerical methods for ill posed problems) 研究解各种不适定问题的数值方法.这是一个正在蓬勃发展中的理论上和应用上都很重要的领域.

解的存在性、惟一性和对初值的连续依赖性的适定性要求,一直支配着古典的数学物理学.该观点认为,各种物理现象总可以由其初始状态,环境条件和历经状态所惟一地、完全地、稳定地确定.法国数学家、天文学家拉普拉斯(Laplace,P.-S.)就曾经幻想能由当前的全部资料和数据推算整个宇宙的未来.法国数学家阿达马(Hadamard,J.(-S.))也曾对椭圆型方程举出过解不稳定的反例.这种适定性要求早已被无数的客观现实问题所否定.目前,许许多多的不适定问题正日益显现其重要性和迫切性.

数学物理方程反问题,包括系数反问题、汇源反问题、初值反问题、边值反问题、解域几何形状反问题等都是典型的不适定问题.例如波动方程系数反问题,即已知初边值条件和解的某些信息,求其方程未知系数和未知解,就是反问题.因为它是"欠定的",需附加条件才能保证解的存在和惟一性;又因为系数反演的强非线性,高度敏感性,甚至可能存在干扰信号或噪声,给反问题求解带来很大困难.尽管

在理论上，在某些附加条件下，反问题解的存在和惟一性可以证明，但它的解析解却只能在较强的假定下得到形式上的表达.当前惟一可行的途径是求数值近似解，如沿特征线积分的差分类方法，以及Bom近似和频率域上的反演法等.设计涡轮叶片时，根据气动特性要求，决定其部分几何特性和流场，这种几何形状反问题，更具有实际意义和挑战性.一种重要的数值近似解方法是采用泛函的变域变分工具，化问题为变域变分极值问题，采用有限元法求解.

对一般的数学物理方程反问题，为求其数值解，首先要将待求或反演的参数作分片或分段常数、多项式或局部插值形式近似，然后将问题根据不同的物理原理或数学工具，转化为多元函数或泛函的条件极值问题，或最佳控制问题，最后采用逐次逼近的迭代法(牛顿法，斜量法)，数学规划法(如单纯形法，线性规划法和优选法等)，典型函数近似，线性化和摄动方法，脉冲谱技术，以及差分法，有限元法，和谱方法等实现数值解.

特别应当指出，许多数学物理方程的正问题也常常是不适定的.如双曲型守恒律方程的间断解(激波等)就不惟一.在采用差分法、有限元法和谱方法求解过程中，必须引入必要的数值扩散(耗散)项，以保证能"捕捉"到真正的惟一的物理解.在数值求解过程中要保证满足，或近似地满足熵条件.许多高分辨率方法就是通过引入所谓的限制函数或控制函数的方法来实现的.此外，活动边界问题，分布参数系统控制问题，以及某些非线性发展方程问题，也有解不惟一或不稳定的情况.相应的，在数值解时也要作特别的处理.

另一类不适定问题是代数反问题，典型的是代数特征值反问题，即根据特征值和特征向量的某些信息，来反求系数矩阵.由于这时解的惟一性矛盾更为突出，所以要附加某些限制和约束条件.这类问题同样要首先转化为优化问题，最佳逼近问题，泛函极值问题；然后采用正交变换、迭代法、多项式逼近等熟知的数值方法求解.

反问题是不适定问题的主要内容.求反问题的数值解，必须首先要熟悉相应正问题的数值解法.只有在后者的理论和方法都得到了比较深入的研究，在比较成熟的前提下，进行反问题及其数值解法的研究才有可靠的把握和成功的希望.

积分方程数值解法(numerical methods for integral equations) 研究求积分方程近似解的数值方法.积分方程数值解的主要求解对象为第一、二类弗雷德霍姆型和伏尔泰拉型积分方程以及相应的特征值问题.主要求解方法有伽辽金法，配置法和求积法.下面以第二类弗雷德霍姆型积分方程

$$y(t)-\int_0^T K(t,s)y(s)\mathrm{d}s=g(t)\quad (t\in I:=[0,T])\tag{1}$$

(其中右端项 $g(t)$，积分核 $K(t,s)$ 为已知函数)为例，介绍上述三种数值方法：

1.伽辽金法.将区间 $I=[0,T]$ 剖分成若干个小区间 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$，在此剖分基础上建立分片多项式空间

$$V_k=\{v\in L^2(I);v|_{(t_i,t_{i+1})}\in P_k,\ 0\leqslant i\leqslant n-1\},$$

其中 P_k 为不超过 k 次的多项式空间.(1)的伽辽金法为：求 $y_h\in V_k$，使

$$\int_0^T y_h(t)v(t)\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^T K(t,s)y_h(s)v(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^T g(t)v(t)\mathrm{d}t,\forall v\in V_k.\tag{2}$$

2.配置法.如前所述建立 $I=[0,T]$ 的剖分及分片多项式空间 V_k，在每个小区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 上，取 $k+1$ 个配置点 $\{z_{i,j}\}_{j=1}^{k+1}\subset[t_i,t_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$.方程(1)的配置法为：求 $y_h\in V_k$ 使

$$y_h(z_{i,j})-\int_0^T K(z_{i,j},s)y_h(s)\mathrm{d}s=g(z_{i,j})\quad (i=0,1,\cdots,n-1;j=1,2,\cdots,k+1).\tag{3}$$

3.求积法.同上将 $I=[0,T]$ 分成 n 个小区间，将方程(1)中的积分项在每个小区间上作数值积分，得到

$$y(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j y_{i,j}K(t,s_{i,j})=g(t),\tag{4}$$

其中 $s_{i,j}$ 为区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 上的积分点，α_j 为相应的数值积分系数.令(4)式中 $t=s_{i,j}$ $(i=0,1,\cdots,n-1;j=1,2,\cdots,m)$，则得到一组以 $y_{i,j}=y(s_{i,j})$ 为未知量的线性代数方程组.求解此方程组即可得到求积法之近似解在点 $s_{i,j}$ 的值 $y_{i,j}$.

若配置法中的配置点 $\{z_{i,j}\}$ 取数值积分的积分点，且(3)式中的积分项用相应的数值积分代替，则此法与求积法等价.

除上述三种常见的积分方程数值解法外，还有一些其他有效算法，如迭代的伽辽金法及配置法，伏尔泰拉线性多步法或龙格-库塔法，求解奇异积分方程的特殊方法等.

奇异摄动法(singular perturbation method) 一类偏微分方程数值解法.指把因变量和自变量同时按小参数作渐近展开的求解非线性数学物理问题的方法.对某些非线性数学物理问题，常可通过量纲分析找出问题中的小参数而把因变量按小参数直接进行渐近展开.这种线性化的近似解法称为摄动法.如果对于某一问题能在定义域上求得一致有效的渐近展开解，则称该问题是正则摄动问题，否则称之为奇异摄动问题.采用正则摄动法求解失效的原因很多，或因展开式中出现长期项，或因展开式在部分边

界不满足边界条件，或因方程具有转向点等. 已经发展了多种奇异摄动的求解方法，最早是变形坐标法，后来又有匹配展开法、多重尺度法、WKB法、平均化法等. 因使用正则摄动法而出现长期项导致求解失效的问题，可以用变形坐标法，关键是要对自变量选用适当的变换来消除长期项.

变形量标法起源于林斯泰特(Lindstidt，A.)等人. 他们于1882年关于行星轨道摄动问题的研究，对自变量作了变换，利用小参数 ε 作幂级数展开，将自变量 t 变换到新变量 τ，而因变量 u 也同时作 ε 的幂级数展开，即

$$\begin{cases} t=(1+\omega_1\varepsilon+\omega_2\varepsilon^2+\cdots)\tau, \\ u(t)=u_0(\tau)+\varepsilon u_1(\tau)+\varepsilon^2 u_2(\tau)+\cdots, \end{cases}$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 是待定的常数系数，在变换中起着协调的作用，其数值的选定以使各高阶不再出现长期项为原则. 法国数学家、物理学家庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)于1886年证明了上述展开是解的渐近级数，所以变形坐标法也称LP法. 1949年，莱特希尔(Lighthill，M. J.)又采用了 t 和 τ 之间更一般的变形关系式

$$t=\tau+f_1(\tau)\varepsilon+f_2(\tau)\varepsilon^2+\cdots,$$

式中 $f_1(\tau),f_2(\tau),\cdots$ 是待定函数，根据“高阶近似式的奇性不高于第一项的奇性”这一原则来确定 $f_n(\tau)$ 和 $u_n(\tau)(n=1,2,\cdots)$. 若 $f_n(\tau)$ 取 $\omega_n\tau$，那么莱特希尔法恰好便是LP法. 1953年，中国学者郭永怀把上述方法应用于大雷诺数粘性流动问题，与边界层方法相结合，得到了一致有效的流场解. 中国科学家钱学森于1956年将其命名为庞加莱-莱特希尔-郭法(郭即指郭永怀).

用正则摄动法因不能满足某一部分边界上的条件使求解失效的问题，可用匹配展开法和多重尺度法. 匹配展开法起源于普朗托(Prandtl，R. L.)于1905年关于大雷诺数流动的研究，他把流动区域分成两个区域，即壁面附近粘性起重要作用的边界薄层区和边界层外可以忽略粘性作用的外部势流区. 在外部区可用简单的经典方法求出无粘性势流解，而边界层内则利用其厚度小的特征，通过伸展变换将方程简化而求解，再根据两个区的解应在交界处衔接的匹配原则来确定内外两区的解中所含的待定常数(或函数). 多重尺度法利用解随自变量的变化在不同区域内快慢有所不同的特点，引进多个具有不同特征尺度的自变量来代替原来的自变量，自变量选择合适可以避免长期项的出现，并且能求出满足全部区域上的定解条件的解式.

转向性问题首先是在量子力学中提出来的，用一般的近似法或渐近解法在某些内部转向点的邻域上失效，温策尔(Wentzel，G.)，瑞典学者克拉默斯(Kramers，H. A.)和布里尤安(Brillouin，M. L.)于1926年提出了匹配法，被称为WKB法. 方法的核心是在转向点附近的区域做适当的自变量变换，求出这个区域中的渐近展开近似解，然后再和区域外用一般解法求得的外部解连接起来.

正则摄动问题(regular perturbation problem)见“奇异摄动法”.

奇异摄动问题(singular perturbation problem)见“奇异摄动法”.

庞加莱-莱特希尔-郭法(Poincaré-Lighthill-Kuo method) 简称PLK法. 一种偏微分方程数值解法. 指用渐近展开法求解非线性数理问题出现高阶奇性增强的困难时，把自变量加以适当变形并作展开的一种求解方法. 以下用一阶常微分方程模型问题的分析来说明莱特希尔(Lighthill，M. J.)改进的变形坐标法

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+u=0,\ u(1)=1,$$

其中 u 是 x 的函数，ε 是小参数. 若作小参数的直接展开，即设

$$\begin{cases} u=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+\cdots, \\ u_0(1)=1,u_1(1)=u_2(1)=\cdots=0. \end{cases}$$

结果是

$$u=\frac{1}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)+\cdots$$

可见解在 $x=0$ 处有奇性，且高阶项的奇性变强. 问题的精确解是

$$u=\frac{1}{\varepsilon}[-x+\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}],$$

因此，当 $\varepsilon\ll 1,u(0)\approx\sqrt{2/\varepsilon}$ 虽很大，但有限. 分析直接展开解不能一致有效的原因在于方程在直线 $x+\varepsilon u=0$ 上有奇性；然而线性近似 $u_0(x)=1/x$ 却将奇性转移到 $x=0$ 处，这种偏离了的奇性在高阶项中变得更强. 运用非线性的变形坐标法可以消除高阶奇性，即把自变量 x 用非线性变换变到 ξ，而 u 也变为 ξ 的函数，即作下面的展开

$$\begin{cases} x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi)+\cdots, \\ u=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2 u_2(\xi)+\cdots \end{cases}$$

代入方程后容易求出 $u_0(\xi)=1/\xi$. 为使 $u_1(\xi)$ 的奇性不再增强，可选

$$x_1(\xi)=\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right),$$

因而 $u_1(\xi)=0$. 于是一阶近似解是

$$\begin{cases} u=u_0+u_1=\dfrac{1}{\xi}, \\ x=\xi+\varepsilon x_1=\xi+\dfrac{\varepsilon}{2}\left(\xi-\dfrac{1}{\xi}\right), \end{cases}$$

即有

$$u=\frac{1}{\varepsilon}[-x+\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}].$$

这正是问题的精确解.

PLK 法的突出优点是简单灵活,通常只需求得零阶或一阶解,即可达到相当高的准确度. PLK 法在用于双曲型方程时一般不会发生困难,但用于椭圆型或抛物型方程时,有时可能失效.

PLK 法是由林斯泰特(Lindstidt,A.)于 1882 年和庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)等人于 1886 年始创. 他们在寻求非线性常微分方程组的周期解时,为了消除长期项,把问题中的频率参数加以变形,这相当于将自变量(坐标)作线性变换而收到成效. 因此林斯泰特-庞加莱法也称"变形坐标法". 使用上述方法在求解某些问题的高阶近似时可能出现强奇性,莱特希尔(Lighthill,M. J.)于 1949 年进一步引进了自变量的非线性变换,求得了一系列物理问题的一致有效渐近解. 中国学者郭永怀于 1953 年,1956 年把变形坐标法和边界层方法结合起来,解决了大雷诺数粘性流动和超声速边界层等难题. 为此,钱学森于 1956 年撰文总结了上述方法,并命名为庞加莱-莱特希尔-郭法,其中的郭(Kuo)指郭永怀.

PLK 法(PLK method)　即"庞加莱-莱特希尔-郭法".

变形坐标法(deformation coordinate method)　见"庞加莱-莱特希尔-郭".

蒙特卡罗法

蒙特卡罗法(Monte Carlo method)　以概率与统计的理论、方法为基础的一种计算方法. 蒙特卡罗法将所需求解的问题同某个概率模型联系在一起,在电子计算机上进行随机模拟,以获得问题的近似解. 因此,蒙特卡罗法又称随机模拟法或统计试验法.

考虑一个射击运动员的射击成绩 G,用 r 表示弹着点到靶心的距离,$g(r)$ 表示得分,$f(r)$ 表示 r 的分布密度,则

$$G=\int g(r)f(r)\mathrm{d}r.$$

另一方面,若该运动员进行了实弹射击,弹着点依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_N$,则平均得分为

$$\hat{G}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g(r_n),$$

很明显,$\hat{G}_N$ 是 G 的一个近似估计.

蒙特卡罗方法解题的一般过程是:

1. 构成一个概率空间.

2. 在该概率空间中确定一个依赖随机变量 x(可为任意维)的统计量 $g(x)$,其数学期望

$$E(g)=\int g(x)\mathrm{d}F(x)$$

正好等于所要求的值 G,其中 $F(x)$ 为 x 的分布函数.

3. 产生随机变量 x 的简单子样 $x_1,x_2,\cdots,x_N$,用其相应统计量 $g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_N)$ 的算术平均

$$\hat{G}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g(x_n),$$

作为 G 的近似估计.

对于某些情况,如确定数学期望为 G 的统计量 $g(x)$ 有困难,或为其他目的,蒙特卡罗法有时也用 G 的渐近无偏估计替代一般过程中的无偏估计量 $\hat{G}_N$,并用此渐近无偏估计作为 G 的近似估计. 因此蒙特卡罗法的基础包括构造模拟给定问题的概率统计模型研究以及产生随机变量的简单子样,即产生各种分布的随机变量的抽样方法研究.

蒙特卡罗法的最低要求是:能确定这样一个与计算步数 N 有关的统计估计量 $\hat{G}_N$,对于任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{N\to\infty}P(|\hat{G}_N-G|<\varepsilon)=1,$$

其中 $P(\cdot)$表示事件 · 发生的概率.

蒙特卡罗法的最大优点是:

1. 方法的误差与问题的维数无关.

2. 对于具有统计性质问题可以直接进行解决.

3. 对于连续性的问题不必进行离散化处理.

蒙特卡罗法的缺点则是:

1. 对于确定性问题需要转化成随机性问题.

2. 误差是概率误差.

3. 通常需要较多的计算步数 N.

蒙特卡罗法作为一种计算方法,是由美国数学家乌拉姆(Ulam,S. M.)与美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann,J.)在 20 世纪 40 年代中叶,为研制核武器的需要而首先提出来的. 实际上,该方法的基本思想早就被统计学家所采用了. 例如,早在 17 世纪,人们就知道了依频数决定概率的方法.

随机模拟法(random simulation method)　即"蒙特卡罗法".

统计试验法(statistical test method)　即"蒙特卡罗法".

蒙特卡罗法的误差(error of Monte Carlo methods)　蒙特卡罗法的重要概念. 考虑如下积分计算问题:

$$G=\int g(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $g(x)$ 为随机变量 x 的连续函数,$f(x)$ 为 x 的密度函数,计算此积分的一般蒙特卡罗法是用

$$\hat{G}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g(x_n)$$

作为G的近似估计，其中$x_1,x_2,\cdots,x_N$为随机变量x的简单子样. 用$P(\cdot)$表示事件·发生的概率，ε表示近似估计$\hat{G}_N$与真值G间的误差，$1-\alpha$表示置信水平，则只要统计量$g(x)$的二阶矩存在，对充分大的N，便有$P(|\hat{G}-G|<\varepsilon)=1-\alpha$，其中

$$\varepsilon \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g^2(x_n)-\hat{G}_N^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t=1-\alpha.$$

对于解任意问题的蒙特卡罗法，只要所确定的统计量是无偏的，二阶矩有界，随机抽样满足同分布与相互独立的条件，则其误差情况全都如此.

统计估计法(statistical estimation method) 最有效的蒙特卡罗技巧之一. 考虑如下二重积分的蒙特卡罗计算问题：

$$G=\iint g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$f(x,y)$为随机变量x与y的分布密度，$g(x,y)$的二阶矩存在，用$f(x)$与$f_x(y)$依次表示$f(x,y)$的边缘分布与条件分布，则上述二重积分也可表示成另一种形式

$$G=\int g(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$g(x)=\int g(x,y)f_x(y)\mathrm{d}y.$$

计算上述二重积分的统计估计方法是，用下式作为其近似估计

$$\hat{G}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g(x_n),$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_N$是母体分布为$f(x)$的简单子样.

统计估计法的方差一定比一般蒙特卡罗法的方差小，所减小的方差恰好等于后者对随机变量采用抽样办法时所引起的方差的平均值. 统计估计法也称期望估计法或半解析法，它的一般原理是：对于问题中所出现的诸随机变量中那些能够确定其相应数学期望的，由此引起的计算费用增加又不大的，就尽量不再对这些随机变量采用随机抽样的办法，而用相应的无偏统计量代替一般蒙特卡罗法中的无偏统计量.

期望估计法(expectation estimation method) 见“统计估计方法”.

重要抽样法(importance sampling method) 最有效的蒙特卡罗技巧之一. 考虑如下积分的蒙特卡罗计算问题

$$G=\int g(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

其中$f(x)$为随机变量x的分布密度，$g(x)$的二阶矩存在. 引入新的分布密度$f^*(x)$，当$f(x)\neq 0$时，$f^*(x)\neq 0$，则上述积分也可以表示成另一种形式

$$G=\int g^*(x)f^*(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中$g^*(x)=g(x)f(x)/f^*(x)$. 计算积分(1)的重要抽样方法是，确定合适的$f^*(x)$，用下式作为其近似估计

$$\hat{G}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g^*(x_n), \tag{3}$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是母体分布为$f^*(x)$的简单子样. 无偏统计量$g^*(x)$的方差由下式给出

$$\int g^2(x)\frac{f^2(x)}{f^*(x)}\mathrm{d}x-G^2. \tag{4}$$

则使此方差达到最小的$f^*(x)$为

$$f^*(x)=\frac{|g(x)|f(x)}{\int |g(x)|f(x)\mathrm{d}x}. \tag{5}$$

因此，对$f^*(x)$的最合适的选择是使其与$|g(x)|f(x)$成正比. 重要抽样法有时也称偏倚抽样法，它的一般原理是：选择偏倚分布密度，使得所确定的无偏统计量尽量与其中的随机变量的取值关系不大. 只要抽样分布与无偏统计量的变化引起的计算量改变不大，便可用此偏倚分布与相应的无偏统计量代替原分布与相应的无偏统计量.

偏倚抽样法(bias sampling method) 见“重要抽样法”.

相关估计法(correlation estimate method) 最有效的蒙特卡罗技巧之一. 考虑如下积分的蒙特卡罗计算问题

$$G=\int g(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

其中$f(x)$为随机变量x的分布密度，$g(x)$的二阶矩存在. 引入一个新的积分问题：

$$G_c=\int g_c(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其积分值G_c已知，$g_c(x)$的二阶矩存在，则对于任意参数α也可将积分(1)表示成另一种形式

$$G=\int g^*(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

其中$g^*(x)=\alpha G_c+(g(x)-\alpha g_c(x))$，计算积分(1)的相关估计法是，确定合适的$g_c(x)$与$\alpha$，用下式作为其近似估计

$$\hat{G}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g^*(x_n), \tag{4}$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是母体分布为$f(x)$的简单子样. 用σ^2与σ_c^2依次表示统计量$g(x)$与$g_c(x)$的方差，ρ表示$g(x)$与$g_c(x)$间的相关系数，则$g^*(x)$的方差由下式给出

$$\sigma^2-2\alpha\rho\sigma\sigma_c+\alpha^2\sigma_c^2. \tag{5}$$

容易确定，当$\alpha=\rho\sigma/\sigma_c$时，上述方差达到最小，等于

$$(1-\rho^2)\sigma^2. \quad (6)$$

因此,对 $g_c(x)$ 与 α 的最合适的选择是 $g_c(x)$ 与 $g(x)$ 相关,相关系数 ρ 尽量接近 1,$\alpha=\rho\sigma/\sigma_c$. 相关估计法的一般原理是:寻找一个数学期望已知的统计量,使其数学期望的 α 倍对所求量的修正量尽量变得与其中的随机变量取值无关. 由于无偏统计量的计算不同而引起的计算量改变也不大,故可用已知数学期望的 α 倍与修正量的和代替原无偏统计量.

对偶抽样法(antithetic sampling method) 一种蒙特卡罗技巧. 虽然它不像统计估计法、重要抽样法、相关估计法等蒙特卡罗技巧那样有效,但由于它具有灵活与方便的特点,同样有广泛应用. 令 x 是由分布 $f(x)$ 中抽样确定的,$x'=\varphi(x)$,$g_a(x)=g(\varphi(x))$,$g^*(x)=(g(x)+g_a(x))/2$,如果 $g_a(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的数学期望,则有

$$\int g^*(x)f(x)\mathrm{d}x=\int g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

计算积分 $\int g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 的对偶抽样法是:确定合适的变换 $\varphi(x)$,用下式作为其近似估计

$$\hat{G}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g^*(x_n),$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 是母体分布为 $f(x)$ 的简单子样. 用 σ^2 表示统计量 $g(x)$ 的方差,ρ 表示 $g(x)$ 与 $g_c(x)$ 间的相关系数,则 $g^*(x)$ 的方差由下式给出

$$\frac{1+\rho}{2}\sigma^2.$$

因此,对变换 $\varphi(x)$ 的最合适的选择是 ρ 尽量接近 -1. 对偶抽样法也称对偶变数法. 它的一般原理是:除了原无编统计量外,寻找另一个具有相同数学期望的统计量,使它们之间尽量是负相关的,且与原统计量比较其运算量增加也不大,然后用这两个统计量的线性组合作为无偏统计量.

对偶变数法(antithetic variate method) 即"对偶抽样方法".

分裂与赌法(splitting and roulette method) 最有效的蒙特卡罗技巧之一. 由于它具有很强的普适性,因此,已被广泛地编入许多著名的通用蒙特卡罗软件中. 分裂与赌方法的缺点是,需要使用者确定其中的若干参数,若确定得不好,反会出现事倍功半的现象. 考虑如下二重积分的蒙特卡罗计算问题:

$$G=\iint g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$ 为随机变量 x 与 y 的分布密度,$g(x,y)$ 的二阶矩存在. 将 x 的积分区域分为两部分:重要区域 S 和非重要区域 R,则

$$\begin{aligned}&g^*(x,y,y_1,\cdots,y_{M(x)})\\&=\frac{1}{M(x)}\sum_{m=1}^{N}g(x,y_m)\eta\ (x\in S)\\&\quad+\frac{g(x,y)}{P(x)}\eta\ (x\in R,\xi\leqslant P(x)),\end{aligned}$$

同 $g(x,y)$ 一样,是上述二重积分的一个无偏统计量,其中 $M(x)$ 表示以随机变量 x 为自变量的整数函数;x 与 y 服从分布 $f(x,y)$;y_m 服从条件分布 $f_x(y)$ $(m=1,2,\cdots)$,$M(x)$;$\eta(\cdot)$ 为条件 · 的表征函数,当条件 · 成立时为 1,否则为零;$P(x)$ 表示概率;ξ 于 $[0,1]$ 上均匀分布. 分裂与赌法就是用上式作为蒙特卡罗估计的无偏统计量,式中前一部分与后一部分依次为分裂法部分与赌法部分. 分裂与赌法常是成双成对出现的,它的一般原理是:将其随机变量的区域分为两部分,原无偏统计量均方差大者为重要区域,小者为非重要区域,当该随机变量属于重要区域时,对其他随机变量进行多抽样,即进行分裂;属于非重要区域时,对其他随机变量是否抽样进行一次赌,赌胜时抽样,否则放弃抽样.

条件蒙特卡罗法(conditional Monte Carlo method) 计算条件期望值时有效的蒙特卡罗技巧. 在实际问题中,经常会遇到一些条件期望值的计算问题. 以二重积分计算为例,条件期望值一般可以表示成如下形式

$$G=\iint_{\alpha(x,y)=\alpha_0}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (1)$$

其中 $\alpha(x,y)$ 表示 x 与 y 的函数,α_0 为任意常数. 为计算上述条件期望值,用一般蒙特卡罗法直接计算的最大困难是,由分布 $f(x,y)$ 中抽样确定 x 与 y 时,能满足条件 $\alpha(x,y)=\alpha_0$ 的几乎没有,从而使得绝大多数的抽样对计算无实际意义. 条件蒙特卡罗法正是为解决这一特殊问题而提出来的. 进一步假设 $\alpha(x,y)$ 几乎处处不为零,并且对于任意 λ 满足条件 $\alpha(\lambda x,\lambda y)=\lambda\alpha(x,y)$. 引入变换 $x=\lambda x'$,$y=\lambda y'$,由于经此变换后的上述积分,虽然形式上与 λ 有关,但实际上其值与 λ 并无关系,因此,可以进一步将积分(1)表示成另一种形式如下

$$\begin{aligned}G=&\iint g\left(\frac{\alpha_0x'}{\alpha(x',y')},\frac{\alpha_0y'}{\alpha(x',y')}\right)\\&\cdot f\left(\frac{\alpha_0x'}{\alpha(x',y')},\frac{\alpha_0y'}{\alpha(x',y')}\right)\left(\frac{\alpha_0}{\alpha(x',y')}\right)^2\\&\cdot\varphi\left(\frac{\alpha_0}{\alpha(x',y')}\right)\frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{|\alpha(x',y')|},\end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\varphi(\lambda)$ 为满足归一条件的任意函数. 这样条件期望值计算问题变成非条件期望值问题. 条件蒙特卡罗法的一般原理是:将条件期望值计算问题转化成非条件期望值计算问题,利用其中引入的归一函数的任意性,确定合适的归一函数,用计算非条件期望值的一般蒙特卡罗法实现对原条件期望值的计算.

拟蒙特卡罗法(quasi-Monte Carlo method) 亦称数论法. 蒙特卡罗法的一种变形. 它可改善标准蒙特卡罗法的收敛速度,并使其误差不再是概率意

义下的表示形式．下面通过积分计算说明蒙特卡罗法与拟蒙特卡罗法的差别．令

$$I(f)=\int_{\bar{I}^s}f(\vec{X})d\vec{X}\simeq\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\vec{X}_n),$$

其中 $\bar{I}^s$ 是一个 s 维的单位立方体，$\{\vec{X}_n\}$ 是 $\bar{I}^s$ 上由 N 个点构成的点集．在标准蒙特卡罗法中，$\{\vec{X}_n\}$ 是来自均匀分布的随机序列（实际计算时就是伪随机数序列）．计算误差用统计学中标准差表示：

$$\left[E\left(I(f)-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\vec{X}_n)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sigma(f)N^{-\frac{1}{2}},\quad(1)$$

其中 $\sigma(f)=\left(\int_{\bar{I}^s}(f(\vec{X})-I(f))^2d\vec{X}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\sigma(f)$ 与 N 无关，也与维数 s 无关．因此，标准蒙特卡罗法的误差是统计意义下的 $O(N^{-\frac{1}{2}})$．

另一方面，对于任意的点集 $\{\vec{X}_n\}$ 都有著名的 Koksma-Hlawka 不等式

$$\left|\int_{\bar{I}^s}f(\vec{X})d\vec{X}-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\vec{X}_n)\right|\leqslant V(f)D_N^*(\{\vec{X}_n\}),\quad(2)$$

式中 $V(f)$ 是被积函数 f 的全变差，与 N 无关；$D_N^*(\{\vec{X}_n\})$ 称为均匀性偏差，并且

$$D_N^*(\{\vec{X}_n\})=\sup_J\left|\frac{A(J,\{\vec{X}_n\})}{N}-\mathrm{Vol}(J)\right|,$$

此处

$$J=\prod_{i=1}^{s}[0,u_i)\ (0<u_i\leqslant 1)$$

是 $\bar{I}^s$ 上的一个半开区间，其体积记为 $\mathrm{Vol}(J)$；$A(J,\{\vec{X}_n\})$ 是点集 $\{\vec{X}_n\}$ 中落入 J 的点数．如果点集 $\{\vec{X}_n\}$ 在 $\bar{I}^s$ 内的各处都较均匀的话，对应的偏差 $D_N^*(\{\vec{X}_n\})$ 值的水平也较低．根据式(2)，此时的积分误差也较小．若 N 趋向无穷，$\{\vec{X}_n\}$ 成为无穷序列．这时若

$$\lim_{N\to\infty}D_N^*(\{\vec{X}_n\})=0,$$

则称无穷序列 $\{\vec{X}_n\}$ 有一致分布．若

$$D_N^*(\{\vec{X}_n\})\leqslant c_s(\log N)^sN^{-1},\quad(3)$$

则称 $\{\vec{X}_n\}$ 为低偏差序列或拟随机数序列．上式右端的 c_s 是与 N 无关但却依赖于 s 的常数．

在拟蒙特卡罗法中，用于计算的序列 $\{\vec{X}_n\}$ 不是基于均匀分布的伪随机数序列，而是基于一致分布的拟随机数序列．其实，拟随机数序列是确定性的序列，而不是随机序列，所以很多人更愿意称为低偏差序列．把公式(3)代入(2)，便得拟蒙特卡罗法的误差上界

$$\left|\int_{\bar{I}^s}f(\vec{X})d\vec{X}-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\vec{X}_n)\right|\leqslant c_sV(f)(\log N)^sN^{-1}.$$

其误差界是 $O((\log N)^sN^{-1})$，当 s 不很大时，要比标准蒙特卡罗法对应的 $O(N^{-\frac{1}{2}})$ 更优．拟蒙特卡罗法的核心是构造低偏差序列，已被使用的几个低偏差序列的偏差都有 $O((\log N)^sN^{-1})$ 阶，但其系数 c_s 在高维时可有很大的差别．拟蒙特卡罗法的缺点是不像标准蒙特卡罗法那样灵活，且产生的低偏差序列也比伪随机数序列麻烦．但是它特别适用于高维积分的计算，在数学金融的超高维积分计算中已获得显著的效果．

数论法(number-theoretical method) 即“拟蒙特卡罗法”．

拟随机数序列(quasi-random number sequence) 见“拟蒙特卡罗法”．

低偏差序列(low-discrepancy sequence) 见“拟蒙特卡罗法”．

伴随蒙特卡罗法(adjoint Monte Carlo method) 一种特殊的蒙特卡罗法．考虑如下形式积分方程解的问题：

$$\varphi(x)=\int\varphi(x')K(x',x)\mathrm{d}x'+S(x).\quad(1)$$

该积分方程的伴随方程如下

$$\varphi^+(x)=\int K(x,x')\varphi^+(x')\mathrm{d}x'+S^+(x).\quad(2)$$

很明显，对于任意的 $S^+(x)$，两个积分方程的解之间有如下关系

$$\int\varphi(x)S^+(x)\mathrm{d}x=\int\varphi^+(x)S(x)\mathrm{d}x.\quad(3)$$

因此，适当地选择 $S^+(x)$，便可通过解伴随积分方程得到原积分方程的解．解积分方程(1)的伴随蒙特卡罗方法，是通过用蒙特卡罗法解伴随积分方程(2)和关系式(3)，得到原积分方程(1)的解．伴随蒙特卡罗法的优点是用蒙特卡罗法解伴随方程常比解原方程有许多好处，缺点是实现用蒙特卡罗法解伴随方程常比解原方程困难得多．当方程为自伴方程时，伴随蒙特卡罗法也称倒易蒙特卡罗法，倒易蒙特卡罗法常会比直接解原方程有更多的好处，只是在实际问题中属于自伴方程的情况很少．

倒易蒙特卡罗法(reciprocity Monte Carlo method) 见“伴随蒙特卡罗法”．

伪随机数(pseudo-random number) 在计算机上用数学方法产生的随机数．由具有[0,1]上均匀分布的总体中产生的简单子样 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 简称随机数序列，其中的每一个体称为随机数．产生随机数的方法主要有：借助随机数表产生方法，物理方法和数学方法．一般情况下，产生随机数的数学方法是对于给定的初值 $X_1,X_2,\cdots,X_k$，用如下递推公式实现 $X_{n+k}=T(X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+k-1})\ (n=1,2,\cdots)$．此式常取同余形式，$T$ 可以是线性或非线性函数．通常 $k=1,2$ 依次称为一阶、二阶方法．

用数学方法产生的随机数存在两大问题：

1. 递推公式与初值确定后，整个随机数序列便被惟一地确定，不满足随机数相互独立的要求.

2. 电子计算机上所能表示的数总是有限多的，因此，用递推公式所确定的随机数序列必然会出现周期性的重复现象.

正是由于存在这两个原因，常称用数学方法产生的随机数为伪随机数. 产生伪随机数的方法主要有平方取中法、移位加法、线性同余法(包括加同余法、乘同余法、混合同余法)、非线性同余法(包括逆同余法)、移位寄存器法、进位加法、借位减法和组合法等，其中被广泛采用的有线性同余法、移位寄存器法和组合法.

随机数序列(random number sequence)　见“伪随机数”.

随机数(random number)　见“伪随机数”.

产生伪随机数的线性同余法(linear congruential method for generating pseudo-random numbers)　产生伪随机数的一种常用方法. 其一般形式是，对于任意的初值 X_1，用如下递推公式确定：

$$X_{n+1} \equiv AX_n + C(\mathrm{mod}\ M),\quad x_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{M},$$

其中的 A,C 与 M 均为常数. 由于线性同余法在电子计算机上很容易实现，而且产生速度快，因此，直到现在仍被广泛使用. 为使线性同余法所产生的伪随机数具有更好的性质，一般情况下，常取 $M=2^S$，其中 S 是计算机中二进制整数的最大可能位数；$A \backsimeq M^{1/2}$，而且 $A\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$；$C$ 与 M 互素；X_1 与 M 互素.

线性同余法有两个特例：当递推式中的常数 $A=1$ 时，称为加同余法；当 $C=0$ 亦称乘同余法. 在一般情形下($A\neq 1, C\neq 0$)称为乘加同余法或混合同余法.

产生伪随机数的混合同余法(mixed congruential method for generating pseudo-random numbers)　见“产生伪随机数的线性同余法”.

产生伪随机数的乘加同余法(multiplicative additional congruential method for generating pseudo-random numbers)　见“产生伪随机数的线性同余法”.

产生伪随机数的乘同余法(multiplicative congruential method for generating pseudo-random numbers)　产生伪随机数的一种常用方法. 乘同余法的一般形式是，对任意初值 X_1，用如下递推公式确定：

$$X_{n+1} \equiv AX_n(\mathrm{mod}\ M),\quad x_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{M},$$

其中的 A 与 M 均为常数. 为使乘同余法所产生的伪随机数具有更好的性质，一般情况下，常取 $M=2^S$，其中 S 是计算机中二进制整数的最大可能位数；$A \backsimeq M^{1/2}$，而且 $A\equiv 3$ 或 $5(\mathrm{mod}\ 8)$；X_1 与 M 互素.

M 也可以是小于 2^s 的素数，例如 $M=2^{31}-1$；A 为 M 的一个本原根，即对 $M-1$ 的任一素因子 q，都有 $A^{(M-1)/q}\neq 1(\mathrm{mod}\ M)$；$X_1$ 为任意非零整数. 这时所得随机数序列的周期可达 $M-1$.

产生伪随机数的移位寄存器法(shift register method for generating pseudo-random numbers)　产生伪随机数的一种方法. 用 F_2 表示只含 0 和 1 的二元有限域，其中的加法定义为

$$\begin{cases} 0+0=1+1=0, \\ 0+1=1+0=1, \end{cases} \tag{1}$$

选定不全为零的参数 $a_i\in F_2$ 和初值 $b_i\in F_2$ $(i=1,2,\cdots,I)$，令

$$b_k = \sum_{i=1}^{I} a_i b_{k-i}\ (k=I+1, I+2, \cdots), \tag{2}$$

则可得到基本列 $b_1, b_2, \cdots$，产生伪随机数的移位寄存器法是用如下公式构成伪随机数

$$x_n = \sum_{l=1}^{L} b_{nd+r-l} 2^{-l}, \tag{3}$$

其中 d 表示构成伪随机数时所用基本列的间距；r 表示对初始值的随机选取；L 表示构成伪随机数的二进制数的位数. 这个方法产生的伪随机数序列的周期取决于基本列的周期. 由式(2)看出，基本列的最大可能周期为 2^I-1. 基本列达到最大可能周期的充分必要条件是，其关联多项式

$$f(x) = 1 + \sum_{i=1}^{I} a_i x^i$$

为本原多项式. 在实际应用中，常选 $f(x)$ 为本原三项式，因为这样可以提高代数法产生伪随机数的速度. 产生伪随机数的代数法，由于它的周期几乎可以任意大，因此，移位寄存器方法也是常用方法之一. 它所产生的随机数序列常称为陶斯沃茨序列.

陶斯沃茨序列(Tausworthe sequence)　见“产生伪随机数的移位寄存器法”.

产生伪随机数的组合法(combined method for generating pseudo-random numbers)　产生伪随机数的一种常用方法. 它是用两个或两个以上的伪随机数列或确定数列进行组合来产生新的伪随机数列方法的统称. 令 y_i $(i=1,2,\cdots,I)$表示某伪随机数序列，I 为其周期. 早期常见的组合法有：

1. 令 α_j $(j=1,2,\cdots,J)$为$[0,1]$上与 y 序列不存在函数关系的任意序列，周期为 J. 把 α 与 y 两序列相加产生新的伪随机数序列

$$x_n = \{y_{I\{(n-1)/I\}+1} + \alpha_{J\{(n-1)/J\}+1}\}\quad (n=1,2,\cdots),$$

其中$\{\cdot\}$表示取数 · 的小数部分.

2. 令 β_j $(j=1,2,\cdots,J)$ 为与 y 序列不存在函数关系的任意整数序列，周期为 J. 把 β 与 y 两序列相乘产生新的伪随机数序列

$$x_n = \{\lambda_{J\{(n-1)/J\}+1} \times y_{I\{(n-1)/I\}+1}\}$$
$$(n = 1,2,\cdots,N),$$

上面两个新序列的周期都是 I,J 的最小公倍数.

近期的组合方法多数是基于几个乘同余发生器的线性组合. 这里把产生伪随机数的乘同余方法简称乘同余发生器. 设有 m 个乘同余发生器

$$X_{(n+1)}^{(j)} \equiv A^{(j)} X_n^{(j)} (\bmod M^{(j)})$$
$$(n = 1,2,\cdots; j = 1,2,\cdots,m),$$

其中 $M^{(j)}$ 为素数，且 $M^{(1)} > M^{(j)}$ $(j \neq 1)$. 令 $c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, c^{(m)}$ 为 m 个任意非零正整数，则可定义如下两个组合发生器：

$$U_n = \sum_{j=1}^{m} \frac{c^{(j)} X_n^{(j)}}{M^{(j)}},$$
$$u_n = U_n (\bmod 1) \quad (n = 1,2,\cdots),$$
$$V_n = \sum_{j=1}^{m} c^{(j)} X_n^{(j)} (\bmod M^{(1)}),$$
$$v_n = \frac{V_n}{M^{(1)}} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

可以证明，组合发生器的周期是被组合的几个发生器的周期的最小公倍数. 理论上可以证明，几个独立且在[0,1]上近似均匀的随机变量相加，对 1 取模后，仍是一个近似均匀的随机变量，且其分布比组成它的任一单个变量更接近[0,1]均匀分布. 若记

$$M = \prod_{j=1}^{m} M^{(j)},$$
$$n^{(j)} \equiv \left(\frac{M}{M^{(j)}}\right)^{M^{(j)}-2} (\bmod M^{(j)})$$
$$(j = 1,2,\cdots,m),$$
$$A \equiv \sum_{j=1}^{m} \frac{A^{(j)} n^{(j)} M}{M^{(j)}} \ (\bmod M).$$

还可以证明上述 u,v 两个组合发生器分别等价和近似等价如下的一个关联乘同余发生器：

$$Z_{n+1} \equiv A Z_n (\bmod M),$$
$$z_n = \frac{Z_n}{M} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

多年来，构造统计特性优良的单个乘同余发生器的理论和技术业已被充分探讨. 近几年又发现了关联理论，在此基础上，再借助某些寻优技术，完全可以主动地构造出周期极长，而且统计特性优异的组合发生器.

产生伪随机数的进位加法(add-with-carry methods for generating pseudo-random numbers) 20 世纪 90 年代提出的产生伪随机数序列的一种新方法. 设 b,p,q 为正整数，此处 b 称为基，$p>q$ 称为延迟，进位加法(简记为 AWC)的递推式是

$$X_n \equiv X_{n-q} + X_{n-p} + C_{n-1} (\bmod b)$$
$$(n = p, p+1, \cdots),$$
$$C_n = \begin{cases} 1 & (X_{n-q} + X_{n-p} + C_{n-1} \geqslant b), \\ 0 & (X_{n-q} + X_{n-p} + C_{n-1} < b). \end{cases}$$

式中 C_n 称为进位.

20 世纪 90 年代提出的产生伪随机数序列的另一种方法是借位减法(简记为 SWB)，其递推式是

$$X_n \equiv X_{n-q} - X_{n-p} - C_{n-1} (\bmod b)$$
$$(n = p, p+1, \cdots),$$
$$C_n = \begin{cases} 1 & (X_{n-q} - X_{n-p} - C_{n-1} < b), \\ 0 & (X_{n-q} - X_{n-p} - C_{n-1} \geqslant b). \end{cases}$$

式中 C_n 称为借位.

上述两种方法的递推初值均由 $(X_0, X_1, \cdots, X_{p-1})$ 和 C_{p-1} 构成. 为得到[0,1]上的伪随机数序列，可取 $k \leqslant p$ 个相继的 X_n 去产生一个随机数

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} X_{kn-j+1} b^{-j}.$$

对于所需精度而言，若 b 已足够大，则可取 $k=1$，这时 $x_n = X_n / b$. 令

$$M = \begin{cases} b^p + b^q - 1 & \text{对于进位加法}, \\ b^p - b^q + 1 & \text{对于借位减法}, \end{cases}$$

若 M 是素数，且 b 是 M 的一个本原根，即对于 $M-1$ 的任一素因子 a，都有 $b^{(M-1)/a} \neq 1 (\bmod M)$，则 X 序列有最大的周期 $M-1$. 若 k 与 $M-1$ 互素，则 x 与 X 两序列有相同的周期. 进位加与借位减两种方法运算简单，其产生速度甚至比传统的线性同余法还快，因为这时的模运算 mod b 可简化为一个减法或加法，而且所得序列的周期极长，例如 $b \approx 2^{31}$，$p \approx 20$，则周期近似 2^{620}.

产生伪随机数的借位减法(subtract-with-borrow methods for generating pseudo-random numbers) 见"产生伪随机数的进位加法".

产生伪随机数的逆同余法(inversive congruent method for generating pseudo-random number) 产生伪随机数的非线性类方法中最常见的一种. 记 $Z_M = \{0,1,2,\cdots,M-1\}$，这是个有限域. 对于 $c \in Z_M$ (M 为素数)，定义 $\bar{c} \in Z_M$，若满足 $C\bar{C} \equiv 1 (\bmod M)$，则称 $\bar{C}$ 是 C 关于模 M 的乘法逆(若 $C=0$，定义 $\bar{C}=0$). 逆同余法中最常见的一个递推式为

$$X_{n+1} \equiv A\bar{X}_n + B (\bmod M),$$
$$x_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{M} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

式中常数 $A, B \in Z_M$. 逆同余法在构造高维随机数列时，有很好的高维均匀性，这是线性同余类所不及的. 但其周期不比线性同余类长，且实际产生随机数的速度比线性类慢许多.

直接抽样法(direct sampling technique) 一种

抽样方法. 对于任意给定的分布函数 $F(x)$，产生其样本的一种方法. 它的一般形式为

$$x=\inf_{F(t)\geqslant\xi} t,$$

其中 ξ 为在$[0,1]$上均匀分布的随机数. 当 $F(x)$为离散型分布时

$$F(x)=\sum_{x_i<x}P_i,$$

直接抽样方法是 $x=x_n$，其中

$$\sum_{i=1}^{n-1}P_j<\xi\leqslant\sum_{i=1}^{n}P_i.$$

另外，当 $F(x)$为连续型分布时，直接抽样方法是 $x=F^{-1}(\xi)$. 对于离散型分布，直接抽样方法的优点是简单明了，易于实现，缺点是当离散点数多时，抽样速度慢. 对于连续型分布，当 $F^{-1}(\xi)$容易计算，而且运算量又不大时，直接抽样方法是最理想的. 不过，在实际问题中具有这样性质的情况很少.

舍选抽样法(acceptance rejection sampling method)　一种抽样方法. 它是产生具有如下积分形式分布的样本的一种方法. 设有分布

$$f(x)=\frac{\int_{-\infty}^{H(x)}f_0(x,y)\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{H(x)}f_0(x,y)\mathrm{d}y},$$

其中 $f_0(x,y)$为任意二维分布的密度函数，又设其样本为 x_f，舍选抽样方法为

$$y_{f_0}\leqslant H(x_{f_0})?\quad(>\text{ 返回})$$

$$\downarrow\leqslant$$

$$x_f=x_{f_0},$$

其中 x_{f_0}与 y_{f_0}是由分布 $f_0(x,y)$中抽样确定的，抽样效率为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{H(x)}f_0(x,y)\mathrm{d}y.$$

在实际问题中常见的一种连续分布如下：

$$f(x)=H(x)f_1(x),$$

对此分布的舍选抽样法是

$$M\xi\leqslant H(x_{f_1})?\quad(>\text{ 返回})$$

$$\downarrow\leqslant$$

$$x_f=x_{f_1},$$

其中 M 为 $H(x)$的上界，ξ 为在$[0,1]$上的均匀分布的随机数，抽样效率为 $1/M$. 舍选抽样方法的优点是，不像直接抽样方法那样需要计算分布函数的反函数. 缺点是，当 $H(x)$确定得不合适时，抽样效率会变得很低，抽样速度变慢.

复合抽样法(composition sampling technique)　一种抽样方法. 它是专门为解决复合分布抽样问题而设计的一种方法. 复合分布的一般形式为

$$f(x)=\int f_2(x|y)\mathrm{d}F_1(y),$$

其中 $f_2(x|y)$ 表示与参数 y 有关的条件分布密度函数，$F_1(y)$ 表示分布函数. 对此分布的复合抽样法是：首先由分布 $F_1(y)$ 中抽样确定 y，然后，对于确定的 y 由分布 $f_2(x|y)$ 中抽样确定 x，此 x 即为服从分布 $f(x)$ 的随机数. 最常见的复合分布有加分布

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N}P_nf^{(n)}(x),$$

其中 $P_n>0$，满足条件 $\sum P_n=1$. 用 ξ 表示均匀分布在$[0,1]$上的随机数，x_n 表示是从分布 $f^{(n)}(x)$ 中抽样确定的，当

$$\sum_{i=1}^{n-1}P_i<\xi\leqslant\sum_{i=1}^{n}P_i$$

时，对此分布的复合抽样法如下：

$$x_f=x_n.$$

另外，也有一些分布形式上虽然不是复合分布，但实际上也可以表示成复合分布形式，如拉普拉斯分布就是如此

$$f(x)=\frac{1}{2}\exp(-|x|)\quad(-\infty<x<\infty).$$

因为此分布可以看做是定义在$(-\infty,0)$与$(0,\infty)$上的两个分布之和.

复合舍选抽样法(composition rejection sampling technique)　一种特殊的复合抽样方法. 作为复合分布的一种推广形式是

$$f(x)=\int H(x,y)f_2(x|y)\mathrm{d}F_1(y),$$

其中 $H(x,y)\geqslant 0$，$f_2(x|y)$ 为与参数 y 有关的条件分布，$F_1(y)$ 为分布函数. 复合舍选抽样法是专门为解决由此分布中的抽样问题而设计的，其一般过程如下：

1. 由分布 $F_1(y)$ 中抽样确定 y_1.
2. 由分布 $f_2(x|y_1)$ 中抽样确定 x_2.
3. 当条件 $M(y_1)\xi\leqslant H(x_2,y_1)$ 不满足时，转至步骤(1)；否则进入下一步骤.
4. $x_f=x_2$.

其中 $M(y)$ 为 $H(x,y)$ 的上界，ξ 为均匀分布在$[0,1]$上的随机数，抽样效率为

$$E=\int\frac{1}{M(y)}\mathrm{d}F_1(y).$$

在实际问题中经常见到的如下乘加分布

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N}H_n(x)f^{(n)}(x),$$

属于上述复合分布的推广形式，对此分布复合舍选抽样方法曾很好地解决了许多复杂分布抽样的难题.

别名抽样法(alias sampling technique)　一种抽样方法. 它是专门为解决离散型分布抽样问题而

提出来的一种方法. 用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示离散型随机变量 x 的跳跃点, $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 表示相应的概率. 对离散型分布的别名抽样方法的一般原理是,对于随机变量 x 的每一跳跃点 x_i,都确定这样一个别名 x_j,和取这一别名的概率 $q_{i,j}$,满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} q_{i,j} = P_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

然后用如下办法实现抽样:

$$i = [n\xi_1]$$
$$\downarrow$$
$$\xi_2 \leqslant q_{i,j}?$$
$$\leqslant\downarrow \qquad \downarrow>$$
$$x_f = x_i \qquad x_f = x_j$$

其中 ξ_1 与 ξ_2 均为均匀分布在[0,1]上的随机数, [*]表示取数 * 的整数部分. 别名抽样方法的最大优点是,其抽样速度与离散型分布跳跃点的个数无关,比离散型分布的其他所有抽样方法的速度都快,跳跃点数越多越是如此. 缺点是,必须事先计算确定别名概率.

近似抽样法(approaching sampling technique) 一种抽样方法. 它是当从已知分布中抽样困难时,用近似办法解决抽样问题的方法. 用 $f(x)$ 表示已知分布的密度函数, $F(x)$ 为其分布函数,对此分布的直接抽样法是 $x_f = F^{-1}(\xi)$,其中 ξ 为均匀分布在[0,1]上的随机数. 近似抽样法的一种最常见的形式是,当计算 $F^{-1}(\xi)$ 困难时,用近似方法进行计算. 近似抽样法的另一种常见的形式是:设

$$f_a(x) \backsimeq f(x),$$

用对分布 $f_a(x)$ 的抽样替代对分布 $f(x)$ 的抽样,确定 $f_a(x)$ 的一种最好方法是采用线性近似的办法. 用 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 表示 x 的分点, $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 为相应的密度函数值, $F_0, F_1, \cdots, F_n$ 为相应的分布函数值,线性近似的抽样方法如下

$$\xi_1 - F_i \leqslant 0 \leqslant \xi_1 - F_{i-1}$$
$$\downarrow$$
$$\xi_1 - F_{i-1} \leqslant ((f_i - f_{i-1})\xi_2 + f_{i-1})\frac{x_i - x_{i-1}}{2}?$$
$$\leqslant\downarrow \qquad\qquad \downarrow>$$
$$x_f = x_{i-1} + (x_i - x_{i-1})\xi_2 \qquad x_f = x_{i-1} + (x_i - x_{i-1})(1-\xi_2)$$

令

$$m = \inf\left(\frac{f(x)}{f_a(x)}\right),$$

则对于任意的 $f_a(x)$ 有

$$f(x) = H_1(x)f_1(x) + mf_a(x),$$

其中 $H_1(x) \geqslant 0$, $f_1(x)$ 为任意分布密度函数. 当 $f_a(x)$ 近似 $f(x)$ 比较差时,可以根据上式,利用复合舍选抽样方法予以修正,即可用近似-修正抽样方法解决 $f_a(x)$ 近似 $f(x)$ 差的问题.

科学计算与并行算法

科学计算(scientific computing) 科学与工程计算的简称. 指以计算机为计算工具,用计算方法解决科学工程中的数学问题所进行的数值计算. 它是一门工具性、方法性、边缘交叉性很强的新学科. 从20世纪40年代末以来的50余年里,随着计算机与计算方法的迅速发展,计算已成为与理论、实验相并列的第三种科学方法,它广泛应用于科学研究与工程科学的各个领域,许多计算性新学科,如计算物理、计算力学、计算化学等纷纷兴起,计算数学则是它们的纽带和共性基础. 描述科学基本规律的数学模型主要是微分方程,因此,科学计算主要课题就是求解微分方程,特别是解决现代科学、工程中的大规模、非线性、非均匀性和几何非规则性的大型问题. 科学计算可以理解为一个完整的解题过程,即从给定的科技计算问题出发,进行分析研究,建立其数学模型;研究高效率的计算方法;研制算法程序并在计算机上实施计算;最后检验计算结果的实际效果. 如果结果不合要求,整个过程需要反复进行,重新研究修改数学模型,设计新的计算方案等直至算出符合要求的结果.

科学工程计算(scientific engineering computing) 即"科学计算".

计算物理学(computational physics) 研究计算机和计算数学在物理学中应用的计算性学科分支. 它是以电子计算机为工具,应用各种数值计算方法,解决物理学问题的一门新兴边缘学科. 它是物理、数学和计算机三者相结合的产物. 在第二次世界大战期间,美国在核武器研制过程中涉及很复杂的非线性微分方程组求解问题,对此用传统的分析方法求解是根本不可能的,求数值解又涉及大量复杂的计算,这就促使电子计算机的出现和发展,而计算机的发展又促进了可用于电子计算机的数值方法和技巧的发展. 计算物理学正是在这种形势下应运而生的. 从20世纪50年代以来,计算物理学得到了飞速的发展,在科学工程技术和国防科研中发挥了很大的作用.

计算化学(computational chemistry) 研究计算机和计算数学在化学中应用的计算性学科分支. 它是以电子计算机为工具,应用各种计算数学方法,解决化学问题的一门新兴边缘学科. 这是化学、计算数学和电子计算机三者相结合的产物. 在化学学科中有许多领域,例如,量子化学、结构化学、非平衡态的统计计算等,涉及很复杂的数学问题. 由于电子计算机以及与之相应计算数学的发展,使得这些数学

问题的求解成为可能. 例如,在量子化学中,用数值方法在计算机上求解复杂的薛定谔方程来计算分子中电子运动的规律,从而说明分子结构,解释分子的化学性质和各种化学现象. 美国化学家豪普特曼(Hauptman,H. A.)和卡尔勒(Karle,J.)因提出使用计算机有效地确定分子结构的方法而获得1985年的诺贝尔化学奖,他们的研究成果对探索生物过程和制药有重要作用. 计算化学正随着计算机的飞速发展而发展,在化学学科发展中和在各种应用上发挥着重要作用.

计算力学(computational mechanics) 研究计算机和计算数学在力学中应用的计算性学科分支. 它是以计算数学方法,并借助现代电子计算机解决力学中的各类实际问题的一门新兴学科. 第二次世界大战后,电子计算机出现并得到迅速发展,这种强大的计算工具的出现使复杂的数字计算不再成为不可逾越的障碍,为计算力学的形成奠定了物质基础. 与此同时,适用于电子计算机的各种计算方法也得到相应的发展.

20世纪60年代以来所发展的有限元法和计算机相结合,使过去无法进行的一些大型复杂结构的静力分析成为常规计算. 有限差分法的发展,使得一些困难的流体力学问题,利用计算机作数值模拟而得到解决,例如,美籍匈牙利学者卡门(Kármán,T. von)涡街. 计算力学正是在高速电子计算机的产生以及随之发展起来的新计算方法的基础上形成的. 它的应用范围已扩大到固体力学、岩土力学、流体力学、生物力学等领域. 计算流体力学、计算结构力学是计算力学的两个重要研究分支.

并行算法(parallel algorithm) 计算数学的重要研究方向. 研究适合于并行计算机可同时执行多个运算的算法. 一个求解问题的并行算法是由多个进程组成的有限集合,这些进程间有信息相联系,而且可以同时执行并协同地完成该问题的求解. 所谓进程是能用指令序列表述的若干顺序处理步骤. 计算机传统结构的显著特征是单指令单数据,即每一时刻按一条指令处理一个数据,传统算法适合此种特征,称为串行算法. 由于对超高性能计算的需求层出不穷,而发展含大量处理机(一台处理机可简单到只包含算术逻辑部件,也可复杂至本身就是完整的计算机)的并行计算机是获取永无止境超高性能的惟一途径,因此,在20世纪70年代初,首台并行机问世.

并行机就其控制方式分为单指令多数据(Single-Instruction-Multiple-Data 缩写为 SIMD)和多指令多数据(MIMD)两大类,每一时刻分别按一条和多条指令处理多个数据;就主存储器设置方式又可分为共享存储器型和分布存储器型两大类,共享型集中设置存储器为各处理机公用,分布型则将存储器附设于各处理机. 迄今,大多并行机是MIMD机,它们有单程序多数据(Single-Program-Multiple-Data 缩写为 SPMD)和多程序多数据(MPMD)两种计算模式,各处理机分别执行同一和不同程序处理各自的数据集. 针对不同类型及计算模式的并行机需设计不同类型的算法,好的算法应考虑到并行机的处理机之间的通信方式与能力这一影响效率的重要因素.

并行算法可以分成三大类:

1. SIMD算法.

2. 同步MIMD算法,同步指算法中有些进程的某些步骤必须在完成其他进程的一些步骤之后方可执行.

3. 异步算法,其各进程之间不需同步,基本上是混乱迭代法. 问题是算法怎样设计与分析.

并行计算依赖于一个简单事实:独立的计算可以同时执行,所谓独立计算是指其每个结果元只出现一次的计算. 由此产生"分而治之"和"重新排序"两种非常基本的并行算法设计思想,而且从根本上说这两种思想是相通的. 举一个简单的例子:计算

$$A_8 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8.$$

串行算法乃从 a_1 至 a_8 依序相加,用7步加法. 因 A_8 的7个加法不能同时执行,故无法用1步加法并行完成,但可反复将每一计算分裂成具有同等复杂性的两个独立部分,得到如下3组计算:

1. $(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)$.

2. $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)$, $(a_5+a_6)+(a_7+a_8)$.

3. a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, a_7+a_8.

顺着看,(1)→(2)→(3)是分而治之,相对串行方式也是一种重新排序;反过来,(3)→(2)→(1)是有序的三个独立计算组,是一个并行算法,用3步加法. 易见,依此并行计算

$$A_N=a_1+a_2+\cdots+a_N \quad (N=2^n)$$

只需 n 步加法. 并行算法设计还有物理模拟等其他思想和方法. 值得重视的是,从数学模型乃至物理问题进行高层次的并行性研究,将给并行算法设计带来大的突破.

关于并行算法分析,一是理论分析,除了如同串行计算需作误差、数值稳定性、迭代法(尤其是异步算法)收敛性等分析外,还有因超大规模计算引出的种种新的数值现象等问题;二是计算复杂性,包括处理机台数 p(空间复杂性)和执行时间 T_p(时间复杂性). 实际使用的计算复杂性量度还有加速 S_p 和效率 E_p 等,

$$S_p=\frac{T_1}{T_p}, \quad E_p=\frac{S_p}{p},$$

其中 T_1 是最快串行算法执行时间. 理想地,$S_p=p$

即 $E_p=1$，但一般 $S_p<p$；相对 p 来说 S_p 很小或 p 增加时 S_p 增加很缓慢的并行算法不是好算法. 有一个著名的 Amdahl(或 Ware)定律：如果一个并行算法中有百分率为 α 的时间只使用 1 台处理机(作串行计算)，而其余百分率为 $1-\alpha$ 的时间均使用 p 台处理机(作并行计算)，那么

$$S_p=\left[\alpha+\frac{(1-\alpha)}{p}\right]^{-1}.$$

由此，$p=100$，$\alpha=1\%$(串行计算只占 1%时间)时 $S_p\approx 50$(降到只有 p 的一半)；$\alpha=50\%$时无论 p 多大，

$$S_p=\frac{2}{1+\frac{1}{p}}<2.$$

此定律意义在于说明设计一个高效的并行算法并非易事. 并行算法研究已有 20 余年，已经或正在解决众多重要课题. 但并行算法与串行算法存在的固有差别，却一直严重滞后并行机的发展.

串行算法(serial algorithm)　见“并行算法”

并行算法分析(parallel algorithm analysis)　见“并行算法”

计算复杂性(computational complexity)　见“并行算法”

超级计算(supercomputing)　计算数学的重要概念. 指超级计算机及有效应用的总称. 而超级计算机或称巨型机(supercomputer)指能解决复杂计算的大型、非常快速、价格昂贵的计算机，通常这类机器还具有流水线部件和执行向量运算指令等功能. IDC(国际数据集团公司)关于超级计算与超级计算机之间差别的说法是：超级计算是用计算机去研究、设计产品及支持复杂的决策；而超级计算机则是解决上述问题的计算机. 因此，超级计算不能混同于超级计算机，其内涵除了属于最领先的计算硬件系统外，还应包括着软件系统和测试工具、解决复杂计算的算法、应用软件与通用库等.

高性能计算(取英文的第一个字母，缩写为 HPC)，指高性能计算机连同有效应用. 而高性能计算机指传统超高速计算机和多个 CPU 组成的并行计算机.

因此，可以说高性能计算蕴涵着超级计算而且比超级计算词义更为广泛. 然而在实际使用上一般似乎不大区分这两个词. 这里指出，人们可以相仿地表述并行计算，以及并行计算与并行计算机之间的差别.

值得强调的是，上述说法中把高性能(或超级)计算机和有效应用两件事摆在同样重要的位置. 一方面，如果没有高性能计算机的迫切的非它不可的应用需求，发展高性能计算机就会没有依据和市场. 美国政府 1991 年制定“高性能计算与通信(HPCC)”计划的核心正是确认和研究一组“重大挑战”应用课题，这类课题涉及气候与气象、污染、材料、分子与原子、流体、燃烧等难以一一列举，它们需要每秒万亿次的计算机，解决难度很大. 日本政府也于 1992 年颁布“真实世界计算(RWC)”计划，旨在模仿人类凭直觉判断问题的方式，处理真实世界中那些模糊的、复杂的、不确定的信息，形成信息处理新风范，目标包括含 100 万个处理机的并行计算机和有 100 万个单元的神经网络系统. 另一方面，即便有了高性能计算机和重大课题，也未必就能用好计算机有效解决课题. 事实上多数高性能计算机好造不好用(或没用好)而匆匆被载入史册. 因此，为发发展高性能计算，不能重硬(机器)轻软(应用)，必须给应用投资，检验其水平最终也应看解决了哪些重大课题.

超级计算概念随 20 世纪 70 年代初出现第一代向量计算机而提出，高性能计算也可从 1972 年有开创性意义的并行计算机 ILLIAC Ⅳ 问世算起. 这一领域发展异常迅速. 算法的研究发掘是实现高性能计算的基础和前提之一(参见“并行算法”).

高性能计算(high performance computing)　见“超级计算”.

撰　稿　王川龙　王汝权　王烈衡　吕　伟　刘儒勋　齐铁山　宋儒瑛　汤怀民　严宁宁　李　健　李庆扬　李荫藩　张永奎　陈景良　孟繁兴　徐利治　徐树方　谈庆明　梁珍璇　雷功炎　裴鹿成　熊华鑫

审　阅　刘德贵　孙　澈　杨自强　周毓麟　周蕴时　胡健伟　胡家赣　徐利治　黄明游　曹志浩　梁友栋　藤振寰

概　率　论

概率论(probability theory)　从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科.它的目的是构造所研究的随机现象的数学模型,进而透过大量表面的偶然性去发现内部隐藏着的规律.

概率论的系统研究开始于17世纪中叶,本来是由保险事业的发展而产生的,但是来自赌博者的请求,却是数学家们思考概率论的一些特殊问题的源泉.早在1654年,赌徒梅雷(Méré,A. G. C. de)提出的一些问题使得法国数学家帕斯卡(Pascal,B.)和费马(Fermat,P. de)进行研究并交换信件,在这些通信中首次陈述了概率论的基本原则.1657年,荷兰数学家、物理学家惠更斯(Huygens,C.)在研究这些通信的基础上,企图自己解决这些问题,写成了《论机会游戏的计算》一书,这就是概率论最早的著作.由于他们的工作,逐步建立了像概率和数学期望等重要概念,找出了它们的基本性质和演算方法.

18世纪,概率论得到了迅速发展.这一时期做出主要贡献的是瑞士数学家雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)和英籍法裔数学家棣莫弗(De Moivre,A.).1812年,法国数学家、天文学家拉普拉斯(Laplace,P.-S.)的著作《分析概率论》出版,这是对18世纪概率论研究成果的总结.内容包括几何概率、伯努利定理、最小二乘法等,书中给出了概率的古典定义,证明了中心极限定理的棣莫弗—拉普拉斯形式,发展了概率论在观察和测量误差方面的应用.应该指出,最小二乘法是高斯(Gauss,C. F.)大约在1794年最先使用的,并且他在研究误差理论时重新导出被后人称之为高斯分布的正态分布.人口统计、保险统计数学、统计力学等都是19世纪概率的一些重要应用的例子,概率论的迅速发展与整个社会的生产和科学的发展紧密地联系着.继拉普拉斯之后,对概率论做出重要贡献的数学家是切比雪夫(Чебышев,П. Л.)、马尔可夫(Марков,А. А.)、冯·米泽斯(von Mises,R.)和柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.).

如何严格地定义概率,一直是概率理论发展的困难所在,这一方面的探索延续了三个世纪,有过许多争论,直到1933年,柯尔莫哥洛夫提出了概率论公理化结构,问题才得以解决.他的公理化方法是现代概率论的基础.从此,概率论成为严谨的数学分支,并对近几十年来概率论的迅速发展起了决定性作用.

目前,概率论的理论与方法已广泛地应用于自然科学、技术科学、社会科学与人文科学的各个方面.20世纪末期,随着科学技术的迅速发展,它在经济管理、工程技术、物理、气象、海洋、地质等领域中的作用愈加显著.随着计算机的发展与普及,概率论及数理统计已成为处理信息、进行决策的重要理论与方法.在理论联系实际方面,概率论是数学最活跃的分支之一.

当代科学技术发展的特征之一是概率论的理论和方法向各个领域渗透,由此产生了许多新的分支和边缘学科,如生物统计、统计物理、数学地质和教育统计等.许多新的重要学科,如信息论、控制论、排队论、预测论、可靠性理论和人工智能等都以概率论为理论基础.概率论作为一个理论严谨、应用广泛、发展迅速的数学分支,正日益受到人们的重视并发挥着巨大的作用.

概率论的基本概念

决定性现象(deterministic phenomenon)　概率论的基本概念之一.是人类社会和自然界经常遇到的现象.其特点是在一定的条件下必然出现(或必定不出现).例如,在一个标准大气压下,纯水加热到100℃一定沸腾;同性电荷一定互斥;在恒力作用下的质点作等加速运动等.

随机现象(random phenomenon)　概率论的基本概念之一.是人们通常说的偶然现象.其特点是,在相同的条件下重复观察时,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,预先不能断言将出现哪种结果.例如,投掷一枚五分硬币,可能"国徽"向上,也可能"伍分"向上;从含有5件次品的一批产品中任意取出3件,取到次品的件数可能是0,1,2或3.

随机试验(random experiment)　概率论的基本概念之一.其结果具有偶然性的试验.人们通过它来观察随机现象.随机试验具有如下特性:

1.试验可以在相同的条件下重复进行.

2.试验的所有可能结果是明确知道的,并且不止一个.

3.每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

例如,投掷一枚硬币,观察哪一面向上就是一个随机试验.在概率论中,随机试验常简称试验.

基本事件空间(space of elementary events)　亦称样本空间.概率论的基本概念之一.是概率论研究的出发点.随机试验的每一个单一的结果称为一

个基本事件.全体基本事件的集合称为基本事件空间.一般以ω表示基本事件,以Ω表示基本事件空间.基本事件空间又常称为样本空间,此时,基本事件称为样本点.只含有有限个基本事件(样本点)的基本事件空间称为有限基本事件空间(有限样本空间);含有可数个基本事件(样本点)的基本事件空间称为离散基本事件空间(离散样本空间).如果抛开基本事件的具体定义,则可以把Ω看成一个抽象点集,每一个基本事件ω就是Ω中的一个点.基本事件空间可以根据随机试验的内容(试验条件与观察的目的)来决定.例如,从标有1,2,3,4,5,6号码的六张卡片(其中4张红色,2张白色)中任取一张,观察所抽得的号码,则基本事件空间为$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$;若观察所抽得的卡片颜色,基本事件空间为$\Omega_2=\{$红色,白色$\}$.

样本空间(sample space) 即"基本事件空间".

基本事件(elementary event) 见"基本事件空间".

样本点(sample point) 见"基本事件空间".

有限基本事件空间(space of finite elementary events) 见"基本事件空间".

有限样本空间(finite sample space) 见"基本事件空间".

离散基本事件空间(space of discrete elementary events) 见"基本事件空间".

离散样本空间(discrete sample space) 见"基本事件空间".

事件(event) 亦称随机事件.概率论的基本概念之一.是随机现象的表现,是由某些基本事件构成的集合.事件一般用大写字母$A,B,C,\cdots$表示.称事件A发生,当且仅当A中所含的某一基本事件发生.在每次随机试验中一定会出现的事件称为必然事件,用Ω表示.在任何一次试验中都不会出现的事件称为不可能事件,用$\varnothing$表示.例如,投掷一枚骰子,观察所出现的点数.A:"掷出偶数点",B:"掷出的点数小于3"都是事件;而"掷出的点数小于7"是必然事件;"掷出的点数大于6"是不可能事件.如果事件A的发生必然导致事件B的发生,或者组成事件A的样本点都是组成事件B的样本点,则称事件B包含事件A,记为$A\subset B$或$B\supset A$.显然有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.如果$A\subset B$与$B\subset A$同时成立,则称事件$A$与$B$相等或等价,记为$A=B$.

随机事件(random event) 即"事件".

必然事件(certain event) 见"事件".

不可能事件(impossible event) 见"事件".

事件的运算(operations between events) 概率论最基本的运算.事件之间有以下几种运算:

1.事件A与B的并$A\cup B$.它发生,表示事件A与B中至少有一个发生.类似地,由"事件$A_1,A_2,\cdots$中至少有一个发生"所构成的事件称为$A_1,A_2,\cdots$的并,记为$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

2.事件A与B的交(或积)$A\cap B$(或AB).它发生,表示A与B同时发生.类似地,由"事件$A_1,A_2,\cdots$同时发生"所构成的事件称为$A_1,A_2,\cdots$的交或积,记为$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

3.事件A的余$\overline{A}$.它发生,当且仅当A不发生.亦称$\overline{A}$为A的对立事件或逆事件或余事件.

4.事件A与B的差$A\backslash B$.它发生,表示A发生而B不发生.

5.事件A与B的对称差$A\triangle B$.它发生,表示A或B有一个发生而二者不同时发生.

$$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

事件的运算满足以下规则:

1.交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$.

2.结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(AB)C=A(BC)$.

3.分配律:$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$,
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4.德·摩根定理(对偶原则):

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A}_i.$$

当事件A与B的交为不可能事件(即$A\cap B=\varnothing$)时,称A,B不交(或互斥,或互不相容).当事件A,B不交时,A与B的并也称为A与B的和,记为$A+B$(代替$A\cup B$);事件$A_1,A_2,\cdots$两两不交时,并$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$也称为和,记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.当事件$B\subset A$时,$A$与$B$的差$A\backslash B$称为真差,记为$A-B$(代替$A\backslash B$).事件的运算与集合论中集合的运算是一致的.

对立事件(opposite event) 见"事件的运算".

逆事件(inverse event) 见"事件的运算".

余事件(complementary event) 见"事件的运算".

事件对称差(symmetric difference of events) 见"事件的运算".

互不相容事件(mutually exclusive events) 亦称互斥事件.概率论的基本概念之一.若事件A与B不能同时发生,即$AB=\varnothing$,则称事件A与B互不相容或互斥,称该二事件为互不相容事件或互斥事件.

互斥事件(disjoint events) 即"互不相容事件".

事件序列的极限(limit of event sequence) 事件序列的一种运算.如果$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一个事

件序列，记

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,$$

则称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$为事件序列$\{A_n\}$的上极限或上极限事件，它表示有无穷多个$A_n$发生.记

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n,$$

则称$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$为事件序列$\{A_n\}$的下极限或下极限事件，它表示至多只有有限个$A_n$不发生.若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n,$$

则记

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n,$$

并称$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$为事件序列$\{A_n\}$的极限或极限事件.如果$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$，则称事件序列$\{A_n\}$是上升(递增)序列；如果$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$，则称$\{A_n\}$是下降(递减)序列.上升序列和下降序列统称为单调事件列.这时，事件序列的极限必存在，且

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}上升, \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}下降. \end{cases}$$

上极限事件(upper limit event)　见“事件序列的极限”.

下极限事件(lower limit event)　见“事件序列的极限”.

极限事件(limit event)　见“事件序列的极限”.

上升事件序列(increasing sequence of events)　见“事件序列的极限”.

下降事件序列(decreasing sequence of events)　见“事件序列的极限”.

单调事件列(monotone sequence of events)　见“事件序列的极限”.

事件σ域(σ-field of events)　亦称σ代数.概率论研究的一类集合.是由基本事件空间Ω的一些子集构成的集类$\mathscr{F}$.若它满足条件：

1. $\Omega \in \mathscr{F}$；
2. 若$A \in \mathscr{F}$，且$\bar{A} \in \mathscr{F}$；
3. 若$A_k \in \mathscr{F}$ $(k=1,2,\cdots)$，且$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$；

则称$\mathscr{F}$为σ域.如果将条件3，代之以3′：

3′若$A_k \in \mathscr{F}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，且$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$；

则称$\mathscr{F}$为事件域，亦称集代数.若$\mathscr{F}$为σ域，则对于$A_k \in \mathscr{F}$ $(k=1,2,\cdots)$，有$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$.若$\mathscr{C}$为$\Omega$的一子集类，则包含$\mathscr{C}$的$\sigma$域必存在.包含$\mathscr{C}$的一切$\sigma$域之交仍为$\sigma$域，称为包含$\mathscr{C}$的最小$\sigma$域或由$\mathscr{C}$生成的$\sigma$域，记为$\sigma(\mathscr{C})$.

σ代数(σ-algebra)　即“事件σ域”.

事件域(field of events)　见“事件σ域”.

集代数(algebra of sets)　即“事件域”.

波莱尔域(Borel field)　拓扑空间上的一种重要的集类.记$\mathrm{R}^1=(-\infty,+\infty)$，$\mathscr{G}=\{(-\infty,x]: -\infty<x<+\infty\}$.称由集类$\mathscr{G}$生成的$\sigma$域(亦即包含$\mathscr{G}$的最小$\sigma$域)$\mathscr{B}_1=\sigma(\mathscr{G})$为一维波莱尔域，$\mathscr{B}_1$中的元素称为一维波莱尔集.易见，对于任意实数$a<b$，形如$(a,b]$，$(a,b)$，$[a,b]$，$[a,b)$，$(-\infty,a)$，$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$的集合及单点集$\{a\}$都是波莱尔集，$\mathrm{R}^1$上的开集、闭集也是波莱尔集.自然，上述集合经至多可列次集合运算后所得到的集合也是波莱尔集.若以R^n记n维欧几里得空间，可以类似定义n维波莱尔域$\mathscr{B}_n$，它是由一切n维长方体所生成的σ域.$\mathscr{B}_n$中的元素称为n维波莱尔集.若$\mathscr{X}$是拓扑空间，则由$\mathscr{X}$的一切开集构成的类所生成的σ域称为$\mathscr{X}$上的波莱尔域$\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$中的元素称为$\mathscr{X}$上的波莱尔集.

波莱尔集(Borel set)　见“波莱尔域”.

π系(π-system)　具有某些特殊性质的集类.若基本事件空间Ω的子集类对有限交运算封闭，则称之为π系.

λ系(λ-system)　具有某些特殊性质的集类.基本事件空间Ω的子集类Λ，若满足：

1. $\Omega \in \Lambda$；
2. 对真差封闭：即对于$A,B\in\Lambda$，$A\subset B$，有$B-A\in\Lambda$；
3. 对上升序列的并封闭：即对于

$$\{A_n: n\in N\}\subset\Lambda, A_n\uparrow, 有\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda;$$

则称Λ为λ系.若Ω的子集类$\mathscr{C}$同时为λ系和π系，则$\mathscr{C}$为σ代数.

集半代数(semi-algebra of sets)　具有某些特殊性质的集类.由基本事件空间Ω的一些子集构成的集类$\mathscr{S}$，若它满足：

1. $\Omega \in \mathscr{S}$；
2. 对$A,B\in\mathscr{S}$，有$A\cap B\in\mathscr{S}$；
3. 对$A,A_1\in\mathscr{S}$，$A_1\subset A$，存在$\{A_2,A_3,\cdots,A_n\}\subset\mathscr{S}$，使$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两不交，且使

$$A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k;$$

则称$\mathscr{S}$为Ω的集半代数.

单调类定理(monotone class theorem)　测度论和概率论的理论研究中的一个重要工具.该定理断言：设Ω的子集类$\mathscr{S}$是π系，$\Lambda(\mathscr{S})$是包含$\mathscr{S}$的最小λ系，$\sigma(\mathscr{S})$是包含$\mathscr{S}$的最小σ代数，则$\Lambda(\mathscr{S})=\sigma(\mathscr{S})$.因而任何包含$\mathscr{S}$的$\lambda$系$\Lambda$均包含$\sigma(\mathscr{S})$.

函数形式单调类定理(monotone class theorem function form)　测度论与概率论的理论研究中的一个重要工具. 设 $\mathscr{L}$ 是定义在 Ω 上的扩充实值函数类, 满足条件: 若 $f\in\mathscr{L}$, 则 f^+, f^-(f 的正部与负部)$\in\mathscr{L}$. 如果函数类 L 还满足下述条件, 则称为 $\mathscr{L}$ 系:

1. $1\in L$.

2. L 中有限个函数的线性组合如果有意义, 则属于 L.

3. 若 $f_n\in L, n\in N, 0\leqslant f_n\uparrow f$, f 有界或 $f\in\mathscr{L}$, 则 $f\in L$.

函数形式的单调类定理的内容是: 若 $\mathscr{L}$ 系 L 包含 π 系 $\mathscr{S}$ 中任一集的指示函数(特征函数), 则 L 包含一切属于 $\mathscr{L}$ 的 $\sigma(\mathscr{S})$ 可测函数, 这里 $\sigma(\mathscr{S})$ 为包含 $\mathscr{S}$ 的最小 σ 代数.

函数形式的单调类定理的典型用法是: 要想证明某一函数族 F 具有某种性质 A_0, 引入一个函数族 $\mathscr{L}$, 使 $L=\{f|$函数 f 具有性质 $A_0\}$ 为一 $\mathscr{L}$ 系, 再引入一个 π 系 $\mathscr{L}$, 使 $\mathscr{L}$ 中的 $\sigma(\mathscr{L})$ 可测函数类包含 F, 于是只要证明对一切 $A\in\mathscr{L}$, A 的指示函数 $I_A\in L$ 就够了. 这种方法称为 $\mathscr{L}$ 系方法.

$\mathscr{L}$ 系($\mathscr{L}$-system)　见“函数形式单调类定理”.

频率(frequency)　概率论的基本概念之一. 表示事件出现的频繁程度. 将随机试验重复 n 次, 若事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次, 则称比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的频率.

频率有如下性质:

1. 对于任何事件 A, 有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

2. 对于必然事件 Ω, 有 $f_n(\Omega)=1$.

3. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容, 则有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

事件发生的频率具有某种稳定性, 频率的大小与事件发生的可能性大小有密切关系, 因而可以通过频率去认识概率.

概率(probability)　概率论的基本概念之一. 是随机事件出现的可能性的量度. 见“概率的统计定义”和“概率的公理化定义”.

概率的统计定义(statistical definition of probability)　早期应用比较广泛但不太严格的一种概率定义. 将随机试验重复 n 次, 如果当 n 逐渐增大时, 事件 A 出现的频率 $f_n(A)=n_A/n$ 稳定地在某个数值 p 的附近摆动; 而且, 一般地, 随着试验次数 n 的增大, 摆动的幅度愈来愈小. 则称 p 为事件 A 出现的概率, 记为 $P(A)=p$. 上述定义称为概率的统计定义. 只要试验次数足够多, 就可以近似地认为 $f_n(A)=p$, 从而可以近似地确定事件 A 的概率.

概率的公理化定义(axiomatic definition of probability)　建立在严格的逻辑基础上的一种概率定义. Ω 是给定的基本事件空间, $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的一个事件 σ 域. 定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数 $P(A)(A\in\mathscr{F})$, 若满足下列条件:

1. 非负性: 对每个 $A\in\mathscr{F}$, $P(A)\geqslant 0$;

2. 规范性: $P(\Omega)=1$;

3. 完全可加性: 若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$ 两两不相容(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$), 有

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i);$$

则称实值集函数 P 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个概率测度, 简称概率, 值 $P(A)$ 称为事件 A 的概率.

概率的公理化定义是俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)于 1933 年提出的, 它概括了概率这一概念的本质特征, 而克服了概率的古典定义、统计定义及几何概率的局限性, 在概率论的发展中占有重要地位.

概率具有如下性质:

1. 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\varnothing)=0$.

2. 有限可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$)则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

3. 对任一事件 A, 有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

4. 若 $A\subset B$, 则 $P(A)\leqslant P(B)$, 且

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

5. 加法公式: 对任何两个事件 A, B

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n}P(A_{k_1}A_{k_2})+\sum_{1\leqslant k_1<k_2<k_3\leqslant n}P(A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3})-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot P(A_1A_2\cdots A_n).$$

6. 半可加性: 对任意的 n,

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

成立. 一般地, 有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

概率空间(probability space)　描述随机现象的数学模型. Ω 是基本事件空间, $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的事件 σ 域, P 为定义在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度, 称三者之总体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间. 给出一个具体的随机

试验，数学上就可以把它抽象成一个概率空间(Ω,$\mathscr{F}$,P)，概率空间是概率论研究的主要对象.

概率的连续性(continuity of probability)　概率的一个重要性质. 若(Ω,$\mathscr{F}$,P)为概率空间. $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，是任一单调事件列，

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(A),$$

称为概率的连续性. 特别地，若 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)$$

称为概率的上连续性. 若 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$$

称为概率的下连续性. 下面的定理给出了完全可加性的等价条件：若 P 是 $\mathscr{F}$ 上满足 $P(\Omega)=1$ 的非负集函数，则它具有完全可加性的充要条件为：

1. 它是有限可加的.
2. 它是下连续的(或上连续的).

概率的上连续性(upper continuity of probability)　见“概率连续性”.

概率的下连续性(lower continuity of probability)　见“概率连续性”.

古典概型(classical probability model)　概率可以直接计算出来的一类随机现象的数学模型. 一个随机试验如果具有如下特征：

1. 基本事件空间 Ω 中只含有有限个基本事件.
2. 各个基本事件的发生或出现是等可能的.

则称这种随机试验为古典型随机试验. 这种等可能的模型曾经是概率论发展初期的主要研究对象，一般把这类随机现象的数学模型称为古典概型，它在概率论中占有重要地位.

古典型随机试验(classical random experiment)　见“古典概型”.

概率的古典定义(classical definition of probability)　最早引进的一种概率定义. 对于古典概型，若基本事件空间 Ω 中含有 n 个基本事件，事件 A 中含有 k 个基本事件($k\leqslant n$)，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

上述定义是拉普拉斯(Laplace,P.-S.)于 1812 年提出的，因为它只适用于古典概型场合，通常称之为概率的古典定义或古典概率. 也有人把它看成是计算概率的一种方法.

分配问题(assignment problem)　一类古典概型问题. 即古典概型计算中的分房问题. 假设有 N 个盒子，分别标有号码 $1,2,\cdots,N$；此外有 n 个质点. 所谓分配问题，就是如何将质点分配到各个盒子里去，其中 $n\leqslant N$. 假设每个质点分配到各个盒中是等可能的，其分配方式和各种分法的总数如下表：

	分配方式		分法的总数
n 个质点分配到 N 个盒子	每盒可以容纳任意多个	可辨质点	N^n
		不可辨质点	C_{N+n-1}^n
	每盒可以容纳至多一个	可辨质点	$N(N-1)\cdots(N-n+1)$
		不可辨质点	C_N^n

例如，计算下列两事件的概率：

1. A={某指定的 n 个盒子中各有一个质点}.
2. B={恰有 n 个盒子中各有一个质点}.

四种分配方式按上表顺序编号：

1. 第一种分配方式(又称麦克斯韦-玻耳兹曼统计)：每盒可以容纳任意个质点且质点可辨，有

$$P(A)=\frac{n!}{N^n},$$

$$P(B)=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}.$$

2. 第二种分配方式(又称为鲍泽-爱因斯坦统计)：每盒可以容纳任意个质点且质点不可辨，有

$$P(A)=\frac{1}{C_{N+n-1}^{N-1}}=\frac{n!\ (N-1)!}{(N+n-1)!},$$

$$P(B)=\frac{C_N^n}{C_{N+n-1}^{N-1}}=\frac{N!\ (N-1)!}{(N-n)!\ (N+n-1)!}.$$

3. 第三种分配方式：每盒至多可以容纳一个质点且质点可辨，有

$$P(A)=\frac{n!}{N(N-1)\cdots(N-n+1)};$$

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}=1.$$

4. 第四种分配方式(又称费米-狄喇克统计)：每盒至多可以容纳一个质点但质点不可辨，有

$$P(A)=\frac{1}{C_N^n}=\frac{n!\ (N-n)!}{N!},$$

$$P(B)=\frac{C_N^n}{C_N^n}=1.$$

配对问题(pairing problems)　一个著名的概率问题. 问题原意为：某人写了 n 封信，将其放入信封中，并在每一信封上随意分别写上 n 个收信人的地址中的一个(不重复)，那么：

1. 没有一个信封上的地址正确的概率为

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

2. 恰有 r 个信封上所写的地址正确的概率为

$$\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

配对问题于1708年为蒙莫尔(Montmort,P. R. de)所解决,后由拉普拉斯(Laplace,P. -S.)等人推广.

巴拿赫火柴问题(Banach's match problem)　一个古典概率问题. 波兰数学家巴拿赫(Banach, S.)随身带着两盒火柴,每一盒有 n 根火柴,任何时候他需要一根时,随机地取一盒,并从中抽一根. 那么:

1. 当他第一次取到空盒而另一盒恰剩 r 根的概率为 $C_{2n-r}^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}$.

2. 在第一次用完一盒(不是取到空盒)时另一盒恰剩 r 根的概率为 $C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}$.

空盒问题(empty box problem)　一个典型的古典概率问题. 把 n 个不同的质点随机地放入 N 个盒子,假设每个质点落入各盒子的概率相等,则事件 $A_m=\{$恰好有 m 个空盒$\}$的概率为

$$P(A_m)=C_N^m\frac{1}{N^n}\sum_{k=0}^{N-m}(-1)^kC_{N-m}^k(N-m-k)^n,$$

其中 $\max\{0,N-n\}\leqslant m\leqslant N-1$.

捕鱼问题(fishing problem)　一个典型的统计估值问题. 设湖中有鱼 N 条,N 未知,是要估计的. 现捕出 r 条,做了红色记号之后再放回湖中(设记号不消失),经过适当时间后,再从湖中捕出 s 条(设 $s\geqslant r$),其中有 t 条($0\leqslant t\leqslant r$)标有红色记号. 根据此信息,利用统计分析方法可得湖中鱼数的估计为 $\hat{N}=[rs/t]$,其中$[rs/t]$表示数 rs/t 的整数部分. 有一些问题,例如,估计一个城市的人口总数,也可以采用同样的方法.

几何概率(geometric probability)　可以用几何方法求得的概率. 向某一可度量的区域 Ω 内投一质点,如果所投的点落在 Ω 中任意区域 g 内的可能性大小与 g 的度量成正比,而与 g 的位置和形状无关,则称这个随机试验为几何型随机试验或几何概型. 此处的度量就是测度,一维指长度,二维指面积,三维指体积等. 对于几何概型,若记 $A=$"质点落在区域 g 内"这一事件,则其概率定义为

$$P(A)=\frac{L(g)}{L(\Omega)},$$

其中 $L(g)$,$L(\Omega)$分别为 g 和 Ω 的度量. 这一类概率通常称为几何概率. 几何概率是概率古典定义的推广,它保留了等可能性,但将有限个基本事件推广到了无限.

布丰投针问题(Buffon's needle problem)　一个几何概率实例. 是法国学者布丰(Buffon,G. -L. L. de)于1777年给出的第一个几何概率的例子:用实验方法逼近 π 值的著名的"投针问题". 平面上画有等距离为 $a(a>0)$的一些平行线,向平面任意投一长为 $l(l<a)$的针,针与平行线之一相交的概率为 $2l/\pi a$. 利用这一结果可近似计算 π 的值,其方法是投针 n 次,记录针与线相交的次数 m,以 m/n 作为上述概率的近似值,即得 $\pi\approx 2ln/am$. 这里采用的方法概括起来是:建立一个概率模型,它与某些人们感兴趣的量(这里是常数 π)有关,然后设计适当的随机试验,并通过这个试验的结果来确定这些量. 在找矿中,"投针问题"是一个重要概型. 随着电子计算机的发展,已按上述思想建立起一类新的方法,称为蒙特卡洛方法.

投针试验的历史资料(把 a 折算为1)

实验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	π 的实验值
沃尔夫	1850	0.8	5000	2532	3.1596
史密斯	1855	0.6	3204	1218.5	3.1554
德·摩根	1860	1.0	600	382.5	3.137
福克斯	1884	0.75	1030	489	3.1595
拉瑞尼	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
雷　纳	1925	0.5419	2520	859	3.1795

约会问题(appointment problem)　一个有名的几何概率问题. 若二人约定于0到 T 时间间隔内在某地见面,先到者等 t 时刻($t\leqslant T$)后离去,则二人能会见的概率为

$$1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

贝特朗奇论(Bertrand's paradox)　一个几何概率名题. 在一半径为 r 的圆 C 内"任意"作一弦,试求此弦长度 l 大于圆内接等边三角形的边长 $\sqrt{3}r$ 的概率 p. 其解法分别如下面三种情形:

1. 以 $r/2$ 为半径作圆 C 的同心圆 C_1(图1),可以证明,弦 AB 的中点 M 落在圆 C_1 内的充分必要条件为 $l>\sqrt{3}r$. 故由几何概率公式知,所求概率 p 等于二圆面积之比,即

$$p=\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2}=\frac{1}{4}.$$

2. 设弦 AB 的一端 A 固定于圆周上,于是,弦的另一端 B 是"任意"的. 考虑等边三角形$\triangle ADE$(图2),$l>\sqrt{3}r$ 的充要条件为 B 落于角 EAD 所对的弧$\overset{\frown}{DE}$上. 故

$$p=\frac{\overset{\frown}{DE}\text{的弧长}}{\text{圆周长}}=\frac{1}{3}.$$

3. 设弦 AB 垂直于直径 EF，AB 的中点 M 落在线段 GH(图 3)上的充分必要条件为 $l>\sqrt{3}r$，因此

$$p=\frac{GH\text{ 之长度}}{EF\text{ 之长度}}=\frac{1}{2}.$$

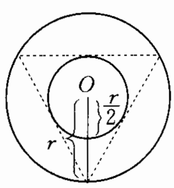


图 1

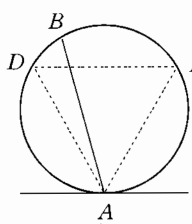


图 2

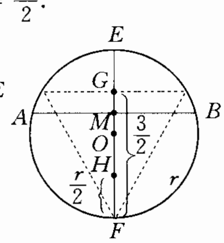


图 3

这里，对“任意”(即几何概率定义中所要求的“均匀性”)的三种不同解释，得出了三个不同的结果. 问题在于“任意作弦”的提法不明确.

条件概率(conditional probability)　一事件依赖于其他事件发生的概率. 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$A,B\in\mathscr{F}$ 且 $P(B)>0$，在事件 B 已发生的条件下事件 A 发生的概率称为 A 在 B 发生的条件下的条件概率，记为 $P(A|B)$，其定义为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

对于固定的 $B\in\mathscr{F}$，$P(B)>0$，$P(A|B)$ 作为 A 的集函数，是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，即：

1. 对每个 $A\in\mathscr{F}$，$P(A|B)\geqslant 0$.
2. $P(\Omega|B)=1$.
3. 若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$，且两两互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i|B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B).$$

在近代概率论中还定义了一种给定 σ 域下的条件概率. 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，对任意的 $A\in\mathscr{F}$，称满足下述条件的 $\mathscr{C}$ 可测函数 f 为 A 在给定 σ 代数 $\mathscr{C}$ 下的条件概率：

$$\int_C f(\omega)dP=P(C\cap A)\quad(\forall\, C\in\mathscr{C}).$$

记 f 为 $P(A|\mathscr{C})$.

概率乘法公式(multiplicative formula of probability)　亦称乘法定理. 关于事件积的概率的重要定理. 若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

乘法公式在概率的计算中起着重要的作用.

概率乘法定理(multiplicative theorem of probability)　即“概率的乘法公式”.

完备事件组(complete event system)　基本事件空间 Ω 的分割. 事件组 $A_1,A_2,\cdots$，如果满足

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega,$$

且 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$. 则称 $\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为完备事件组. 也称为 Ω 的分割、分划或划分.

全概率公式(total probability formula)　关于条件概率的重要公式. 若 $\{B_k:k=1,2,\cdots\}$ 为 $\mathscr{F}$ 上有限个或可数个事件，它们构成完备事件组，即 $\bigcup_k B_k=\Omega$ 且 $B_iB_j=\varnothing\ (i\neq j)$，又 $P(B_k)>0$，则对任意事件 $A\in\mathscr{F}$，

$$P(A)=\sum_k P(B_k)P(A|B_k).$$

条件 $\bigcup_k B_k=\Omega$ 也可改为 $P(\bigcup_k B_k)=1$ 或 $A\subset\bigcup_k B_k$.

全概率公式在概率的计算中起着重要作用，其直观意义是将求较复杂的事件 A 的概率，分解成求较简单的事件的概率 $P(AB_k)=P(B_k)P(A|B_k)$ 再把它们“总和”起来.“全”就是“总和”的意思.

贝叶斯公式(Bayes' formula)　亦称逆概公式或后验概率公式. 条件概率的重要公式. 设 $B_1,B_2,\cdots$ 为有穷或可列个互不相容的事件，满足

$\bigcup_i B_i=\Omega$(或 $P(\bigcup_i B_i)=1$)，

$B_i\cap B_j=\varnothing\ (i\neq j)$，$P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots)$，

则对任一事件 A，$P(A)>0$，有

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}\quad(j=1,2,\cdots).$$

上式称为贝叶斯公式，其中 $P(B_i)$ 称为先验概率. 显然，后验概率 $P(B_i|A)$ 的计算以先验概率 $P(B_i)$ 为基础. 两者往往比较接近，但后验概率是在试验之后事件 A 确已发生的情况下，来分析各种假设(即 B_i 发生)的概率. 因而一般地，有利于 A 发生的那些假设的概率就会增大，不利于 A 发生的那些假设的概率就会减小. 贝叶斯公式发表于 1763 年，至今它在许多领域，特别是在决策理论方面有广泛的应用，并形成了一套专门理论——贝叶斯决策.

逆概公式(inverse probability formula)　即“贝叶斯公式”.

后验概率公式(posterior probability formula)　即“贝叶斯公式”.

波利亚坛子模型(Polya's urn scheme)　一个著名的概率模型. 假设坛子中装有 N 个球，其中有 N_1 个黑球、N_2 个白球($N_1+N_2=N$). 任意取出一个，记下其颜色，并且在下次取球之前把该球连同另外 r 个与它同色的球一起放入坛中；再从坛中取出一个球，如此以往. 那么：

1. 任何一次取得黑球的概率为 $N_1/(N_1+N_2)$，任何一次取得白球的概率为 $N_2/(N_1+N_2)$.

2. 第 m 次与第 n 次($m<n$)取出的都是黑球的概率是 $N_1(N_1+r)/(N_1+N_2)(N_1+N_2+r)$.

3. 在前 n 次取球中，正好取得 n_1 个黑球、n_2 个白球($n_1+n_2=n$)的概率为

$$\frac{\prod_{k=0}^{n_1-1}(N_1+kr)\prod_{i=0}^{n_2-1}(N_2+ir)}{\prod_{j=0}^{n-1}(N_1+N_2+jr)}.$$

这个概型在医学上常用来模拟疾病的传染.

事件的独立性(independence of events)　概率论中十分重要且具有特色的概念. 两个事件的独立性：若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 是相互独立的. 若 $P(A)>0$，则 A，B 独立等价于 $P(B|A)=P(B)$，它表明一个事件的概率不受“另一事件发生”这个条件的影响. 多个事件的独立性：A_1，A_2，…，A_n 是 n 个事件，若对任意 $1\leqslant m\leqslant n$，任意 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n$ 都有

$$P(\bigcap_{i=1}^{m}A_{k_i})=\prod_{i=1}^{m}P(A_{k_i}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则它们之中任意 $m(1<m\leqslant n)$ 个事件也一定相互独立. 特别地，如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则它们之中任意两个事件都相互独立(即两两独立). 反之，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立，未必有 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 相互独立. 一般地，设 T 是非空指标集，$\{A_t,t\in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的事件类，若对 T 的任意有限子集 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$，

$$P(A_{t_1}\cap A_{t_2}\cap\cdots\cap A_{t_n})=P(A_{t_1})P(A_{t_2})\cdots P(A_{t_n}),$$

则称 A_t $(t\in T)$相互独立.

事件类的独立性：设 $\mathscr{G}_t$ $(t\in T)$都是 $\mathscr{F}$ 中的事件类，若对任意的($m=2,3,\cdots$)，选取 $t_j\in T$ $(A_j\in\mathscr{G}_{t_j},1\leqslant j\leqslant m$，其中 t_j 互不相同)，有

$$P(A_1A_2\cdots A_m)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_m),$$

则称事件类 $\mathscr{G}_t$ $(t\in T)$相互独立.

事件类的独立性(independence of event classes)　见“事件的独立性”.

伯努利试验(Bernoulli experiment)　亦称伯努利概型. 一种应用很广泛的数学模型. 一重伯努利试验：只有两个可能结果(A(成功)与 $\overline{A}$(失败))的试验称为一重伯努利试验. 例如，在产品抽样检查中抽到废品或正品；掷硬币出现正面或反面都是一重伯努利试验. 对一重伯努利试验，事件域可取为

$$\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\overline{A},\Omega\}.$$

n 重伯努利试验：把一重伯努利试验独立地重复 n 次，则得 n 重伯努利试验. 若在每次试验中成功的概率为 $P(A)=p$，则在 n 重伯努利试验中 A 出现 k 次或成功了 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

伯努利概型是概率论中最早研究的模型之一，它是“在同样条件下进行重复试验或观察”的一种模型，在理论上、应用上都有重要意义.

伯努利概型(Bernoulli probability model)　即“伯努利试验”.

随机变量及其分布函数

随机变量(random variable)　亦称随机变数. 概率论的基本概念之一，是取值具有随机性，能表示随机现象各种结果的变量. 许多随机试验的结果本身就是数量，如射击命中的环数，掷骰子掷出的点数等. 有些随机试验的结果虽然只是定性的，非数量的，但人们可以做出对应，使其结果用数字表示. 例如，掷一枚硬币，可以用 1 表示“出现正面”，用 0 表示“出现反面”. 一般地，定义在基本事件空间 Ω 上的单值实函数 $\xi(\omega)$就称为随机变量. 自然，为了能对这种函数作概率描述，还应当对它们作某些限制.

随机变量的严格定义如下：$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$\xi=\xi(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$是定义在 Ω 上的单值实函数，若对于任一实数 x，ω 的集合$\{\omega:\xi(\omega)\leqslant x\}$是一随机事件，亦即$\{\omega|\xi(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 $\xi(\omega)$为随机变量. 条件$\{\omega|\xi(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$ 也可改为对于直线上的任一波莱尔点集 $B\in\mathscr{B}_1$，有$\{\omega|\xi(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}$.

实质上，随机变量就是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 $\mathscr{F}$ 可测函数. 随机变量的引进和研究是概率论发展中的重大事件. 由于随机变量是取数值的，因此可以对它进行各种数学运算，这给概率论的研究带来了极大的方便.

随机变数(random variable)　即“随机变量”.

复随机变量(complex random variable)　取复数值的随机变量. 若 ξ_1,ξ_2 是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实可测函数，若令

$$\xi(\omega)=\xi_1(\omega)+i\xi_2(\omega)\quad(\omega\in\Omega),$$

则 ξ 就是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的复随机变量. 概率论中的特征函数就是由复随机变量取期望而定义的. 即实随机变量 ξ 的特征函数 φ 定义为

$$\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=E\cos(\xi t)+iE\sin(\xi t)\quad(-\infty<t<+\infty).$$

随机元(random element)　由概率空间到一个可测空间的映射. 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$(E,\mathscr{E})$为一可测空间，映射 $f:\Omega\to E$ 满足：对一切 $B\in\mathscr{E}$，有$\{\omega|f(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}$，则称 f 为$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(E,\mathscr{E})$的随机元.

指示函数(indicator function)　用来表征随机事件的函数. 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，A 是随机事件，即 $A\in\mathscr{F}$，称 Ω 上函数

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\notin A)\end{cases}$$

为事件 A 的指示函数. 自然,它是随机变量.

概率分布(probability distribution) 能完全描述随机变量概率规律性的集函数. $(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,ξ 为其上的随机变量,对任意的波莱尔集 $A\in\mathscr{B}_1$,令 $P_\xi(A)=P\{\omega:\xi(\omega)\in A\}=P(\xi\in A)$. 称由上式定义的 $\mathscr{B}_1$ 上的集函数 $P_\xi(A)(A\in\mathscr{B}_1)$为随机变量 ξ 的概率分布(简称分布).

容易证明,$P_\xi(A)(A\in\mathscr{B}_1)$是 $\mathscr{B}_1$ 上的概率测度. 这样一来,从原概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$出发,由定义在它上面的随机变量 ξ 可诱导出一个新的概率空间$(\mathrm{R}^1,\mathscr{B}_1,P_\xi)$(简称导出概率空间). 两个概率空间描述了同一随机现象,但由于导出概率空间$(\mathrm{R}^1,\mathscr{B}_1,P_\xi)$全由实数组成,从而能使某些概念更简明地表达出来,而且打开了数学计算的大门,给研究带来了很大方便.

分布函数(distribution function) 能完全地描述概率分布的点函数. 其定义如下:ξ 是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,称实函数 $F(x)=P(\xi\leqslant x)$,$(-\infty<x<+\infty)$为 ξ 的概率分布函数,简称分布函数. 函数 $F(x)=P(\xi\leqslant x)$是一个普通的一元函数,它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,函数值是通过计算概率值 $P(\xi\leqslant x)$来确定的,也称为累积分布函数. 也有通过 $F(x)=P(\xi<x)$来定义的.

分布函数 $F(x)$具有如下性质:

1. 单调不减性:若 $a<b$,则 $F(a)\leqslant F(b)$.
2. 右连续性:对于任一点 x,$F(x+0)=F(x)$(若定义 $F(x)=P(\xi<x)$,则 $F(x)$左连续).
3. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,
   $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

由分布函数的定义可以知道:

$P(a<\xi\leqslant b)=F(b)-F(a)$;

$P(\xi=a)=F(a)-F(a-0)$;

$P(\xi<a)=F(a-0)$;

$P(\xi>a)=1-F(a)$

可以证明,随机变量的概率分布和分布函数具有一一对应关系. 由于分布函数是点函数,而点函数在古典分析中已有了大量的研究,它便于计算,因此分布函数在概率论中有着重要的理论意义及实际意义.

离散型随机变量(discrete random variable) 一类重要的随机变量. 如果随机变量 ξ 只取有限个或可列个数值 $x_1,x_2,\cdots,x_k\cdots$,就称 ξ 为离散型随机变量. 若记 $p_k=P\{\xi=x_k\}(k=1,2,\cdots)$,则 ξ 取值的概率分布由$\{p_k\}$完全确定,称$\{p_k\}$为 ξ 的概率分布列. 直观上常用下列形式表示:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

显然概率分布列$\{p_k\}$具有下列性质:

1. $p_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots)$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$.

知道了离散型随机变量的分布列,便可知道它在任意范围内取值的概率. 即若 D 为实数轴上任一可测集,则

$$P\{\xi\in D\}=\sum_{x_k\in D}p_k.$$

特别地,离散型随机变量 ξ 的分布函数可以利用它的分布列得出:

$$F(x)=P\{\xi\leqslant x\}=\sum_{x_k\leqslant x}P\{\xi=x_k\}=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

这时,在 x_k 处有跃度 $p_k=F(x_k)-F(x_k-0)$;而在不含$\{x_k\}$中点的区间上,$F(x)$保持常值. 如果任何有界区间$[a,b]$至多包含有限个 x_k,则相应分布函数 F 为阶梯函数.

概率分布列(probability distribution row) 见"离散型随机变量".

连续型随机变量(absolutely continuous random variable) 一类重要的随机变量. 如果对于随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)$,存在非负可积函数 $p(x)$,使对于任何实数 x,有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t,$$

则称 ξ 为连续型随机变量,$p(x)$称为 ξ 的概率分布密度函数或概率密度函数,简称分布密度. 连续型随机变量在非离散型随机变量中占主要地位. 由定义可知其分布函数是绝对连续的(自然也连续),而且可以得出,对于任一实数 x,$P(\xi=x)=0$.

分布密度 $p(x)$具有如下的性质:

1. $p(x)\geqslant 0,x\in(-\infty,+\infty)$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1$.
3. 对 $p(x)$的连续点,有 $F'(x)=p(x)$.
4. $P(\xi\in A)=\int_A p(x)\mathrm{d}x,\ A\in\mathscr{B}_1$.

概率密度函数(probability density function) 见"连续型随机变量".

奇异型分布(singular distribution) 一类理论上很有价值但在实际中很少出现的分布. 如果分布函数$F(x)$连续,但它的导函数几乎处处(关于勒贝格测度而言)等于 0,则称分布函数 $F(x)(-\infty<x<+\infty)$为奇异型的. 如果随机变量 ξ 的分布函数是奇异型的,则称该随机变量及其概率分布 $P(\xi\in A)$

$(A\in\mathscr{B}_1)$为奇异型的.

分布函数的勒贝格分解(Lebesgue decomposition of distribution function) 关于分布函数的一个重要结论. 设$F_1(x)$是离散型的分布函数,$F_2(x)$是连续型的分布函数,$F_3(x)$是奇异型的分布函数,如果$\alpha_i\geqslant 0\ (i=1,2,3)$且$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=1$. 那么

$$F(x)=\alpha_1F_1(x)+\alpha_2F_2(x)+\alpha_3F_3(x)$$

也是一分布函数. 反之,任一分布函数,可惟一地分解为上述形式,其中$F_i(x),\alpha_i\ (i=1,2,3)$满足上述条件.

随机变量函数的分布(distribution of function of random variable) 一类随机变量的分布. 设$f(x)$是定义在随机变量ξ的一切可能值的集合上的函数,当变量ξ取值x时,随机变量η就取值$y=f(x)$,则称η为随机变量ξ的函数,记为$\eta=f(\xi)$. 特别地,ξ是随机变量,那么$a\xi+b(a,b$是常数$)$,ξ^2,$|\xi|$,$\sin\xi$等都是随机变量. 一般地,若f是波莱尔函数,则$\eta=f(\xi)$是随机变量. 设随机变量ξ的分布函数为$F(x)$,则$\eta=f(\xi)$的分布函数$G(y)$为

$$G(y)=P(\eta\leqslant y)=\int_{f(x)\leqslant y}\mathrm{d}F(x).$$

1. ξ是离散型:设其可能取的值为$x_1,x_2,\cdots,x_k\cdots$且$P\{\xi=x_k\}=p_k$,则

$$G(y)=\sum_{k:f(x_k)\leqslant y}p_k.$$

2. ξ是连续型:设它的分布密度为$p(x)$,则$\eta=f(\xi)$的分布函数为

$$G(y)=\int_{f(x)\leqslant y}p(x)\mathrm{d}x.$$

特别地:

1. 若$f(x)$严格单调,其反函数$f^{-1}(x)$有连续导函数,则$\eta=f(\xi)$是具有分布密度为

$$g(y)=p(f^{-1}(y))\,|[f^{-1}(y)]'|$$

的连续型随机变量(在使$f^{-1}(y)$无意义处,$g(y)=0$). 比如,$a\xi+b$的分布密度为

$$g(y)=\frac{1}{|a|}p\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

2. 若$f(x)$在不相重叠的区间$I_1,I_2,\cdots$上逐段严格单调,其反函数分别是$f_1^{-1}(y),f_2^{-1}(y),\cdots$,而$[f_1^{-1}(y)]',[f_2^{-1}(y)]',\cdots$均为连续函数,那么$\eta=f(\xi)$是连续型随机变量,其密度函数为

$$g(y)=\sum_i p[f_i^{-1}(y)]\,|[f_i^{-1}(y)]'|$$

(在使反函数无意义处,$g(y)=0$). 例如ξ^2的分布密度为:

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[p(\sqrt{y})+p(-\sqrt{y})\right] & (y>0);\\ 0 & (y\leqslant 0).\end{cases}$$

随机向量(random vector) 由多个随机变量组成的向量. 若随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$定义在同一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上,则称它们所形成的整体

$$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))\quad(\omega\in\Omega)$$

为n维随机向量或n维随机变量,而称ξ_i为随机向量ξ的第i个分量(或坐标). 上述定义和如下描述完全等价:定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的n个单值实函数$\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega)$构成的向量$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))\ (\omega\in\Omega)$若满足:对任意的$n$维波莱尔集$B\in\mathscr{B}_n$,有$\{\omega|\xi(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}$,则称$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为$n$维随机向量. 简记$\{\omega|\xi(\omega)\in B\}$为$\{\xi\in B\}$. 称$P_\xi(B)=P(\xi\in B)\ (B\in\mathscr{B}_n)$为随机向量$\xi$的概率分布,或称为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合分布. 可以证明,$P_\xi$是$n$维波莱尔域$\mathscr{B}_n$上的概率测度. 这样,由原概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$出发,通过定义在它上面的随机向量可诱导出一个新的概率空间

$$(\mathrm{R}^n,\mathscr{B}_n,P_\xi).$$

引进随机向量的原因是,有许多随机现象每次试验的结果不能只用一个数来描述,而要同时用n个数(即一个向量)来描述,这就需要将一维随机变量扩展为随机向量. 对于随机向量,不但能研究各个分量的性质,而且还可以考察它们之间的联系,这给研究和应用带来了广阔的前景.

多维随机变量(multidimensional random variable) 即"随机向量".

联合分布(joint distribution) 见"随机向量".

随机向量分布函数(distribution function of random vector) 能完全描述随机向量概率分布的多元函数. 设$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机向量,对$n$维实数空间$\mathrm{R}^n$上的任意一点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(\xi_1\leqslant x_1,\xi_2\leqslant x_2,\cdots,\xi_n\leqslant x_n),$$

称以上定义的多元函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为随机向量ξ的分布函数,或随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合分布函数. 随机向量的分布函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有如下性质:

1. 对任一x_i是不减的.

2. 对任一x_i是右连续的.

3. 对于任意的$i(1\leqslant i\leqslant n)$,

$$F(x_1,\cdots,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},\cdots,x_n)=\lim_{x_i\to-\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_i\cdots,x_n)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)=\lim_{x_1\to+\infty,\cdots,x_n\to+\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1.$$

4. 设$x_i<y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n)-\sum_{i=1}^{n}F_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}F_{ij}-$$

$$\sum_{1<i<j<k\leqslant n} F_{ijk}+\cdots+(-1)^n F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,$$

其中 $F_{ij\cdots k}$ 是当 $z_i=x_i,z_j=x_j,z_k=x_k$ 而其余 $z_l=y_l$ 时 $F(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 的值. 可以证明,随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和其概率分布 $P_\xi(B)$ $(B\in\mathscr{B}_n)$ 一一对应.

联合分布函数(joint distribution function) 即"随机向量分布函数".

离散型随机向量(discrete random vector) 一类重要的随机向量. 如果 n 维随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 最多只能取有穷或可数个不同值 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})$ $(i=1,2,\cdots)$,相应的概率记为

$$p_i=P(\xi_1=x_{i1},\xi_2=x_{i2},\cdots,\xi_n=x_{in}),$$

则称该随机向量为离散的. 它满足:

1. $p_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots)$(非负性).

2. $\sum\limits_i p_i=1$(归一性).

并称

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

为 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布列. 显然,随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是离散型的,当且仅当它的分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 都是离散型随机变量. 对于二维随机向量 (ξ,η),若所有可能取值为 (x_i,y_j) $(i,j=1,2,\cdots)$,且 $p_{ij}=P(\xi=x_i,\eta=y_j)$ $(i,j=1,2,\cdots)$,这里 p_{ij} 自然需满足 $p_{ij}\geqslant 0$; $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$. 则其分布列可用表格表示:

ξ \ η	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

连续型随机向量(absolutly continuous random vector) 一类重要的随机向量. 如果 n 维随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 绝对连续,即存在非负可积函数 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使对一切 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} p(u_1,u_2,\cdots,u_n)du_1du_2\cdots du_n,$$

则称该随机向量为连续型的. $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的概率分布密度或随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的联合分布密度. 分布密度 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 具有如下性质:

1. $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=1$.

3. 若 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 连续,则 $\dfrac{\partial^n F(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}=p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

4. 对任意的波莱尔集 $B\in\mathscr{B}_n$,

$$P\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in B\}$$
$$=\iint\limits_B\cdots\int p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

随机向量分布密度(distribution density of random vector) 见"连续型随机向量".

联合分布密度(joint distribution density) 见"连续型随机向量".

边缘分布(marginal distribution) 亦称边际分布. 随机向量的一种分布. 指由随机向量的分布得出的它的任何一部分分量的分布. 若 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数,任意保留 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个 x_i,例如 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,而令其他的 x_j 都趋向于 $+\infty$,即

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)$$
$$=\lim_{x_{k+1}\to+\infty,\cdots,x_n\to+\infty} F(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则 k 元分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)$ 称为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 k 维边缘分布函数. 由于 $k(1\leqslant k<n)$ 的任意性,易见,n 维随机向量的分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 共有 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}=2^n-2$ 个边缘分布函数. 若 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是连续型的,其分布密度为 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则 k 维边缘分布密度之一是

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n.$$

它也有 2^n-2 个边缘分布密度. 类似地,也可研究离散型情况. 以二维随机向量为例. 一般情形:(ξ,η) 的分布函数为 $F(x,y)$,其边缘分布函数为

$$F_\xi(x)=F(x,+\infty),$$
$$F_\eta(y)=F(+\infty,y).$$

连续型:(ξ,η) 的分布密度为 $p(x,y)$,其边缘分布密度为

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y,$$
$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x.$$

离散型:(ξ,η) 的取值为 $\{(x_i,y_j)\mid i,j=1,2,\cdots\}$ 相应的概率为 $\{p_{ij}=P(\xi=x_i,\eta=y_j)\mid i,j=1,2,\cdots\}$. 其边缘分布为

$$p_{i\cdot}=P(\xi=x_i)=\sum_j p_{ij},$$

$$p_{\cdot j}=P(\eta=y_j)=\sum_i p_{ij}.$$

以分布列表表示更为一目了然：

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_1	…	y_j	…	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	$\sum_j p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	$\sum_j p_{2j}$
⋮	…	…	…	…	…	⋮
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	$\sum_j p_{ij}$
⋮	…	…	…	…	…	⋮
$p_{\cdot j}$	$\sum_i p_{i1}$	$\sum_i p_{i2}$	…	$\sum_i p_{ij}$	…	

边际分布(marginal distribution)　即“边缘分布”.

边缘分布密度(marginal distribution density)　见“边缘分布”.

条件分布(conditional distribution)　一随机的变量依赖于其他随机变量的概率分布.某一条件已经发生情况下的随机变量的分布.以二维情形为例，一般情形：(ξ,η)的分布函数为$F(x,y)$，若下面极限存在，则称

$$F(y|\xi=x)=P(\eta\leqslant y|\xi=x)$$
$$=\lim_{\alpha,\beta\to 0}\frac{F(x+\beta,y)-F(x-\alpha,y)}{F(x+\beta,+\infty)-F(x-\alpha,+\infty)}$$

为在条件$\xi=x$下η的条件分布函数.若$P(\xi\in B)>0\ (B\in\mathscr{B})$，称

$$F(y|\xi\in B)=P(\eta\leqslant y|\xi\in B)$$
$$=\frac{P(\eta\leqslant y,\xi\in B)}{P(\xi\in B)}$$

为在条件$\xi\in B$下的η的条件分布函数.

类似地，也可定义ξ的条件分布函数.

连续型：(ξ,η)的分布密度为$p(x,y)$，称

$$p(y|x)=\frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y}$$

为在条件$\xi=x$下的η的条件分布密度；

$$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x}$$

为在条件$\eta=y$下的ξ的条件分布密度.在以上定义中，若在某些点处分母为零，则定义相应的条件密度为零.当上述诸式中分母不为零时，条件分布函数与条件分布密度具有一般分布函数与分布密度的一切性质.

离散型：(ξ,η)的分布为$p_{ij}=P(\xi=x_i,\eta=y_j)$ $(i,j=1,2,\cdots)$，条件分布为

$$P(\eta=y_j|\xi=x_i)=\frac{P(\xi=x_i,\eta=y_j)}{P(\xi=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=\frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}},$$

$$P(\xi=x_i|\eta=y_j)=\frac{P(\xi=x_i,\eta=y_j)}{P(\eta=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}.$$

其中$P(\xi=x_i)>0,P(\eta=y_j)>0$.以上定义不难推广到多维情形.

条件分布密度(conditional distribution density)　见“条件分布”.

随机变量和、差、积、商的分布(distributions of sum, difference, product and quotient of random variables)　随机向量的一些重要而简单的函数的分布.具体分布如下：

1. 和的分布：若(ξ_1,ξ_2)的分布函数为$F(x,y)$，ξ_1的分布函数为$F_1(x)$，ξ_2的分布函数为$F_2(y)$，则$\eta=\xi_1+\xi_2$的分布函数有

$$G(z)=\iint_{x+y\leqslant z}\mathrm{d}F(x,y).$$

若ξ_1,ξ_2相互独立，则有

$$G(z)=\iint_{x+y\leqslant z}\mathrm{d}F_1(x)\mathrm{d}F_2(y)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(z-x)\mathrm{d}F_1(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(z-y)\mathrm{d}F_2(y).$$

这时称分布函数$G(x)$为分布函数$F_1(x)$及$F_2(x)$的卷积或褶积，通常记为$G=F_2*F_1=F_1*F_2$.如果(ξ_1,ξ_2)为连续型的，联合分布密度为$p(x,y)$.ξ_1,ξ_2的密度分别为$p_1(x),p_2(x)$.则$\eta=\xi_1+\xi_2$的分布密度$g(z)$为

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}p(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

若ξ_1,ξ_2独立，则有

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x)p_2(z-x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(z-y)p_2(y)\mathrm{d}y.$$

也称g是p_1,p_2的卷积，记为$g=p_1*p_2=p_2*p_1$.如果(ξ_1,ξ_2)是离散型的，相互独立且都只取非负整数值，$P(\xi_1=k)=a_k,P(\xi_2=k)=b_k\ (k=0,1,2,\cdots)$，则$\eta=\xi_1+\xi_2$的取值也是非负整数且

$$P(\eta=r)=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\cdots+a_rb_0\quad(r=0,1,2,\cdots),$$

上式称为离散卷积(褶积)公式.

2. 差的分布:若(ξ_1,ξ_2)的分布密度为$p(x,y)$,ξ_1,ξ_2的密度分别为$p_1(x),p_2(y)$,$\eta=\xi_1-\xi_2$的分布密度为

$$p_{\xi_1-\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z+y,y)\mathrm{d}y.$$

若ξ_1,ξ_2相互独立,则

$$p_{\xi_1-\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(z+y)p_2(y)\mathrm{d}y.$$

3. 积的分布:若(ξ_1,ξ_2)的分布密度为$p(x,y)$,ξ_1,ξ_2的密度分别为$p_1(x),p_2(y)$,则$\eta=\xi_1\cdot\xi_2$的分布密度为

$$P_{\xi_1\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(\frac{z}{y},y\right)\frac{1}{|y|}\mathrm{d}y.$$

若ξ_1,ξ_2独立,则有

$$p_{\xi_1\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x)p_2\left(\frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1\left(\frac{z}{y}\right)p_2(y)\frac{1}{|y|}\mathrm{d}y.$$

4. 商的分布:若(ξ_1,ξ_2)的分布密度为$p(x,y)$,ξ_1,ξ_2的密度分别为$p_1(x),p_2(y)$,则$\eta=\xi_1/\xi_2$的分布密度为

$$p_{\xi_1/\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(zy,y)|y|\mathrm{d}y.$$

若ξ_1,ξ_2独立,则有

$$p_{\xi_1/\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(zy)p_2(y)|y|\mathrm{d}y.$$

分布函数的褶积(convolution of distribution functions) 见“随机变量和、差、积、商的分布”,或见“分布函数的卷积”.

离散卷积公式(discrete convolution formula) 见“随机变量和、差、积、商的分布”.

随机变量的独立性(independence of random variables) 概率论中最重要也最具特色的概念之一. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为n个随机变量,若对于任意的$x_1,x_2,\cdots,x_n$有

$$P(\xi_1\leqslant x_1,\xi_2\leqslant x_2,\cdots,\xi_n\leqslant x_n)=P(\xi_1\leqslant x_1)P(\xi_2\leqslant x_2)\cdots P(\xi_n\leqslant x_n)$$

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是相互独立的. 实际上,上式为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n),$$

其中$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的联合分布函数,$F_i(x_i)$是$\xi_i$的分布函数. 随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立的充要条件是,对一切一维波莱尔点集$B_1,B_2,\cdots,B_n$,

$$P(\xi_1\in B_1,\xi_2\in B_2,\cdots,\xi_n\in B_n)=P(\xi_1\in B_1)P(\xi_2\in B_2)\cdots P(\xi_n\in B_n)$$

成立. 可以证明,若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是相互独立的随机变量,则$f_1(\xi),f_2(\xi),\cdots,f_n(\xi_n)$也是相互独立的,这里$f_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$是任意的一元波莱尔函数. 离散型随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立的充分必要条件是,对于任何一组可能取值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$$P(\xi_1=x_1,\xi_2=x_2,\cdots,\xi_n=x_n)=P(\xi_1=x_1)P(\xi_2=x_2)\cdots P(\xi_n=x_n)$$

成立. 对于连续型随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,它们相互独立的充分必要条件是,对于任意一组实数$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)\cdots p_{\xi_n}(x_n)$,其中$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的联合分布密度,$p_{\xi_i}(x_i)$是$\xi_i$的分布密度. 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立,则其中的任意$r(2\leqslant r\leqslant n)$个随机变量也相互独立. 对于随机变量族$\{\xi_t,t\in T\}$,如果它的任何有限子族都相互独立,则称$\{\xi_t,t\in T\}$是相互独立的.

分布函数的卷积(convolution of distribution functions) 概率分布函数类中的一个二元算子. 设F_1和F_2是两个概率分布函数,称如下定义的概率分布函数F为F_1与F_2的卷积(褶积):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x-y)\mathrm{d}F_2(y)\quad(x\in(-\infty,+\infty)),$$

简记为$F=F_1*F_2$. 卷积运算满足交换律和结合律. 因而对任意n个分布函数$F_1,F_2,\cdots,F_n$可以定义$F_1*F_2*\cdots*F_n$. 如果随机变量ξ_1,ξ_2分别具有分布函数F_1和F_2,且ξ_1与ξ_2相互独立,则$\xi_1+\xi_2$的分布函数$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=(F_1*F_2)(x),x\in(-\infty,+\infty)$,即$\xi_1+\xi_2$具有分布函数$F_1*F_2$.

独立随机向量(independent random vectors) 一类重要的随机向量. 指随机向量相互之间具有独立性. 设$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m),\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),\cdots,\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机向量,如果对于任意$A\in\mathscr{B}_m,B\in\mathscr{B}_n,\cdots,C\in\mathscr{B}_r$,有

$$P(\xi\in A,\eta\in B,\cdots,\zeta\in C)=P(\xi\in A)P(\eta\in B)\cdots P(\zeta\in C),$$

则称$\xi,\eta,\cdots,\zeta$是相互独立的随机向量.

随机向量函数的分布(distribution of function of random vector) 由随机向量的若干个函数生成的随机向量的分布. 由于随机向量的波莱尔函数仍是随机变量,自然可以研究它的概率分布. 问题的一般提法如下:$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的分布函数为$F_\xi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 又给$m$个波莱尔函数$y_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,m)$,令$\eta_i=u_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ $(i=1,2,\cdots,m)$,求$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$的分布函数$F_\eta(y_1,y_2,\cdots,y_m)$. 于是有

$$F_\eta(y_1,y_2,\cdots,y_m)=P(\eta_1\leqslant y_1,\eta_2\leqslant y_2,\cdots,\eta_m\leqslant y_m)$$

$$=P(u_1(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\leqslant y_1,u_2(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\leqslant y_2,\cdots,u_m(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\leqslant y_m).$$

若 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布密度为 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则上式为

$$F_\eta(y_1,y_2,\cdots,y_m)=P(\eta_1\leqslant y_1,\cdots,\eta_m\leqslant y_m)=\underset{\substack{u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant y_1\\ \vdots \\ u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant y_m}}{\int\cdots\int} p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

若函数 $u_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 具有一些好的分析性质，则有如下重要定理：若 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布密度为 $p_\xi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，函数 $y_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 满足如下条件：

1. 存在惟一反函数
$$x_i=h_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$
2. $u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$h_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 都连续.
3. 存在连续偏导数
$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j},\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

其雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \frac{\partial h_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n}\end{vmatrix},$$

则 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$（其中 $\eta_i=u_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的分布密度 $p_\eta(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为

$$p_\eta(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{cases}p_\xi(h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n),\cdots,h_n(y_1,y_2,\cdots,y_n))\,|J|,\\ \quad 若(y_1,y_2,\cdots,y_n)属于\ u_1,u_2,\cdots,u_n\ 的值域;\\ 0\quad 其他).\end{cases}$$

如果反函数不惟一，有多个解 $x_i^{(l)}=h_i^{(l)}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\ (l=1,2,\cdots)$，则可将函数的定义域即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的取值空间分成若干部分，使之成为一一对应. 对每个反函数运用上述定理，再相加，这样 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 的密度函数为

$$p_\eta(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{cases}\sum\limits_l p_\xi(h_1^{(l)}(y_1,y_2,\cdots,y_n),h_2^{(l)}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ \qquad\cdots,h_n^{(l)}(y_1,y_2,\cdots,y_n))\,|J^{(l)}|,\\ 若(y_1,y_2,\cdots,y_n)属于\ u_1,u_2,\cdots,u_n\ 的值域;\\ 0\quad 其他.\end{cases}$$

如果只给定 $m(<n)$ 个连续函数

$$u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

则可补充定义

$$u_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_j\quad(j=m+1,m+2,\cdots,n),$$

仍可利用上述定理得到 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 的分布密度，其中

$$\begin{cases}\eta_1=u_1(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\\ \eta_2=u_2(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_m=u_m(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\\ \eta_{m+1}=\xi_{m+1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_n=\xi_n.\end{cases}$$

这时，再求出 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 的边缘分布密度即可. 当 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是离散型时，求其函数的分布列比较直接，没有什么本质困难.

极值分布(extreme-value distributions)　一类顺序统计量的分布. 最简单的表述如下：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且同分布，其分布函数均为 $F(x)$. 令

$$\xi_{(1)}=\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\},$$
$$\xi_{(n)}=\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}.$$

则 $\xi_{(1)}$ 的分布函数为

$$\tau_n(x)=P(\xi_{(1)}\leqslant x)=1-[1-F(x)]^n.$$

$\xi_{(n)}$ 的分布函数为

$$H_n(x)=P(\xi_{(n)}\leqslant x)=[F(x)]^n.$$

极值分布在水文、气象、地震预报等方面有重要作用，并广泛应用于系统可靠性及空气污染水平的评价中.

乘积概率空间(product probability space)　测度论中乘积测度空间的特例. 可用它构造独立随机变量. 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)\ (i=1,2)$ 是两个概率空间，令

$$\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2):\omega_i\in\Omega_i,i=1,2\};$$
$$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2=\sigma(\{A_1\times A_2:A_i\in\mathscr{F}_i,i=1,2\});$$
$$P_1\times P_2(A)=\int_{\Omega_1}\int_{A(\omega_1)}P_2(\mathrm{d}\omega_2)P_1(\mathrm{d}\omega_1)$$
$$或=\int_{\Omega_2}\int_{A(\omega_2)}P_1(\mathrm{d}\omega_1)P_2(\mathrm{d}\omega_2)\quad(A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2),$$

其中 $A(\omega_1)=\{\omega_2:(\omega_1,\omega_2)\in A\}$ 是 A 在 ω_1 下的截集，则称 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P_1\times P_2)$ 为 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)\ (i=1,2)$ 的乘积概率空间. 类似地，可以定义有限维乘积概率空间. 若 ξ_i 是 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)$ 上的随机变量，令

$$\tilde{\xi}_1(\omega_1,\omega_2)=\xi_1(\omega_1):(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2,$$
$$\tilde{\xi}_2(\omega_1,\omega_2)=\xi_2(\omega_2):(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2,$$

则 $\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2$ 为 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P_1\times P_2)$ 上的独立随机变量，且 $\tilde{\xi}_i$ 与 ξ_i 同分布 $(i=1,2)$.

无穷乘积概率空间(infinite product probability space)　概率论特有的由无穷多个概率空间构造无穷维概率空间的方法. 设 $(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)\ (n\in\mathrm{N})$ 是

可数个概率空间，令

$$\Omega_{\mathrm{N}}=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots)\mid\omega_i\in\Omega_i,i\in\mathrm{N}\},$$

$$\mathscr{F}_{\mathrm{N}}=\sigma(\{A_{I_f}\times\Omega_{\mathrm{N}\setminus I_f}\mid I_f\subset\mathrm{N}\text{为有限集},A_{I_f}\in\prod_{n\in I_f}\mathscr{F}_n\}),$$

其中$\prod_{n\in I_f}\mathscr{F}_n$为$\mathscr{F}_n$ $(n\in I_f)$的有限维乘积σ代数．则在$(\Omega_{\mathrm{N}},\mathscr{F}_{\mathrm{N}})$上存在惟一的概率$P_{\mathrm{N}}$满足

$$P_{\mathrm{N}}(\prod_{m\in I_f}A_m\times\Omega_{\mathrm{N}\setminus I_f})=\prod_{m\in I_f}P_m(A_m),$$

$\forall I_f\subset\mathrm{N}$有限，$A_m\in\mathscr{F}_m,m\in I_f$．称$P_{\mathrm{N}}$为$P_n(n\in\mathrm{N})$的无穷乘积概率，记为$P_{\mathrm{N}}=\prod_{n\in\mathrm{N}}P_n$．又记

$$\Omega_N=\prod_{n\in N}\Omega_n,\mathscr{F}_N=\prod_{n\in N}\mathscr{F}_n.$$

则称$(\Omega_{\mathrm{N}},\mathscr{F}_{\mathrm{N}},P_{\mathrm{N}})$为$(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)$ $(n\in\mathrm{N})$的无穷乘积概率空间．

给定$\{\xi_n,n\in\mathrm{N}\}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量列，可以在$(\Omega^{+\infty},\mathscr{F}^{+\infty},P^{+\infty})$上构造$\widetilde{\xi}_n$ $(n\in\mathrm{N})$，其中

$$\Omega^{+\infty}=\prod_{n\in\mathrm{N}}\Omega_n,\Omega_n=\Omega,$$

$$\mathscr{F}^{+\infty}=\prod_{n\in\mathrm{N}}\mathscr{F}_n,\mathscr{F}_n=\mathscr{F},$$

$$P^{+\infty}=\prod P_n,P_n=P,$$

$$\widetilde{\xi}_n((\omega_1,\omega_2,\cdots))=\xi_n(\omega_n)\ (\omega_n\in\Omega,n\in\mathrm{N}).$$

于是$\widetilde{\xi}_n$ $(n\in\mathrm{N})$为$(\Omega^{+\infty},\mathscr{F}^{+\infty},P^{+\infty})$上的独立随机变量列，且对一切$n\geqslant1$，$\widetilde{\xi}_n$与$\xi_n$同分布．

给定$(\mathrm{R},\mathscr{B})$上分布函数族$\{F_n,n\in\mathrm{N}\}$，可以构造$(\mathrm{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty,P_{\mathrm{N}})$，使得

$$P_{\mathrm{N}}=\prod_{n\in\mathrm{N}}\mu_{F_n},$$

其中μ_{F_n}是由F_n决定的概率测度，对一切区间$(a,b]$，有

$$\mu_{F_n}((a,b])=F_n(b)-F_n(a)$$
$$(-\infty<a<b<+\infty).$$

在其上构造随机变量序列$\xi_n(x_1,x_2\cdots)=x_n,n\in\mathrm{N}$，则$\xi_n$具有分布函数$F_n$，且$\xi_n$ $(n\in\mathrm{N})$相互独立．

柯尔莫哥洛夫相容性定理(Kolmogorov consistency theorem)　在无穷维空间上构造概率测度的定理．如果一个概率分布函数族

$$\{F_{1,2,\cdots,n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathrm{R},i=1,2,\cdots,n,n\in\mathrm{N}\}$$

是相容的，即对一切$n\geqslant1$，

$$F_{1,2,\cdots,n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lim_{x_{n+1}\to+\infty}F_{1,2,\cdots,n+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}),$$
$$(\forall x_i\in\mathrm{R},i=1,2,\cdots,n)$$

成立，则在$(\mathrm{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty)$上存在概率测度$P$，使得在$(\mathrm{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty,P)$上坐标随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的分布函数与$F_{1,2,\cdots,n}$相同．即若

$$\xi_k(x_1,x_2,\cdots)=x_k(k=1,2,\cdots),\forall(x_1,x_2,\cdots)\in\mathrm{R}^\infty,$$

则对一切$n\geqslant1$，

$$P\{\xi_1\leqslant x_1,\cdots,\xi_n\leqslant x_n\}=F_{1,2,\cdots,n}(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$(\forall\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{R}^n)$$

成立．

坐标随机变量(coordinate random variables)　亦称样本随机变量，在样本空间上定义的随机变量．在$(\mathrm{R}^n,\mathscr{B}^n,P)$上如下定义的随机变量$\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2,\cdots,\hat{\xi}_n$：

$$\hat{\xi}_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_k\quad(x_k\in\mathrm{R};k=1,2,\cdots,n).$$

当人们着眼于研究$(\Omega,\mathscr{F},P)$上n维随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的分布规律时，往往将它转化到样本空间$(\mathrm{R}^n,\mathscr{B}^n,P_{\xi_1,\cdots,\xi_n})$上研究坐标随机变量$\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2,\cdots,\hat{\xi}_n$．这时$(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2,\cdots,\hat{\xi}_n)$与$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$具有同样的分布规律，称$(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2,\cdots,\hat{\xi}_2)$为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的坐标随机变量．进而，在随机过程论中有坐标表示过程．设$X_T=\{X_t:t\in T\}$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实随机过程，T是任意给定的指标集．令

$$R_T=\{x_T\mid x_t\in\mathrm{R},t\in T\},$$

$$\mathscr{B}_T=\sigma(\bigcup_{T_f\subset T\text{为有限集}}\mathscr{B}^{T_f}),$$

其中$\mathscr{B}^{T_f}$表示R_T中以R_{T_f}的波莱尔集为底的柱集类，则X_T的分布为$(R_T,\mathscr{B}_T)$上的概率分布P_T．若令$\hat{X}_t(x_T)=x_t,\forall x_T\in R_T$及$t\in T$．则$(R_T,\mathscr{B}_T,P_T)$上的过程$\hat{X}_T=\{\hat{X}_t:t\in T\}$与$X_T$同分布，称$\hat{X}_T$为$X_T$的坐标表示过程．

一般地，任给定$(R_T,\mathscr{B}_T)$上的概率分布P，均可如上定义过程$\hat{X}_T$，使$\hat{X}_T$为$(R_T,\mathscr{B}_T)$上具有分布P的随机过程，亦称$(R_T,\mathscr{B}_T)$上概率分布P的坐标表示过程．

样本随机变量(sample random variables)　即“坐标随机变量”．

坐标表示过程(coordinate representation process)　见“坐标随机变量”．

完全概率空间(complete probability space)　一种概率空间．如果概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的一切零概率集的子集均属于$\mathscr{F}$，就称$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一完全概率空间．对任一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，若令$\widetilde{\mathscr{F}}=\{A\triangle B:A\in\mathscr{F},B\subset N,N\in\mathscr{F}$且$P(N)=0\}$；$\overline{P}(A\triangle B)=P(A),A\in\mathscr{F},B\subset N,N\in\mathscr{F}$且$P(N)=0$，则$(\Omega,\widetilde{\mathscr{F}},\overline{P})$为一完全概率空间，称其为概率空间$(\Omega,\widetilde{\mathscr{F}},P)$的完全化．

随机变量的数字特征

数学期望(expectation)　简称期望或均值，是随机变量最重要的数字特征．它表征随机变量取值的平均值．设随机变量ξ的分布函数为$F(x)$，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|dF(x)<+\infty,$$

则定义 ξ 的期望为

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x).$$

特别地，

1. 当 ξ 为离散型随机变量时，

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $\sum_k|x_k|p_k<+\infty$，则

$$E\xi=\sum_k x_kP(\xi=x_k)=\sum_k x_kp_k.$$

2. 当 ξ 为连续型随机变量，$p(x)$ 是其分布密度时，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

则

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x.$$

一般地，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，ξ 为其上的随机变量而且可积，则 ξ 的数学期望为

$$E\xi=\int_\Omega\xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega).$$

可以证明，若 F 为 ξ 的分布函数，当 $E\xi$ 存在时，

$$E\xi=\int_\Omega\xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F(x).$$

进一步，对任一可测函数 g，

$$Eg(\xi)=\int_\Omega g(\xi)P(\mathrm{d}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}F(x).$$

数学期望有如下性质：

1. 若 c 为常数，则 $Ec=c$.
2. 若 c 为常数，ξ 为随机变量，则 $E(c\xi)=cE\xi$.
3. 若 ξ,η 为随机变量，$E\xi,E\eta$ 存在，则
$$E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta.$$
一般地，若 $E\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 存在，则
$$E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_n.$$
4. 若随机变量 ξ 与 η 相互独立，$E\xi,E\eta$ 存在，则
$$E(\xi\eta)=E\xi E\eta.$$

方差(variance)　随机变量重要的数字特征．它描述随机变量取值的集中(或分散)程度．其定义是：对随机变量 ξ，若 $E(\xi-E\xi)^2$ 存在，则定义 ξ 的方差为 $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$．由期望的性质知

$$D\xi=E(\xi-E\xi)^2=E\xi^2-(E\xi)^2.$$

方差具有下如下性质：

1. 若 c 为常数，则 $Dc=0$；反之，若 $D\xi=0$，则存在常数 c，使 $P(\xi=c)=1$.
2. 若 c 为常数，ξ 为随机变量，则
$$D(c\xi)=c^2D\xi,D(\xi+c)=D\xi.$$
3. 若 ξ,η 相互独立，则 $D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta$.
4. 对于任意常数 $cD\xi\leqslant E(\xi-c)^2$.

标准差(standard deviation)　亦称均方差．随机变量的数字特征．它是方差 $D\xi$ 的正方根，记为 $\sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}$．$\sigma(\xi)$ 也描述随机变量 ξ 取值的离散程度，而且它与 ξ 有相同的量纲，给实际应用带来了方便，$\sigma(\xi)$ 也可简记为 σ.

均方差(mean square deviation)　即“标准差”.

标准化随机变量(standardized random variable)　经过处理，从而具有一些较好性质的随机变量．设 ξ 为随机变量，称

$$\eta=\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}$$

为标准化随机变量．这时 $E\eta=0,D\eta=1$．由于经标准化后的随机变量的数学期望为 0、方差为 1，从而使在许多问题中易于处理.

原点矩(moment)　一类常用的数字特征．对正整数 k，称 $E\xi^k$ 为随机变量 ξ 的 k 阶原点矩；对于正实数 r，称 $E|\xi|^r$ 为随机变量 ξ 的 r 阶原点绝对矩(只要它们存在)．数学期望 $E\xi$ 就是一阶原点矩.

原点绝对矩(absolute moment)　见“原点矩”.

中心矩(central moment)　一类常用的数字特征．对正整数 k，若 $E(\xi-E\xi)^k$ 存在，则称 $E(\xi-E\xi)^k$ 为随机变量 ξ 的 k 阶中心矩；对于正实数 r，若 $E|\xi-E\xi|^r$ 存在，则称 $E|\xi-E\xi|^r$ 为 ξ 的 r 阶中心绝对矩．方差 $D\xi$ 就是二阶中心矩．中心矩与原点矩可以互相换算

$$E\xi^k=\sum_{j=0}^kC_k^jE(\xi-E\xi)^{k-j}(E\xi)^j,$$

$$E(\xi-E\xi)^k=\sum_{j=0}^kC_k^j(-E\xi)^{k-j}E\xi^j.$$

中心绝对矩(central absolute moment)　见“中心矩”.

众数(mode)　随机变量的数字特征．指随机变量一系列可能取的值中出现可能性最大的数值．若 ξ 是离散型随机变量，则 ξ 的最大可能取值为众数．若 ξ 是连续型随机变量，其分布密度为 $p(x)$，则使 $p(x)$ 达到最大值的点为众数．众数不一定存在，也不一定惟一.

中位数(median)　随机变量的数字特征．指随机变量居中心位置的数值．对任意随机变量 ξ，满足

$$P(\xi\leqslant x)\geqslant\frac{1}{2}\text{ 和 }P(\xi\geqslant x)\geqslant\frac{1}{2}$$

的 x 称为 ξ 的中位数，记为 $m(\xi)$ 或 $x_{\frac{1}{2}}$．中位数一定存在但不一定惟一．中位数是随机变量的一个重要

数字特征，特别在随机变量的数学期望不存在的情况下更是如此.

分位数(quantile)　一种位置参数.一个数 x 如果满足

$P(\xi\leqslant x)\geqslant p,\ P(\xi\geqslant x)\geqslant 1-p\ (0<p<1)$,

则称 x 为随机变量 ξ 的 p 分位数(或 $100p$ 百分位数)，通常记为 x_p. 对连续型随机变量 ξ，若其分布函数为 $F(x)$，p 分位数就是方程 $F(x_p)=p$ 的一个解. 如果 F 是严格递增的，方程有惟一解；否则，可以有很多(甚至不可数)解. 这时，这些解中的每一个都称为 p 分位数.

偏度(skewness)　亦称偏态系数. 是描述随机变量不对称程度的数字特征. 其定义是：若随机变量 ξ 有二阶和三阶中心矩：$\mu_2=\sigma^2=D\xi$，$\mu_3=E(\xi-E\xi)^3$，则称 $S_k=\mu_3/\sigma^3$ 为随机变量 ξ 的偏度.

偏态系数(coefficient of skewness)　即"偏度".

峰度(kurtosis)　亦称峰态系数. 是描述随机变量陡缓程度的数字特征，可用来度量一个分布的峰的状态("顶部的平滑性"). 其定义是：若随机变量 ξ 具有四阶中心矩 $\mu_4=E(\xi-E\xi)^4$，$\sigma^2=D\xi$，则称

$$E_k=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$$

为随机变量 ξ 的峰度. 对于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$E_k=0$. 所以，可以正态曲线为标准进行比较. 通常，峰度越小，密度曲线的顶部"越平"，反之则"越尖".

峰态系数(coefficient of kurtosis)　即"峰度".

变异系数(coefficient of variation)　亦称变差系数. 描述随机变量分散程度的数字特征. 其定义如下：标准差与数学期望的比值称为变异系数，记为 v，即 $v=\sigma/\mu_1$，其中 σ,μ_1 分别是随机变量的标准差和数学期望. 当数学期望为 1 时，变异系数即等于标准差. 换言之，变异系数就是以数学期望为单位的一种计量分散程度的数字特征.

变差系数(coefficient of variation)　即"变异系数".

协方差(covariance)　亦称相关矩. 随机向量重要的数字特征. 它描述随机变量之间线性相依的程度. 设 (X,Y) 为二维随机向量，若 $E(X-EX)(Y-EY)$ 存在，则称

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$$

为随机变量 X,Y 的协方差. 由期望的性质可知

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY.$$

协方差有如下性质：

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.
2. $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$.
4. $|\mathrm{Cov}(X,Y)|\leqslant\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}$.

相关矩(correlation moment)　即"协方差".

协方差矩阵(covariance matrix)　亦称相关阵. 由协方差构成的矩阵. 设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为 n 维随机向量，若记 $\sigma_{ij}=\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)$，$\sigma_i^2=\sigma_{ii}=D\xi_i$，则称矩阵

$$\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2\end{pmatrix}$$

为随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的协方差矩阵. 它是一个对称矩阵. 因为对任意实数 $t_j(j=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_j\sum_k\sigma_{jk}t_jt_k\geqslant 0.$$

所以，它也是非负定的. 由于 n 维随机变量的分布比较复杂，数学上不易处理，在实际应用中协方差矩阵就显得比较重要.

相关阵(correlation matrix)　即"协方差矩阵".

相关系数(correlation coefficient)　描述随机变量间线性相依关系的重要的数字特征. 设 (X,Y) 为随机向量，若 $DX>0,DY>0$ 则称

$$r=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DY}}$$

为随机变量 X,Y 的相关系数. 实质上，相关系数是标准化的协方差. 相关系数 r 有如下性质：

1. $|r|\leqslant 1$.
2. 若 X,Y 相互独立，则 $r=0$.
3. 当 $r=1$ 时，当且仅当

$$P\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}=\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)=1;$$

当 $r=-1$ 时，当且仅当

$$P\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}=-\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)=1.$$

注意，相关系数描述的仅是两个随机变量线性相依的程度. 当 $r=0$ 时，它们不线性相关，当 $r=\pm1$ 时，它们几乎在一条直线上. 故 r 实际为线性相关系数.

不相关随机变量(uncorrelated random variables)　一类随机变量. 是相互间没有线性关系的随机变量. 如果随机变量 ξ,η 的相关系数 $r=0$，则称 ξ,η 不相关. 显然，如果 ξ,η 相互独立，则必定不相关. 且下述事实等价：

1. ξ,η 不相关，即 $r=0$.
2. $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$.
3. $E\xi\eta=E\xi E\eta$.
4. $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$.

一般地，若 ξ,η 不相关，它们未必相互独立. 但当 (ξ,η) 是二维正态分布时，独立与不相关等价.

随机向量的矩(moment of random vector)　随机向量的数字特征. 以二维为例,注意到

$$Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dF(x,y),$$

其中 $F(x,y)$ 是 (ξ,η) 的分布函数. 称 $E(X^kY^l)$ 为 $k+l$ 阶混合矩;称 $E(X-EX)^k(Y-EY)^l$ 为 $k+l$ 阶中心混合矩(其中 k,l 是正整数). 当 $k=l=1$ 时, $1+1$ 阶中心混合矩就是 X,Y 的协方差. 若 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为 n 维随机变量,则称 $E\xi=(E\xi_1,E\xi_2,\cdots,E\xi_n)$ 为 ξ 的数学期望. ξ 的协方差矩阵

$$\begin{pmatrix} D\xi_1 & \mathrm{Cov}(\xi_1,\xi_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\xi_1,\xi_n) \\ \mathrm{Cov}(\xi_2,\xi_1) & D\xi_2 & \cdots & \mathrm{Cov}(\xi_2,\xi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{Cov}(\xi_n,\xi_1) & \mathrm{Cov}(\xi_n,\xi_2) & \cdots & D\xi_n \end{pmatrix}$$

也可表为 $D\xi=E(\xi-E\xi)^T(\xi-E\xi)$,故也可简称 ξ 的方差. ($(\xi-E\xi)^T$ 为行向量 $(\xi-E\xi)$ 的转置). 若 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$,称

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(\xi_1,\eta_1) & \mathrm{Cov}(\xi_1,\eta_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\xi_1,\eta_m) \\ \mathrm{Cov}(\xi_2,\eta_1) & \mathrm{Cov}(\xi_2,\eta_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\xi_2,\eta_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{Cov}(\xi_n,\eta_1) & \mathrm{Cov}(\xi_n,\eta_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\xi_n,\eta_m) \end{pmatrix}$$

为随机向量 ξ,η 的互协方差阵.

混合矩(mixed moment)　见"随机向量的矩".

中心混合矩(central mixed moment)　见"随机向量的矩".

互协方差阵(crosscovariance matrix)　见"随机向量的矩".

条件期望(conditional expectation)　概率论的重要概念之一. 分两种情形:

1. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, X,Y 是随机变量, $B\in\mathscr{F}$, $P(B)>0$,以 $F(x|B)$ 表示 X 关于 B 的条件分布函数. 如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{d}F(x|B)<+\infty,$$

则 X 关于 B 的条件期望定义为

$$E(X|B)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F(x|B),$$

若以 $F(y|X=x)$ 表示 Y 关于 $\{X=x\}$ 的条件分布函数,如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\mathrm{d}F(y|X=x)<+\infty,$$

则 Y 关于 $\{X=x\}$ 的条件期望定义为

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{d}F(y|X=x).$$

如果 $\mu(x)=E(Y|X=x)$ 是波莱尔函数,则 $Z=\mu(X)=E(Y|X)$ 是一随机变量. 当 $X=x$,取 $E(Y|X=x)$ 为值,称 $Z=E(Y|X)$ 为 Y 关于 X 的条件期望.

2. 给定 σ 域下的条件期望:设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域, X 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量,且 EX 存在. 如果:

1) $E(X|\mathscr{G})$ 是 $\mathscr{G}$ 可测函数;

2) 对任意 $A\in\mathscr{G}$,有

$$\int_A E(X|\mathscr{C})\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P;$$

则称随机变量 $E(X|\mathscr{G})$ 为 X 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望.

条件期望 $E(X|\mathscr{G})$ 是 a.s. 存在惟一的,且具有如下性质:

1. 对任意常数 C_1,C_2,EX_1,EX_2 存在,则

$$E(C_1X_1+C_2X_2|\mathscr{C})=C_1E(X_1|\mathscr{G})+C_2E(X_2|\mathscr{G}),\text{a.s.}.$$

2. 若 $X\geqslant0$,则 $E(X|\mathscr{G})\geqslant0$, a.s..

3. $|E(X|\mathscr{G})|\leqslant E(|X||\mathscr{G})$, a.s..

4. 设 $0\leqslant X_n\uparrow X$, $E|X|<+\infty$,则

$$E(X_n|\mathscr{G})\uparrow E(X|\mathscr{G}),\text{a.s.}.$$

5. 设 $X_n\to X$, $|X_n|\leqslant Y$, $EY<+\infty$,则

$$E(X_n|\mathscr{G})\to E(X|\mathscr{G}),\text{a.s.}.$$

6. 若 Y 为 $\mathscr{G}$ 可测, $E|XY|<+\infty$, $E|X|<+\infty$,则 $E(XY|\mathscr{G})=YE(X|\mathscr{G})$, a.s..

7. 若 X 为 $\mathscr{G}$ 可测,则 $E(X|\mathscr{G})=X$, a.s..

8. 如果 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2\subset\mathscr{F}$,则

$$E[E(X|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1]=E(X|\mathscr{G}_1)=E[E|X|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2],\text{a.s.}.$$

9. 若 X 与 $\mathscr{G}$ 相互独立,则 $E[X|\mathscr{G}]=EX$, a.s.. 对于 $A\in\mathscr{F}$,定义 $P(A|\mathscr{G})=E[I_A|\mathscr{G}]$,称为给定 $\mathscr{G}$ 下 A 的条件概率.

正则条件概率(regular conditional probability)　亦称条件概率测度. 一类条件概率. 定义如下:设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域,定义在 $\Omega\times\mathscr{F}$ 上的函数 $\hat{P}$ 满足如下条件:

1. 对每个固定的 $\omega\in\Omega$,集函数 $\hat{P}(\omega,\cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度;

2. 对每个固定的 $A\in\mathscr{F}$,函数 $\hat{P}(\cdot,A)$ 是 $\mathscr{G}$ 可测函数;

3. 对每个 $A\in\mathscr{F}$, $\hat{P}(\cdot,A)$ 是 A 在 $\mathscr{G}$ 下的条件概率,即对一切 $B\in\mathscr{G}$

$$\int_B\hat{P}(\omega,A)\mathrm{d}P=P(A\cap B);$$

则称函数 $\hat{P}$ 为给定 $\mathscr{G}$ 下的正则条件概率,引进正则条件概率的一个好处是,条件期望可看做相对于条件概率测度的通常的期望. 即若 $\hat{P}(\omega,A)$ 是在 $\mathscr{G}$ 下的正则条件概率, X 为随机变量,且 EX 存在,则对几乎所有的 ω,有

$$E(X|\mathscr{G})(\omega)=\int_\Omega X(\omega')\hat{P}(\omega,\mathrm{d}\omega').$$

其中

$$\int_\Omega X(\omega')\hat{P}(\omega,\mathrm{d}\omega')$$

表示给定 ω 时，X 对概率 $\hat{P}(\omega,\cdot)$ 的积分.

条件概率测度(conditional probability measure) 即"正则条件概率".

正则条件分布(regular conditional distribution) 一类条件分布. 指在 σ 域 $\mathscr{G}$ 下的条件分布. 定义如下：设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，X 为 Ω 上的随机变量. 定义在 $\Omega\times\mathscr{B}_1$ 上的函数 $\hat{P}_X$ 满足如下条件：

1. 对每个固定的 $\omega\in\Omega$，定义在 $\mathscr{B}_1$ 上的集函数 $\hat{P}_X(\omega,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}_1$ 上的概率测度；

2. 对每个固定的 $B\in\mathscr{B}_1$，函数 $\hat{P}_X(\cdot,B)$ 是 Ω 上的 $\mathscr{G}$ 可测函数；

3. 对一切 $B\in\mathscr{B}_1$，$\hat{P}_X(\cdot,B)$ 是 $X^{-1}(B)$ 在 $\mathscr{G}$ 下关于 P 的条件概率，即对任意的 $E\in\mathscr{G}$，

$$\int_E \hat{P}_X(\omega,B)\mathrm{d}P(\omega)=P(E\cap X^{-1}(B));$$

则称 $\hat{P}_x$ 为给定 $\mathscr{G}$ 下的 X 的正则条件分布. 而称

$$F_X(x|\mathscr{G})=\hat{P}_X(\cdot,(-\infty,x))\ (x\in\mathrm{R}^1)$$

为给定 $\mathscr{G}$ 下的 X 的条件分布函数. 可以证明，若 g 为波莱尔函数，$E|g(x)|<+\infty$，$\hat{P}_X$ 是在给定 $\mathscr{G}$ 下的 X 的正则条件分布，则

$$E\{g(X)|\mathscr{G}\}=\int g(x)\hat{P}_X(\omega,\mathrm{d}x),\text{a. s.}$$

特征函数与概率不等式

概率母函数(probability generating function) 研究随机变量分布律的一个重要的分析工具. 设 ξ 是只取非负整数值的随机变量，它的概率分布由

$$P\{\xi=k\}=p_k\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

给出，则称随机变量函数 θ^ξ 的均值 $E\theta^\xi$ 为与随机变量 ξ 的概率分布对应的母函数. 简称 ξ 的母函数. 它是实变数 θ 的函数，记为 $p(\theta)$，即

$$p(\theta)=E\theta^\xi=\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k p_k.$$

由于

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1,$$

则由幂级数的收敛性知道，$p(\theta)$ 至少在 $|\theta|\leqslant1$ 一致收敛且绝对收敛. 因此，母函数对任何整值随机变量都存在，而且概率分布与母函数是一一对应的. 母函数的应用之一是利用它能容易求得概率分布的数字特征. 当数学期望

$$\sum_{k=1}^{\infty}kp_k$$

存在时，

$$p'(1)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=E\xi.$$

又当方差存在时，因为

$$E[\xi(\xi-1)]=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_k=p''(1),$$

故 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=p''(1)+p'(1)-[p'(1)]^2$. 例如，几何分布的母函数为

$$p(\theta)=\frac{\theta p}{1-\theta q},$$

故

$$E\xi=p'(1)=\frac{p}{(1-\theta q)^2}\Big|_{\theta=1}=\frac{1}{p},$$

又因为

$$p''(1)=\frac{2pq}{(1-\theta q)^3}\Big|_{\theta=1}=\frac{2q}{p^2},$$

所以

$$D\xi=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{q}{p^2}.$$

母函数的另一个重要性质是，两个相互独立的非负整值随机变量之和的母函数是这两个随机变量的母函数的乘积. 这一结果可推广到 n 个独立非负整值随机变量之和的场合. 这样，在研究独立随机变量和的问题时，母函数很适用. 但母函数只对非负整值随机变量适用，因而是有局限性的.

矩母函数(moment generating function) 研究随机变量分布律的一个重要的分析工具. 设 ξ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，如果 $Ee^{t\xi}$ 在原点的某个邻域内存在，则函数 $M(t)=Ee^{t\xi}$ 称为随机变量 ξ 的矩母函数. 称 $M(t)$ 为矩母函数，是由于 ξ 的原点矩可通过 $M(t)$ 的导数来表示. 即，若 $M(t)$ 对于在 $(-t_0,t_0)$ 中的 t 存在(这里 $t_0>0$)，则 $E\xi^k=M^{(k)}(0)$.

矩母函数的另一重要性质是，相互独立的随机变量之和的矩母函数是各个随机变量矩母函数的乘积. 这一性质为研究独立随机变量的和带来了方便. 可以证明，矩母函数惟一地确定了分布函数. 由于有矩母函数不存在的随机变量，使得矩母函数的效用受到了限制.

对于随机向量，也可类似定义其矩母函数. 以二维为例，设 (X,Y) 是一个二维随机变量，如果对于 $|t_1|\leqslant h_1$，$|t_2|\leqslant h_2$，其中 h_1 与 h_2 是正实数，$E(e^{t_1X+t_2Y})$ 存在，则称 $M(t_1,t_2)=E(e^{t_1X+t_2Y})$ 为二维随机变量 (X,Y) 的矩母函数. $M(t_1,t_2)$ 具有如下性质：

1. $M(t_1,t_2)$ 惟一地确定了 (X,Y) 的联合分布.

2. 若 X,Y 的矩母函数分别记为 $M_X(t_1)$，$M_Y(t_2)$，则

$$M(t_1,0)=Ee^{t_1X}=M_X(t_1),$$
$$M(0,t_2)=Ee^{t_2Y}=M_Y(t_2).$$

3. 如果 $M(t_1,t_2)$ 存在，则 (X,Y) 的所有阶矩都存在，且有

$$\left.\frac{\partial^{m+n}M(t_1,t_2)}{\partial t_1^m \partial t_2^n}\right|_{t_1=t_2=0} = E(X^m Y^n).$$

4. X,Y 相互独立的充分必要条件是，对所有的实数 t_1,t_2，有

$$M(t_1,t_2)=M(t_1,0)M(0,t_2)=M_X(t_1)M_Y(t_2).$$

特征函数(characteristic function)　研究概率论极限理论的一种重要的分析工具. 若 ξ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，$F(x)$ 是它的分布函数，称函数

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mathrm{d}F(x),$$

$$(-\infty < t < +\infty, i = \sqrt{-1})$$

为随机变量 ξ(或分布函数 $F(x)$)的特征函数. 如果 ξ 是离散型随机变量，$P(\xi=x_k)=p_k\ (k=1,2,\cdots)$，则其特征函数

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_k e^{itx_k}p_k.$$

如果 ξ 是连续型随机变量，其分布密度为 $p(x)$，则 ξ 的特征函数

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)\mathrm{d}x.$$

可知，$\varphi(t)$ 是 $p(x)$ 的傅里叶变换.

随机变量的特征函数总是存在的，它对一切 t 有定义，一般是实变量的复值函数.

特征函数具有如下性质：

1. 有界性：$|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)=1\ (-\infty<t<+\infty)$.

2. 一致连续性：$\varphi(t)$ 在整个实轴上一致连续.

3. 非负定性：对于任意 $n\geqslant 1$，任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和任意复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(t_j-t_k)z_j\bar{z}_k \geqslant 0.$$

4. $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$.

5. 设 $\eta=a\xi+b$，其中 a,b 为任意实数，则

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at).$$

6. 设 ξ 和 η 是相互独立的随机变量，则

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t).$$

一般地，若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立，则

$$\varphi_{\xi_1+\cdots+\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\cdots\varphi_{\xi_n}(t).$$

7. 如果 ξ 有 n 阶原点矩，则它的特征函数 $\varphi(t)$ 有 n 阶导数；并且 $\varphi^{(k)}(0)=i^k E\xi^k\ (k=1,2,\cdots,n)$. 反之，若 $\varphi^{(2n)}(0)$ 存在，则 ξ 具有 $2n$ 阶原点矩.

8. 若实随机变量的特征函数 $\varphi(t)$ 具有幂级数展开式

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_j t^j}{j!}\quad(-r<t<r),$$

称 φ 是 r 解析的. 记其相应的分布函数为 F，则下述诸条件等价：

1. φ 是 r 解析的.

2. $\varphi(t)=\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j(it)^j/j!\ (-r<t<r)$，

其中 $\alpha_j = \int_{-\infty}^{+\infty}x^j\mathrm{d}F(x)$.

3. $\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_{2j}t^{2j}/(2j)! <+\infty\ \ (0<t<r)$.

4. $\int e^{t|x|}\mathrm{d}F(x) <+\infty\ \ (0<t<r)$.

当特征函数 r 解析时($r>0$)，其分布函数由其矩序列惟一决定. 如果特征函数 $\varphi(t)$ 与母函数 $p(\theta)$ 及矩母函数 $M(t)$ 都存在，则它们有如下关系：

$$M(t) = Ee^{t\xi} = p(e^t);$$

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = p(e^{it});$$

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = M(it).$$

矩问题(moment problem)　研究概率分布是否被其各阶矩惟一决定的问题. 一般地，即使分布函数的一切阶矩都存在，也不能由矩序列决定分布. 存在不同的分布函数，它们具有相同的一切阶矩. 如果矩增长不太快，则可以由矩序列决定分布. 一个充分条件是：设 $\{\mu_k\}$ 满足条件

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{|\mu_k|^{1/k}}{k} = p <+\infty,$$

则至多存在一个概率分布函数 F 满足

$$\mu_k = \int x^k F(\mathrm{d}x)\ \ (k=1,2,\cdots).$$

其对应的特征函数 φ 是 r 解析的，其中 $r=1/e$，

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mu_k.$$

随机向量的特征函数(characteristic function of random vector)　研究概率论极限理论的一种重要的分析工具. 随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称函数

$$\begin{aligned}&\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)\\ &= Ee^{i(t_1\xi_1+\cdots+t_n\xi_n)}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

为随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数.

特征函数 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 具有如下性质：

1. $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 R^n 上一致连续，而且

$$|\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\leqslant\varphi(0,0,\cdots,0)=1,$$

$$\varphi(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}.$$

2. 如果 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数. 则 $\eta=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$ 的特征函数

$$\varphi_\eta(t)=\varphi(a_1t,a_2t,\cdots,a_nt).$$

3. 若 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数为 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，则 k 维($k<n$)随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$ 的特征函数为 $\varphi_{1,2,\cdots,k}(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0)$，这是前 k 个分量的 k 维边缘分布所对应的特征函

数. 对应于任意 k 个分量 $\xi_{j_1},\xi_{j_2},\cdots,\xi_{j_k}$ 的边缘分布的特征函数,可以类似得到.

4. 若 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数为 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,而 ξ_j 的特征函数为 $\varphi_{\xi_j}(t)$ $(j=1,2,\cdots,n)$,则随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立的充分必要条件是

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\varphi_{\xi_1}(t_1)\varphi_{\xi_2}(t_2)\cdots\varphi_{\xi_n}(t_n).$$

5. 若以 $\varphi_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,$\varphi_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 及 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 分别记随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 及 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 的特征函数,则 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 与 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 相互独立的充分必要条件为:对一切实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 及 $u_1,u_2,\cdots,u_m$,

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)=\varphi_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)\varphi_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)$$

成立.

6. 若对一切满足 $r_1+r_2+\cdots+r_n=m$ 的非负整数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$,有 $E|\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\cdots\xi_n^{r_n}|<+\infty$,则对任何满足 $k_1+k_2+\cdots+k_n\leqslant m$ 的非负整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,有

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_n^{k_n}}\varphi_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=i^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\sum_1^n t_kx_k}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\mathrm{d}F(x_1\cdots x_n)$$

存在有限,因而

$$\alpha_{k_1,k_2,\cdots,k_n}\triangleq E\xi_1^{k_1},E\xi_2^{k_2},\cdots,\xi_n^{k_n}=i^{-(k_1+k_2+\cdots+k_n)}\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial t_1^{k_1},\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\varphi_{\xi_1\xi_2\cdots\xi_n}(0,\cdots,0).$$

特征函数逆转公式(inversion formula of characteristic function) 用特征函数表示分布的重要公式. 它解决了特征函数与分布函数互相惟一确定的问题. 特殊函数的逆转公式为:设分布函数 $F(x)$ 的特征函数为 $\varphi(t)$,又 $x_1<x_2$ 是 $F(x)$ 的两个连续点,则

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

特别地,如果特征函数 $\varphi(t)$ 绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|\mathrm{d}t<+\infty,$$

则相应的分布函数为连续型的,它的密度函数 $p(x)$ 连续,且

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

分布函数由其特征函数惟一决定. 对于随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,若其特征函数为 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则逆转公式为

$$P(a_k<\xi_k\leqslant b_k,k=1,2,\cdots,n)=\lim_{\substack{T_j\to\infty\\ j=1,2,\cdots,n}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-T_1}^{T_1}\int_{-T_2}^{T_2}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-it_ka_k}-e^{-it_kb_k}}{it_k}\cdot\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1,\mathrm{d}t_2,\cdots,\mathrm{d}t_n$$

其中 a_k 和 b_k 是任意实数,但满足条件:$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 落在平行体 $a_k<x_k\leqslant b_k$ $(k=1,2,\cdots)$,n 的面上的概率等于零. 多元分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 由其特征函数惟一决定.

特征函数连续性定理(continuous theorem of characteristic functions) 概率论的重要定理之一. 它使特征函数成为研究一些极限定理的重要工具. 连续性定理如下:分布函数列 $F_1(x),F_2(x),\cdots$ 弱收敛于某分布函数 $F(x)$ 的充分和必要条件是,相应的特征函数列 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\cdots$ 收敛于某连续函数 $\varphi(t)$. 这时,$\varphi(t)$ 就是分布函数 $F(x)$ 的特征函数,而且 $\varphi_n(t)$ 向 $\varphi(t)$ 的收敛在关于 t 的每个有穷区间上一致.

连续性定理也可分述为正极限定理与逆极限定理. 正极限定理:若分布函数列 $F_1(x),F_2(x),\cdots$ 弱收敛于某一分布函数 $F(x)$,则相应的特征函数列 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots$ 收敛于相应的特征函数 $\varphi(t)$,且在 t 的任一有限区间内收敛是一致的. 逆极限定理:设特征函数列 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots$ 收敛于某一函数 $\varphi(t)$,且 $\varphi(t)$ 连续(或在 $t=0$ 点连续),则相应的分布函数列 $F_1(x),F_2(x),\cdots$ 弱收敛于某一分布函数 $F(x)$,而且 $\varphi(t)$ 是 $F(x)$ 的特征函数. 正逆极限定理合称连续性定理. 该定理最先由法国数学家、工程师莱维(Lévy,P.)及瑞典学者克拉默(Cramer,H.)证得,因此又称莱维-克拉默定理.

正极限定理(positive limit theorem) 见"特征函数连续性定理".

逆极限定理(inversion limit theorem) 见"特征函数连续性定理".

赫格洛兹定理(Herglotz theorem) 概率论的重要定理之一. 若复数列 $\theta(n)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是非负定的,即对任意的正整数 n 及复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_k\bar{\lambda}_j\theta(k-j)\geqslant0,$$

则存在 $[-\pi,\pi]$ 上的有界、非降、右连续函数 $G(x)$,使

$$\theta(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\mathrm{d}G(x).$$

赫格洛兹定理在随机过程中也有重要应用.

波赫纳-辛钦定理(Bochner-Khintchine theorem) 概率论的重要定理之一. 函数 $\varphi(t)$ 为特征函数的充分必要条件是:

1. $\varphi(0)=1$.

2. $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

3. $\varphi(t)$ 是非负定的,即对任意的 n 和任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,及任意复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_k\bar{\lambda}_j(t_k-t_j)\geqslant 0.$$

波赫纳-辛钦定理在随机过程中也有重要应用.

无穷可分律(infinitely divisible law) 一类概率分布律.如果对每个正整数 n,都存在分布函数 F_n,使得 F 为 F_n 的 n 重卷积,即

$$F=\underbrace{F_n*F_n*\cdots*F_n}_{n\text{次}},$$

则称分布函数 F 为无穷可分的.等价地,如果对每个正整数 n,存在特征函数 φ_n,使得 $\varphi=[\varphi_n]^n$,则称特征函数 φ 为是无穷可分的.正态分布、泊松公布、退化分布都是无穷可分分布.

无穷可分分布在极限理论的研究中起着重要作用.设随机变量阵列 $X_{nk}(k=1,2,\cdots,k_n,n=1,2,\cdots)$ 满足"一致可渐近忽略条件",即对一切 $\varepsilon>0$,当 $n\to\infty$时,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)\to 0,$$

令

$$S_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}\ (n=1,2,\cdots),$$

则$\{S_n\}$的一切可能的极限分布律是无穷可分律.每一无穷可分律的特征函数具有 $e^{\psi(u)}$ 的形式,其中

$$\psi(u)=iua+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mu(\mathrm{d}x),$$

这里 μ 是 R 上的有限勒贝格-斯蒂尔杰斯测度,a 是实数.ψ 与(a,μ)相互惟一决定.

$$\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}\xrightarrow{\mathscr{D}}X,\quad\varphi_X(u)=e^{\psi(u)}$$

的充分必要条件是

$$a_n\to a,\quad\mu_n\xrightarrow{w}\mu,$$

其中

$$a_n=\sum_k\left\{a_{nk}+\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}P_{(X_{nk}-a_{nk})}\right\},$$

$$\mu_n(B)=\sum_k\int_B\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}P_{X_{nk}-a_{nk}}\ (B\in\mathscr{B}),$$

而

$$a_{nk}=\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}P_{X_{nk}},$$

τ 是任意取定的一个正数,而 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$ 指测度的弱收敛.

切比雪夫不等式(Chebyshev inequality) 概率论的重要不等式之一.设随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$ 和方差 $D\xi=\sigma^2$ 存在,则对任意给定的正数 ε,总有

$$P(|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

或

$$P(|\xi-E\xi|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

如取 $\varepsilon=k\sigma$,则另一表达形式为

$$P(|\xi-E\xi|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2}\ (k>0).$$

由上列各式可知,$D\xi$ 越小,则 ξ 的取值集中在 $E\xi$ 附近的概率越大.这表明方差 $D\xi$ 反映了 ξ 对于 $E\xi$ 的分散程度.俄国数学家、力学家切比雪夫(Чебыщев,П. Л.)于 1866 年在证明弱大数律时发现了这个不等式,它给出了随机变量 ξ 关于数学期望 $E\xi$ 偏差程度的概率的一种估计.在理论上和实践中都有重要应用.

柯西-施瓦兹不等式(Cauchy-Schwarz inequality) 亦称柯西-布尼亚科夫斯基不等式.概率论的重要不等式之一.若随机变量 ξ 和 η 的方差存在,则

$$|E(\xi\eta)|\leqslant\sqrt{E\xi^2}\ \sqrt{E\eta^2},$$

其中等式成立,当且仅当存在常数 λ,μ 使

$$P(\lambda\xi+\mu\eta=0)=1.$$

柯西-布尼亚科夫斯基不等式(Cauchy-Bunyakovskii inequality) 即"柯西-施瓦兹不等式".

马尔可夫不等式(Markov inequality) 概率论的重要不等式之一.若随机变量 ξ 的 k 阶原点绝对矩 $E|\xi|^k$ 存在,则对任意 $\varepsilon>0$,有

$$P\{|\xi|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{E|\xi|^k}{\varepsilon^k}.$$

赫尔德不等式(Hölder inequality) 概率论的重要不等式之一.设 ξ,η 是任意两个随机变量,且 $E|\xi|^\alpha<+\infty,E|\eta|^\beta<+\infty$,其中

$$\alpha>1,\beta>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,$$

那么

$$E|\xi\eta|\leqslant(E|\xi|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(E|\eta|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

特别地,当 $\alpha=\beta=2$ 时,得柯西-施瓦兹不等式.

闵科夫斯基不等式(Minkowski inequality) 概率论的重要不等式之一.设 ξ,η 是任意两个随机变量,$r\geqslant 1,E|\xi|^r<+\infty,E|\eta|^r<+\infty$,则

$$(E|\xi+\eta|^r)^{\frac{1}{r}}\leqslant(E|\xi|^r)^{\frac{1}{r}}+(E|\eta|^r)^{\frac{1}{r}}.$$

延森不等式(Jensen's inequality) 概率论的重要不等式之一.设随机变量 ξ 在区间(a,b)取值,$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$,$y=g(x)\ (x\in(a,b))$,是连续的下凸函数.如果 $E\xi$ 和 $Eg(\xi)$存在,则

$$Eg(\xi)\geqslant g(E\xi).$$

李亚普诺夫不等式(Liapunov inequality) 关于矩的一个不等式.设 ξ 是一随机变量,对于任意实数,$0<r<s$,如果 $E|\xi|^s<+\infty$,则

$$[E|\xi|^r]^{\frac{1}{r}}\leqslant[E|\xi|^s]^{\frac{1}{s}}.$$

柯尔莫哥洛夫不等式(Kolmogorov inequality)

概率论的重要不等式之一. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是相互独立的随机变量,方差有限,则对任意 $\varepsilon>0$,

$$P\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{j}(\xi_i-E\xi_i)\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n}D\xi_j$$

成立. 柯尔莫哥洛夫不等式在概率论中有广泛的应用. 在上式中,若令 $n=1$,则得到切比雪夫不等式.

莱维不等式(Lévy inequality)　概率论的重要不等式之一. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是相互独立的随机变量,

$$S_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_j\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

$m(\xi)$表示 ξ 的中位数,则对任意 $\varepsilon>0$,

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m(S_k-S_n)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 2P\{S_n\geqslant\varepsilon\},$$

及

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m(S_k-S_n)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 2P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\}$$

成立. 莱维不等式适用于期望不存在的情形.

特殊的分布与概率纸

单点分布(one-point distribution)　亦称退化分布. 一种离散型分布. 如果随机变量 ξ 以概率 1 取固定值 c,即 $P(\xi=c)=1$,则称随机变量 ξ 服从单点分布. 记为 $\xi\sim\delta(c)$,且

期　　望　$E\xi=c$;

方　　差　$D\xi=0$;

母 函 数　$P(\theta)=\theta^c$ (设 c 是非负整数);

矩母函数　$M(t)=e^{ct}$;

特征函数　$\varphi(t)=e^{ict}$.

退化分布(degenerate distribution)　即"单点分布".

两点分布(two-point distribution)　亦称伯努利分布或 0-1 分布. 一种离散型分布. 设离散型随机变量 ξ 的分布为

$$P\{\xi=1\}=p,\quad P\{\xi=0\}=1-p,\quad(0<p<1)$$

则称离散型随机变量 ξ 服从参数为 p 的两点分布. 且

期　　望　$E\xi=p$;

方　　差　$D\xi=p(1-p)$;

母 函 数　$p(\theta)=\theta p+(1-p)$;

矩母函数　$M(t)=pe^t+1-p$;

特征函数　$\varphi(t)=pe^{it}+1-p$.

伯努利分布(Bernoulli distribution)　即"两点分布".

0-1 **分布**(0-1 distribution)　即"两点分布".

格点分布(lattice distribution)　一类离散型分布的总称. 设离散型随机变量 ξ 的分布列为

$$P(\xi=a+kh)=p_k\quad(k=\cdots,-2,-1,0,1,2\cdots),$$

其中 a 及 $h>0$ 为常数,则称离散型随机变量 ξ 服从格点分布. h 为分布的步长. 例如,二项分布、泊松分布、几何分布等都是格点分布.

二项分布(binomial distribution)　概率论中最重要的分布之一. 如果随机变量 ξ 的分布为

$$P\{\xi=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n),$$

其中 $0<p<1,q=1-p$. 则称随机变量 ξ 服从参数为 n,p 的二项分布,记为 $\xi\sim B(n,p)$. 且

期　　望　$E\xi=np$;

方　　差　$D\xi=npq$;

母 函 数　$p(\theta)=(p\theta+q)^n$;

矩母函数　$M(t)=(pe^t+q)^n$;

特征函数　$\varphi(t)=(pe^{it}+q)^n$.

设单次试验中,事件 A 发生的概率为 p,在考虑 n 次重复试验的模型(即 n 重伯努利试验)中,用 ξ 表示 n 次重复试验中事件 A 发生的次数,则 $\xi\sim B(n,p)$. 当 $n=1$ 时的二项分布就是两点分布. 当 n 较大,p 较小时,二项分布可用泊松分布近似. 即

$$C_n^kp^kq^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad(\lambda\approx np).$$

所以将之称为二项分布,是因为 $C_n^kp^kq^{n-k}$可看成为二项式$(p+q)^n$ 展开式中一般项的系数.

负二项分布(negative binomial distribution)　亦称帕斯卡分布. 一种等待时间的分布. 设伯努利试验中,某事件 A 恰好发生 r 次所需试验次数为 ξ,那么 ξ 的分布为

$$P\{\xi=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}\quad(k=r,r+1,\cdots),$$

其中 $0<p<1,q=1-p,r$ 为正整数,则称随机变量 ξ 服从参数为(r,p)的负二项分布,记为 $\xi\sim NB(r,p)$. 且

期　　望　$E\xi=\dfrac{r}{p}$;

方　　差　$D\xi=\dfrac{rq}{p^2}$;

母 函 数　$p(\theta)=\left(\dfrac{\theta p}{1-q\theta}\right)^r$;

矩母函数　$M(t)=\left(\dfrac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$;

特征函数　$\varphi(t)=\left(\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^r$.

在实际中,负二项分布常用于不幸事件和发病情形的统计问题.

帕斯卡分布(Pascal distribution)　即"负二项分布".

几何分布(geometric distribution)　一种等待时间的分布. 如果随机变量 ξ 的分布为

$$P\{\xi=k\}=p\cdot q^{k-1}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 $0<p<1, q=1-p$，则称随机变量 ξ 服从参数为 p 的几何分布. 记为 $\xi \sim G(p)$. 且

期　　望　$E\xi=\frac{1}{p}$；

方　　差　$D\xi=\frac{q}{p^2}$；

母 函 数　$p(\theta)=\frac{p\theta}{1-q\theta}$；

矩母函数　$M(t)=\frac{p}{e^{-t}-q}$；

特征函数　$\varphi(t)=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$.

在事件 A 发生概率为 p 的伯努利试验中，若用 ξ 表示事件 A 首次发生时所需试验的次数，则 $\xi \sim G(p)$. 几何分布是帕斯卡分布当 $r=1$ 时的特例.

几何分布具有无后效性这一重要性质，即假设已经进行了 n 次试验，而且事件 A 未发生，那么事件 A 首次发生恰好需要再做 k 次试验的条件概率不依赖于以前的试验，就像试验重新开始进行一样.

超几何分布(hypergeometric distribution)　一种离散型分布. 如果离散型随机变量 ξ 的概率分布为

$$P\{\xi=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,1,\cdots,n),$$

其中 N, M, n 为正整数，且

$$0 \leqslant M \leqslant N, 0 \leqslant n \leqslant N, n \leqslant N-M,$$

则称离散型随机变量 ξ 服从超几何分布，记为 $\xi \sim H(n, M, N)$. 且

期　　望　$E\xi=n\frac{M}{N}$；

方　　差　$D\xi=n\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M(N-M)}{N^2}$.

超几何分布产生于 n 次非放回取样，在抽样理论中占重要地位. 例如，一堆同类产品共 N 个，其中有 M 个次品. 现从中任取 n 个(假定 $n \leqslant N-M$)，则这 n 个中所含次品数 ξ 就服从超几何分布. 当 N 很大时，超几何分布可用二项分布近似. 所以称之为超几何分布，是因为 $C_M^k C_{N-M}^{n-k}/C_N^n$ 可看成为所谓超几何级数一般项的系数.

负超几何分布(negative hypergeometric distribution)　一种离散型分布. 如果离散型随机变量 ξ 的分布为

$$P\{\xi=k\}=\frac{C_{k-1}^{r-1} C_{N-k}^{M-r}}{C_N^M}$$

$$(k=r, r+1, \cdots, N-M+r),$$

其中 $1 \leqslant r \leqslant M \leqslant N$，则称离散型随机变量 ξ 服从参数为 (N, M, r) 的负超几何分布. 记为 $\xi \sim NH(N, M, r)$. 负超几何分布产生于非放回有序取样中，恰好出现 $r(r \geqslant 1)$ 个具有某种特征 A 的元素所需取样的次数.

ζ 分布(ζ-distribution)　亦称吉波夫分布. 一种离散型分布. 设 ζ 为离散型随机变量，若其概率分布为

$$P(\zeta=k)=\frac{c}{k^{\alpha+1}} \quad (k=1,2,\cdots, \alpha>0),$$

$$c=\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha+1}\right]^{-1}.$$

则称离散型随机变量 ζ 服从 ζ 分布. ζ 分布这个名称来源于黎曼 ζ 函数

$$\zeta(s)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^s+\left(\frac{1}{3}\right)^s+\cdots+\left(\frac{1}{k}\right)^s+\cdots$$

ζ 分布曾被意大利经济学家帕雷托(Pareto, V.)用于刻画移居到某给定国家的家庭个数的分布. 吉波夫把这一分布应用到了更广泛的领域.

吉波夫分布(Zipf distribution)　即“ζ 分布”.

泊松分布(Poisson distribution)　概率论中最重要的分布之一. 如果离散随机变量 ξ 的概率分布为

$$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,\cdots),$$

其中 $\lambda>0$，则称离散型随机变量 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布. 记为 $\xi \sim P(\lambda)$. 且

期　　望　$E\xi=\lambda$；

方　　差　$D\xi=\lambda$；

母 函 数　$P(\theta)=e^{\lambda(\theta-1)}$；

矩母函数　$M(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$；

特征函数　$\varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

许多随机现象都服从泊松分布. 例如，电话交换台中某段时间内收到的呼叫数，公共汽车站某时间区间内来到的乘客数等，因此，在运筹学及管理科学中，泊松分布占有很突出的地位. 又如，在物理学中，放射性分裂落到某区域的质点数，热电子的发射；显微镜下落在某区域中的血球或微生物的数目等都服从泊松分布.

瑞利分布(Rayleigh distribution)　一种连续型分布. 当 $n=2$ 时，χ 分布称为瑞利分布，常用于随机噪声理论和海浪理论. 一般地，若随机变量 ξ_1, ξ_2 相互独立且同 $N(0, \sigma^2)$ 分布，则连续型随机变量

$$\xi=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$$

服从参数为 σ 的瑞利分布，记为 $\xi \sim R(\sigma)$. 其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & (x>0), \\ 0 & (x \leqslant 0),\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$. 且

期　　望　$E\xi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$；

方　　差　$D\xi=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

指数分布(exponential distribution)　一种寿命分布. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\mu)} & (x\geqslant\mu),\\ 0 & (x<\mu).\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$,则称连续型随机变量 ξ 服从指数分布,记为 $\xi\sim e(\mu,\lambda)$. 且

期　　望　$E\xi=\mu+\frac{1}{\lambda}$；

方　　差　$D\xi=\frac{1}{\lambda^2}$；

矩母函数　$M(t)=e^{\mu t}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$；

特征函数　$\varphi(t)=e^{i\mu t}\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$.

当参数 $\mu=0,\lambda=1$ 时,称为标准指数分布,记为 $e(0,1)$. 指数分布有重要应用,它可作为各种"寿命"分布的近似. 例如电子元件使用寿命,电话的通话时间,随机服务系统中的服务时间等. 指数分布的另一特点是具有"无记忆性".

标准指数分布(standard exponential distribution)　见"指数分布".

对数分布(logarithmic distribution)　一种离散型分布. 如果离散型随机变量 ξ 的分布列为

$$P\{\xi=k\}=-\frac{1}{\ln p}\cdot\frac{q^k}{k}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 $p>0,q>0,p+q=1$,则称离散型随机变量 ξ 服从对数分布,记为 $\xi\sim L(p)$. 且

期　　望　$E\xi=-\frac{q}{p\ln p}$；

方　　差　$D\xi=-\frac{q\left(1+\frac{q}{\ln p}\right)}{p^2\ln p}$；

母 函 数　$p(\theta)=\frac{\ln(1-q\theta)}{\ln p}$；

矩母函数　$M(t)=\frac{\ln(1-qe^t)}{\ln p}$；

特征函数　$\varphi(t)=\frac{\ln(1-qe^{it})}{\ln p}$.

均匀分布(uniform distribution)　一种连续型分布. 它描述了等可能性. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & (a\leqslant x\leqslant b),\\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$$

则称连续型随机变量 ξ 服从 $[a,b]$ 区间上的均匀分布. 记为 $\xi\sim U(a,b)$. 且

期　　望　$E\xi=\frac{a+b}{2}$；

方　　差　$D\xi=\frac{1}{12}(b-a)^2$；

矩母函数　$M(t)=(e^{bt}-e^{at})[t(b-a)]^{-1}$；

特征函数　$\varphi(t)=(e^{ibt}-e^{iat})[it(b-a)]^{-1}$.

例如,某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过,一位乘客对于汽车通过该站的时间一无所知,他在任一时刻到达车站都是等可能的,那么乘客的候车时间 ξ 就服从 $[0,5]$ 区间上的均匀分布. 如果随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)$ 连续,则 $\eta=F(\xi)$ 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布.

正态分布(normal distribution)　概率论中最重要的分布之一. 最初由高斯(Gauss,C. F.)在研究误差理论时发现. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $\sigma>0,-\infty<\mu<+\infty$. 则称连续型随机变量 ξ 服从参数为 μ,σ 的正态分布. 记为 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$. 且

期　　望　$E\xi=\mu$；

方　　差　$D\xi=\sigma^2$；

矩母函数　$M(t)=e^{\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$；

特征函数　$\varphi(t)=e^{i\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

在概率论与数理统计的理论研究和实际应用中,正态分布起着特别重要的作用,它的重要程度在各种概率分布中居首要地位. 这是因为,正态分布是自然界最常见的一种分布. 例如测量的误差,炮弹弹落点的分布,人的生理特征的尺寸(如身高、体重等),农作物的收获量,工厂产品的尺寸(如直径、长度、宽度、高度)等都近似服从正态分布. 一般地,若影响某一数量指标的随机因素很多,而每个因素所起的作用都不大,则这个指标就可近似看做服从正态分布. 直观说来,其可能性是两头小中间大的随机现象都近似服从正态分布. 另一方面,正态分布具有许多良好的性质,许多分布都可用正态分布来近似. 还有一些分布可以由正态分布导出.

标准正态分布(standard normal distribution)　一种特殊的正态分布. 是参数 $\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

则称连续型随机变量 ξ 服从标准正态分布,记为 $\xi\sim N(0,1)$. 且

期　　望　$E\xi=0$；

方　　差　$D\xi=1$；

矩母函数　$M(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$；

特征函数　$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$；

分布函数　$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

如果 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $u=(\xi-\mu)/\sigma\sim N(0,1)$；反之，若 $u\sim N(0,1)$，则 $(\sigma u+\mu)\sim N(\mu,\sigma^2)$.

标准正态分布的概率密度 $\varphi(x)$ 和分布函数 $\Phi(x)$ 的值可以分别由编制好的“标准正态密度函数值表”和“标准正态分布函数值表”查出.

对数正态分布(logarithmic normal distribution)　一种连续型分布. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$，$-\infty<\mu<+\infty$，则称连续型随机变量 ξ 服从对数正态分布，记为 $\xi\sim\ln(\mu,\sigma^2)$. 且

期　望　$E\xi=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$；

方　差　$D\xi=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$.

若随机变量 $\eta\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\xi=e^{\eta}$ 就服从对数正态分布. 对数正态分布在技术、生物学、医学、经济学、地质学等不同领域的各种问题中，都有重要应用. 例如，在技术中，对数正态分布广泛用于疲劳试验结果的统计分析.

Γ 分布(Gamma distribution)　一种连续型分布. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(x-c)^{\alpha-1}e^{-\beta(x-c)} & (x>c),\\ 0 & (x\leqslant c).\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 为 Γ 函数，则称连续型随机变量 ξ 服从参数为 α,β,c 的伽马分布. 记为 $\xi\sim\Gamma(\alpha,\beta,c)$，且

期　望　$E\xi=\frac{\alpha}{\beta}+c$；

方　差　$D\xi=\frac{\alpha}{\beta^2}$；

矩母函数　$M(t)=e^{ct}\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}$；

特征函数　$\varphi(t)=e^{ict}\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$.

当 $\alpha=1$ 时，伽马分布就是指数分布 $e(c,\beta)$. 一般地，当 α 是任意正整数时，若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\alpha$ 相互独立，且都服从指数分布 $e(c,\beta)$，则

$$\xi=\sum_{i=1}^{\alpha}\xi_i\sim\Gamma(\alpha,\beta,c)$$

Γ 分布在概率论、数理统计、随机过程中有不少应用.

埃尔朗分布(Erlang distribution)　一种特殊的 Γ 分布. 当 $\alpha=n$ 为正整数及 $c=0$ 时，Γ 分布 $\Gamma(n,\lambda,0)$ 称为埃尔朗分布. 其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

其中 $(n-1)!=\Gamma(n)$.

埃尔朗分布用于可靠性理论和排队论中.

β 分布(Beta distribution)　一种连续型分布. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & (0<x<1),\\ 0 & (\text{其他}).\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$，$\beta>0$，$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ 为 β 函数，则称连续型随机变量 ξ 服从参数为 α,β 的 β 分布. 记为 $\xi\sim\beta(\alpha,\beta)$，且

期　望　$E\xi=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$；

方　差　$D\xi=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

若随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n+m}$ 相互独立，且都服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布，则

$$\xi=\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\Big/\sum_{j=1}^{n+m}\xi_j^2\right)\sim\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right).$$

β 分布是概率论和数理统计的应用中最常见的分布之一，编有详尽的 β 分布表.

韦布尔分布(Weibull distribution)　一种寿命分布. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{m}{\alpha}(x-c)^{m-1}e^{-\frac{(x-c)^m}{\alpha}} & (x\geqslant c),\\ 0 & (x<c).\end{cases}$$

其中 $m>0$，$\alpha>0$，$-\infty<c<+\infty$. 则称连续型随机变量 ξ 服从参数为 m,α,c 的韦布尔分布，记为 $\xi\sim W(m,\alpha,c)$. 且

期　望　$E\xi=\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)+c$；

方　差　$D\xi=\alpha^{\frac{\alpha}{m}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$.

当 $m=1$ 时的韦布尔分布就是指数分布 $e(c,1/\alpha)$. 韦布尔分布用于“最弱链”模型中的寿命分布，即考虑一个由许多部分组成的对象，并假定当它的任何一部分毁坏时，此对象的寿命就终止，在这样的条件下，已经从理论上和实践上证明：韦布尔分布是这个对象寿命分布的一个很好近似.

冈伯尔分布(Gumbel distribution)　亦称 *I* 型分布. 一种极值分布. 其密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\exp(-\exp^{-\frac{x-\lambda}{\delta}})$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$

其中 λ 为位置参数，$\delta>0$ 为离散参数.

***I* 型分布**(*I* type distribution)　即“冈伯尔分布”.

麦克斯韦分布(Maxwell distribution)　一种连续型分布.一般地,若随机变量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互独立且同服从 $N(0,\sigma^2)$分布,则连续型随机变量

$$\xi=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$$

服从麦克斯韦分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

在统计物理中,用它描绘气体分子运动的绝对速度的分布.

柯西分布(Cauchy distribution)　一种有理论价值的连续型分布.如果随机变量 ξ 有概率密度

$$p(x)=\frac{\lambda}{\pi[\lambda^2+(x-\mu)^2]}$$

$$(\lambda>0,\ -\infty<\mu<+\infty,\ -\infty<x<+\infty)$$

则称连续型随机变量 ξ 服从参数为(μ,λ)的柯西分布.记为 $\xi\sim C(\mu,\lambda)$.柯西分布的各阶矩都不存在,而特征函数为

$$\varphi(t)=e^{i\mu t-\lambda|t|}.$$

拉普拉斯分布(Laplace distribution)　一种连续型分布.如果随机变量 ξ 具有概率密度

$$p(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$$

$$(-\infty<\mu<+\infty,\lambda>0,\ -\infty<x<+\infty)$$

则称连续型随机变量 ξ 服从拉普拉斯分布.其各阶矩有穷,特征函数为

$$\varphi(t)=\frac{e^{i\mu t}}{1+\lambda^2t^2}.$$

重指数分布(iterated exponential distribution)　亦称为冈伯尔分布.一种极大值的极限分布.其分布函数可写为如下形式:

$$F(x)=\exp(-\alpha e^{-\beta x})$$

$$(-\infty<x<+\infty,\alpha,\beta>0).$$

重指数分布在洪水、地震预报及可靠性问题中有重要应用.

三角分布(triangular distribution)　亦称辛普森分布.一种连续型分布.假设随机变量 ξ_1 和 ξ_2 相互独立,且都在$[a/2,b/2]$上服从均匀分布,则 $\xi_1+\xi_2$ 的分布称为三角分布,其概率密度为

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \left(a\leqslant x\leqslant\dfrac{a+b}{2}\right),\\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \left(\dfrac{a+b}{2}<x\leqslant b\right),\\ 0 & (x\overline{\in}[a,b]).\end{cases}$$

辛普森分布(Simpson distribution)　即"三角分布".

反三角分布(inverse triangular distribution)　一种概率分布,其特征函数

$$\varphi(t)=\left[1-\frac{|t|}{\alpha}\right]^+\quad(\alpha>0),$$

而分布密度为

$$f(x)=\frac{1-\cos\alpha x}{\pi\alpha x^2}\quad(-\infty<x<\infty).$$

反射正态分布(reflex normal distribution)　一种连续型分布.当 $n=1$ 时,χ 分布称为反射正态分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

如果 η 服从标准正态分布,则 $\xi=\sqrt{\eta^2}=|\eta|$服从反射正态分布.它用于误差分析理论.其 k 阶矩为

$$E|\xi|^k=2^{\frac{k}{2}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

反正弦分布(inverse sine distribution)　一种连续型分布.当 $\alpha=\beta=1/2$ 时,β 分布转化为反正弦分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & (0<x<1),\\ 0 & (\text{其他}).\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0),\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} & (0<x<1),\\ 1 & (x\geqslant 1).\end{cases}$$

χ^2 分布(χ^2-distribution)　数理统计中的三大分布之一.如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$$

其中 n 为正整数,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

为 Γ 函数,则称连续型随机变量 ξ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布,记为 $\xi\sim\chi^2(n)$,且

期　　望　$E\xi=n$;

方　　差　$D\xi=2n$;

矩母函数　$M(t)=(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$;

特征函数　$\varphi(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$.

χ^2 分布是 Γ 分布当 $\alpha=n/2,\beta=1/2,c=0$ 时的特例.在数理统计中有广泛的应用.独立标准正态随机变量的平方之和服从 χ^2 分布,其自由度恰好等于独立变量的个数.即若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且都服从 $N(0,1)$分布,则

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \sim \chi^2(n).$$

χ 分布(χ-distribution) 一种连续型分布. 如果随机变量的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{n-1}e^{-\frac{1}{2}x^2} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$$

其中 n 为正整数,则称连续型随机变量 ξ 服从自由度为 n 的 χ 分布. 记为 $\xi\sim\chi(n)$. 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且同 $N(0,1)$ 分布,则

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}\sim\chi(n).$$

F 分布(F-distribution) 亦称斯奈迪克分布. 数理统计中的三大分布之一. 如果连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{m}{2}-1}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$$

其中 m,n 为正整数,

$$B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)=\int_0^1 x^{\frac{m}{2}-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}x$$

为 β 函数,则称连续型随机变量 ξ 服从自由度为 m,n 的 F 分布,记为 $\xi\sim F(m,n)$. 且

期　望　$E\xi=\dfrac{n}{n-2}\quad(n>2)$;

方　差　$D\xi=\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\quad(n>4)$.

若记 β 分布的分布函数为

$$F_\xi(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)\mathrm{d}u & (0\leqslant x<1),\\ 1 & (x\geqslant 1).\end{cases}$$

又记 F 分布的分布函数为 $F_\eta(x)$,则对任意 $x>0$,有

$$F_\eta(x)=F_\xi\left(\frac{mx}{n+mx};\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$$

及

$$f_\eta(x)=\frac{mn}{(n+mx)^2}f_\xi\left(\frac{mx}{n+mx};\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right),$$

其中 f_ξ 和 f_η 分别是 β 分布和 F 分布的概率密度.

F 分布在数理统计中有极其重要和十分广泛的应用. 尽管编有 F 分布的数值表,然而这些表都不够详尽. 在处理应用问题时,可以根据以上两个关系式利用详尽的 β 分布的数值表. 可以证明,若随机变量 ξ 和 η 相互独立,且 $\xi\sim\chi^2(m)$,$\eta\sim\chi^2(n)$,则

$$F=\frac{\xi/m}{\eta/n}\sim F(m,n),$$

其中 m 称为第一自由度,n 称为第二自由度.

斯奈迪克分布(Snedecor distribution) 即"F 分布".

t 分布(student distribution) 亦称学生分布. 数理统计中的三大分布之一. 如果随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 n 为正整数,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

为 Γ 函数,则称随机变量 ξ 服从自由度为 n 的 t 分布;记为 $\xi\sim t(n)$,且

期　望　$E\xi=0\quad(n>1)$;

方　差　$D\xi=\dfrac{n}{n-2}\quad(n>2)$.

设 ξ 服从标准正态分布,η 服从自由度为 n 的 χ^2 分布,且 ξ,η 相互独立,则随机变量

$$t=\frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布. 当 $n\to\infty$ 时,t 分布的极限分布是标准正态分布. 实际上,当 $n\geqslant 30$ 时,t 分布与标准正态分布的差别已很小. 此外,当 $n=1$ 时,t 分布是柯西分布 $C(1,0)$. t 分布最早是英国统计学家和化学家戈塞特(Gossett,W. S.)在 1908 年提出的. "学生(Student)"是他当时使用的笔名.

学生分布(student distribution) 即"t 分布".

非中心 χ^2 分布(non-central χ^2-distribution) 一种连续型分布. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的正态随机变量,$EX_i=\mu_i$, $DX_i=\sigma^2$ $(i=1,2,\cdots,n)$,且 μ_i 不全为零,记

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n}X_i^2/\sigma^2,$$

则称连续型随机变量 γ 服从非中心 χ^2 分布,记为 $\gamma\sim\chi^2(n,\delta)$. 其自由度为 n,非中心参数为

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2/\sigma^2,$$

分布密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{x+\delta}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^{m+\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+m\right)2^{2m}m!} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

特征函数为

$$\varphi(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{i\delta t}{1-2it}},$$

且　$E\gamma=n+\delta,\quad D\gamma=2n+4\delta.$

当 $\delta=0$ 时，非中心 $\chi^2(n,\delta)$ 分布转化为(中心的) $\chi^2(n)$ 分布.

非中心 t 分布(non-central t-distribution) 一种连续型分布. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y/\sigma^2\sim\chi^2(n)$，$\mu\neq 0$，且 X 和 Y 相互独立，则称随机变量

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

为服从自由度为 n，非中心参数为 $\delta=\mu/\sigma$ 的非中心 t 分布. 非中心 t 分布的分布密度为

$$p(x)=\frac{n^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)\left(\frac{\delta^m}{m!}\right)\left[\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{n+x^2}}\right]^m,$$

且

$$ET=\delta\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\frac{n}{2}}\quad(n>1);$$

$$DT=\frac{n(1+\delta^2)}{n-2}-\frac{\delta^2 n}{2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]^2\quad(n>2).$$

当 $\delta=0$ 时，非中心 t 分布转化为 t 分布.

非中心 F 分布(non-central F-distribution) 一种连续型分布. 设 $X\sim\chi^2(m,\delta)$，$Y\sim\chi^2(n)$，$\delta\neq 0$，且 X,Y 相互独立，则称随机变量

$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

服从非中心 F 分布，其自由度为(m,n)，非中心参数为 δ. 分布密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{\delta}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\delta mx}{2}\right)^k\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+k\right)}{k!\;\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)(mx+n)^{\frac{m+n}{2}+k}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

如果 $\delta=0$，非中心 F 分布就转化为 F 分布. 非中心 F 分布的数学期望和方差是

$$E(F)=\frac{n(m+\delta)}{m(n-2)}\quad(n>2),$$

$$D(F)=\frac{2n^2}{m^2(n-2)^2(n-4)}[(m+\delta)^2+(n-2)(m+2\delta)]\quad(n>4).$$

帕雷托分布(Pareto distribution) 一种连续型分布. 设 ξ 为连续型随机变量，若其分布密度为

$$p(x)=\begin{cases}rA^r\dfrac{1}{x^{r+1}} & (x\geqslant A),\\ 0 & (x<A),\end{cases}$$

其中 $r>0$，$A>0$，则称连续型随机变量 ξ 服从帕雷托分布. 帕雷托分布具有 p 阶矩的充分必要条件是

$$p<r.$$

狄利克雷分布(Dirichlet distribution) β 分布的直接推广. 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为一个随机向量，如果它满足：

1. 对任意 $1\leqslant i\leqslant n$，$X_i\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=1$；
2. $(X_1,X_2,\cdots,X_{n-1})$ 的分布密度为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(a_i)}\prod\limits_{i=1}^{n-1}x_i^{a_i-1}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{a_n-1}, & \\ \qquad x_i\geqslant 0,\ \sum\limits_{1}^{n-1}x_i<1\quad(i=1,2,\cdots,n-1), & \\ 0 & 其他,\end{cases}$$

其中 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$；则称连续型随机变量 X 服从狄利克雷分布，记成 $(X_1,X_2,\cdots,X_{n-1})\sim D_n(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1};a_n)$ 或 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim D_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 特别地，$n=2$ 时，$D_2(a_1,a_2)$ 就是常见的 β 分布. 狄利克雷分布在多元分布理论中占有重要地位，它起着沟通分布间的桥梁作用. 此外，在近代非参数统计中，狄利克雷分布越来越显示出它的威力.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且同分布，又 $X_1\sim N(0,1)$. 令

$$Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2,$$

$$Y_j=(X_{n_{j-1}+1}^2+\cdots+X_{n_j}^2)/Y\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

其中 $0=n_0<n_1<\cdots<n_{m-1}<n_m=n$，则

$$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)\sim D_m\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2-n_1}{2},\cdots,\frac{n_m-n_{m-1}}{2}\right).$$

逻辑斯谛分布(logistic distribution) 一种连续型分布. 若随机变量 ξ 的分布函数为

$$L(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{1+\exp\{-(x-\alpha)/\beta\}}\quad(x\in R^1),$$

其中 $\beta>0$，$\alpha\in R^1$，则称连续型随机变量 ξ 服从参数为 α(位置参数)和 β(尺度参数)的逻辑斯谛分布，记为. $\xi\sim L(\alpha,\beta)$. 当 $\alpha=0$，$\beta=1$ 时，$L(x;0,1)=(1+e^{-x})^{-1}$，称为标准逻辑斯谛分布. $L(x;\alpha,\beta)$ 的密度函数为

$$l(x;\alpha,\beta)=\frac{\exp\{-(x-\alpha)/\beta\}}{\beta(1+\exp\{-(x-\alpha)/\beta\})^2}.$$

若令

$$\mathrm{sech}x=\frac{2}{e^x+e^{-x}},$$

则

$$l(x;\alpha,\beta)=(4\beta)^{-1}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{x-\alpha}{2\beta}\right\},$$

所以逻辑斯谛分布又称为双曲正割平方分布.

期　望 $E\xi=\alpha$；

方　　差　$D\xi=\beta^2\pi^2/3$；

矩母函数

$$M(t)=e^{at}B(1-t\beta,1+t\beta)\left(|t|<\frac{1}{\beta}\right);$$

特征函数　$\varphi(t)=e^{iat}B(1-it\beta,1+it\beta)$.

逻辑斯谛分布最早来自于生长曲线的需要，后来用于经济和人口统计学中，从 19 世纪末以来已逐渐普及，近代又用于回归和判别分析.

双曲正割平方分布(sech-squared distribution) 即"逻辑斯谛分布".

多维超几何分布(multidimensional hypergeometric distribution)　一种离散型分布. 假设总体中含 N_i $(i=1,2,\cdots,r)$个具有特征 A_i 的元素，

$$\sum_{i=1}^{r}N_i=N.$$

现从总体中做n次不放回取样，以ξ_i $(i=1,2,\cdots,r)$表示在取出的n个元素中具有特征 A_i $(i=1,2,\cdots,r)$ 的元素的个数. 那么 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)$是一个 r 维随机向量. 其概率分布为

$$p\{\xi=m\}=P\{\xi_1=m_1,\xi_2=m_2,\cdots,\xi_r=m_r\}$$
$$=\frac{C_{N_1}^{m_1}C_{N_2}^{m_2}\cdots C_{N_r}^{m_r}}{C_N^n},$$

其中 $n,N_1,N_2,\cdots,N_r$ 均为正整数，且 $n\leqslant\sum\limits_{i=1}^{r}N_i$，而

$$m=(m_1,m_2,\cdots,m_r),0\leqslant m_i\leqslant N_i,$$
$$\sum_{i=1}^{r}m_i=n,N=\sum_{i=1}^{r}N_i.$$

则称随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)$服从参数为$(n,N_1,N_2,\cdots,N_r)$的 r 维超几何分布.

多项分布(multinomial distribution)　一种离散型分布. 假定在 n 次重复独立试验中，每次试验有 r 种可能结果 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，每次试验中，各种可能结果出现的概率为 $p_1,p_2,\cdots,p_r$. 其中

$$p_i>0\ (i=1,2,\cdots,r),\ \sum_{i=1}^{r}p_i=1,$$

记 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)$，$\xi_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$表示 n 次独立试验中 A_i 出现的次数，那么 ξ 是一个 r 维随机向量，其概率分布为

$$P\{\xi=m\}=P\{\xi_1=m_1,\xi_2=m_2,\cdots,\xi_r=m_r\}$$
$$=\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_r!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_r^{m_r},$$

其中

$$m=(m_1,m_2,\cdots,m_r)\ (m_i\geqslant 0),\ \sum_{i=1}^{r}m_i=n.$$

称此随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)$服从参数为$(n,p_1,p_2,\cdots,p_r)$的多项分布. 此称谓是因为这个概率等于多项式

$$(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_rx_r)^n$$

的展开式中 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_r^{m_r}$ 的系数，显然多项分布是二项分布的推广，它产生于推广的伯努利试验中.

复合分布(composite distribution)　一类概率分布. 如果一个随机变量 ξ 服从的分布与一个参数 α 有关，而 α 也是一个随机变量，α 服从一个确定的分布，这时称随机变量 ξ 服从一个复合分布. 例如，复合二项分布、复合泊松分布.

复合二项分布(composite binomial distribution)　一种复合分布. 若对固定的 N，随机变量 ξ 服从二项分布 $P\{\xi=k\}=C_N^kp^k(1-p)^{N-k}$ $(k=0,1,\cdots,N,0<p<1)$. 现假定 N 是一个随机变量，它服从泊松分布

$$p\{n=N\}=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\quad(n=0,1,2\cdots,\lambda>0),$$

那么在二维随机变量(ξ,N)的分布列

$$P\{\xi=k,N=n\}$$
$$=P\{\xi=k|N=n\}\cdot P\{N=n\}$$

中，随机变量 ξ 的边缘分布为

$$P\{\xi=k\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\xi=k|N=n\}\cdot P\{N=n\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

其中，规定 C_n^k 在 $n<k$ 时为零. 这是一个具有参数为 λp 的泊松分布. 称这一边缘分布为复合二项分布.

复合泊松分布(composite Poisson distribution) 一种复合分布. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots$为相互独立同分布的整值随机变量，令 $\eta=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_\alpha$，其中 α 服从参数为 λ 的泊松分布，则称随机变量 η 服从复合泊松分布. 若 $P(\xi_i=j)=f_j$，其母函数为

$$F(s)=\sum_{j=0}^{\infty}f_js^j,$$

则 η 的母函数为 $p(s)=e^{\lambda(F(s)-1)}$. 可以证明，负二项分布是一种复合泊松分布.

二维正态分布(two-dimensional normal distribution)　概率论中最重要的二维分布. 如果二维随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2)$的概率密度为

$$p_\xi(x)=p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,|r|<1$. 则称 $\xi=(\xi_1,\xi_2)$服从参数为$(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$的二维正态分布. 对于二维正态分布，$E\xi_1=\mu_1,D\xi_1=\sigma_1^2,E\xi_2=\mu_2,D\xi_2=\sigma_2^2$，$r$ 为 ξ_1 与

ξ_2 的相关系数. 二维正态分布的两个边缘分布都是正态的. 特别地,对于二维正态分布,独立与不相关等价.

n 维正态分布(n-dimensional normal distribution) 概率论中最重要的分布之一. 如果随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 有概率密度

$$P_\xi(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|C|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{1}{2}(x-\mu)C^{-1}(x-\mu)^T\right\}$$
$$(x\in R^n),$$

其中 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 是 n 维向量,而 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 是正定对称矩阵,则称随机向量 ξ 服从 n 维正态分布,记为 $\xi\sim N(\mu,C)$. 且

期　望　$E\xi=\mu$,

方　差　$D\xi=C$,

特征函数

$$\varphi_\xi(t)=\exp\left\{it^T\mu-\frac{1}{2}t^TCt^T\right\}\ (t\in R^n).$$

n 维正态分布具有性质:

1. 其任意边缘分布也是正态分布. 即对于任意 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 和 $1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n$, $\xi=(\xi_{j_1},\xi_{j_2},\cdots,\xi_{j_m})$ 是 m 维正态随机向量.

2. 假设有随机向量

$\zeta=(\xi,\eta),\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r),\eta=(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_s)$,

其中 $\xi\sim N(a,A)$, $\eta\sim N(b,B)$, 而且 ξ 和 η 相互独立,则随机向量 ζ 服从 $r+s$ 维正态分布 $N(\mu,C)$, 且

$$E\zeta=\mu=(a,b),\ D\zeta=C=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

其中 $a=E\xi=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$, $b=E\eta=(b_1,b_2,\cdots,b_s)$, $A=D\xi$, $B=D\eta$.

3. 正态随机向量经线性变换后,仍然是正态的. 即如果 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 服从正态分布 $N(\mu,C)$, 而 A 是秩为 r 的 $n\times r$ 阶矩阵, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_r)$ 是 r 维向量,则 $\eta=\xi A+b$ 服从正态分布

$$N(\mu A+b,A^TCA).$$

4. 假设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的各分量相互独立、服从正态分布、并且有相同的方差, T 是任意 $n\times n$ 阶正交矩阵,那么 $\eta=\xi T^T=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 的各分量仍然相互独立、服从正态分布、而且有相同的方差.

5. 随机向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 服从 n 维正态分布的充分必要条件是:对于任意 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n(a\neq 0)$, 随机向量 $\eta=\xi a^T=a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n$ 服从一维正态分布.

6. 假设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)$ 服从正态分布 $N(\mu,C)$, 那么随机向量 $\eta=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)$ 和 $\zeta=(\xi_{r+1},\xi_{r+2},\cdots,\xi_n)$ 相互独立,当且仅当互协方差阵

$$\mathrm{Cov}(\eta,\zeta)=0.$$

广义二项分布(generalized binomial distribution) 一种离散型分布. 设随机试验只有两个基本事件 A 和 $\overline{A}$, 将试验独立地重复做 n 次(或可列次),但在第 k 次试验中, A 出现的概率为 p_k, 不出现的概率为 $q_k(0<p_k<1,p_k+q_k=1)$. 这一列试验称为广义伯努利试验,重复的次数称为试验的重数. 当 $p_k=p$ 与 k 无关时,就是伯努利试验. 在广义 n 重伯努利试验中,若对于事件 A, 指定其数值为 1, 对于事件 $\overline{A}$, 指定其数值为 0, 则在 n 次试验的结果中,事件 A 出现的次数是一个随机变量,称这个随机变量服从的分布为广义二项分布. 服从广义二项分布的随机变量 ξ 可表示成和 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$, 其中诸随机变量 $\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是相互独立的,且 ξ_i 服从二点分布

$$P(\xi_i=1)=p_i;\ P(\xi_i=0)=1-p_i.$$

在广义二项分布中,事件 A 出现 k 次概率为多项式

$$\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_it)$$

中 t^k 的系数.

概率纸(probability paper) 按某种分布函数设计的一种特殊的坐标纸. 其横轴与试验值有关,纵轴与累积概率有关. 利用概率纸,可以检验试验数值所服从的分布类型、估计分布的参数和作各种统计推断. 常用的概率纸有正态概率纸、对数正态概率纸、韦布尔概率纸、二项概率纸等.

正态概率纸(normal probability paper) 常用的一种概率纸. 它的横轴按等分刻度,表示观测值(x),纵轴用非等分刻度,表示累积正态概率(频率)

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v.$$

服从正态分布的观测值在正态概率纸上的图形是一条直线,可利用它求分布的均值和方差的近似值.

对数正态概率纸(logarithmic normal probability paper) 常用的一种概率纸. 它的横轴用自然对数刻度,纵轴用累积正态概率刻度. 服从对数正态分布的观测值在对数正态概率纸上的图形是一条直线,可利用它估计对数正态分布的均值和方差.

韦布尔概率纸(Weibull probability paper) 常用的一种概率纸. 它的横轴用自然对数刻度,纵轴用双自然对数刻度. 设韦布尔分布函数为

$$F(x)=1-e^{-\frac{x^m}{a}},$$

变形后两边取两次对数,得

$$\ln\ln\frac{1}{1-F(x)}=m\ln x-\ln a.$$

再设

$$Y=\ln\ln\frac{1}{1-F(x)},\ X=\ln x,\ B=\ln a,$$

则有 $Y=mX-B$. 因此,服从韦布尔分布的观测值在该概率纸上的图形是一条直线.

二项概率纸(binomial probability paper) 常用的一种概率纸.它的横轴与纵轴都采用平方根刻度,在坐标 100 处画有四分之一个圆.纸的左边有两个表,上方有三根特殊刻度的标尺,左边一个标尺上面的刻度是均匀的,称为 σ 尺;下面的刻度不均匀,称为 α 尺.从 α 尺的 O 点到 α 尺的某个刻度 α 的长度记为 k_α,这里 α 表示信度(或显著性水平).

随机变量列的极限定理

依概率收敛(convergence in probability) 随机变量列的一种收敛性.若$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量列.如果对任意 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)=0$$

或

$$\lim_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|<\varepsilon)=1,$$

则称 ξ_n 依概率收敛到随机变量 ξ.简记为

$$\xi_n\xrightarrow{P}\xi.$$

依概率收敛是概率论中的一种较弱的收敛性.依概率收敛的一个重要性质是:若 g 是连续函数,则

$$\xi_n\xrightarrow{P}\xi\Rightarrow g(\xi_n)\xrightarrow{P}g(\xi).$$

以概率 1 收敛(convergence with probability one) 亦称几乎必然收敛.是随机变量列的一种较强的收敛性.$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量列,记

$$E=\{\omega:\omega\in\Omega,\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\}.$$

若 $P(E)=1$,即

$$P(\{\omega:\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\})=1,$$

则称随机变量列 ξ_n 以概率 1 收敛到随机变量 ξ,简记为

$$\xi_n\xrightarrow{\text{a.s.}}\xi.$$

可以证明,$\xi_n\xrightarrow{\text{a.s.}}\xi$ 的充分必要条件是:对任意的 $\varepsilon>0$.

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{\omega:|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\varepsilon\})=0$$

或

$$\lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{\omega:|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\varepsilon\})=0.$$

此外,还有 $\xi_n\xrightarrow{\text{a.s.}}\xi\Rightarrow\xi_n\xrightarrow{P}\xi$.

几乎必然收敛(almost surely convergence) 即"以概率 1 收敛".

依分布收敛(convergence in law) 随机变量列的一种收敛性.设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量列,其相应的分布函数列为$\{F_n(x),n\geqslant 1\}$,如果 $F_n(x)$弱收敛于随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)$即

$$F_n\xrightarrow{W}F,$$

则称随机变量列 ξ_n 依分布收敛到随机变量 ξ,简记为

$$\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi\text{ 或 }\xi_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi.$$

显然,若 c 为常数且 $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$,则

$$\xi_n+c\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi+c,\quad c\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}c\xi\ (c\neq 0).$$

此外,有

$$\xi_n\xrightarrow{P}\xi\Rightarrow\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi,\quad \xi_n\xrightarrow{P}c\Leftrightarrow\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}c.$$

均方收敛(convergence in the mean square) 概率论中常用的一种收敛性.$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是随机变量列,且 $E|\xi_n|^2<+\infty$,如果 $E|\xi|^2<+\infty$,且

$$\lim_{n\to\infty}E|\xi_n-\xi|^2=0.$$

则称 ξ_n 均方收敛到随机变量 ξ.均方收敛在随机分析及随机过程中占有重要地位.

r 阶平均收敛(convergence in the mean of order r) 概率论中一种较强的收敛性.设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是随机变量列,且对某个常数 $r>0$,$E|\xi_n|^r<+\infty$.如果 $E|\xi|^r<+\infty$,且

$$\lim_{n\to\infty}E|\xi_n-\xi|^r=0.$$

则称 ξ_n r 阶平均收敛到随机变量 ξ.简记为

$$\xi_n\xrightarrow{r}\xi.$$

可证,若 $r>s>0$,则

$$\xi_n\xrightarrow{r}\xi\Rightarrow\xi_n\xrightarrow{s}\xi\Rightarrow\xi_n\xrightarrow{P}\xi.$$

当 $r=2$ 时,r 阶平均收敛即为均方收敛.

淡收敛(vague convergence) 概率测度的一种收敛性.若$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$是$(\mathrm{R}^n,\mathscr{B}^n)$上的概率测度序列(其中 R^n 为 n 维实空间,$\mathscr{B}^n$ 为 n 维波莱尔域),若存在$(\mathrm{R}^n,\mathscr{B}^n)$上的测度 μ(满足 $\mu(\mathrm{R}^n)\leqslant 1$),使得对一切 μ 的连续区间$(a,b]$(即满足 $\mu([a,b]\setminus(a,b))=0$),均有 $\mu_n((a,b])\to\mu((a,b])$,其中

$(a,b]=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):a_i<x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$,

$[a,b]=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$

为 R^n 中有限区间,则称概率测度序列$\{\mu_n\}$淡收敛到 μ.记为

$$\mu_n\xrightarrow{v}\mu.$$

由奥地利数学家黑利(Helly,E.)选择定理的推广知,$(R^n,\mathscr{B}^n)$上任一概率测度序列都有淡收敛的子序列.如果$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$的一切淡收敛的子序列均淡收敛到同一极限 μ,则$\{\mu_n\}$淡收敛到 μ.若 μ 本身是概率测度,则称$\{\mu_n\}$弱收敛到 μ.记为

$$\mu_n\xrightarrow{w}\mu\text{ 或 }\mu_n\Rightarrow\mu.$$

淡收敛和弱收敛的概念可以推广到一般的距离可测空间或拓扑可测空间上.

弱收敛(weak convergence) 概率测度序列的一种收敛性.若对距离可测空间$(E,\mathscr{B})$上的概率测

度序列$\{\mu_n\}$，存在一个概率测度μ，使得对一切μ连续集A（即$\mu(\partial A)=0$）均有$\mu_n(A)\to\mu(A)$，则称$\{\mu_n\}$弱收敛到μ，记为

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \text{ 或 } \mu_n \Rightarrow \mu.$$

以下条件是等价的：

1. 对一切$f\in B(E)$（E上有界连续函数类）

$$\lim_{n\to\infty}\int f\mathrm{d}\mu_n = \int f\mathrm{d}\mu.$$

2. 对一切$f\in U(E)$（E上有界一致连续函数类）

$$\lim_{n\to\infty}\int f\mathrm{d}\mu_n = \int f\mathrm{d}\mu.$$

3. 对一切闭集$F\subset E$　$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$.

4. 对一切开集$G\subset E$　$\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$.

5. 对一切$A\in\mathscr{B}$且$\mu(\partial A)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu(A).$$

分布函数的淡收敛（vague convergence of probability distribution function）　有界分布函数序列的一种收敛性. 设$\{F_n\}$，F是R上一致有界分布函数（不一定是概率分布函数）序列，$C(F)$表示F的一切连续点集. 如果对一切$x\in C(F)$，有$F_n(x)\to F(x)(n\to\infty)$，则称$\{F_n\}$淡收敛到$F$，记为

$$F_n \xrightarrow{v} F.$$

若还有$F_n(\pm\infty)\to F(\pm\infty)$，则称$\{F_n\}$弱收敛到$F$. 任意有界分布函数序列，一定有淡收敛的子序列.

概率分布函数的弱收敛（weak convergence of probability distribution function）　分布函数的一种收敛性. 设$\{F_n\}$，F均是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的概率分布函数，若对$F(x)$的一切连续点，均有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

则称$F_n(x)$弱收敛到$F(x)$，记为$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$.

大 数 律

大数律（law of large numbers）　亦称大数法则. 概率论中的一类极限定理. 概率法则总是在对大量随机现象的考察中才能显示出来. 为了研究“大量”的随机现象，常常采用极限的形式. 用来阐明大量随机现象平均结果稳定性的一系列极限律统称为大数律或大数法则. 按照收敛性的含义不同，大数律有弱大数律和强大数律之分：设$\xi_1,\xi_2,\cdots$为随机变量列，令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k,$$

A_n,B_n为常数列，且

$$\lim_{n\to\infty}B_n = +\infty.$$

1. 若$(S_n-A_n)/B_n\xrightarrow{P}0$，则称$\{\xi_n,n\geqslant1\}$服从弱大数律（常简称大数律）.

2. 若$(S_n-A_n)/B_n\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，则称$\{\xi_n,n\geqslant1\}$服从强大数律. 显然，若随机变量列$\{\xi_n,n\geqslant1\}$服从强大数律，则必服从弱大数律.

如果每一ξ_n的期望和方差均存在，且$D(S_n)=o(n^2)$，则

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

因而，$\{\xi_n,n\geqslant1\}$既服从弱大数律也服从强大数律. 当$\{\xi_n,n\geqslant1\}$两两不相关，且

$$\sup_n D(\xi_n) < +\infty$$

时，此条件满足. 对于$\{\xi_n,n\geqslant1\}$为独立同分布随机变量序列且$B_n=n$的情形，南斯拉夫-美国数学家费勒（Feller，W. F.）证明，它满足弱大数律的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} nP(|\xi_1| > n) = 0.$$

在此条件成立时，取$a_n=E(\xi_1 I_{|\xi_1|\leqslant n})$，则有

$$\frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{P} 0.$$

大数法则表明，尽管单个随机现象的具体实现有其偶然性，但在大量互不相关的随机现象共同作用时，由于各自的偶然性在一定程度上能相互抵消、补偿和拉平，致使总的平均结果趋于稳定. 由于大数律以严格的数学形式表达了随机现象这一最根本的性质——平均结果的稳定性（它是随机现象统计规律性的具体表现），因此，大数律在理论和实际中（例如在数理统计和近似计算中）都有广泛的应用.

大数法则（law of large numbers）　即“大数律”.

强大数律（strong law of large numbers）　见“大数律”.

弱大数律（weak law of large numbers）　见“大数律”.

切比雪夫大数律（Chebyshev law of large numbers）　一种弱大数律. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots$为两两不相关的随机变量序列，它们的方差有限，且有公共的上界，即存在常数c，对于一切$n\geqslant1$，有$D\xi_n\leqslant c$，则$\{\xi_n\}$服从大数律. 即对任意$\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

这个定律是1866年俄国数学家、力学家切比雪夫（Чебышев，П. Л.）证明的，故称为切比雪夫大数律. 它是关于大数律的一个相当普遍的结论，许多大数律的古典结果是它的特例.

马尔可夫大数律（Markov law of large numbers）　一种弱大数律. 设随机变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$满

足条件：对于任意 $n\geqslant 1$，均有

$$E|\xi_n|<+\infty,\ D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)<+\infty,\ \cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=0,$$

那么$\{\xi_n\}$服从大数律. 即对任意的 $\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

马尔可夫大数律不仅能用于独立的随机变量序列，而且对于相依的随机变量序列在一定条件下也能适用，而切比雪夫大数律可以看做马尔可夫大数律的特例.

伯努利大数律（Bernoulli law of large numbers） 关于伯努利试验的弱大数律. 设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，而 $p(0<p<1)$ 是每次试验中事件 A 出现的概率，则对任意 $\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

它的含义是指，在 n 重伯努利试验中，事件 A 出现的频率，依概率收敛于事件 A 在一次试验中出现的概率. 这个定理用数学概念说明了 n 充分大时，频率具有稳定性，稳定于相应的概率. 伯努利大数律是切比雪夫大数律最简单的特例. 历史上，瑞士数学家雅各布第一 · 伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)首先证明了这个定理，发表于 1713 年，是大数律中的第一个定理.

泊松大数律（Poisson law of large numbers） 一种弱大数律. 设 μ_n 为 n 次独立试验中某事件 A 出现的次数，$p_i(0<p_i<1, i=1,2,\cdots,n)$ 为事件 A 在第 i 次试验中出现的概率，则对任意 $\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

泊松大数律是伯努利大数律的推广，它表明了当独立进行随机试验的条件变化时，频率仍然具有稳定性. 即随着 n 的无限增大，在 n 次独立试验中，事件 A 的频率稳定于事件出现的概率的算术平均值.

辛钦大数律（Khintchine law of large numbers） 独立同分布场合的弱大数律. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 为相互独立同分布的随机变量序列，且有有限的数学期望 $\mu=E\xi_n(n=1,2,\cdots)$，则$\{\xi_n\}$服从大数律. 即对任意 $\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

伯努利大数律是辛钦大数律的特殊情形. 辛钦大数律在应用中很重要. 若将辛钦大数律换为强大数律也是成立的，即

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\mu\right\}=1.$$

这一结果是由俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)得到的.

伯恩斯坦大数律（Bernstein law of large numbers） 一种弱大数律. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为随机变量序列，若其方差有界：$D\xi_n\leqslant C$，并且当$(i-j)\to\infty$时，一致地有相关系数 $r_{ij}\to 0$，则$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$服从大数律. 即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0.$$

这一定律最早是伯恩斯坦(Бернштейн, С. Н.)得到的.

格涅坚科大数律（Gnegenko law of large numbers） 一种弱大数律. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为随机变量列，若记

$$\eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n),$$

$$a_n=\frac{1}{n}(E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_n),$$

则$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$服从大数律的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}E\left\{\frac{(\eta_n-a_n)^2}{1+(\eta_n-a_n)^2}\right\}=0.$$

这一定理是由俄国数学家格涅坚科(Гнеденко, Б. В.)于 1952 年最早得到的. 定理虽是充分必要条件，但由于条件不是加在单个随机变量而是加在它们的和上，自然就限制了它的使用.

波莱尔强大数律（Borel strong law of large numbers） 关于伯努利试验的强大数律. 设 μ_n 是事件 A 在 n 次独立试验中出现的次数，在每次试验中事件 A 出现的概率均为 p，则有

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}=p\right)=1.$$

波莱尔强大数律表明，当试验次数无限增加时，频率将趋于概率. 显然，它是伯努利弱大数律的加强.

柯尔莫哥洛夫强大数律（Kolmogorov strong law of large numbers） 最重要最常用的强大数律. 它有两种情形：

1. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 相互独立，而且有有穷方差 $D\xi_k<+\infty\ (k=1,2,\cdots)$. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{n^2}<+\infty$$

则随机变量列 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 服从强大数律，即

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)=0\right)=1.$$

2. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 相互独立同分布，如果数学期望 $E\xi_k=\mu(k=1,2,\cdots)$ 有穷，则$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$服从强大数律，即

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\mu\right)=1.$$

这两个定理是由俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)最早得到的.

波莱尔-康特立引理(Borel-Cantelli lemma) 概率论中具有广泛应用的一个引理. 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$\{A_n,n\geqslant 1\}$是其上的随机事件列,用$\overline{A}_n$表示A_n的对立事件. 则:

1. 若$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<+\infty$,则$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=0$或
$$P(\underline{\lim_{n\to\infty}}\overline{A_n})=1.$$

2. 若$\{A_n\}$是相互独立的随机事件列,则
$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$$
成立的充分必要条件为
$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=1\text{ 或 }P(\underline{\lim_{n\to\infty}}\overline{A_n})=0$$
(其中$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=P(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)$).

可交换随机变量(exchangeable random variables) 亦称对称随机变量. 具有某种对称性的随机变量列. 如果对于$1,2,\cdots,n$的任一置换$i_1,i_2,\cdots,i_n$,$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$与$(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_n})$具有同样的分布. 则称随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是可交换的或对称的. 如果对一切$n\geqslant 1$,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是可交换的,则称随机变量序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是可交换的(或对称的). 独立同分布随机变量序列是可交换随机变量序列的特例. 如果对于自变量的一切有限置换,有
$$g(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)=g(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_n},\xi_{i_{n+1}},\cdots),$$
则关于$\xi_1,\xi_2,\cdots$的可测函数g称为可交换的或对称的. 如果一个$\sigma(\xi_n,n\geqslant 1)$可测事件的指示函数是可交换的,则称该$\sigma(\xi_n,n\geqslant 1)$可测事件是可交换的(或对称的). 这里$\sigma(\xi_n,n\geqslant 1)$表示包含集类$\{\{\omega|\xi_n(\omega)\in B_n\},\beta_n$为一维波莱尔集$,n\geqslant 1\}$的最小$\sigma$代数.

对称随机变量(symmetric random variables) 即"可交换随机变量".

尾σ域(tail σ-algebra) 亦称尾σ代数. 概率论的基本概念. 是由随机变量列的尾部生成的一种σ域. 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上随机变量序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的尾σ域是指
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(\xi_j,j\geqslant n),$$
这里$\sigma(\xi_j,j\geqslant n)$表示包含集类$\{\{\omega|\xi_j(\omega)\in B_j\},B_j$为一维Borel集$,j\geqslant n\}$的最小$\sigma$代数. 尾$\sigma$域中的元称为尾事件. 关于尾$\sigma$域可测的函数称为尾函数. 随机变量序列$\{\xi_n;n\geqslant 1\}$的和
$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$$
的收敛域
$$\{\omega|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(\omega)\text{ 收敛}\}$$
是$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的尾事件的典型例子. 独立随机变量序列的尾事件的概率只可能是零和1,其尾函数几乎为一常数. 这是著名的柯尔莫哥洛夫0-1律.

尾σ代数(tail σ-algebra) 即"尾σ域".

尾事件(tail event) 见"尾σ域".

尾函数(tail function) 见"尾σ域".

0-1律(0-1 law) 独立随机变量序列的重要性质定律. 有关概率必定是0或1的定律. 常见的有以下两种:

1. 柯尔莫哥洛夫0-1律:设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立随机变量列,则它的任一尾事件的概率或者是0或者为1,并且它的任一尾函数几乎必然是常数.

2. 赫维特-萨维奇0-1律:设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立随机变量列,则$\sigma(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n\cdots)$中的每个可交换的事件的概率为0或1.

由于在实际问题及理论问题中,概率接近于1(或0)的事件具有重要意义,所以研究0-1律就非常重要.

柯尔莫哥洛夫0-1律(Kolmogorov 0-1 law) 见"0-1律".

赫维特-萨维奇0-1律(Hewitt-Savage 0-1 law) 见"0-1律".

三级数定理(three-series theorem) 关于独立随机变量和的收敛定理. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立随机变量列,则
$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$$
几乎必然收敛的充分必要条件是:对于某一固定的常数$c>0$,下列三个级数收敛:
$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_k|>c);\quad\sum_{n=1}^{\infty}E\xi_n^c;\quad\sum_{n=1}^{\infty}D\xi_n^c.$$
其中
$$\xi_n^c=\begin{cases}\xi_n & (|\xi_n|\leqslant c),\\ 0 & (|\xi_n|>c)\end{cases}$$
为ξ_n在c处的截尾.

重对数律(law of iterated logarithmic) 概率论中极为深刻的极限定理. 它们是强大数律的精确化. 柯尔莫哥洛夫重对数律:设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立随机变量列,
$$E\xi_n=0,\ E\xi_n^2=\sigma_n^2,\ B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\to+\infty,$$
且存在正的常数列$\{M_n\}$,使
$$M_n=o\left(\frac{B_n}{(\log\log B_n^2)^{\frac{1}{2}}}\right),\ |\xi_n|\leqslant M_n,\text{a.s.}$$
若记

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

则

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2B_n^2 \log\log B_n^2)^{\frac{1}{2}}} = 1\right\} = 1.$$

哈特曼-温特纳重对数律：如果随机变量列$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$独立同分布，$E\xi_n=0$，$E\xi_n^2=\sigma^2<+\infty$. 则

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{[2n\sigma^2 \log\log(n\sigma^2)]^{\frac{1}{2}}} = 1\right\} = 1$$

且

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{[2n\,\sigma^2 \log\log(n\sigma^2)]^{\frac{1}{2}}} = -1\right\} = 1.$$

中心极限定理(central limit theorem)　概率论中最重要最具特色的定理之一. 设$\xi_1, \xi_2, \cdots$为随机变量列，其期望$E\xi_k=\mu_k$，方差$D\xi_k=\sigma_k^2$皆存在($k=1,2,\cdots$). 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - E\xi_k),$$

如果随机变量列的标准化(或规范化)部分和序列

$$\zeta_n = \frac{S_n}{\sqrt{DS_n}}.$$

依分布收敛到标准正态分布，即

$$\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$(-\infty<x<+\infty),$$

则称随机变量列$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$服从中心极限定理. 中心极限定理的名称是由美籍匈牙利学者波利亚(Polya, G.)于1920年提出的. 在概率论中，中心极限定理所回答的问题是，随机变量之和的极限分布在什么条件下是正态的. 由于中心极限定理揭示了产生正态分布的源泉，而正态分布又具有良好的性质，这就给应用正态分布来解决各种实际问题提供了理论基础. 中心极限定理的进一步发展是所谓中心极限问题，它研究独立随机变量之和在满足一定条件时其分布的极限问题，这时，作为极限的分布不一定是正态分布，而是一般的无穷可分分布.

棣莫弗-拉普拉斯局部极限定理(De Moivre-Laplace local limit theorem)　关于伯努利试验的极限定理. 定理表述如下：若μ_n是n次伯努利试验中事件A出现的次数，在每次试验中A出现的概率为$p(0<p<1)$，则对任意有限区间$[a,b]$，当

$$a\leqslant x_k \equiv \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leqslant b$$

时，一致地有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\{\mu_n=k\}}{\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_k^2}} = 1.$$

由定理可见，

$$P(\mu_n=k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

因为定理只涉及正态分布的密度函数，故称为局部极限定理. 这一定理是棣莫弗-拉普拉斯1730年得到的. 由于正态分布的密度函数有表可查，这就给二项分布的概率计算带来了方便.

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理(De Moivre-Laplace central limit theorem)　关于伯努利试验的中心极限定理. 若μ_n是n次伯努利试验中事件A出现的次数，在每次试验中A出现的概率为$p(0<p<1)$，则对任意的区间$[a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \leqslant \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

这一定理也称为棣莫弗-拉普拉斯积分极限定理，它是中心极限定理最早的研究成果. 该定理表明：正态分布是二项分布的极限分布，当n充分大时，可以用作二项分布的近似计算，如

$$P(k_1 \leqslant \mu_n \leqslant k_2) = P\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

棣莫弗-拉普拉斯积分极限定理(De Moivre-Laplace integral limit theorem)　即"棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理".

独立同分布随机变量中心极限定理(central limit theorem for independent identically)　亦称莱维-林德伯格中心极限定理. 一种重要的中心极限定理. 设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$相互独立同分布，具有有限的期望$E\xi_k=\mu$及方差$D\xi_k=\sigma^2$，则$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$服从中心极限定理，即对任意的$x$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\mu) \leqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

这一定理有广泛的应用. 在实际工作中，只要n足够大，便可以把n个独立同分布的随机变量之和当做是正态变量. 这种作法在数理统计中用得很普遍，当处理大样本时这一定理是重要工具.

莱维-林德伯格中心极限定理(Lévy-Lindeberg central limit theorem)　即"独立同分布随机变量中心极限定理".

林德伯格条件(Lindeberg condition)　中心极限定理成立的重要条件. 设$\xi_1, \xi_2, \cdots$是相互独立的随机变量列，其分布函数为$F_k(x)(k=1,2,\cdots)$，期望$E\xi_k=\mu_k$，方差$D\xi_k=\sigma_k^2$有限，令

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2,$$

作和数

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu_k}{B_n},$$

则极限等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\mu_k|>\tau B_n} (x-\mu_k)^2 \mathrm{d}F_k(x) = 0 \ (\forall \tau > 0),$$

称为林德伯格条件. 林德伯格条件的直观意义是，和

$$\zeta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\xi_k - \mu_k}{B_n}$$

中各个加项"均匀地小"，即它们对总和所起的作用是微不足道的. 林德伯格条件是随机变量列服从中心极限定理的充分条件.

林德伯格-费勒中心极限定理(Lindeberg-Feller central limit theorem)　一种重要的中心极限定理. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 为相互独立的随机变量，$E\xi_k = \mu_k$ 有限，$D\xi_k = \sigma_k^2 < +\infty$，令

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu_k}{B_n}$$

则 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 服从中心极限定理

$$\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

及费勒条件

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k\leqslant n} \frac{\sigma_k}{B_n} = 0 \qquad (*)$$

成立的充分必要条件是林德伯格条件成立. 即对任意的 $\tau > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\mu_k|>\tau B_n} (x-\mu_k)^2 \mathrm{d}F_k(x) = 0.$$

林德伯格(Lindeberg, Y. W.)于 1922 年提出了充分条件. 1935 年，南斯拉夫-美国数学家费勒(Feller, W. F.)指出，如果加上条件(*)(费勒条件)，这一条件也是必要的，从而得到了上述定理. 由于定理是充分必要条件，使得在什么条件下独立随机变量的和趋于正态分布的问题得到了满意的解决.

泊松中心极限定理(Poisson central limit theorem)　关于广义伯努利试验的中心极限定理. 假设 $\mu_n (n \geqslant 1)$ 是 n 次独立试验中成功的次数，已知第 $j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 次试验成功的概率为 $p_j (0 < p_j < 1)$. 则

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu_n - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}{B_n} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u.$$

关于 $x \in (-\infty, +\infty)$ 一致成立的充分必要条件为

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j (1 - p_j) = \infty,$$

其中

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} p_j (1 - p_j).$$

李亚普诺夫中心极限定理(Liapunov central limit theorem)　关于独立随机变量的中心极限定理. 假设 $\xi_n, \xi_2, \cdots$ 是独立随机变量序列. 若对于某个 $\delta > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} E|\xi_j - \mu_j|^{2+\delta} = 0,$$

其中

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} D\xi_j, \ \mu_j = E\xi_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

则 $\{\xi_n\}$ 服从中心极限定理. 此定理的条件虽比林德伯格中心极限定理的条件强，但易于验证.

稳定分布(stable distribution)　一类无穷可分分布. 如果对任意的 $a_1 > 0, a_2 > 0$，存在 $a > 0$ 及 b，使得

$$\varphi(a_1 t)\varphi(a_2 t) = e^{ibt}\varphi(at).$$

即对任给的 $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1, b_2$，存在 $a > 0$ 及 b，使得若 F 为随机变量 ξ 的分布，有

$$F_{a_1\xi+b_1} * F_{a_2\xi+b_2} = F_{a\xi+b}.$$

则称分布函数 F 或其对应的特征函数 φ 是稳定的. 设 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 为独立同分布随机变量列，令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \quad (a_n \to +\infty),$$

则 $\{S_n/a_n - b_n, n \geqslant 1\}$ 的一切极限分布与稳定分布类重合. 稳定分布的特点是，与 F 同一类型的两个分布的卷积仍与 F 属同一类型. 稳定分布的特征函数具有形式

$$\varphi(t) = \varphi_\alpha(t; \gamma, \beta, c) = \exp\left\{i\gamma t - c|t|^\alpha \left[1 + i\beta \frac{t}{|t|} w(t, \alpha)\right]\right\},$$

其中 $0 < \alpha \leqslant 2$, $|\beta| \leqslant 1$, $c \geqslant 0$，且

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \dfrac{\pi\alpha}{2} & (\alpha \neq 1), \\ \dfrac{2}{\pi} \log|t| & (\alpha = 1). \end{cases}$$

称参数 α 为特征指数. $c = 0$ 时，对应于退化分布；$\alpha = 2, \beta = 0$ 时，对应于正态分布；$\alpha = 1, \beta = 0, c > 0$ 时，对应于柯西分布.

撰　稿　王明生　刘秀芳　刘卓雄　李俊平　张鸿秀
陈家骥　高惠璇　黄荣怀
审　阅　王梓坤　潘一民

随 机 过 程

随机过程(stochastic process)　一种数学结构.实际中的随机过程是指由于随机因素影响而受概率规律支配的过程.而数学上的随机过程则是由实际随机过程概念构成的一种数学结构.具体地,当客观世界中某些被研究的系统(或更一般地说,对象)的状态不仅具有偶然性,而且还随时间(或位置)的变化而改变,例如,某海区不同地点的浪高,某人一天中体温的变化等.这就是说,要考虑一些随机现象的发展和变化过程,其中要涉及无穷多个有一定内部联系的随机变量,人们就把这样的一族随机变量称为随机过程.在数学上,利用测度论可定义随机过程如下:设给定参数集合 T 和可测空间 $(E,\mathscr{B})$.若对每一 $t\in T$,有一个定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 E 值 $\mathscr{B}$ 可测函数(即随机变量)$X(t,\omega)$ $(\omega\in\Omega)$,与之对应,则称依赖于参数 t 的可测函数集合 $\{X(t,\omega),t\in T\}$ 为定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 $(E,\mathscr{B})$ 中的随机过程(也可称为随机函数).当空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 和 $(E,\mathscr{B})$ 已明确固定时,简称随机过程并记为 $\{X(t),t\in T\}$.空间 $(E,\mathscr{B})$ 称为状态空间或相空间,E 中的元素称为状态.最常见的情形是状态可用一个数来描述,这时状态空间 E 是一数(实数或复数)集,对应的随机过程称为数值的.

一般地,参数集 T 不一定限于数集,它可以是向量集、集族或更一般的抽象元素集.但是在大多数情形中,参数集 T 是一个有限或无穷区间,或者是一整数集合,这时人们常常赋予参数 t 以时间的含义,而且把前一种情形称为连续参数随机过程,后一种情形称为离散参数随机过程或随机序列.

由以上定义看出,对每一固定的 $t\in T$,$X(t,\cdot)$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个随机变量,对每一固定的 $\omega\in\Omega$,$X(\cdot,\omega)$ 是定义在参数集 T 上的函数——过程的样本函数.除了可以把随机过程看做是一族随机变量 $\{X(t,\cdot),t\in T\}$ 外,还可以把它看做是乘积空间 E^T(或者说样本函数空间)上由映射 ψ:$\omega\mapsto X(\cdot,\omega)\in E^T$ 诱导出 E^T 上的概率测度 $P\psi^{-1}$,或者把它看做是乘积空间 $T\times\Omega$ 上满足某种可测性的 E 值(二元)函数.第一种看法便于把随机过程和随机变量、随机向量联系起来并看做是它们的自然推广.第二种看法有明显的理论长处.而第三种看法则便于对随机过程的可测性(如二元可测、循序可测、可选和可料等)作细致分类.一个随机过程的概率分布律可由规定它的随机变量的有限维联合分布给出.根据其中的随机变量之间联系的统计特性或其他特征,可以对随机过程进行分类.平稳过程、马尔可夫过程、独立增量过程、鞅、分支过程和随机点过程就是当今研究得较多且用途较广的几大类.

随机函数(stochastic function,random function)　见“随机过程”.

随机序列(stochastic sequence,random sequence)　一种随机过程.指具有可数参数集 T(一般取为非负整数或整数集合)的随机过程(参见“随机过程”).

通　　论

确定性过程(deterministic process)　一类特殊的随机过程.是不受随机因素影响的过程.它既可理解为随机过程的反义词,也可理解为一类很特殊的随机过程,这类过程的样本函数以概率为一,是确定性函数.由这种过程的过去能完全确定它的未来,即预报的误差为零.

上升σ域族(increasing family of σ-field or filtration)　亦称 σ 域流或上升 σ 代数族.一族 σ 域.是按包含关系单调上升的 σ 域族.设 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上一族 σ 域,如果对任意满足 $t_1<t_2$ 的 $t_1,t_2\in\mathscr{R}_+=[0,\infty)$ 有 $\mathscr{F}_{t_1}\subset\mathscr{F}_{t_2}\subset\mathscr{F}$,则称 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的上升 σ 域族.离散情形的上升 σ 域族 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 也可类似地定义.对任意 $t\in\mathscr{R}_+$,令

$$\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s\mathscr{F}_{t-}=\bigvee_{s<t}\mathscr{F}_s=\sigma(\bigcup_{s<t}\mathscr{F}_s).$$

有时还补充两个 σ 域 $\mathscr{F}_{0-}$ 和

$$\mathscr{F}_{\infty-}=\mathscr{F}_\infty=\bigvee_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t=\sigma(\bigcup_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t),$$

其中 $\mathscr{F}_{0-}$ 是任意被 $\mathscr{F}_0$ 包含的 σ 域(通常令 $\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$).

如果对任意 $t\in\mathscr{R}_+$,有 $\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$,则上升 σ 域族 $\{\mathscr{F}_t\}$ 称为右连续的.对任意上升 σ 域族 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$,人们总能将它右连续化:令 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{t+}$,$t\in\mathscr{R}_+$,则 $\{\mathscr{G}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 是右连续的(还可以定义 $\mathscr{G}_0=\mathscr{F}_0$ 和 $\mathscr{G}_\infty=\mathscr{F}_\infty$).

σ域流(flow of σ-field)　即“上升 σ 域族”.

自然σ域族(natural family of σ-field or natural filtration)　由随机过程自身定义的上升 σ 域族.若上升 σ 域族 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 是由某个随机过程 $X=\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 产生,即 $\mathscr{F}_t=\sigma(X(s);s\leqslant t)$ 对每个 $t\in\mathscr{R}_+$,就称它为过程 X 的自然 σ 域族.通常记为

$\{\mathscr{F}_t^X\}_{t\in\mathscr{R}_+}$. 这时 $\mathscr{F}_t^X$ 可以直观地理解为过程 X 在时刻 t 以前(含时刻 t)的全部信息.

适应过程(adapted process)　一类随机过程. 指具有某种关于给定的上升 σ 域族的可测性的随机过程. 设 $X=\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 为定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的随机过程, $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的上升 σ 域族, 如果对每个 $t\in\mathscr{R}_+$, $X(t)$是 $\mathscr{F}_t$ 可测函数, 则过程 X 称为$\{\mathscr{F}_t\}$适应的. 显然, 每一个随机过程 X 对自身的自然 σ 域族$\{\mathscr{F}_t^X\}_{t\in\mathscr{R}_+}$总是适应的, 而且$\{\mathscr{F}_t^X\}_{t\in\mathscr{R}_+}$是使得过程适应的最小上升 σ 域族.

初始分布(initial distribution)　一种概率分布. 指给定一个随机过程$\{X(t),t\geqslant t_0\}$, 在初始时刻 $t=t_0$ 所处状态$X(t_0)$的概率分布.

随机过程有限维分布族(family of finite-dimentional distributions of a stochastic process)　由随机过程在任意有限多个时刻的取值确定的有限维分布函数族. 设$\{X(t),t\in T\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机过程. 对任意正整数 n 及任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$, 随机变量$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$的联合分布函数就是 $F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n)$. 当 n 在正整数集中变动, $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 在 T 中变动时, 所得到的分布函数族 $F=\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid n=1,2,\cdots;t_1,t_2,\cdots,t_n\in T\}$称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的有限维分布函数族或有穷维分布族. 有限维分布族具有如下两个特征性质:

1. 对$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$及任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}}(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n}).$$

2. 若 $m<n$, 则

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\lim_{\substack{x_j\to\infty\\ m<j\leqslant n}}F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

这两个性质通常称为相容性条件或一致性条件.

柯尔莫哥洛夫相容性定理(Kolmogorov consistency theorem)　随机过程理论的重要定理. 该定理断言: 定义在概率空间上的随机过程的有限维分布族必然满足相容性条件. 反之, 如果一分布函数族 $F=\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (n=1,2,\cdots);\ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T\}$满足相容性条件, 则必存在一概率空间及其上的随机过程$\{X_t,t\in T\}$, 使得它的有穷维分布族正是 F.

随机过程等价(equivalence of stochastic processes)　随机过程理论的基本概念之一. 设$\{X(t),t\in T\}$与$\{Y(t),t\in T\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的两个随机过程, 如果对任意 $t\in T$, 均有 $P(X(t)=Y(t))=1$, 则称这两个过程随机等价或简称等价.

在随机过程的研究中, 人们常常希望被讨论的随机过程$\{X(t),t\in T\}$具有某种性质(例如, 轨道连续性或可分性). 如果该过程本身不具有这种性质, 但能找到一个具有这些性质而且与$\{X(t),t\in T\}$等价的过程$\{Y(t),t\in T\}$, 则称这过程为原过程$\{X(t),t\in T\}$的具有某种性质的修正.

随机过程修正(modification of a stochastic process)　见"随机过程等价".

无区别随机过程(indistinguishable stochastic process)　随机过程理论的基本概念之一. 设$\{X(t),t\in T\}$与$\{Y(t),t\in T\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的两个随机过程, 如果存在一零概率集 N, 使得对 $\omega\in\Omega\backslash N$ 有 $X(t,\omega)=Y(t,\omega)$对所有 $t\in T$ 成立, 则称这两个随机过程随机无区别, 简称无区别. 无区别的两个随机过程一定等价. 但等价的两个随机过程不一定是无区别的两个过程.

随机过程的可分性(separability of a stochastic process)　随机过程理论的基本概念之一. 设$\{X(t),t\in T\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程, 当 T 是非可数集时, 对任一闭集 A, 集合$\{\omega:X(t,\omega)\in A,\ \forall t\in T\}$未必是可测集; 函数

$$\sup_{t\in T}X(t)\ \text{和}\ \overline{\lim_{t\to t_0}}\ X_t$$

未必是可测函数. 这对研究随机过程的某些分析性质带来困难. 为解决这些问题, 一个合理而又不过分的限制是假定过程具有可分性. 如果存在 T 的可数稠子集 S, 使得对任意开区间 I, 恒有

$$\inf_{s\in S\cap I}X(s)=\inf_{t\in T\cap I}X(t)$$
$$\text{及}\ \sup_{s\in S\cap I}X(s)=\sup_{t\in T\cap I}X(t).$$

则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$为可分的. 随机过程的可分性等价于: 存在 T 的可数稠子集 S, 使得对任意开区间 I 及任意闭区间 C, 有$\{\omega:X(t,\omega)\in C$, 对所有 $t\in T\cap I\}=\{\omega:X(s,\omega)\in C$, 对所有 $s\in S\cap I\}$. 一个更高的要求是对闭集类可分, 即如果存在 T 的可数稠子集 S, 使得对任意开区间 I 及任意闭集 A, 有$\{\omega:X(t,\omega)\in A$, 对所有 $t\in T\cap I\}=\{\omega:X(s,\omega)\in A$, 对所有 $s\in S\cap I\}$, 则称该过程对闭集类可分. 对闭集类可分必然可分. 由下面定理可知可分性并不是一个苛刻的限制. 可分修正定理: 任一随机过程$\{X(t),t\in T\}$必存在它的一个对闭集类可分的修正$\{X(t),t\in T\}$. 该定理表明, 总可找到一个对闭集类可分的过程, 使得其有穷维分布族与原过程一样, 因此, 当所研究的问题只涉及有穷维分布时, 不妨认为原过程对闭集类可分.

可分修正定理(separable modification theorem)　见"随机过程的可分性".

随机过程的可测性(measurability of a stochas-

tic process） 随机过程理论的基本概念之一. 设$\{X(t),t\in T\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程，参数集T是$(-\infty,\infty)$的波莱尔集. 以$\mathscr{B}_1$表示T中全体波莱尔子集所构成的σ域，把$X(t,\omega)$视为$T\times\Omega$上的函数，如果它是可测空间$(T\times\Omega,\mathscr{B}_1\times\mathscr{F})$上的可测函数，就称过程$\{X(t),t\in T\}$为波莱尔可测. 又以$\lambda$表示$T$上的勒贝格测度$\overline{\mathscr{B}_1\times\mathscr{F}}$表示$\mathscr{B}_1\times\mathscr{F}$关于测度$\lambda\times P$的完备化$\sigma$域，如果$X(t,\omega)$是可测空间$(T\times\Omega,\overline{\mathscr{B}_1\times\mathscr{F}})$上的可测函数，就称过程$\{X(t),t\in T\}$为勒贝格可测. 通常在教科书或文献中出现的"可测过程"这一术语可能是波莱尔可测过程的简称，也可能是勒贝格可测过程的简称. 任意一个随机过程未必是可测过程，但是一个随机连续的过程必存在一个它的修正，该修正取值于$(-\infty,+\infty)$，对闭集类可分，而且勒贝格可测.

波莱尔可测过程(Borel measurable process) 见"随机过程的可测性".

勒贝格可测过程(Lebesgue measurable process) 见"随机过程的可测性".

循序(可测)过程(progressive (measurable) process) 一种随机过程. 指具有某种特殊的二元可测性的随机过程，如果对每一$t\in\mathscr{R}_+$，二元函数$(s,\omega)\to X(s,\omega)$在$[0,t]\times\Omega$上的限制是关于$\mathscr{B}_{[0,t]}\times\mathscr{F}_t$可测的，则随机过程$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$称为$\{\mathscr{F}_t\}$循序(可测)过程，其中$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$是上升$\sigma$域族. 其中$\mathscr{B}_{[0,t]}=[0,t]\cap\mathscr{B}$是$\mathscr{R}_+$的波莱尔$\sigma$域$\mathscr{B}$在$[0,t]$上的限制. $\{\mathscr{F}_t\}$循序过程必是$\{\mathscr{F}_t\}$适应和波莱尔可测的. 若过程$\{X(t)\}$关于其自然σ域族循序可测，则对任何使$\{X(t)\}$为适应的上升σ域族$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$，$\{X(t)\}$也是$\{\mathscr{F}_t\}$循序(可测)过程.

如果随机过程$\{1_H(t,\omega),t\in\mathscr{R}_+\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测的，则$\mathscr{R}_+\times\Omega$的子集$H$称为$\{\mathscr{F}_t\}$循序集. 全体循序集构成一$\sigma$域$\mathscr{G}$. 过程$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$循序可测，当且仅当把它看成$\mathscr{R}_+\times\Omega$上的函数时是$\mathscr{G}$可测的.

样本函数(sample function) 一个基本概念. 是随机过程的一个可能的观测结果. 定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程$\{X(t),t\in T\}$是(t,ω)的函数. 当$\omega\in\Omega$固定，t在T中变动时，$X(\cdot,\omega)$就是T上的函数，它表示该过程的一个可能的观察结果. 这时称$X(\cdot,\omega)$为该过程(对应于ω)的一个样本函数，有时也称为轨道或实现.

右连左极过程(corlol process or cadlag process) 样本函数具有某些性质的随机过程. 设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是随机过程. 如果对所有$\omega\in\Omega$，样本函数$X(\cdot,\omega)$在$\mathscr{R}_+$的每一点处右连续且有有穷的左极限. 人们把它称为右连左极过程，"corlol"是英语 continuous on the right and have limits on the left 的缩写，而 cadlag 则是相应的法语缩写.

类似地，可以定义左连右极过程、右连续过程、左连续过程和连续过程.

左连右极过程(collor process) 见"右连左极过程".

右连续过程(right-continuous process) 见"右连左极过程".

左连续过程(left-continuous process) 见"右连左极过程".

连续过程(continuous process) 见"右连左极过程".

随机连续性(stochastic continuity, continuity in probability) 随机过程的一种分析性质. 如果当$t\to t_0(t\in T)$时，$X(t)$依概率收敛于$X(t_0)$，则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$在$t_0\in T$处是随机连续的. 如果随机过程在每个$t_0\in T$处，都是随机连续的，则称该过程是随机连续的. 也有人将随机连续性称为依概率连续性.

依概率连续性(continuity in probability) 即"随机连续性".

特征泛函(characteristic functional) 研究随机过程分布律的重要分析工具. 如同随机变量的统计特性可用它的特征函数表征那样，作为特征函数的推广形式一特征泛函能提供随机过程分布律的一个完全的统计刻画. 因此，特征泛函是研究随机过程(特别是随机点过程)的一种有用的工具. 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一随机过程，则将

$$\varphi_X(iv)\equiv E[\exp]\left(i\int_0^{+\infty}v(t)X(\mathrm{d}t)\right)$$

称为该过程的特征泛函(如果上式的积分有定义的话). 这里$v(t)$是$[0,+\infty)$上任意具有有界支承(即存在正实数T，使得当$t>T$时，$v(t)=0$)的函数，$i=\sqrt{-1}$. 当$X(t)=N(t)$是计数过程时，上面定义中的积分称为计数积分，并可用下式计算：

$$\int_0^{+\infty}v(t)N(\mathrm{d}t)=\begin{cases}0 & (N(T)=0),\\ \sum_{k=1}^{N(T)}v(t_k) & (N(T)\geqslant 1).\end{cases}$$

其中t_k是过程$N(t)$的第k点的发生时刻. 如果取$v(t)=I_{(s,u]}$，$I_{(s,u]}$是区间$(s,u]$的示性函数，则

$$\int_0^{+\infty}v(t)N(\mathrm{d}t)=N(u)-N(s)=N_{s,u},$$

这时，$\varphi_N(iv)=E[\exp(iN_{s,u})]$是增量$N_{s,u}$的特征函数的一个值(参见"特征函数").

计数积分(counting integral) 见"特征泛函".

随机模型(stochastic model) 一种数学模型. 指受随机因素支配的数学模型. 一般由一个或若干

个随机变量和(或)随机过程组成.

正态过程(normal process) 亦称高斯过程.一种随机过程.指所有有限维分布都是正态分布的随机过程.确切地说,随机过程$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$称为正态过程,如果对任意正整数$n$和任意$t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathscr{R}_+$,随机向量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$有$n$维正态分布.对于复值随机过程$\{z(t),t\in\mathscr{R}_+\}$来说,若$z(t)=X(t)+iY(t)$,而且对任意正整数$n$和$t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathscr{R}_+$,随机向量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n),Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_n))$有$2n$维正态分布,则称此复值过程是正态的.由正态分布的特征易知,正态过程是二阶矩过程(参见"二阶矩过程").

高斯过程(Gauss process) 即"正态过程".

独立增量过程(process with independent increments) 亦称可加过程.一类重要的随机过程.如果对任意$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n,n\geqslant 1,X(t_0),X(t_1)-X(t_0),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立.则称随机过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$为独立增量过程.独立增量过程也是马尔可夫过程.有些文献只要求$X(t_1)-X(t_0),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立.一般地,这两个定义是不完全一样的.但是,如果加上对初始状态的假设$X(0)=1$,则两者相同.这时过程的有限维分布可由增量分布确定.独立增量过程是一类很广泛和重要的随机过程.泊松过程和维纳过程都是独立增量过程.过程的独立增量性质也称"无后效性"或"无记忆性".

可加过程(additive process) 即"独立增量过程".

维纳过程(Wiener process) 一类随机过程.它是首先由美国学者维纳(Wiener,N.)提出和研究的.如果实值随机过程$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$满足下列条件,则称为($\mathscr{R}_+$中的)维纳过程.

1.有独立增量.

2.对任意$0\leqslant s<t$,增量$X(t)-X(s)$有均值为零,方差等于$\sigma^2(t-s)$的正态分布,这里$\sigma>0$是常数.

如果它还满足

3.初始状态$X(0)=0$,

则称该过程是从零点出发的.人们把满足$\sigma=1$及条件1~3的随机过程称为标准维纳过程.容易看出,从零点出发的维纳过程是正态过程,同时也是具有如下的维纳转移函数的齐次马尔可夫过程

$$P(t,x,B)=\begin{cases}\displaystyle\int_B\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}\right\}\mathrm{d}y & (t>0),\\ I_B(x) & (t=0).\end{cases}$$

其中$x,y\in\mathscr{R}$,B是$\mathscr{R}$中的波莱尔集,$I_B(\cdot)$是集合B的示性函数.

任意维纳过程都存在一个所有轨道连续的等价版本(或者说"修正").因此有些文献把(几乎)所有轨道连续作为维纳过程定义的一个条件.n维欧几里得空间$\mathscr{R}^n$中的维纳过程可以类似地定义.

美国学者维纳(Wiener,N.)于1923年首先利用上面的模型研究物理学中质点的布朗运动,因此在数学上维纳过程又称布朗运动.这一数学模型在随机过程论中起着基本的作用,并在许多领域中有广泛的应用.

标准维纳过程(standard Wiener process) 见"维纳过程".

布朗运动(Brownian motion) 数学上的布朗运动就是维纳过程.

局部时(local time) 布朗运动在点邻域所渡过的时间总量的量度.如果存在极限

$$L(t,x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(B_s)\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}m\{s\in[0,t]:B_s\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\},$$

其中m为勒贝格测度.则称函数$L(t,x),t\in\mathscr{R}_+,x\in\mathscr{R}$为布朗运动$\{B_t\}$在$x$处的局部.可以证明,上述极限在$L^2$意义下和a.s.意义下都是存在的,且$L(t,x)$可定义为$(t,x)$二元连续函数.

发射噪声过程(shot noise process) 亦称散粒(效应)噪声过程.一种随过泊松过程.是描述物理学的发射噪声现象的一类滤过泊松过程.随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$称为发射噪声过程,如果它可以表为发生在随机时间$\cdots,\tau_{-1},\tau_0,\tau_1,\cdots$的点事件对一个滤波器激发所产生的脉冲响应的叠加,而这些脉冲响应有同一的样式$\omega(s,u)$.于是$X(t)$可表为

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega(t-\tau_n,u_n),$$

其中$\{\tau_n,-\infty<n<+\infty\}$是定义在整个数轴上的泊松过程的点的发生时刻序列,$\{u_n\}$是一串相互独立同分布的随机变量,而且$\{u_n\}$和过程$\{\tau_n\}$是独立的(参见"滤过泊松过程").

散粒噪声过程(shot noise process) 即"发射噪声过程".

平 稳 过 程

平稳过程(stationary process) 一类重要的随机过程.在自然科学和工程技术中很多现象可视为平稳过程.平稳过程可分为严平稳和宽平稳(参见"严平稳过程"和"宽平稳过程").离散参数的平稳过程称为平稳序列,也称为平稳时间序列.在文献和教科书中,平稳过程可能是严平稳过程的简称,也可能是宽平稳过程的简称,因各作者使用习惯而异.

平稳序列(stationary sequence) 见"平稳过程".

平稳时间序列(stationary time secies) 见"平稳过程".

二阶矩过程(process with 2-order moments) 一种随机过程.是具有有限的一、二阶矩的随机过程.设$\{X(t),t\in T\}$是一复值过程,如果对每个$t\in T$,$E|X(t)|^2<+\infty$,则称此过程为有有限二阶矩的过程,简称二阶矩过程.例如正态过程、泊松过程、维纳过程等均是二阶矩过程.对于按照概率规律演变的实际现象来说,建立它们的数学模型的一个重要途径是利用它们的一、二阶矩的性态来刻画这些现象的特征.这种方法在统计通信、控制理论以及时间序列分析中有重要的应用.

均值函数(mean function) 随机过程的重要数量特征.设$\{X(t),t\in T\}$是一复值随机过程,如果对每个$t\in T$,随机变量$X(t)$的数学期望$m(t)=E\{X(t)\}$存在,这时称定义在T上的函数$m(t)$为该过程的均值函数.

协方差函数(covariance function) 二阶矩过程的重要数量特征.设$\{X(t),t\in T\}$是一个二阶矩过程,定义在$T\times T$上的二元函数

$$\Gamma(s,t)=E\{(X(s)-m(s))\overline{(X(t)-m(t))}\}$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的协方差函数.其中$m(t)$为过程的均值函数.

协方差函数$\Gamma(s,t)$具有如下性质:

1. $\Gamma(t,t)\geqslant 0$,对所有$t\in T$.
2. 对称性,$\Gamma(s,t)=\overline{\Gamma(t,s)}$,对所有$s,t\in T$.
3. 非负定性,对任意正整数$n,t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$及任意复数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma(t_j,t_k)\lambda_j\bar{\lambda}_k\geqslant 0.$$

相关函数(correlation function) 二阶矩过程的重要数量特征.设$\{X(t),t\in T\}$是一个二阶矩过程,定义在$T\times T$上的二元函数$R(s,t)=E(X(s)\cdot\overline{X(t)})$称为该过程的相关函数.

相关函数具有如下性质:

1. $R(t,t)\geqslant 0$,对所有$t\in T$.
2. 对称性.$R(s,t)=\overline{R(t,s)}$,对所有$s,t\in T$.
3. 非负定性.对任意正整数$n,t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$及任意复数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,有

$$\sum_{k,k=1}^{n}R(t_j,t_k)\lambda_j\bar{\lambda}_k\geqslant 0.$$

自相关函数(autocorrelation function) 通常简称相关函数(参见"相关函数").

严平稳过程(strictly stationary process) 亦称强平稳过程或狭义平稳过程.有时也简称平稳过程.一种随机过程.它的特征是其有限维分布不随时间推移而变.确切地说,如果对任意正整数n,任意$t_1,t_2,\cdots,t_n,t_1+h,t_2+h,\cdots,t_n+h\in T$,$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$与$(X(t_1+h),X(t_2+h),\cdots,X(t_n+h))$有相同的联合分布.则称此复值随机过程$\{X(t),t\in T\}$为严平稳过程.

强平稳过程(strongly stationary process) 即"严平稳过程".

狭义平稳过程(strictly stationary process) 即"严平稳过程".

宽平稳过程(wide stationary process) 亦称弱平稳过程或广义平稳过程.有时也简称平稳过程.一种随机过程.是其平稳性由前两阶矩的时齐性质刻画的随机过程.设$\{X(t),t\in T\}$是一个二阶矩过程,如果它的均值函数是一常数,而且它的相关函数$R(t,s)$(或协方差函数$\Gamma(t,s)$)仅依赖于$t-s$,即对任意$t,s\in T$及$t+h,s+h\in T$.$EX(t)=m=$常数.

$$\begin{aligned}&E\{X(t)\,\overline{X(s)}\}\\&=E\{X(t+h)\,\overline{X(s+h)}\}\\&=R(t-s)\ (\text{或}\ E\{(X(t)-m)(\overline{X(s)-m})\}\\&=E\{X(t+h)-m)(\overline{X(s+h)-m}\}\\&=\Gamma(t-s)),\end{aligned}$$

则称$\{X(t),t\in T\}$为宽平稳过程.一个有有限二阶矩的严平稳过程必定是宽平稳过程,反之不然.

弱平稳过程(weakly stationary process) 即"宽平稳过程".

广义平稳过程(wide stationary process) 即"宽平稳过程".

谱分布函数(spectral distribution function) 亦称谱函数.平稳过程理论的重要概念.在连续参数情形,设$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$是均方连续的宽平稳过程,$R(\tau)$是它的相关函数.由$R(\tau)$的非负定性和波博赫纳-辛钦定理知,存在有界非降右连续函数F,使得

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\mathrm{d}F(\lambda),$$

这时称函数F为过程的谱分布函数.也有文献称由过程的协方差函数$\Gamma(\gamma)$通过

$$\Gamma(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\mathrm{d}F(\lambda)$$

确定的有界非降右连续函数F为过程的谱分布函数.在离散参数情形,设$\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是宽平稳序列,$R(\tau)$是它的相关函数,则存在$[-\pi,\pi]$上有界非降右连续函数$F$,使得

$$R(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\mathrm{d}F(\lambda)$$

或使得协方差函数

$$\Gamma(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\mathrm{d}F(\lambda).$$

这时称 F 为序列的谱分布函数.

谱分布函数 F 不是惟一的，但它们之间最多相差一常数. 由相关函数 $R(\tau)$ 与由协方差函数 $\Gamma(\tau)$ 确定的谱分布函数不同之处是它们对应的勒贝格-斯蒂尔杰斯测度在 0 点相差一常数.

谱函数(spectral function) 即"谱分布函数".

谱密度(spectral density) 亦称功率谱密度. 谱分布函数的导数. 设 $F(\lambda)$ 是宽平稳过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的谱分布函数，其中 $T=(-\infty,+\infty)$ 或 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 如果 $F(\lambda)$ 关于勒贝格测度绝对连续，即 $dF(\lambda)=f(\lambda)d\lambda$，则称 $f(\lambda)$ 为过程的谱密度. 于是在 $T=(-\infty,+\infty)$ 情形，相关函数

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\tau}f(\lambda)d\lambda,\ \tau\in(-\infty,+\infty)$$

或协方差函数

$$\Gamma(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\tau}f(\lambda)d\lambda,\ \tau\in(-\infty,+\infty).$$

如果 $R(\tau)$(对应地，$\Gamma(\tau)$)绝对可积，则由傅里叶变换的反演公式，有

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\tau}R(\tau)d\tau$$

(对应地 $f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\tau}\Gamma(\tau)d\tau$). 在 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 情形，相关函数

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}f(\lambda)d\lambda\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

或协方差函数

$$\Gamma(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}f(\lambda)d\lambda\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如果 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|R(\tau)|<+\infty$(对应地 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\Gamma(n)|<+\infty$)，则有

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R(n)e^{-in\lambda},\ \lambda\in(-\pi,\pi)$$

(对应地，$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Gamma(n)e^{-in\lambda},\ \lambda\in(-\pi,\pi)$). 相关函数与协方差函数所对应的两个谱密度相差 $m^2\delta(x)$，其中 m 是过程的均值，$\delta(x)$ 是狄喇克函数.

谱分布函数与谱密度有如下物理意义：如果 $\{X(t),t\in T\}$ 是一随机波动，则它的谱分布函数就是它的能量的频率分布，谱密度就是它在频域的能量分布密度.

功率谱密度(power spectral density) 即"谱密度".

功率谱(power spectrum) 谱分布函数或谱密度的别名.

样本谱密度(sample spectral density) 与谱密度相关的一个重要概念. 设 $\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一宽平稳过程. 对任意 $T>0$,

$$f_T(\lambda)=\frac{1}{4\pi T}\left|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\lambda t}dt\right|^2$$

称为过程的一个有限样本 $\{X(t),t\in[-T,T]\}$ 的样本谱密度. 当 $T\to+\infty$ 时，若 $f_T(\lambda)$ 的均值趋于过程的谱密度及 $f_T(\lambda)$ 的方差趋于 0，则样本谱密度 $f_T(\lambda)$ 是谱密度 $f(\lambda)$ 的一致渐近无偏估计. 在工程技术应用中，往往将过程 $\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 的谱密度定义为样本谱密度的极限值

$$\lim_{T\to+\infty}f_T(\lambda).$$

对宽平稳序列 $\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 可类似地定义样本谱密度.

正交增量过程(process with orthogonal increments) 一种随机过程. 指在不相交区间上的增量不相关的随机过程. 复值随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 称为正交增量过程，如果对所有 $t,s\in T$ 有 $E|X(t)-X(s)|^2<+\infty$，且对 $t_1,t_2,t_3,t_4\in T$，$t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$，有 $E\{(X(t_2)-X(t_1))\overline{(X(t_4)-X(t_3))}\}=0$.

平稳过程的谱展式(spectral expansion of stationary process) 亦称平稳过程的谱表示或谱分解. 平稳随机过程理论的重要概念. 设 $\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 或 $\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$)是宽平稳过程，满足 $EX(t)=0$，设 $F(\lambda)$ 是它的谱分布函数，则存在一正交增量过程 $\{Z(\lambda),\lambda\in(-\infty,+\infty)\}$(对应地 $\{Z(\lambda),\lambda\in[-\pi,\pi]\}$)有零均值，且对 $\lambda_2\geqslant\lambda_1$，$E|Z(\lambda_2)-Z(\lambda_1)|^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$，使得

$$X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\lambda}dZ(\lambda)$$

(对应地，$X(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}dZ(\lambda)$). 这一表示式称为平稳过程的谱展式.

平稳过程的谱表示(spectral expression of stationary process) 即"平稳过程的谱展式".

平稳过程的谱分解(spectral decomposition of stationary process) 即"平稳过程的谱展式".

互相关函数(cross-correlation function) 反映两个二阶矩过程相依关系的重要数量特征. 设 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 均是二阶矩过程. 对 $s,t\in T$，复值函数 $R_{XY}(s,t)=E[X(s)\overline{Y(t)}]$ 称为这两过程的互相关函数.

互协方差函数(cross-covariance functions) 反映两个二阶矩过程相依关系的重要数量特征. 设 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 均是二阶矩过程. 对 $s,t\in T$，复值函数

$$\Gamma_{XY}(s,t)=E\{(X(s)-EX(s))\overline{(Y(t)-EY(t))}\}$$

称为这两过程的互协方差函数.

多维平稳过程(multidimensional stationary process) 一类随机过程. 通常指多维宽平稳过程. 设 $\{X(t),t\in T\}=\{(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)),t\in T\}$

是 n 维复向量值随机过程，且每一分量是二阶矩过程. 如果它的均值 $E\{X(t)\}=(E\{X_1(t)\}, E\{X_2(t)\},\cdots,E\{X_n(t)\})$ 不依赖于 t，且对每一对 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 和任意 $s,s+\tau,t,t+\tau\in T$，互相关函数

$$E\{X_i(s+\tau)\overline{X_j(s)}\}$$
$$=E\{X_i(t+\tau)\overline{X_j(t)}\}=R_{X_iX_j}(\tau)$$

或互协方差函数 $E\{(X_i(s+\tau)-m_i)\overline{(X_j(s)-m_j)}\}=E\{(X_i(t+\tau)-m_i)\overline{(X_j(t)-m_j)}\}=\Gamma_{X_iX_j}(\tau)$ 仅依赖于 τ，其中 $m_i=E\{X_i(t)\}, m_j=E\{X_j(t)\}$，则称过程 $\{X(t),t\in T\}$ 为 n 维平稳过程.

互谱分布函数(cross-spectral distribution function)　一类谱分布函数. 指多维平稳过程任意两分量的互相关函数的谱分布函数. 设 $\{X(t),t\in T\}$ 是 n 维平稳过程，其中 $T=(-\infty,+\infty)$ 或 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 在 $T=(-\infty,+\infty)$ 情形，还假定每个分量是均方连续的. 以 $R_{ij}(\tau)$(或 $\Gamma_{ij}(\tau)$)表示第 i,j 两个分量的互相关函数(对应地互协方差函数)，则在 $T=(-\infty,+\infty)$ 情形，存在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界变差函数 $F_{ij}(\lambda)$，使得

$$R_{ij}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\mathrm{d}F_{ij}(\lambda)\quad(\tau\in(-\infty,+\infty))$$

(对应地，

$$\Gamma_{ij}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\tau}\mathrm{d}F_{ij}(\lambda)\quad(\tau\in(-\infty,+\infty))).$$

在 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 情形，存在 $(-\pi,\pi)$ 上的有界变差函数 $F_{ij}(\lambda)$，使得

$$R_{ij}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda\tau}\mathrm{d}F_{ij}(\lambda)\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(对应地，

$$\Gamma_{ij}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda\tau}\mathrm{d}F_{ij}(\lambda)\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)).$$

这时称 $F_{ij}(\lambda)$ 为 $X_i(t)$ 及 $X_j(t)$ 的互谱分布函数. 若不计只相差一个常数的两个有界变差函数之间的区别，$F_{ij}(\lambda)$ 是惟一的. 互相关函数与互协方差函数对应的测度在 0 点处的负荷相差一常值.

互谱密度(cross-spectral density)　互谱分布函数的导数. 设 $F_{ij}(\lambda)$ 是 n 维平稳过程 $\{(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)),t\in T\}$ 的第 i,j 维分量的互谱分布函数. 如果 $F_{ij}(\lambda)$ 关于勒贝格测度绝对连续，则存在 $f_{ij}(\lambda)$，使得 $dF_{ij}(\lambda)=f_{ij}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$. 这时称 $f_{ij}(\lambda)$ 为 $X_i(t)$ 与 $X_j(t)$ 的互谱密度.

遍历性(ergodicity)　随机过程理论的基本概念之一. 在随机过程理论和应用的研究中，常常需要对某个随机过程的各种不同的统计量做出估计. 例如，人们想要确定随机过程 $\{X(t),t\geqslant0\}$ 的均值函数 $m(t)=E[X(t)]$，即 $X(t)$ 在整个样本空间 Ω 上的平均值. 但在实际中经由对过程的观测通常只是得到 $\{X(t),t\geqslant0\}$ 在观测区间 $[0,T]$ 中的一个样本函数 $X(t,\omega)$(对某 $\omega\in\Omega$). 这时能否根据过程的这一样本函数对时间取的平均值(简称时间平均或样本平均)

$$\overline{X}_T=\frac{1}{T}\int_0^T X(t,\omega)\mathrm{d}t$$

估计空间平均 $m(t)$ 呢？一般地，$\overline{X}_T$ 随观测区间长度 T 而变，而 $m(t)$ 则随时间参数 t 而变，因此对任意有限的 T 和 t 值是难以确立 $\overline{X}_T$ 和 $m(t)$ 之间的等式. 但是，如果在极限情形下有等式

$$\lim_{T\to+\infty}\overline{X}_T=\lim_{t\to+\infty}m(t),\qquad(1)$$

人们就起码能够用过程在足够长的观测区间上的时间平均 $\overline{X}_T$ 估计对应于大的 t 值的空间平均 $m(t)$. 由等式(1)刻画的性质称为均值遍历性. 当 $\{X(t),t\geqslant0\}$ 是平稳过程时，(1)式右边的 $m(t)$ 实际上不依赖于 t 而等于一常数 m，于是(1)可改写为

$$\lim_{T\to+\infty}\overline{X}_T=m.\qquad(2)$$

因此，尽管遍历性和平稳性是过程的两种不同性质，但在大多数情形，遍历性的讨论是对平稳过程进行的. 除了上面提到的均值遍历性外，较常见的还有相关遍历性：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t)\mathrm{d}t=R(\tau)$$

和分布遍历性等.

概率论中的大数定律是认识得最早的一类遍历性，它断言相互独立同分布的随机变量序列 $\{X(n),n=1,2,3,\cdots\}$ 具有均值遍历性，即当 $N\to+\infty$ 时，序列前 N 项的平均(也就是时间平均)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X(n)$$

收敛于空间平均 $E[X(n)]=m$. 如果其中的收敛性指依概率收敛就是弱大数定律，而几乎处处收敛性则对应于强大数定律. 这表明过程的遍历性质除了可按采用不同的统计量区分外，还可以在定义中利用不同的收敛性. 例如，在研究严平稳过程的遍历性时通常考虑由几乎处处收敛性定义的强遍历性，而在宽平稳过程的情形更多地涉及由均方收敛性定义的均方遍历性.

保测变换(measure-preserving transformation)　保持概率测度不变的变换. 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一概率空间. 从 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到其自身的可测变换 T 称为保测变换，如果对每一集合 $A\in\mathscr{F}$ 有 $P(T^{-1}A)=P(A)$，这里 T^{-1} 是 T 的逆映像. 例如，设 $\Omega=[0,1]$，$\mathscr{F}$ 由 $[0,1]$ 上的所有波莱尔集组成，P 是勒贝格测度. 对于任意 $\lambda\in[0,1]$，平移变换 $\theta_\lambda x=x+\lambda\ (\mathrm{mod}\ 1)$(即取 $x+\lambda$ 的小数部分)是一保测变换.

不变集(invariant set)　在保测度变换下不变

的集合.设 T 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个保测变换.集合 $A\in\mathscr{F}$ 称为(关于变换 T)不变的(几乎处处不变的),如果 $T^{-1}A=A$(相应地,$T^{-1}A$ 和 A 至多相差一 P 零测集).所有不变集(几乎处处不变集)构成 $\mathscr{F}$ 的一个子 σ 域并记之为 $\mathscr{L}$(相应地,$\mathscr{L}^*$).显然有 $\mathscr{L}\subset\mathscr{L}^*$.

应当指出,有些著作不考虑"几乎处处"的差别,即把上面的几乎处处不变集称为不变集.

度量可递性质(保测变换或平稳序列的)(metrically transitive property (of measure-preserving transformation or stationary sequence)) 一种与遍历性有密切关系的性质.人们称保测变换 T 具有度量可递性质(或者称 T 是度量可递的),如果关于它的每一不变集有概率 0 或 1,这又等价于每一几乎处处不变集有概率 0 或 1.可以证明,若变换 T 是度量可递的,ξ 是任一随机变量,则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\xi(T^k\omega)=E\xi,\quad \text{a. s. P.}$$

即具有度量可递性质的变换 T 是遍历的.上式中的 T^k 是 T 的 k 次幂(即连续作 k 次 T 变换),T^0 是恒等变换.

设 T 是一保测变换,$\xi_0(\omega)$是一随机变量.令 $\xi_k(\omega)=\xi_0(T^k\omega)$对 $k\geqslant1$,则序列 $\xi=\{\xi_n,n\geqslant0\}$是一严平稳序列.反之,对于$(\Omega,\mathscr{F},P)$上每一严平稳序列 $\xi=\{\xi_n,n\geqslant0\}$,恒能构造定义在某一概率空间$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P})$上的随机变量$\tilde{\xi}_0(\tilde{\omega})$和保测变换 $\tilde{T}$,使得 $\tilde{\xi}=\{\tilde{\xi}_0(\tilde{\omega}),\tilde{\xi}_0(\tilde{T}\tilde{\omega}),\cdots\}$和 ξ 有相同的概率分布.因此,不失一般性,对于任意严平稳序列 $\xi=\{\xi_n,n\geqslant0\}$,可以假设存在保测变换 T,使得 $\xi_n(\omega)=\xi_0(T_n\omega)$对所有 $n\geqslant1$.于是人们称严平稳序列 ξ 具有度量可递性质(或者称 ξ 是度量可递的),如果上述相应于 ξ 的保测变换 T 具有同样的性质.度量可递的严平稳过程具有均值遍历性:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\xi_k(\omega)=E\xi_0,\ \text{a. s. P.}$$

透彻混合性质(保测变换或平稳序列的)(mixing property (of measure-preserving transformation or stationary sequence)) 一种较度量可递性质更深刻的性质.人们称$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的保测变换 T 具有透彻混合性质(或者称 T 是透彻混合的),如果对于 $\mathscr{F}$ 中任意两集合 A 和 B 有

$$\lim_{n\to+\infty}P(A\cap T^{-n}B)=P(A)P(B).\qquad(1)$$

每一透彻混合的变换是度量可递的.

美国数学家哈尔莫斯(Halmos,P. R.)于 1956 年给出一个解释上述定义的生动例子.设有一容器(Ω),其中盛有 90%的杜松子酒和 10%的苦艾酒.用搅酒棒将容器中的酒平稳地不断搅拌并在时刻 $t=0,1,2,\cdots,n,\cdots$对酒的状态进行观测.又设 ω 是容器 Ω 内酒的一个质点,再设一开始苦艾酒质点所占据的那一部分容器是一个 Ω 的波莱尔子集,记为 A.由于搅拌的作用使这质点不断地运动,人们用 $\omega,T\omega,T^2\omega,\cdots,T^n\omega,\cdots$表示它在时刻 $t=0,1,2,\cdots,n,\cdots$的位置.按照物理学的观点,T 可以看做是一个保(体)积变换.令 $\mathscr{F}$ 表示 Ω 中的波莱尔集的全体,P 是体积的度量,通过选取适当的体积单位,使得 $P(\Omega)=1$.设 B 是 Ω 的任一波莱尔集.如果把酒彻底搅拌,则当 n 很大时在 B 中苦艾酒所占的百分比应很接近 10%.因为在时刻 $t=n$ 处,在 B 中的苦艾酒质点的集合是$\{\omega:\omega\in A,T^n\omega\in B\}=A\cap T^{-n}B$,故透彻混合就意味着

$$\frac{P(A\cap T^{-n}B)}{P(B)}\to P(A)=0.1.$$

类似于定义严平稳序列的度量可递性质,人们也可以通过对应的保测变换的透彻混合性质定义严平稳序列的透彻混合性质(参见"度量可递性质").

确定性平稳过程(deterministic stationary process) 亦称奇异平稳过程.一类特殊的平稳过程.设$\{X(t),t\in T\}$是宽平稳过程,其中 $T=(-\infty,+\infty)$或 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.以 $H_X(t)$表示由随机变量族 $X(s),s\leqslant t$ 产生的线性闭包,以 H_X 表示由全体 $X(t),t\in T$ 产生的线性闭包,其中收敛性是均方收敛.又记

$$S_X=\bigcap_{t\in T}H_X(t),$$

如果 $S_X=H_X$,则称过程$\{X(t),t\in T\}$是确定性平稳过程.这表示若知道过程在时刻 t 前的值$\{X(s),s\leqslant t\}$,则能惟一地确定过程在时刻 t 后的值$\{X(u),u>t\}$.

奇异平稳过程(singular stationary process) 即"确定性平稳过程".

纯非确定性平稳过程(purely non-deterministic stationary process) 亦称完全非确定性平稳过程或正则平稳过程.一类特殊的平稳过程.设$\{X(t),t\in T\}$是宽平稳过程,其中 $T=(-\infty,+\infty)$或 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.记号 $H_X(t)$与 S_X 意义(参见"确定性平稳过程"),如果 S_X 仅含 0 元素,也就是说,当 $u-s$ 充分大时,对 $t\geq u$ 的$X(t)$的值不能由 $t\leqslant s$ 的 $X(t)$的值推出,则该过程称为纯非确定性平稳过程.如果$\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是纯非确定性的,则 $X(t)$一定可表为

$$X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nu(t-n).$$

其中

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2<+\infty.$$

随机序列$\{u(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$具有如下性质:

$E\{u(n)\}=0$, $E\{u(n)\overline{u(m)}\}=\delta_{n,m}$ 以及 $H_X(n)=H_u(n)$ 对任意 m,n. 在连续参数情形，如果 $\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是纯非确定性的，则必有

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}a(t-s)u(\mathrm{d}s),$$

其中

$\int_{-\infty}^{+\infty}|a(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$, $\{u(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是正交增量过程，满足 $E|u(t+h)-u(t)|^2=h$ 以及

$$H_X(t)=H_u(t).$$

完全非确定性平稳过程(completely non-deterministic stationary process) 即"纯非确定性平稳过程".

正则平稳过程(regular stationary process) 即"纯非确定性平稳过程".

沃尔德分解(Wold decomposition) 宽平稳过程的一种分解表示. 任意一个宽平稳过程 $\{X(t),t\in T\}$ $(T=(-\infty,+\infty)$ 或 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\})$ 可惟一地表示为 $X(t)=X_r(t)+X_s(t)$，其中 $\{X_r(t),t\in T\}$ 是纯非确定性平稳过程，$\{X_s(t),t\in T\}$ 是确定性平稳过程，而且这两过程互不相关，即对任意 $t,u\in T$ 有 $E\{X_r(t)\overline{X_s(u)}\}=0$. 上述分解称为沃尔德分解.

有理谱密度(rational spectral density) 具有有理函数形式的谱密度. 在许多应用中，宽平稳序列的谱密度 $f(\lambda)$ 是 $e^{i\lambda}$ 的有理函数，人们称它为有理谱密度，这时它可以写为

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{A(e^{-i\lambda})}{B(e^{-i\lambda})}\right|^2,$$

其中 $$A(z)=\sum_{j=0}^{p}a_jz^j\ (a_0=1)$$

和 $$B(z)=\sum_{j=0}^{q}b_jz^j\ (b_0=1)$$

是 z 的实系数多项式，它们的零点均在单位圆外. 若 $\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是零均值宽平稳序列，则它有有理谱密度的充分必要条件是该序列是一自回归滑动平均序列.

白噪声过程(white noise process) 谱密度为常数的宽平稳过程. 人们把协方差函数 $R(t)=N_0\delta(t)$ 的宽平稳过程称为白噪声过程(简称白噪声)，其中 N_0 是一正常数，$\delta(t)$ 是由

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty & (t=0),\\ 0 & (t\neq0),\end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

定义的狄喇克函数. 这时，过程的谱密度等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}N_0\delta(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=N_0$$

是一常数，即过程有均匀谱. 因为白光的谱是均匀的，故人们仿此把如上有均匀谱的宽平稳过程称为白噪声过程(有时还直接用这一特性作为定义).

在离散时间参数情形，白噪声过程可以简单地定义为具有相同分布的不相关随机变量序列 $\{X_n,-\infty<n<+\infty\}$. 这样的序列有常数谱密度

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R(n)e^{-int}=DX_n\ (X_n \text{ 的方差}).$$

离散白噪声的一种常见的特殊形式是相互独立同分布的正态随机变量序列.

应当指出，白噪声只是抽象的数学概念，它在实际中不可能出现，因为它要求有无穷大的能量. 但是，近似的白噪声在实际中是经常遇到的(参见"谱密度").

自回归序列(autoregressive sequence) 亦称平稳自回归序列. 简称 AR 序列. 一类重要的平稳序列. 如果随机序列 $\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 满足差分方程 $X(t)+a_1X(t-1)+\cdots+a_pX(t-p)=u(t)$，其中 $\{u(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是方差为 σ^2 的白噪声，$A(z)=1+a_1z+\cdots+a_pz^p$ 的零点在单位圆外，则称该序列是自回归序列. 当 $a_p\neq0$ 时，p 称为自回归的阶. 一个 p 阶自回归序列必是宽平稳的，并通常简称 AR(p)序列. AR(p)序列的谱密度

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|A(e^{-i\lambda})|^2},$$

且该序列可表为

$$X(t)=\sum_{j=0}^{+\infty}c_ju(t-j).$$

其中

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|c_j|<+\infty.$$

平稳自回归序列(stationary autoregressive sequence) 即"自回归序列".

滑动平均序列(moving average sequence) 亦称滑动和序列. 简称 MA 序列. 一种重要的平稳序列. 如果随机序列 $\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 满足差分方程 $X(t)=u(t)+b_1u(t-1)+\cdots+b_qu(t-q)$，其中 $\{u(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是方差为 σ^2 的白噪声，$B(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$ 的零点均在单位圆外，则称该序列是由白噪声 $u(t)$ 滑动平均得到的序列，简称滑动平均序列. 如果 $b_q\neq0$，则称 q 为这序列的阶. 一个 q 阶滑动平均序列必是宽平稳的，通常简称 MA(q)序列. MA(q)序列的谱密度

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{-i\lambda})|^2,$$

而且这样的序列可表为

$$u(t)=\sum_{j=0}^{+\infty}d_jX(t-j).$$

其中

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|d_j|<+\infty.$$

滑动和序列(moving summation sequence) 即"滑动平均序列".

自回归滑动平均序列(autoregressive-moving average sequence) 亦称自回归滑动和序列.简称ARMA序列.一类重要的平稳序列.如果随机序列$\{X(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$满足差分方程

$$X(t)+a_1X(t-1)+\cdots+a_pX(t-p)$$
$$=u(t)+b_1u(t-1)+\cdots+b_qu(t-q),$$

其中$\{u(t),t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是方差为$\sigma^2$的白噪声,$A(z)=1+a_1z+\cdots+a_pz^p$及$B(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$的零点均在单位圆外,则称该序列是一自回归滑动平均序列.当$a_p,b_q\neq0$时,(p,q)称为它的阶数,一个(p,q)阶自回归滑动平均序列简记为ARMA(p,q)序列.它是宽平稳序列,并有有理谱密度

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{B(e^{-i\lambda})}{A(e^{-i\lambda})}\right|^2,$$

该序列可表为

$$X(t)=\sum_{j=0}^{+\infty}c_ju(t-j).$$

其中

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|c_j|<+\infty,$$

以及

$$u(t)=\sum_{j=0}^{+\infty}d_jX(t-j),$$

其中

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|d_j|<+\infty.$$

自回归滑动和序列(autoregressive-moving summation sequence) 即"自回归滑动平均序列".

线性均方估计(linear mean-square estimation) 随机过程理论的一个重要的实际应用问题.是使得均方误差最小的线性估计.是由已知随机变量族$\{X(t),t\in T\}$的观测值在某个最优准则下估计未知随机变量Y的值.即寻找一个$\{X(t),t\in T\}$的函数$f(X(t),t\in T)$,使得$\widetilde{Y}=f(X(t),t\in T)$最优地近似$Y$.若$f$限于线性函数类时,这问题称为线性估计.又若$\{X(t),t\in T\}$和$Y$都有有限二阶矩,而最优准则是要求均方误差最小,该估计就称为线性均方估计.确切地说,若以$L(X(t),t\in T)$表$X(t),t\in T$产生的线性空间,线性均方估计问题就是寻求$\widetilde{Y}\in L(X(t),t\in T)$,使得$E|Y-\widetilde{Y}|^2\leqslant E|Y-Y'|^2$对所有$Y'\in L(X(t),t\in T)$成立.$\widetilde{Y}$通常可以由方程组$E\{(Y-\widetilde{Y},\overline{Y'}\}=0,Y'\in L(X(t),t\in T)$所惟一确定,而$\delta=(E|Y-\widetilde{Y}|^2)$是估计的误差.

线性估计(linear estimation) 见"线性均方估计".

维纳滤波(Wiener filtering) 最优估计的一种方法.它能有效地解决平稳过程的线性预测、滤波与平滑问题.设$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$与$\{Z(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$均是宽平稳过程,而且平稳相关.想要根据过程$\{Z(t)\}$在$t\leqslant\tau$的观测值对$\{X(t)\}$在时刻$s$的值$X(s)$进行线性均方估计.

美国学者维纳(Wiener,N.)于20世纪40年代提出的方法是假定$X(s)$的估计值具有形式

$$\widetilde{X}(s)=\int_{-\infty}^{\tau}h(s,t)Z(t)\mathrm{d}t,$$

然后寻求$h(s,t)$使得均方误差

$$\delta^2=E|X(s)-\int_{-\infty}^{\tau}h(s,t)Z(t)\mathrm{d}t|^2$$

最小.其物理意义是要求找出一滤波器使其具有最优脉冲响应函数$h(s,t)$,当$Z(t),t\leqslant\tau$作为输入时,输出$\widetilde{X}(s)$与$X(s)$的差别在均方意义下达到最小.在$h(s,t)=h(t-s)$的假定下,维纳把问题转化在频域上考虑,得到最优维纳滤波器的频率响应的解.例如在滤波问题中,即$s=\tau$时,就有

$$H(i\omega)=\frac{\Phi_{XZ}(\omega)}{\Phi_Z(\omega)}.$$

其中$H(i\omega)$是滤波器的频率响应,$\Phi_Z(\omega)$是$\{Z(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$的谱密度,$\Phi_{XZ}$是$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$与$\{Z(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$的互谱密度.

卡尔曼滤波(Kalman filtering) 亦称维纳-卡尔曼滤波或卡尔曼-布西滤波.最优估计的一种方法.它是20世纪60年代初先由卡尔曼(Kalman,R.E.)、布西(Bucy,R.S.)等人开始,推广了美国学者维纳(Wiener,N.)的经典的工作而发展起来的一种最优线性估计算法.维纳滤波是在平稳性假设下,把估计问题归入频域考虑,这在实用方面有很大的局限性.卡尔曼滤波无需平稳性的假设并直接在时域对系统的状态进行估计,而且估计的算法是递推的.

卡尔曼滤波的算法已实际应用到军事与工程技术部门,如卫星轨道测定、潜艇与空间导航、生产过程控制等方面.

维纳-卡尔曼滤波(Wiener-Kalman filtering) 即"卡尔曼滤波".

卡尔曼-布西滤波(Kalman-Bucy filtering) 即"卡尔曼滤波".

马尔可夫过程

马尔可夫过程(Markov process) 简称马氏过程.一类重要的随机过程.设$\{X(t),t\in R_+\}$为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于可测空间$(E,\mathscr{E})$的

随机过程，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}}$为$(\Omega,\mathscr{F})$的上升 σ 域族，$\mathscr{F}'_t=\sigma(X(s),s\in[t,+\infty))$. 如果下面的性质 1 成立：

1. $\forall t\in\mathscr{R}_+$, $A\in\mathscr{F}_t, B\in\mathscr{F}'_t$: $P((A\cap B)|X(t))=P(A|X(t))P(B|X(t))$.

则称过程$\{X(t)\}$为马尔可夫过程，可测空间$(E,\mathscr{E})$称为马尔可夫过程$\{X(t)\}$的状态空间. 一般情形下，因为要考虑形如$\{X(t)=x\}$集合的概率，人们还要求 $\mathscr{E}$ 包含所有单点集$\{x\}$. 性质 1 与下列性质之一等价：

2. $\forall t\in\mathscr{R}_+$, $B\in\mathscr{F}'_t$: $P(B|\mathscr{F}_t)=P(B|X(t))$.

3. $\forall t\in\mathscr{R}_+$, $A\in\mathscr{F}_t$: $P(A|\mathscr{F}'_t)=P(A|X(t))$.

注意，若性质 1,2,3 成立，则把其中的$\{\mathscr{F}_t\}$换成$\{X(t)\}$的自然 σ 域族$\{\mathscr{F}_t^X\}$后相应的性质仍成立. 而且这时性质 2 有如下的直观意义：当已知系统在时刻 t 以前(含 t)的历史时，系统在 t 以后的发展只依赖于系统在时刻 t 的状态而与它在 t 以前的情况无关. 此即所谓马尔可夫性，这正是马尔可夫过程的本质所在.

应当指出，尽管一些著作中也把马尔可夫性称为无后效性，但它和多数著作(包括本书)中提到的无后效性是不一样的. 后者是指过程的独立增量性质. 相对于此，马尔可夫性只是一种条件无后效性(参见“独立增量过程”，“齐次泊松过程”).

马尔可夫过程的状态空间(state space of Markov process)　见“马尔可夫过程”.

马尔可夫性(Markov property)　见“马尔可夫过程”.

马尔可夫链(Markov chain)　具有离散状态空间的马尔可夫过程. 它是离散时间(参数)马尔可夫链和连续时间(参数)马尔可夫链的总称. 设$\{X(n),n\geqslant 0\}$是状态空间 E 为某一可数集(通常取 E 为非负整数集)的随机序列，如果它满足下述条件：对任意正整数 n 和状态 $i_0,i_1,\cdots,i_{n+1}$有

$$P(X(n+1)=i_{n+1}|X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n)=P(X(n+1)=i_{n+1}|X(n)=i_n),\qquad(1)$$

则称其为离散时间(参数)马尔可夫链.

又若$\{X(t),t\geqslant 0\}$是状态空间 E 为某一可数集的随机过程，如果它满足如下条件：对任意正整数 n，状态 $i_0,i_1,\cdots,i_{n+1}$和 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots\leqslant t_{n+1}$有

$$P(X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n)=P(X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_n)=i_n),\qquad(2)$$

则称其为连续时间(参数)马尔可夫链.

(1)式和(2)式表示的性质也就是马尔可夫性.

离散时间(参数)马尔可夫链(discrete-time Markov chain)　见“马尔可夫链”.

连续时间(参数)马尔可夫链(continuous-time Markov chain)　见“马尔可夫链”.

齐次马尔可夫链(homogeneous Markov chain)　亦称时齐马尔可夫链. 即具有平稳转移概率的马尔可夫链(参见“转移概率”).

时齐马尔可夫链(homogeneous Markov chain)　即“齐次马尔可夫链”.

随机矩阵(stochastic matrix)　一种矩阵. 它是各行之和为 1 的非负矩阵. 确切地说，一个满足下列两条件：

1. $a_{ij}\geqslant 0$，对所有 i,j；

2. $\sum_j a_{ij}=1$，对所有 i

的有限或无穷阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为随机矩阵. 若 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个随机矩阵，则它们的乘积 $AB=C=(c_{ij})$也是随机矩阵，这里

$$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}.$$

次随机矩阵(substochastic matrix)　一种矩阵. 是各行之和不超过 1 的非负矩阵. 确切地说，一个满足下列两条件：

1. $a_{ij}\geqslant 0$，对所有 i,j；

2. $\sum_j a_{ij}\leqslant 1$，对所有 i

的有限或无穷阶矩阵 $A=(a_{ij})$称为次随机矩阵. 一个随机矩阵必是次随机矩阵，反之不然. 若 $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$是两个次随机矩阵，则它们的乘积 $AB=C=(c_{ij})$也是次随机矩阵. 这里

$$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}.$$

转移概率(transition probability)　刻画随机过程状态转移的概率特性的重要概念. 在随机过程(特别是马尔可夫过程)理论中，术语“转移概率”通常用来表示已知由该过程描述的系统在时刻 s 处于状态 α 时，经过一段时间 h 后，该系统的状态属于集合 $\Gamma\subset E$ 的条件概率 $P(X(s+h)\in\Gamma|X(s)=\alpha)$. 当这转移概率实际上只依赖于时差 h 而与时刻 s 无关时，就称过程具有平稳转移概率.

平稳转移概率(stationary transition probability)　见“转移概率”.

转移概率矩阵(transition probability matrix)　由马尔可夫链的转移概率排成的矩阵. 在离散时间参数马尔可夫链理论中，转移概率矩阵 $\mathscr{P}=(p_{ij})$是这样的一个方阵，它的第 i 行第 j 列的元素

$$p_{ij}=P(X(n+1)=j|X(n)=i)\quad(n\geqslant 0)$$

是当已知齐次马尔可夫链$\{X(n),n\geqslant 0\}$在时刻 n 处于状态 i 时，这链经一步在时刻 $n+1$ 将转移到状态 j 的条件概率. 因此确切地说，转移概率矩阵是指一步转移概率矩阵. 对于任意正整数 $k\geqslant 2$，也可以定义 k 步(或者说，k 阶)转移概率矩阵 $\mathscr{P}^{(k)}=(p_{ij}^{(k)})$，

其中第 i 行第 j 列元素 $p_{ij}^{(k)}=P(X(n+k)=j|X(n)=i)(n\geqslant0)$ 是当已知齐次马尔可夫链 $\{X(n),n\geqslant0\}$ 在时刻 n 处于状态 i 时，这链经 k 步在时刻 $n+k$ 将转移到状态 j 的条件概率. 容易验证，

$$\mathscr{P}^{(k)}=\underbrace{\mathscr{P}\times\cdots\times\mathscr{P}}_{k\text{ 重乘积}}=\mathscr{P}^{k},$$

即 k 步转移概率矩阵 $\mathscr{P}^{(k)}$ 等于(一步)转移概率矩阵的 k 次乘幂 $\mathscr{P}^{k}$. 应当指出：任意 k 步转移概率矩阵 $\mathscr{P}^{(k)}(k\geqslant1)$ 都是随机矩阵.

转移概率矩阵除了满足随机矩阵的两个条件：

1. $p_{ij}\geqslant0$，对所有 i,j；

2. $\sum\limits_{j}p_{ij}=1$，对所有 i

之外，还满足如下的查普曼-柯尔莫哥洛夫方程.

3. $p_{ij}^{(m+n)}=\sum\limits_{l}p_{il}^{(m)}p_{lj}^{(n)}$，对任意 $m\geqslant0,n\geqslant0$ 和所有 i,j.

一个离散时间参数齐次马尔可夫链的概率分布律由该链的转移概率和初始分布完全确定. 对于连续时间参数的齐次马尔可夫链 $\{X(t),t\geqslant0\}$ 来说，转移概率矩阵 $\mathscr{P}(t)=(p_{ij}(t))$ 中第 i 行第 j 列的元素 $p_{ij}(t)=P(X(s+t)=j|X(s)=i)$ 是当已知链在任意时刻 $s(\geqslant0)$ 处于状态 i 时，经过长为 t 的一段时间后链将转移到状态 j 的条件概率. 它们除了满足随机矩阵的两个条件：

1. $p_{ij}(t)\geqslant0$，对所有 i,j；

2. $\sum\limits_{j}p_{ij}(t)=1$，对所有 i

之外，还满足等式

$$\sum_{l}p_{il}(s)p_{lj}(t)=p_{ij}(s+t).$$

对任意 $s\geqslant0$，$t\geqslant0$ 和所有 i,j. 上式也称为查普曼-柯尔莫哥洛夫方程. 一个连续时间参数齐次马尔可夫链的概率分布律由一族转移概率矩阵 $\{\mathscr{P}(t),t\in(0,+\infty)\}$ 和初始分布完全确定.

转移概率矩阵又简称转移矩阵(参见“转移概率”,“随机矩阵”和“查普曼-柯尔莫哥洛夫方程”).

转移矩阵(transition matrix)　转移概率矩阵的简称.

标准转移概率矩阵(standard transition probability matrix)　一种典型的转移矩阵. 即满足条件

$$\lim_{t\to0}p_{ij}(t)=\begin{cases}1 & (i=j),\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

的转移概率矩阵 $(p_{ij}(t))$.

Q 矩阵(Q-matrix)　标准转移概率矩阵对应的转移强度矩阵. 设 $(p_{ij}(t))$ 是标准转移概率矩阵. 由 $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 的(右)导数 $q_{ij}=p'_{ij}(0)$ 作元素的方阵 (q_{ij}) 称为转移概率矩阵 $(p_{ij}(t))$ 的 Q 矩阵. 它是相应的转移矩阵(或者说，马尔可夫链)的转移强度矩阵(又称密度矩阵或无穷小算子). 它满足下列条件：

1. $0\geqslant q_{ii}\geqslant-\infty$，对任意 i.

2. $+\infty>q_{ij}\geqslant0$，若 $i\neq j$.

3. $-q_{ii}\geqslant\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}$.

当 $q_i\equiv-q_{ii}=+\infty$ 时，状态 i 称为瞬时的. 链若到达这样的状态便立即离开.

现在，设 (q_{ij}) 是任一矩阵，如果它满足以下条件：

1. $+\infty>-q_{ii}\geqslant0$，对任意 i；

2. $+\infty>q_{ij}\geqslant0$，当 $i\neq j$；

3. $-q_{ii}\geqslant\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}$，对任意 i；

则称它为 Q 矩阵. 若把条件 3 中的不等号加强为等号，则 Q 矩阵称为保守的.

最近，有些作者对 $-q_{ii}=+\infty$ 的瞬态情形进一步系统研究并得到很好的结果，他们在矩阵的定义中允许 $-q_{ii}=+\infty$(参见“标准转移概率矩阵和“无穷小算子”).

保守 Q 矩阵(conservative Q-matrix)　见“Q 矩阵”.

Q 过程(Q-process)　一种马尔科夫过程. 以给定的 Q 矩阵 (q_{ij}) 为密度矩阵的马尔可夫过程(不一定是惟一的)泛称 Q 过程(参见“Q 矩阵”).

最小 Q 过程(minimal Q-process)　满足某种附加条件的 Q 过程. 在 Q 过程的存在性和惟一性问题的研究中，南斯拉夫-美国数学家费勒(Feller, W. F.)于 1940 年首先通过构造一个最小 Q 过程，解决了是否存在对应于给定 Q 矩阵的 Q 过程的问题. 美国数学家杜布(Doob, J. L.)于 1945 年在讨论 Q 过程的惟一性问题时证明了：若给定的 Q 矩阵保守，则或者对应无穷多个 Q 过程，或者对应惟一的 Q 过程——最小 Q 过程. 当给定了一个 Q 矩阵 (q_{ij}) 时，可以设想用如下方法产生对应于这 Q 矩阵的(从任一状态出发的)最小 Q 过程. 令

$$r_{ij}=\begin{cases}q_{ij}/q_i & (i\neq j,q_i>0),\\ 0 & (\text{其他情形}).\end{cases}$$

这里 $q_i=-q_{ii}$. 过程相继的状态转移是这样确定的：当它到达状态 i 后，在 i 的逗留时间有参数为 q_i 的指数分布，而且各次逗留时间是相互独立的. 当过程离开状态 i 转移到别的状态时，它转移到状态 j 的概率是 r_{ij}(为确定起见，假设样本函数是右连续的). 因为可能以正概率出现样本函数不是对所有的 $t\geqslant0$ 都确定的情形，这时可以通过添加一个吸收状态 ∂ 把相空间 E 扩充为 $\tilde{E}=E\cup\{\partial\}$. 当样本函数不确定时令它取值 ∂，此后它就一直逗留在这一状态. 人们把这样的具有扩充相空间 $\tilde{E}$ 的过程在到达状态 ∂ 前的那一部分称为最小 Q 过程.

下面就更一般的情形——具有随机寿命的连续时间马尔可夫链$\{X(t,\omega),0\leqslant t<\zeta(\omega)\}$给出最小$Q$过程的描述性定义，这里$\zeta(\omega)$是一可取无穷值的非负随机变量，它可以解释为链的寿命. $\tau(\omega)$称为这链的样本函数$X(\cdot,\omega)$的飞跃点，如果或者有$\tau(\omega)=\zeta(\omega)$，或者对任意$\varepsilon>0$，在区间$(\tau(\omega)-\varepsilon,\tau(\omega)+\varepsilon)$中$X(\cdot,\omega)$有无穷多个跳跃点. 用$\tau_1(\omega)$表示$X(\cdot,\omega)$的第一个飞跃点.

设给定了Q矩阵(q_{ij})，若对应的Q过程$\{X(t,\omega),0\leqslant t<\zeta(\omega)\}$满足条件$\tau_1(\omega)=\zeta(\omega)$，对所有$\omega$，则称这$Q$过程为最小$Q$过程. 换句话说，最小$Q$过程是对应的$Q$过程在第一个飞跃点以前的那一部分.

连通状态类(communicating class of states) 马尔可夫链的分类之一. 马尔可夫链的状态空间按照是否“互相连通”所作的分类. 设i,j是马尔可夫链的任意两个状态，如果存在正数$t>0$(对于离散时间马尔可夫链则是正整数$m>0$)，使得$p_{ij}(t)>0$(相应地，$p_{ij}^{(m)}>0$)，则称从状态i可到达状态j并记为$i\to j$. 如果$i\to j$和$j\to i$，则称状态i和j是连通的. 关系$\leftrightarrow$是对称的和传递的，因此，可按连通关系把状态空间划分为互不相交的状态类，每一个状态类或者由两个或更多的相互连通的状态组成，或者仅含一个与任何其他状态都不连通的状态. 两个状态属于同一状态类当且仅当它们是连通的.

应当指出，有些著作在定义从状态i可以到达状态j时，只要求存在非负数$t\geqslant 0$使得$p_{ij}(t)>0$(在离散时间情形下，则是存在非负整数$m\geqslant 0$使得$p_{ij}^{(m)}>0$).

状态的周期(period of a state) 状态的一种性质. 离散时间马尔可夫链的任一状态i的周期$d(i)$是使得$p_{ii}^{(n)}>0$的正整数n集合的最大公约数. 若$p_{ii}^{(n)}=0$对所有$n>0$，则定义$d(i)=+\infty$.

非周期状态(aperiodic state) 马尔可夫链的状态之一. 如果$d(i)=1$(参见“状态的周期”)，则离散时间马尔可夫链的状态i称为非周期状态.

周期状态(periodic state) 不是非周期的状态. 一状态i是周期的，当且仅当$d(i)\geqslant 2$(参见“非周期状态”).

首次经过概率(first passage probability) 随机过程首次经过某给定状态(或状态集合)的概率. 在马尔可夫链理论中是指马尔可夫链从状态i出发，在时刻n第一次经过状态j的概率$f_{ij}^{n}=P(X(n)=j,X(k)\neq j,k=1,2,\cdots,n-1\mid X(0)=i)$，这里$i,j$是任意状态，$n$是任意正整数.

平均首次经过时间(mean first passage time) 指随机过程首次经过某给定状态(或状态集合)的时间的数学期望. 在马尔可夫链理论中是指马尔可夫链从状态i出发，首次经过状态j的时间的数学期望

$$\mu_{ij}=\sum_{n=1}^{+\infty}nf_{ij}^{n}.$$

这里f_{ij}^{n}是首次经过概率. 当

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_{ij}^{n}=1,$$

即链从状态i出发必然会经过状态j时，$\{f_{ij}^{n},n=1,2,3,\cdots\}$给出链从状态$i$出发，首次经过状态$j$的时间的概率分布(参见“首次经过概率”).

平均返回时间(mean recurrent time) 马尔可夫链从给定的状态i出发后返回该状态的时间期望值. 设i是一常返状态，则$\{f_{ii}^{n},n=1,2,3,\cdots\}$给出马尔可夫链从状态$i$出发后首次返回$i$的时间的概率分布. 该分布的数学期望

$$\mu_{ii}=\sum_{n=1}^{+\infty}nf_{ii}^{n}$$

就是状态i的平均返回时间(参见“首次经过概率”和“平均首次经过时间”).

常返状态(recurrent state) 马尔可夫链的状态之一. 指马尔可夫链的具有无穷多次返回特性的状态. 状态i称为常返状态，如果

$$f_{ii}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_{ii}^{n}=1,$$

即链从状态i出发以概率1必返回i. 状态i是常返的一个充分必要条件是：链从状态i出发后无穷多次经过i的概率等于1. 这条件又等价于

$$\sum_{n=1}^{+\infty}p_{ii}^{(n)}=+\infty.$$

这里$p_{ii}^{(n)}$是n步转移概率.

非常返状态(non-recurrent state) 亦称瞬时状态. 不是常返状态的状态. 换句话说，马尔可夫链的状态i称为非常返的，如果链从状态i出发，它将以正的概率不再返回i. 这又等价于说不管链从哪一个状态出发，以概率1它最多只能经过状态i有限多次(参见“常返状态”).

瞬时状态(transient state) 即“非常返状态”.

正常返状态(positive recurrent state) 常返状态的一种. 设i是一常返状态，如果它的平均返回时间$\mu_{ii}<+\infty$，则称状态i为正常返状态(参见“常返状态”和“平均返回时间”).

零常返状态(null recurrent state) 不是正常返状态的常返状态. 设i是一常返状态，如果它的平均返回时间$\mu_{ii}=+\infty$，则称状态i为零常返状态(参见“常返状态”和“平均返回时间”).

遍历状态(ergodic state) 一种状态. 非周期的正常返状态称为遍历状态.

本质状态(essential state)　一种状态. 如果每个可从 i 到达的状态都和 i 相连通(即由 $i\to j$ 可推出 $i\leftrightarrow j$),则状态 i 称为本质状态. 否则,称 i 为非本质状态. 应当指出,常返状态一定是本质状态(等价地,非本质状态一定是非常返状态). 但是,本质状态可以是非常返的.

非本质状态(inessential state)　见"本质状态".

类性质(class property)　指同一状态类中所有状态共有的性质. 一种对马尔可夫链的所有状态都有定义的性质称为类性质. 如果某状态类中有一个状态具有这种性质,则该类中所有状态都有这一性质. 例如,状态的周期和常返性(包括正常返性和零常返性)都是类性质.

状态闭集(closed set of states)　具有某种封闭性质的状态集合. 马尔可夫链的状态空间的一个非空子集 C 称为闭集,如果从 C 的每一状态都不能到达 C 外的任何状态. 换句话说,一个状态集合是闭集意味着马尔可夫链一旦到达这集合后就再也出不去了. 整个状态空间是一个闭集.

最小状态闭集(minimal closed set of states)　一种状态闭集. 指不包含真正闭子集的状态闭集(参见"状态闭集").

吸收状态(absorbing state)　一种状态. 是自身构成一状态闭集的状态. 一状态 i 是吸收的充分必要条件是 $p_{ii}=1$.

不可约马尔可夫链(irreducible Markov chain)　一种马尔可夫链. 指状态空间 E 是惟一闭集的马尔可夫链,这又相当于 E 不含两个不相交的非空闭集. 这时,对应的转移概率矩阵也称为不可约的.

遍历马尔可夫链(ergodic Markov chain)　一种马尔可夫链. 指所有状态都是遍历的马尔可夫链. 一个不可约的非周期离散马尔可夫链是遍历的充分必要条件是方程组

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij},\ \text{所有}\ j\in E$$

存在满足 $\pi_i\geqslant 0$(对所有 $i\in E$)和 $\sum\limits_i \pi_i=1$ 的解 $\{\pi_i,i\in E\}$,而且这时有

$$\pi_j=\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)},\ \text{对所有}\ j\in E.$$

即最终分布存在(参见"最终分布"和"平稳分布").

有限马尔可夫链(finite Markov chain)　一种马尔可夫链. 指状态空间是有限的马尔可夫链. 有限马尔可夫链有这样的特点,它的状态空间既不可能只含瞬时状态,也不可能含有零常返状态. 因此,一个不可约的非周期有限马尔可夫链必是遍历的(参见"不可约马尔可夫链"和"遍历马尔可夫链").

平稳分布(马尔可夫链的)(stationary distribution of a Markov chain)　具有某种不变(或者说平稳)性质的概率分布. 设 $\{X(n),n\geqslant 0\}$ 是具有状态空间 E 的离散时间马尔可夫链,它的转移概率矩阵是 (p_{ij}). 概率分布 $\{P_i,i\in E\}$ 称为这马尔可夫链的平稳分布,如果

$$P_j=\sum_{i\in E} P_i p_{ij},\ \text{对任意}\ j\in E.$$

当初始分布是平稳分布时,任意 $X(n)$ $(n>0)$ 都有和初始分布相同的分布,因此这马尔可夫链是一平稳序列. 连续时间马尔可夫链的平稳分布可类似地定义.

最终分布(马尔可夫链的)(long-run distribution of a Markov chain)　亦称极限分布(马尔可夫链的). 指当时间参数趋于无穷时转移概率的极限给出的概率分布. 设齐次马尔可夫链的状态空间是 E,概率分布 $\{\pi_i,i\in E\}$ 称为这链的最终分布,如果对任意 $i,j\in E$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j(\text{离散参数情形})$$

或

$$\lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t)=\pi_j(\text{连续参数情形}).$$

若最终分布存在,则不管初始分布如何,都有

$$\lim_{n\to+\infty} P(X(n)=i)=\pi_i$$

$$(\text{或}\lim_{t\to+\infty} P(X(t)=i)=\pi_i).$$

最终分布必是平稳分布. 最终分布是平衡方程组

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij},\text{所有}\ j\in E(\text{离散参数情形})$$

或

$$\pi_j q_j=\sum_{i\neq j} \pi_i q_{ij},\text{所有}\ j\in E(\text{连续参数情形})$$

的满足归一化条件

$$\sum_{j\in E}\pi_j=1$$

的惟一正解.

极限分布(马尔可夫链的)(limiting distribution of a Markov chain)　即"最终分布".

纯间断马尔可夫过程(purely discontinuous Markov process)　亦称马尔可夫跳跃过程. 一类特殊的马尔可夫过程. 其特征是当过程进入任意一个状态后必在这状态逗留一段大于零的时间,然后跳跃地转移到另一个新状态. 这类过程的转移概率具有以下性质:当 $X(t)=x$ 时,系统在区间 $(t,t+\Delta t)$ 中以概率 $1-q(t,x)\Delta t+o(\Delta t)$ 留在此状态,以概率 $q(t,x)\Delta t+o(\Delta t)$ 发生跳跃. 而且如果发生跳跃,则 $X(t)$ 的分布由 $Q(t,x,y)+o(1)$ 给出. 这里 $q(t,x)\geqslant 0$ 是跳跃强度函数,$Q(t,x,y)$ 是条件分布函数. 因而有 $P(t,x;t+\Delta t,(-\infty,y])=P(X(t+\Delta t)\leqslant y\mid X(t)=x)=[1-q(t,x)\Delta t]I(x,y)+q(t,x)\Delta t Q(t,x,y)+o(\Delta t)$,其中

$$I(x,y)=\begin{cases}1 & (x=y),\\ 0 & (x\neq y).\end{cases}$$

纯间断马尔可夫过程的一个常见例子是泊松过程. 对于齐次泊松过程 $q(t,x)=\lambda$ 是一常数,而且

$$Q(t,x,y)=\begin{cases}1 & (y\geqslant x+1),\\ 0 & (y<x+1).\end{cases}$$

马尔可夫跳跃过程(Markov jump process) 即"纯间断马尔可夫过程".

可逆马尔可夫链(reversible Markov chain) 一种马尔可夫链. 指将时间逆向后概率分布律不变的马尔可夫链. 以离散时间参数情形为例. 设 $\{X(n),n\geqslant 0\}$ 是一齐次马尔可夫链,其转移概率矩阵是 (p_{ij}). 如果这链是遍历的,而且初始分布选为平稳分布 $\{\pi_i\}$,于是这马氏链是一平稳序列(这时可以想像链早在 $t=-\infty$ 已开始,因而在时刻 $t=0$ 已进入稳定状态). 对任意正整数 m,k 和任意状态 $j,i,i_2,\cdots,i_k$ 有

$$p_{ij}^{*}=P(X(m)=j\mid X(m+1)=i,\ X(m+2)=i_2,\cdots,X(m+k)=i_k)=\frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}\qquad(1)$$

即马尔可夫链 $\{x(n),n\geqslant 0\}$ 的(关于时间的)逆过程是具有转移概率矩阵 (p_{ij}^{*}) 的马尔可夫链. 当对任意 i,j 有 $p_{ij}^{*}=p_{ij}$ 时,就称这马尔可夫链是(时间)可逆的. 从(1)式易知一个(遍历)马尔可夫链可逆的充分必要条件是对任意 i,j 有 $\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$.

柯尔莫哥洛夫微分方程(Kolmogorov's differential equations) 连续时间参数马尔可夫链理论中的两组微分方程. 首先由苏联数学家俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, A. H.)推出. 在非齐次马尔可夫链的情形中,第一组方程是

$$\frac{\partial}{\partial s}p_{ij}(s,t)=-q_i(s)p_{ij}(s,t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}(s)p_{kj}(s,t)$$

(对任意 $t\geqslant s>0$ 和任意状态 i,j);

第二组方程是

$$\frac{\partial}{\partial s}p_{ij}(s,t)=-p_{ij}(s,t)q_j(t)+\sum_{k\neq j}p_{ik}(s,t)q_{kj}(t)$$

(对任意 $t\geqslant s\geqslant 0$ 和任意状态 i,j).

这里 $p_{ij}(s,t)$ 是转移概率

$$q_{ik}(t)=\lim_{h\to 0}h^{-1}p_{ik}(t,t+h)\ (i\neq k),$$

$$q_i(t)=-q_{ii}(t)=\lim_{h\to 0}h^{-1}[1-p_{ii}(t,t+h)].$$

应当指出,上述方程组中尽管出现了偏导数符号,但它们实际上并不是偏微分方程组而是常微分方程组. 因为在第一个方程组中含有对较早时刻 s 求导的导数,而第二组方程中含有对较迟时刻 t 求导的导数,故通常又把这两组方程分别称为柯尔莫哥洛夫向后方程和柯尔莫哥洛夫向前方程. 在某些附加假设下,这两组方程中的任一组惟一地确定一个马尔可夫链的转移概率族. 尽管向前方程在直观上较容易理解,但向后方程在理论上较易处理,故在马尔可夫链理论中,向后方程较向前方程更为有用.

在齐次马尔可夫链的情形中,$q_i(t)$ 和 $q_{ij}(t)$ 是与 t 无关的常数,$p_{ij}(s,t)$ 只依赖于差数 $t-s$ 而与 s,t 的具体值无关,故向后方程和向前方程可分别写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{ij}(t)=-q_i p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{ij}(t)=-p_{ij}(t)q_j+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj},$$

其中 i,j 是任意状态,t 是任意非负实数.

对于一般的马尔可夫过程也可写出相应的柯尔莫哥洛夫向后方程和向前方程. 这里只就齐次情形依次写出这两个方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,x,\Gamma)=-q(x)P(t,x,\Gamma)+\int_{E\setminus\{x\}}q(x,\mathrm{d}y)P(t,y,\Gamma),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,x,\Gamma)=-\int_{\Gamma}P(t,x,\mathrm{d}y)q(y)+\int_{E}P(t,x,\mathrm{d}y)q(y,\Gamma)$$

对任意实数 $t\geqslant 0$,任意 $x\in E$ 和可测集 $\Gamma\subset E$,其中

$$q(x)=\lim_{h\to 0}h^{-1}[1-P(h,x,\{x\})],$$

$$q(x,\Gamma)=\lim_{h\to 0}h^{-1}P(h,x,\Gamma)\ (x\notin\Gamma)$$

和对任意 x 定义 $q(x,\Gamma)=q(x,\Gamma\setminus\{x\})$.

柯尔莫哥洛夫向后方程(Kolmogorov's backward equation) 见"柯尔莫哥洛夫微分方程".

柯尔莫哥洛夫向前方程(Kolmogorov's forward equation) 见"柯尔莫哥洛夫微分方程".

随机游动(random walk) 一种描述质点随机运动的模型. 其中质点每一时刻运动的方向和(或)速度是随机的. 最常见的随机游动是在某个一维或多维区域中的格子点上的随机游动,质点在每一步只能向相邻的点移动. 当向所有相邻点移动的概率都相等时称为对称随机游动.

最简单而又有用的一类随机游动是一维格子点上的简单随机游动,它是一个齐次马尔可夫链,其转移概率满足:对任意整数 i,$p_{i,i+1}=p$,$p_{i,i-1}=q$ 和 $p_{ii}=r$,其中 p,q 和 r 是满足 $p+q+r=1$ 的非负实数(有些著作规定 $r=0$). 当随机游动的状态空间有边界点时,根据在边界点的转移概率的不同规定又分为带吸收壁和带反射壁两类.

对称随机游动(symmetric random walk) 见"随机游动".

爱伦弗斯特模型(Ehrenfest model) 一类离散时间参数的有限马尔可夫链. 爱伦弗斯特(Ehren-

fest P. T.)于1906年在讨论统计力学的循环问题时提出了如下的试验设想：设有 N 个分子分布在两个容器 A 和 B 中.在时刻 n 随机地选取一个分子并把它从原来所在的容器移到另一个容器中.系统的状态用容器 A 中的分子数目表示.设在某一时刻容器 A 中恰有 j 个分子，在下一次试验中，系统的可能状态是 $j-1$ 或 $j+1$，这要看分子是从 A 中选出还是从 B 中选出而定，相应的概率是 j/N 和 $(N-j)/N$.这样的试验可用如下称为爱伦弗斯特模型的随机游动来描述：质点运动的状态空间 $E=\{0,1,\cdots,N\}$.若已知质点目前处于状态 $j(0\leqslant j\leqslant N)$，则它在下一时刻右移或左移一个单位的概率分别是

$$p_{j,j+1}=\frac{(N-j)}{N}\quad\text{和}\quad p_{j,j-1}=\frac{j}{N}.$$

因为这是一个所有状态相互连通的有限马尔可夫链，故链是遍历的.

***m* 阶马尔可夫序列**(*m*-order Markov sequence) 亦称 m 阶(离散时间)马尔可夫过程.一类具有推广了的马尔可夫性的随机序列.设 $m\geqslant 0$ 是某一整数，如果对任意整数 $n(\geqslant m)$ 和任意状态 $i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},j$，有

$$P(X(n)=j|X(n-1)=i_{n-1},\cdots,X(1)=i_1,X(0)=i_0)$$
$$=\begin{cases}P(X(n)=j|X(n-1)=i_{n-1},\cdots,\\ \quad X(n-m)=i_{n-m}) & (m\geqslant 1),\\ P(X(n)=j) & (m=0).\end{cases}$$

则称随机变量序列 $\{X(n),n\geqslant 0\}$ 为 m 阶马尔可夫序列.上式表明 m 阶马尔可夫序列的演变只依赖于它在最近 m 个时刻的状态.这性质是普通的马尔可夫性的推广.一阶马尔可夫序列就是普通的离散时间马尔可夫过程，而零阶马尔可夫序列则是相互独立的随机变量序列.

***m* 阶马尔可夫过程**(*m*-order Markov process) 即"m 阶马尔可夫序列".

马尔可夫转移函数(Markov transition function) 由马尔可夫过程的转移函数引申出来的概念.设 $(E,\mathscr{E})$ 为可测空间，T 为 $\mathscr{R}$ 的子集.如果：

1. 对固定的 s,x,t，$P(s,x;t,B)$ 关于 B 是 $\mathscr{E}$ 上概率测度；

2. 对固定的 s,t,B，$P(s,x;t,B)$ 关于 x 是 $\mathscr{E}$ 可测函数；

3. 查普曼-柯尔莫哥洛夫方程成立，即对任意 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$，有

$$P(s,x;u,B)=\int_E P(s,x;t,\mathrm{d}y)P(t,y;u,B);$$

则称四元数组 $P(s,x;t,B)$，$s,t\in T$，$s\leqslant t$，$B\in\mathscr{E}$，$x\in E$ 为马尔可夫转移(概率)函数.一些著作还加上如下的正规性条件，即

4. 对任意 s，$P(s,x;s,B)=I_B(x)$，相应的转移函数亦称为正规的.

如果存在三元函数 $P(t,x,B)$，使 $P(s,x;t,B)=P(t-s,x,B)$，则马尔可夫转移函数 $P(s,x;t,B)$ 称为齐次的.这就是说，在 x 和 B 固定时，$P(s,x;t,B)$ 只依赖于 $t-s$.

转移函数的概念源于马尔可夫过程的条件概率 $P\{X(t)\in B|X(s)=x\}$，后者是 s,t,B,x 的四元函数.一般地，这个四元函数不一定满足转移函数定义中的条件.幸而在许多重要而又很普遍的情形，上述条件概率可选取一个版本，使之满足转移函数的条件.也就是说，存在转移函数 $P(s,x;t,B)$，使

$$P\{X(t)\in B|X(s)=x\}=P(s,x(s);t,B).$$

这时，称 $P(s,x;t,B)$ 为马尔可夫过程 $\{X(t)\}$ 的转移函数，而马尔可夫过程 $\{X(t)\}$ 则称为具有转移函数 $P(s,x;t,B)$ 的马尔可夫过程.当转移函数是齐次时，对应的马氏过程也称为齐次的.

正规马尔可夫转移函数(normal Markov transition function) 见"马尔可夫转移函数".

齐次马尔可夫转移函数(homogeneous Markov transition function) 见"马尔可夫转移函数".

齐次马尔可夫过程(homogeneous Markov process) 见"马尔可夫转移函数"和"马尔可夫过程".

马尔可夫族(Markov family) 和马尔可夫过程相近的概念.设 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是取值于 $(E,\mathscr{E})$ 的随机变量族.记

$$\mathscr{F}=\sigma(X(t),t\in\mathscr{R}_+),$$
$$\mathscr{F}_t=\sigma(X(s),s\leqslant t),$$
$$\mathscr{F}_{\geqslant t}=\sigma(X(s),s\geqslant t)$$

和 $\mathscr{F}_{[s,t]}=\sigma(X(u),\ s\leqslant u\leqslant t)$. $P(s,x;t,\Gamma)$ 是马尔可夫转移函数，又设对每个 $s\in\mathscr{R}_+$，$x\in E$，存在定义于空间 $(\Omega,\mathscr{F}_{\geqslant s})$ 上的概率测度 $P_{s,x}$，如果对所有 $s\in\mathscr{R}_+$ 和 $x\in E$，有：

1. $X(t)$ 定义在 $(\Omega,\mathscr{F}_{\geqslant s},P_{s,x})$ 是一个马尔可夫过程；

2. 这个马尔可夫过程有转移函数 $P(s,x;t,\Gamma)$；

3. $P_{s,x}\{X(s)=x\}=1$；

则称 $(X(t),P_{s,x})$ 为具有转移函数 $P(s,x;t,\Gamma)$ 的马尔可夫族.上述马尔可夫族是对其自然 σ 代数族而言.类似地，可以定义对于一般的上升 σ 代数族的马尔可夫族.在许多场合马尔可夫族又称为马尔可夫过程.在某些著作中还把马尔可夫族称为标准马尔可夫过程(但后者在另外一些著作中则另有含义).

对一般马尔可夫过程，不一定存在上述的概率测度族.但当相空间 E 是 σ 紧距离空间而 $\mathscr{E}$ 是 E 上的波莱尔代数时，这样的 $P_{s,x}$ 是存在的.

如果概率测度族 $P_{s,x}$ 不依赖于 s，转移函数 $P(s,x;t,\Gamma)$ 只依赖于差数 $t-s$ 而与 s,t 的具体值无

关，则相应的马尔可夫族称为齐次的.

齐次马尔可夫族(homogeneous Markov family) 见“马尔可夫族”.

查普曼-柯尔莫哥洛夫方程(Chapman-Kolmogorov equations) 马尔可夫过程理论中用来刻画转移概率特性的一组方程. 对于一般的非齐次马尔可夫过程，查普曼-柯尔莫哥洛夫方程是

$$P(s,x;u,B)=\int_E P(s,x;t,\mathrm{d}y)P(t,y;u,B).$$

其中 s,t,u 是满足 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$ 的任意实数，B 是状态空间 E 的任意可测集，$P(s,x,u,B)$是过程的转移概率. 即当已知过程在时刻 s 处于状态 x 时，它在时刻 u 将转移到集合 B 中的条件概率. 对于齐次马尔可夫过程，这组方程为

$$P(s+t,x,B)=\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,B).$$

其中 s,t 是任意非负实数，B 的意义同上，$P(t,y,B)$ 是转移概率. 即当已知过程在初始时刻处于状态 y，经过长为 t 的时间后将转移到集合 B 中的条件概率. 在马尔可夫链的情形中，对应的查普曼-柯尔莫哥洛夫方程要用离散求和代替积分(参见“转移概率矩阵”).

推移算子族(shift operators) 一族将时间坐标平移的算子. 设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为取值于可测空间$(E,\mathscr{E})$和定义在$(\Omega,\mathscr{F})$上的随机过程，如果对每一 $t\geqslant 0$，θ_t 是满足如下条件的从 Ω 到 Ω 中的映像：对任意 $s\geqslant 0$，有 $X(s,\theta_t\omega)=X(s+t,\omega)$，则称$\{\theta_t,t\geqslant 0\}$为推移算子族. 对于可测函数 $\eta(\omega)$，则定义 $\theta_t\eta(\omega)=\eta(\theta_t\omega)$. 当 Ω 是定义在 $\mathscr{R}_+$ 上取值于 $\mathscr{E}$ 的全体函数(右连续函数或连续函数)空间，而$\{X(t)\}$定义为：$X(t,\omega)=\lambda(t)$，$t\in\mathscr{R}_+$，$\omega=\lambda(\cdot)$，则 θ_t 一定存在. 但对一般的 Ω，θ_t 不一定存在. 不过总可以扩大基本空间 Ω，使得推移算子 θ_t 存在，而且又不影响原过程的概率性质.

转移函数的随机连续性(stochastic continuity of a transition function) 转移函数的一种关于时间参数的连续性质. 设状态空间 E 为距离空间，如果对任意 $x\in E$，任意包含 x 的开集 G，有

$$\lim_{t\to 0+}P(t,x,G)=1.$$

则称转移函数 $P(t,x,B)$为随机连续的. $P(t,x,G)$随机连续，等价于对任意 E 上的有界实值连续函数 $f(x)$，有

$$\lim_{t\to 0+}T_tf(x)=f(x)\quad(\forall x\in E),$$

其中(T_t)为 $P(t,x,B)$对应的半群算子.

停时(stopping time) 一类随机时刻. 指具有某种与将来无关性质的随机时刻. 确切地说，对于给定的 σ 代数流$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$，如果对任意 $t\in[0,+\infty)$，有$\{T\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$，则函数 $T:\Omega\to[0,+\infty]$称为$\{\mathscr{F}_t\}$停时. 停时有如下的直观解释：$\mathscr{F}_t$ 可理解为某过程在时刻 t 以前的全部信息，而 T 则是联系于过程的某随机事件的发生时刻. 停时的条件就是“该随机事件在 t 以前发生”的事件完全取决于过程在时刻 t 以前的信息 $\mathscr{F}_t$. 例如，在离散情形，当一赌徒决定当他胜一百次即停止赌博时，他停止赌博的时刻 τ 是一随机变量，事件$\{\tau=n\}$表示他赌到第 n 次恰好胜一百次. τ 是否等于 n 当他赌到第 n 次后即可决定. 若 $\mathscr{F}_n$ 包含第 n 次赌博以前(含第 n 次)有关赌徒胜负的全部信息，则$\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n$，即 τ 是一$\{\mathscr{F}_n\}$停时.

停时又称可选时或马尔可夫时或与将来无关的随机变量.

可选时(optional time) 即“停时”.

马尔可夫时(Markov time) 一类随机时刻. 但有些著作在同时使用马尔可夫时和停时两词的时候，对停时还要求它取有穷值的概率等于 1.

首达时(first entrance time or first passage time) 一类随机时刻. 是随机过程首次到达某状态集合的时刻. 设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为取值于$(E,\mathscr{E})$上的随机过程，$A\in\mathscr{E}$，令(约定 $\inf\varnothing=+\infty$)

$$D_A(\omega)=\inf\{t\geqslant 0:X(t,\omega)\in A\}\quad(\omega\in\Omega).$$

则称 D_A 为集合 A 的首达时. 首达时是个很重要的概念，它是历史上首先被考虑的一类随机时间. 一般情形下验证 D_A 为停时(对$\{X(t)\}$的自然 σ 代数族而言)并不是容易的. 若 E 为局部紧可分距离空间，$\mathscr{E}$ 为其上的波莱尔代数，$\{X(t)\}$为马氏过程，则当 A 为开集时易证 D_A 为停时.

初遇(début) 比首达时更广的概念. 设 Ω 为一集合，$H\subset[0,+\infty)\times\Omega$，令

$$D_H(\omega)=\inf\{t\geqslant 0:(t,\omega)\in H\}\quad(\omega\in\Omega),$$

则称 D_H 为集合 H 的初遇. 此处约定 $\inf\varnothing=+\infty$. 可以证明，当 H 为循序可测集时，D_H 为停时.

首中时(first hitting time) 现代马尔可夫过程理论的一个重要概念. 设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为取值于$(E,\mathscr{E})$上的马氏过程，$A\in\mathscr{E}$，令

$$T_A(\omega)=\inf\{t>0:X(t,\omega)\in A\}$$

$$(\omega\in\Omega)(\text{约定 }\inf\varnothing=+\infty),$$

则称 T_A 为集合 A 的首中时或 $A^c(=E\backslash A)$的首出时. 可以证明，若 E 为局部紧可分距离空间，$\mathscr{E}$ 为 E 的波莱尔代数，$\{X(t)\}$为亨特过程，则 T_A 为停时. T_A 与 D_A 有这样的联系：

$$T_A=\lim_{s\downarrow 0}(s+D_A\circ\theta_s).$$

其中 θ_s 为马氏过程$\{X(t)\}$的推移算子. 当 $X(0,\omega)\notin A$ 时，有 $T_A\equiv D_A$.

首出时(first exit time) 见“首中时”.

强马尔可夫过程(strong Markov process) 一

类随机过程.指具有比马尔可夫性更强的条件无后效性的随机过程.如果对于任意停时 τ 和 $\mathscr{B}\in\sigma(X(\tau+u),u\geqslant 0)$($\tau$ 后 σ 代数),有

$$P(B|\mathscr{F}_{\tau})=P(B|X(\tau)). \qquad (1)$$

其中 $\mathscr{F}_{\tau}=\{A\in\mathscr{F},A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t}\}$ 是 τ 前 σ 代数,则称马尔可夫过程 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_{+}\}$ 是强马尔可夫过程.由等式(1)刻画的性质称为强马尔可夫性.因为任意非负常数 t 都是一个停时,所以(1)式是“马尔可夫过程”中性质 2 的加强(参见“马尔可夫过程”),而强马尔可夫性只不过是在描述马尔可夫性的等式中用任意停时 τ 代替任意固定的时刻 t.

许多常见的马尔可夫过程,例如,离散时间参数马尔可夫过程,布朗运动等都具有强马尔可夫性.但也存在马尔可夫过程不是强马尔可夫过程的例子.

强马尔可夫性(strong Markov property) 见“强马尔可夫过程”.

马尔可夫半群(Markov semigroup) 亦称马尔可夫转移半群.一种算子.指由齐次马尔可夫过程的转移函数定义的半群算子.设$(E,\mathscr{E})$为可测空间,$B(E)$为 E 上所有 $\mathscr{E}$ 可测有界实值函数的空间.在 $B(E)$中引入范数

$$\|f\|=\sup_{x}|f(x)|,$$

则 $B(E)$就成为巴拿赫空间.令$\{X(t),t\in\mathscr{R}_{+}\}$是以$(E,\mathscr{E})$为相空间的齐次马氏过程,它的转移函数为 $P(t,x,B)$.在 $B(E)$上定义算子 T_t:

$$T_tf(x)=\int_E f(y)P(t,x,\mathrm{d}y) \quad (\forall f\in B(E)).$$

则 $T_tB(E)\subset B(E)$,$T_tT_s=T_{t+s}$,且 T_t 为有界线性算子.因此,算子族$\{T_t\}_{t\in\mathrm{R}_{+}}$构成算子半群,这就是马尔可夫(转移)半群.由于这个半群总可完全惟一地决定过程的转移函数,考虑马尔可夫过程相应的算子半群是很有好处的.由此而发展了一整套马尔可夫半群理论.

人们还可以考虑另一个半群:设 $M(E)$表示$(E,\mathscr{E})$上有限符号测度的巴拿赫空间,其上的范数定义为全变差,即 $\|\mu\|=\mu(E^{+})-\mu(E^{-})$,其中 $E^{+}\cup E^{-}=E$ 为 E 关于 μ 的任一分解,对每一 $t\in\mathscr{R}_{+}$,令

$$T_t^{*}\mu(B)=\int_E P(t,x,B)\mu(\mathrm{d}x) \quad (\forall B\in\varepsilon),$$

则$\{T_t^{*}\}_{t\in\mathscr{R}_{+}}$构成 $M(E)$上的有界线性算子半群.

算子 T_t 与 T_t^{*} 有着共轭的关系.但这种关系不是完全的,因为 $B(E)$与 $M(E)$中一般没有一个是另一个的整个共轭空间.虽然如此,人们还是只需研究两个半群中的一个就可以了.一般地,研究$\{T_t\}$较为方便些.

对于非齐次情形,也相应有类似的带有两个参数的半群算子族$\{T_{s,t}\}$与$\{T_{s,t}^{*}\}$.

马尔可夫转移半群(Markov transition semigroup) 即“马尔可夫半群”.

无穷小算子(infinitesimal operator) 亦称无穷小生成元.随机过程理论的重要概念.它可对任意巴拿赫空间上的任一算子半群来定义.此处是对马尔可夫半群而言.如果下面二式右端极限按范数意义存在,则记

$$B_0=\{f:\lim_{t\downarrow 0}\|T_tf-f\|=0,\ f\in B(E)\} \quad (1)$$

定义算子 A:

$$Af=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(T_hf-f),\ f\in B(E), \qquad (2)$$

记 D_A 为 A 的定义域,则有 $D_A\subset B_0$.算子 A 称为马氏过程$\{X(t)\}$的(强)无穷小算子.若(1),(2)的极限是弱收敛极限(即若 $f_n\in B(E)$,$f\in B(E)$,$\|f_n\|$有界,且对每一 $x\in E$,$f_n(x)\to f(x)$,则称$\{f_n\}$弱收敛于 f,记为 $w\text{-}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n=f$),并称相应的算子 $\widetilde{A}$ 为弱无穷小算子.无穷小算子 A 是线性的,但未必有界.

无穷小生成元(infinitesimal generator) 即“无穷小算子”.

强无穷小算子(strong infinitesimal operator) 见“无穷小算子”.

弱无穷小算子(weak infinitesimal operator) 见“无穷小算子”.

预解算子族(resolvent operators) 亦称预解式.研究马尔可夫半群和对应的无穷小算子的重要工具.和无穷小算子 A 一样,此处仍只考虑马尔可夫过程的转移函数.对每一复数 $\lambda(\mathrm{Re}\lambda>0)$,定义算子 R_λ:

$$\begin{aligned}R_\lambda f&=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_tf\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\int_E f(y)P(t,x,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

此处积分按黎曼意义(收敛是按范数意义).R_λ 至少在 B_0 上有定义.算子族$\{R_\lambda\}$称为马尔可夫半群$\{T_t\}$的预解算子族.

对每个复数 $\lambda(\mathrm{Re}\,\lambda>0)$,$R_\lambda$ 是线性有界算子.虽然预解算子族不一定能惟一地决定半群$\{T_t\}$(因为对任意 $x,\Gamma\in\mathscr{E}$ 由 R_λ 只能对几乎所有 $t>0$ 求出 $P(t,x,\Gamma)$,而不是对所有 $t>0$),但在研究 T_t 与它的无穷小算子 A 的关系时,R_λ 是一个重要工具.

预解式(resolvent) 即“预解算子族”.

过分函数(excessive function) 现代马尔可夫过程理论的重要概念.设$\{T_t\}_{t\in\mathscr{R}_{+}}$为齐次马尔可夫过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$的转移半群,$(E,\mathscr{E})$为其相空间,对于 $f\in\mathscr{E}$,$0\leqslant f<+\infty$,当 $\alpha=0$ 时,0 过分函数简称过分函数.如果对 $\alpha>0$,有:

1. $\forall t\geqslant 0,\forall x\in E$，$f(x)\geqslant e^{-\alpha t}T_tf(x)$；

2. $f=\lim\limits_{t\downarrow 0} e^{-\alpha t}T_tf$；

则称 f 为关于半群$\{T_t\}$的 α 过分函数.

过分函数与古典位势理论中的上调和函数有着十分密切的联系，在布朗运动过程情形下，非负上调和函数就是过分函数. 它是研究亨特过程的一个基本工具.

位势(potential)　物理学中位势概念的数学抽象. 设 D 为 $\mathscr{R}^d$ 的开子集，$L(x,y)$，$x,y\in D$ 是关于 x,y 对称的函数(势核). 给定 D 上的一个测度 μ，则 μ 的 L 势 L_μ 定义为

$$L_\mu(x)=\int_D L(x,y)\mu(\mathrm{d}y).$$

若 f 是 D 上波莱尔可测函数，则 f 的 L 势定义为

$$Lf(x)=\int_D L(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

位势的概念起源于物理学. 设有一离散电荷分布，即有 m 个电荷 g_i，分别位于点 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$，这组电荷在 x 点($x\neq x_i$)处产生的势就是把单位电荷自无穷远处移到 x 所做的功. 故此势为

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{g_i}{|x-x_i|}.$$

其中$|x-x_i|$表示点 x 与 x_i 的距离. 把这个概念一般化，就得到上述数学中的势的定义.

位势理论与马尔可夫过程有着深刻的联系，角谷静夫证明了平面上狄利克雷问题的解可以用二维布朗运动的某些概率特征来表达，由此发现布朗运动与位势间的关系：随着相空间 R^n 的维数 n 的不同，情形也有所不同. 当 $n=2$ 时，布朗运动是常返的，这时对应对数势，即位势定义中

$$L(x,y)=\frac{1}{\pi}\ln|y-x|.$$

当 $n\geqslant 3$ 时，布朗运动是瞬时的，这时对应牛顿位势，即

$$L(x,y)=\frac{\Gamma(n/2-1)}{2\pi^{n/2}}|y-x|^{2-n}$$

$$\left(=\int_0^{+\infty}p(t,x,y)\mathrm{d}t\right).$$

其中 $p(t,x,y)$为转移概率函数的密度.

费勒过程(Feller process)　一类马尔可夫过程. 指其对应的转移算子把连续函数映为连续函数的马尔可夫过程. 设 E 为距离空间，$\mathscr{E}$ 为 E 上开集产生的 σ 代数，C 为定义在 E 上连续函数的全体. 如果$\forall s\leqslant t$，若 $f\in C$，有函数 $T_{s,t}f\in C$，则称 E 上的转移函数$P(s,x;t,B)$为费勒的. 此处

$$T_{s,t}f(x)=\int_E P(s,x;,t,\mathrm{d}y)f(y).$$

也就是说，转移函数对应的算子族 $T_{s,t}$把连续函数映为连续函数. 这个条件是很自然的，因为它实质上要求当 $x\to x_0$ 时，概率测度 $P(s,x;t,\cdot)$弱收敛于

$$P(s,x_0;t,\cdot).$$

如果马尔可夫过程$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$的转移函数是费勒的，则以$(E,\mathscr{E})$为相空间的该马尔可夫过程称为费勒过程. 如果费勒过程的转移函数为齐次的，则称该费勒过程为齐次的.

当 E 为紧距离空间时，随机连续的费勒转移函数所对应的半群理论已十分完满. 此时，强、弱无穷小算子 A 和 $\widetilde{A}$ 是一致的，而且转移函数由其无穷小算子惟一决定.

费勒转移函数(Feller transition function)　见“费勒过程”.

齐次费勒过程(homogeneous Feller process)　见“费勒过程”.

亨特过程(Hunt process)　一类满足某些连续性条件的强马尔可夫过程. 如果下列三个条件成立：

1. 它是右连续的；

2. 它具有强马尔可夫性；

3. 它是拟左连续的，即对任一列上升趋于停时 T 的停时$\{T_n\}$，有

$$\lim_{n\to+\infty}X(T_n)=X(T)\quad \text{a. s. 在}\{T<+\infty\}\text{上}；$$

则齐次马尔可夫过程$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$称为亨特过程.

亨特过程与位势理论有着密切联系，这种联系是由亨特(Hunt,G. A.)等人在把布朗运动与位势的联系推广到一般马尔可夫过程时发展起来的.

扩散过程(diffusion process)　一种马尔可夫过程. 粗略地说，扩散过程就是具有连续样本轨道的强马尔可夫过程. 但它的严格定义有许多大同小异的形式，下面的定义有较好的直观意义. 如果下面两条件成立.

1. $\forall\varepsilon>0,t\geqslant 0,x\in\mathscr{R}^n$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|>\varepsilon}P(t,x;t+h,\mathrm{d}y)=0;$$

2. 存在 n 维向量 $b(x,t)$与 $n\times n$ 矩阵 $a(x,t)$使得$\forall\varepsilon>0,t\geqslant 0,x\in\mathscr{R}^n$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|<\varepsilon}(y_i-x_i)P(t,x;t+h,\mathrm{d}y)$$
$$=b_i(x,t)\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|<\varepsilon}(y_i-x_i)(y_j-x_j)P(t,x;t+h)\mathrm{d}y$$
$$=a_{ij}(x,t)\quad(1\leqslant i,j\leqslant n).\tag{2}$$

$$(b=(b_1,b_2,\cdots,b_n),\ a=(a_{ij}))；$$

则具有转移函数 $P(s,x;t,B)$的 n 维马尔可夫过程称为(n 维)扩散过程. 向量 b 称为漂移系数，矩阵 a 称为扩散系数(矩阵).

在实际中，许多物理、生物、经济和社会现象都可用扩散过程来模拟或逼近. 若把 $X(t)$理解为质点的位移，则条件 1 表示在充分小的时间间隔内质点

不可能作大于预先任意给定的常数 ε 的位移，这接近于说过程的样本轨道必须是连续的. 而条件 2 在大多数场合下把积分区域扩大到 R^n 也成立. 因而(1)式表示位移的无穷小均值，也就是质点的位移速度为 $b(x,t)$. 又由(2)式和(1)式便知 $a(x,t)$为位移的无穷小方差，表示质点运动偏离均值的程度. 在实际中，这主要是因质点受到随机碰撞和热的起伏等因素影响而产生的.

漂移系数(drift coefficient)　见“扩散过程”.

扩散系数(diffusion coefficient)　见“扩散过程”.

无穷质点马尔可夫过程(Markov processes with infinite particles)　一类重要的马尔可夫过程. 如果其状态空间 X 为 $\mathscr{R}^d$ 上的拉东(Radon)计数测度空间(即在紧集上质点数目有穷)，则该马尔可夫过程称为无穷质点马尔可夫过程. 无穷质点马尔可夫过程源于统计物理中质点的相变问题. 后来不断发展起来，出现了大批模型. 下面以自旋模型为例.

自旋(spin)模型：如果它的相空间 $X=\{0,1\}^S$，即 X 为定义在 S 上取值 0 或 1 的函数空间，其中 S 为可数集；而且存在函数 $C(u,x):S\times X\to\mathscr{R}_+$ 使得当 $t\to 0$ 时，有

$$\begin{cases}P_x(X_t(u)\neq X(u))=C(u,x)t+o(t)\\ \qquad (x\in X,u,v\in S)\\ P_x(X_t(u)\neq X(u),X_t(v)\neq X(v))=o(t)\\ \qquad (u\neq v\in S).\end{cases}\tag{1}$$

则该马尔可夫过程$(X_t,P_x,x\in X)$称为自旋过程.

自旋模型的直观意义是：S 表示粒子系统的位置集，每个位置 $u\in S$ 处的粒子的可能状态是 0 或 1，X 中的每个元 x 就是整个粒子系统的一个状态(称为系统的组态). $x(u)$表示在 $u\in S$ 处粒子的状态. 而(1)式表示 $C(u,x)$就是系统在 u 处的粒子的状态从 $x(u)$变到 $1-x(u)$(变相)的速率，而且在两个以上的位置同时发生相交的概率为 0.

按照 S 及 $C(u,x)$的各种不同取法，自旋模型又分为伊辛模型，接触模型(或增长模型)，选举模型等. 除自旋模型外，无穷质点马尔可夫过程还有排它(exclusive)模型，反应扩散模型等.

自旋过程(spin process)　见“无穷质点马尔可夫过程”.

随机点过程与分支过程

随机点过程(stochastic point process or random point process)　简称点过程. 一类数学模型. 它是描述按一定统计规律在空间 X 中随机地分布的一些点的数学模型. 粗略地说，随机点过程就是随机的点分布. 现实生活中存在着许多这样的随机现象，其中人们所关心的随机事件具有高度局部化的特点，亦即事件的发生可以认为只限于在时间或空间(统称为状态空间并记为 $\mathscr{X}$)中的一个很小的范围内，因此在数学上可以用一个理想化的点来表示.

最常见的情形是状态空间 $\mathscr{X}$ 取为实数直线 $\mathscr{R}=(-\infty,+\infty)$或它的非负部分 $\mathscr{R}_+=[0,+\infty)$. 因为实数有大小先后的次序，故这样的点过程又称为(随机)事件序列或事件流.

在数学上也可以把随机点过程定义为一类特殊的随机测度——随机计数测度(简称计数测度). 如同在“随机测度”条中所述，设 $\mathscr{X}$ 是满足第二可数公理的局部紧德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)空间. 定义在 $\mathscr{X}$ 上的波莱尔代数 $\mathscr{B}(\mathscr{X})$上的计数测度是在紧集上为有限的非负整值测度，人们用 $\mathscr{N}(\mathscr{X})$ 表示它们的全体，$\mathscr{B}(\mathscr{N})$表示 $\mathscr{N}(\mathscr{X})$上(关于淡拓扑)的波莱尔代数. 于是，$\mathscr{X}$ 上的一个随机点过程就是从基本概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\mathscr{N}(\mathscr{X}),\mathscr{B}(\mathscr{N}))$中的一个可测映象 ξ. 注意对任意固定的 $\omega\in\Omega$，$\xi(\omega)\in\mathscr{N}(\mathscr{X})$是一计数测度. 由于$\mathscr{N}(\mathscr{X})\subset\mathscr{M}(\mathscr{X})$，故随机点过程是特殊的随机测度. 又若 ξ 是一随机点过程，则对任意 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{N})$，$P\xi^{-1}(A)=P\{\omega\in\Omega,\xi(\omega)\in A\}$诱导出可测空间$(\mathscr{N}(\mathscr{X}),\mathscr{B}(\mathscr{N}))$上的一个概率测度 $P\xi^{-1}$，并称其为 ξ 的分布. 由于 ξ 和它的分布是一一对应的，故又可把一个随机点过程定义为可测空间$(\mathscr{N}(\mathscr{X}),\mathscr{B}(\mathscr{N}))$上的一个概率测度. 注意上面定义的点过程是局部有限的，即过程在 $\mathscr{X}$ 的任意紧集(当 $\mathscr{X}=\mathscr{R}$ 或 $\mathscr{R}$ 的一个子集时，紧集可用有界集代替)中的点数一定是有限的.

对于状态空间是 $\mathscr{R}_+=[0,+\infty)$的随机点过程(不失一般性，可设在时刻 $t=0$ 没有点发生)，人们可以把它的点按从小到大的顺序排列为 $0=S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots$，并用随机变量序列$\{S_n,n\leqslant 0\}$或由 $T_n=S_n-S_{n-1}$定义的点间间距序列$\{T_n,n\geqslant 1\}$表示该点过程. 另一方面，若以 $N(t)$记过程在区间$(0,t]$中发生的点数，则$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一计数过程；若给定了一计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$，则通过

$$S_n=\inf\{t:N(t)\geqslant n\}$$

可确定一点列$\{S_n,n\geqslant 0\}$(如前，令 $S_0=0$). 由于这种一一对应关系，人们在数学上往往把一个点过程和相应的计数过程看做是等同物(参见“随机测度”和“计数过程”).

点过程(point process)　随机点过程的简称.

计数过程(counting process)　一类有广泛应用的非负整数值随机过程. 如果 $N(t)$表示在时刻 t 以前(包括时刻 t)发生的事件数目，则该随机过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$称为计数过程. 确切地说，计数过程是满足下列条件的随机过程：

1. $N(t)$取非负整值.

2. 若$s<t$,则$N(s)\leqslant N(t)$.

3. 对于$s<t$,$N(t)-N(s)$等于在区间$(s,t]$中发生的事件数.

随机测度(random measure) 取测度值的随机变量.设$\mathscr{X}$是满足第二可数公理(即有可数拓扑基)的局部紧豪斯多夫空间,$\mathscr{B}(\mathscr{X})$是$\mathscr{X}$上由所有开集产生的波莱尔代数,$\mathscr{M}(\mathscr{X})$是定义在$\mathscr{B}(\mathscr{X})$上的拉东测度,即在紧集中取有限值的测度的全体.人们可以通过淡收敛在空间$\mathscr{M}(\mathscr{X})$上引入淡拓扑,并记$\mathscr{M}(\mathscr{X})$上的波莱尔代数为$\mathscr{B}(\mathscr{M})$.$\mathscr{X}$上的一个随机测度就是从基本概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\mathscr{M}(\mathscr{X}),\mathscr{B}(\mathscr{M}))$中的一个可测映像$\xi(\cdot)$.注意,对于任意$\omega\in\Omega$,$\xi(\omega)\in\mathscr{M}(\mathscr{X})$是一个拉东测度,故粗略地说,随机测度就是取拉东测度值的随机变量.若ξ是一个随机测度,则对任意$A\in\mathscr{B}(\mathscr{M})$,由$P\xi^{-1}(A)=P\{\omega\in\Omega,\xi(\omega)\in A\}$可诱导出可测空间$(\mathscr{M}(\mathscr{X}),\mathscr{B}(\mathscr{M}))$上的一个概率测度$P\xi^{-1}$(称为$\xi$的分布).类似于普通随机变量和它的分布函数的对应关系,也可以把一个随机测度看做是定义在空间$(\mathscr{M}(\mathscr{X}),\mathscr{B}(\mathscr{M}))$上的一个概率测度.

当$\mathscr{X}=\mathscr{R}_+\equiv[0,+\infty)$时,每一拉东测度$\mu\in\mathscr{M}(\mathscr{R}_+)$和它的分布函数$\Lambda(t)=\mu\{[0,t]\}$——一个定义在$\mathscr{R}_+$上的有限单调不减右连续函数是一一对应的.故用$\overline{M}(\mathscr{R}_+)$表示所有这样的函数$\Lambda(t)$,则可以把$M(\mathscr{R}_+)$和$\overline{M}(\mathscr{R}_+)$看做是等同的空间.

随机事件序列(sequence of random events) 亦称事件流.一类随机点过程.指状态空间(即点发生空间)$\mathscr{X}$是时间轴的随机点过程.

事件流(stream of events) 即"随机事件序列".

齐次泊松过程(homogeneous Poisson process) 一类既简单又在理论和应用中起着重要作用的随机点过程.可以这样说,随机点过程是以这类过程为基石发展起来的.对于计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$,如果它满足以下条件:

1. $P(N(0)=0)=1$;

2. 有独立增量,即过程在不相交区间的增量是独立的,这也就是说过程是无后效的;

3. 对任意$t>s\geqslant 0$,增量$N_{s,t}=N(t)-N(s)$有参数为$\lambda(t-s)$的泊松分布,即对于$k=0,1,2,\cdots$,

$$P(N_{s,t}=k)=e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}.$$

其中$\lambda>0$是一常数,为过程的发生率或强度;则称此计数过程为齐次泊松过程.

上述定义有许多等价形式.在此,只介绍其中比较直观和便于推广的一种.其中描述初始状态的条件1(这不是本质的限制)和无后效性要求条件2不变,条件3则代之以3′和4:

3′. 有平稳增量,即对任意$t>s\geqslant 0$和$h>0$,增量$N_{s,t}$和$N_{s+h,t+h}$有相同的分布.

4. 过程是有序的,即对任意$t\geqslant 0$和$h>0$有$P(N_{t,t+h}\geqslant 2)=o(h)$当$h\to 0$.

由条件4可以推出过程以概率1没有重点,即在任意时刻t,过程$\{N(t)\}$实际上不可能有跃度超过1的跳跃.

齐次泊松过程可以看做是事件间距有相同指数分布的普通更新过程,或者是生率为常数的纯生过程(参见"更新过程"和"纯生过程").

最简单流(simplest stream of events) 俄国数学家、教育家辛钦(Хинчин, А. Я.)等苏联学者把齐次泊松过程称为最简单流.

带时倚强度的泊松过程(Poisson process with time-dependent intensity) 亦称带变动参数流.强度可随时间变化的泊松过程.即在齐次泊松过程的定义中允许强度λ随时间t而变(这时过程自然不再有平稳增量),亦即强度λ是变元t的非负函数$\lambda(t)$时,就得到带时倚强度的泊松过程.这是一类特殊的非齐次泊松过程,其累积强度函数$\Lambda(t)$有积分表示

$$\Lambda(t)=\int_0^t\lambda(s)\mathrm{d}s.$$

(参见"齐次泊松过程"和"非齐次泊松过程")

带变动参数流(stream of events with variable parameter) 即"带时倚强度的泊松过程".这一术语曾多次出现在苏联文献中.

非齐次泊松过程(inhomogeneous Poisson process) 一种计数过程.如果在齐次泊松过程的定义中除去平稳性的要求,就得到非齐次泊松过程.确切地说,如果计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$满足以下条件:

1. $P(N(0)=0)=1$;

2. 过程是有序的,即对任意$t\geqslant 0$和$h>0$,有

$$P(N_{t,t+h}\geqslant 2)=o(h)\ (h\to 0);$$

3. 有独立增量;

则称该计数过程为非齐次泊松过程,上面的条件2可代之以2′:

2′. 对于任意实数$t\geqslant 0$和$s\geqslant 0$,增量$N_{t,t+s}$有参数为$\Lambda(t+s)-\Lambda(t)$的泊松分布,这里$\Lambda(t)=E[N(t)]$是$[0,+\infty)$上的非负单调不减连续函数,并称之为过程的累积强度函数.

带时倚强度的泊松过程是一类特殊的非齐次泊松过程,这时

$$\Lambda(t)=\int_0^t\lambda(s)\mathrm{d}s$$

可表为强度的积分.

累积强度函数(accumulate intensity function) 见"非齐次泊松过程".

广义齐次泊松过程(generalized homogeneous Poisson process) 亦称平稳无后效流.一种齐次泊松过程.在齐次泊松过程的定义中除去有序性条件就得到广义齐次泊松过程.可以证明,若$\{N(t),t\geqslant 0\}$是广义齐次泊松过程,则对任意$t>0$,$N(t)$的概率母函数

$$G_{N(t)}(s)\equiv\sum_{k=0}^{+\infty}P(N(t)=k)s^k=e^{\lambda t[G(s)-1]}.$$

其中$\lambda\geqslant 0$是一常数,$G(s)$是某一正整值随机变量的概率母函数,即

$$G(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}p_k s^k\quad\left(p_k\geqslant 0\text{ 和 }\sum_{k=1}^{+\infty}p_k=1\right).$$

因为上面的$G_{N(t)}(s)$可由在齐次泊松过程的概率母函数$e^{\lambda t[s-1]}$中用$G(s)$替换s而得,故可以设想广义齐次泊松过程是经由以下两步产生:首先,以给定的λ作强度确定一齐次泊松过程$\{M(t),t\geqslant 0\}$;然后由这过程确定广义泊松过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$的点(亦即跳跃)发生时刻.在每一个这样的时刻有k个点(即跃度为k的跳跃)的概率是$p_k(k=1,2,3,\cdots)$,而且各个时刻发生的点数是相互独立的.广义齐次泊松过程有如下的分解表示:

$$N(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\mu^k(t)\quad(t\geqslant 0).$$

其中$\{\mu^k(t),t\geqslant 0\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$是强度为λp_k的相互独立的齐次泊松过程(参见"齐次泊松过程").

平稳无后效流(stationary stream of events without aftereffect) 一种计数过程.指含有平稳和独立增量的计数过程,这一术语多出现在苏联文献中(参见"广义齐次泊松过程.").

广义非齐次泊松过程(generalized inhomogeneous Poisson process) 广义齐次泊松过程的进一步推广.对于计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$,如果它满足以下条件:

1. $P(N(0)=0)=1$;

2. 对于每一$t>0$,$N(t)$的概率母函数

$$G_{N(t)}(s)=e^{\Lambda(t)[G(s)-1]},$$

其中$\Lambda(t)$是$[0,+\infty)$上某一单调不减连续函数,

$$G(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}p_k s^k$$

是某正整值随机变量的概率母函数;则将它称为广义非齐次泊松过程.在上面的$G_{N(t)}(s)$的表示式中取$\Lambda(t)=\lambda t$就得到广义齐次泊松过程.

类似于齐次情形,广义非齐次泊松过程也可以看做是这样产生的过程,它的点发生时刻形成一具有累积强度函数$\Lambda(t)$的非齐次泊松过程.而在每一个这样的时刻发生的点数是相互独立同分布的正整值随机变量,其共同分布由概率母函数$G(s)$确定.另一方面,广义非齐次泊松过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$也有分解表示

$$N(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}kM^k(t).$$

其中$\{M^k(t),t\geqslant 0\}(k=1,2,3,\cdots)$是累积强度函数为$p_k\Lambda(t)$的相互独立的非齐次泊松过程(参见"广义齐次泊松过程"和"非齐次泊松过程").

泊松过程(Poisson process) 一类计数过程.是一类包含齐次与非齐次泊松过程、广义齐次与非齐次泊松过程作为特殊情形的计数过程.其确切定义如下:对计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$,如果它满足以下条件:

1. $P(N(0)=0)=1$;

2. 对于任意实数$t\geqslant 0$和$s\geqslant 0$,增量$N_{t,t+s}$有参数为$\Lambda(t+s)-\Lambda(s)$的泊松分布,这里$\Lambda(t)=EN(t)$是$[0,+\infty)$上的非负单调不减右连续函数;

3. 有独立增量;

则称该计数过程为泊松过程.

上述定义,可由在非齐次泊松过程的定义中,把对累积强度函数$\Lambda(t)$的连续性要求减弱为右连续性而得.如果以$t_1,t_2,t_3,\cdots$记$\Lambda(t)$的跳跃点,相应的跃度是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$令

$$\Lambda^f(t)=\sum_{0<s\leqslant t}[\Lambda(s)-\Lambda(s-0)],$$

这是一个在t_i有跃度$\alpha_i>0(i=1,2,3,\cdots)$的逐段取常值的函数,而$\Lambda^c(t)=\Lambda(t)-\Lambda^f(t)$则是一非负单调不减连续函数.于是$\Lambda(t)$有分解表示$\Lambda(t)=\Lambda^c(t)+\Lambda^f(t)$.对应于累积强度函数的这一分解,一般的泊松过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$有如下的分解

$$N(t)=N^c(t)+N^f(t)\quad(t\geqslant 0),$$

其中$\{N^c(t),t\geqslant 0\}$称为过程$N(t)$的规则分量或有序分量,它是一个累积强度函数为$\Lambda^c(t)$的非齐次泊松过程,$\{N^f(t),t\geqslant 0\}$称为过程$N(t)$的奇异分量或固定原子分量,它的样本函数除在固定的时刻$t_1,t_2,t_3,\cdots$会发生跳跃外是取常值的.过程在各个$t_i(i=1,2,3,\cdots)$的跃度是相互独立的具有参数α_i的泊松随机变量,过程$N^c(t)$和$N^f(t)$是相互独立的.

应当指出,在某些著作中泊松过程有时是指齐次泊松过程或非齐次泊松过程(参见"齐次泊松过程"和"非齐次泊松过程").

普通流(ordinary stream of events) 具有有序性质的计数过程.这一术语多出现在苏联文献中(参见"齐次泊松过程").

无后效流(stream of events without aftereffect) 一种计数过程.这里泛指有独立增量的计数过程.这一术语多出现在苏联文献中(参见"齐次泊松过

程”).

平稳流(stationary stream of events) 一种计数过程.这里指有平稳增量的计数过程(参见“齐次泊松过程”和“平稳点过程”).

带限定后效流(stream of events with limited aftereffect) 一种计数过程.这一术语出现在某些苏联文献中,指相邻事件间距 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 相互独立(不一定同分布)的计数过程.更新过程是一类特殊的带限定后效流(参见“更新过程”和“具有有限记忆的自激点过程”).

巴尔姆流(Palm stream of events) 亦称 P 型流.随机过程术语.这一术语多出现于苏联文献中,指有限定后效的平稳普通流.对于平稳普通流来说,无后效性蕴涵有限定后效性(注意,对于非普通流从无后效性不能推出有限定后效性),故巴尔姆流可看做齐次泊松过程的一种推广.若$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一巴尔姆流,$F_k(x)$是它的第 k 个事件发生时间距 $T_k(k=1,2,3,\cdots)$的分布函数,则

$$F_1(x)=\lambda\int_0^x\varphi_0(t)\mathrm{d}t,F_k(x)=1-\varphi_0(x)\ (k\geqslant 2).$$

其中

$$\lambda=\lim_{h\to 0}\frac{P(N(h)\geqslant 1)}{h}=\int_0^{+\infty}\varphi_0(t)\mathrm{d}t,$$

$\varphi_0(t)$是巴尔姆函数,即在长为 t 的一个区间起点有事件发生的条件下,在此区间内没有事件发生的(条件)概率.因此巴尔姆流由它的巴尔姆函数惟一确定,而且事实上就是平衡更新过程(参见“平稳普通流”、“无后效流”、“带限定后效流”、“平衡更新过程”和“巴尔姆函数”).

P 型流(P-type stream) 即“巴尔姆流”.

巴尔姆函数(Palm functions) 平稳点过程(或者说平稳流)理论中的重要概念和有用工具.巴尔姆(Palm,C.)于 1943 年首先引入这一概念.但他只是定义这函数 $\varphi_0(t)$为已知(平稳事件流)在时刻 t_0 有事件发生时在区间$(t_0,t_0+t]$中没有事件发生的条件概率.俄国数学家、教育家辛钦(Хинчин,А.Я.)于 1955 年进而定义巴尔姆函数为包括上述 $\varphi_0(t)$在内的一族函数$\{\varphi_k(t),k=0,1,2,3,\cdots\}$.对于 $k\geqslant 1$,$\varphi_k(t)$是已知在时刻 t_0 有事件发生时在区间$(t_0,t_0+t]$中有 k 个事件发生的条件概率.当$\{\varphi_k(t),k=0,1,2,\cdots\}$是一概率分布时又称为巴尔姆分布.

巴尔姆分布(Palm distribution) 见“巴尔姆函数”.

复合泊松过程(compound Poisson process) 一类随机过程.是由对泊松过程的每一点赋予一独立同分布的随机变量而得的随机过程.对于随机过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$如果对任意 $t\geqslant 0$,它能表为

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n,$$

其中$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一泊松过程,而$\{Y_n,n=1,2,\cdots\}$是一族独立同分布的随机变量,并且过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$与序列$\{Y_n\}$是相互独立的,则将它称为复合泊松过程.

复合泊松过程可以看做是在泊松过程的点附上标值(用随机变量 Y_n 表示)而得,因而是一类特殊的标值点过程.另一方面,复合泊松过程也可看做是一类特殊的滤过泊松过程,这时响应函数 $\omega(t,\tau_n,u_n)=Y_n$(参见“标值点过程”和“滤过泊松过程”).

滤过泊松过程(filtered Poisson process) 一类随机过程.是对泊松过程施行某种变换即“滤过”而产生的随机过程.对随机过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$,如果它能表为

$$X(t)=\begin{cases}0 & (N(t)=0),\\ \sum_{n=1}^{N(t)}\omega(t,\tau_n,u_n) & (N(t)\geqslant 1).\end{cases}$$

其中$\{N(t),t\geqslant 0\}$是泊松过程,τ_n 是此过程的第 n 个点发生时刻,u_n 是联系于 τ_n 的随机变量,$u_1,u_2,u_3,\cdots$相互独立,而且还独立于过程$\{N(t)\}$,$\omega(t,\tau,u)$称为响应函数,则称该随机过程为滤过泊松过程.

响应函数(respond function) 见“滤过泊松过程”.

更新过程(renewal process) 一类随机过程.是描述元件或设备更新现象的一类随机过程.设对某元件的工作进行观测.假定元件的使用寿命是一随机变量,当元件发生故障时就进行修理或换上新的同类元件,而且元件的更新是即时的(修理或更换元件所需的时间为零).如果每次更新后元件的工作是相互独立且有相同的寿命分布,令 $N(t)$为在区间$(0,t]$中的更新次数,则称计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$为更新过程.在数学上更新过程可简单地定义为相邻两个点事件(即更新)的间距是相互独立同分布(但从原点到第一次更新的间距 T_1 可以有不同分布)的计数过程.根据 T_1 的分布情形更新过程又分为普通更新过程,延迟更新过程和平衡更新过程三类.更新过程也可用过程的事件间距序列$\{T_n,n\geqslant 1\}$给定,这时 $N(t)$和 T_n 有如下关系:$N(t)=\sup\{n:S_n\leqslant t\}$和 $S_n=\inf\{t:N(t)=n\}$,其中

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$$

是第 n 次更新时间($n\geqslant 1$,再定义 $S_0=0$).对于普通更新过程,S_n 是 n 个相互独立同分布的非负随机变量之和,因此在数学上更新过程也可以看做是一类特殊的独立随机变量和.

沃尔德等式(Wold's equation) 计算多个独立

同分布随机变量之和的数学期望的公式. 设 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 是独立同分布且有有限数学期望的随机变量序列, N 是关于此序列的一个取正整数值的停时(即对任意正整数 n, 事件 $\{N=n\}$ 与 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立), 而且 $EN<+\infty$, 则

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = EN \cdot EX.$$

这就是沃尔德等式.

延迟更新过程(delayed renewal process) 亦称变形更新过程. 一种更新过程. 指允许第一个更新间距 T_1(即从原点到第一次更新的间距)的分布 G 和其后的更新间距 $T_2, T_3, \cdots$ 的(共同)分布 F 相异的更新过程. 这类过程产生的背景和得名的原因如下: 设想对一个元件更新模型开始观测的时刻 $t=0$ 并不恰好是一个新元件开始工作的时刻, 因而过程第一个元件的寿命(从开始观测时算起)分布 G 和新元件的寿命分布 F 一般是不相同的. 由于在上述模型中是当一个元件已经工作了一段时间才开始观测的, 所以人们称之为延迟更新过程. 因为普通更新过程和平衡更新过程都可看做延迟更新过程的特殊情形, 故也有人把延迟更新过程称为一般更新过程.

一般更新过程(general renewal process) 即"延迟更新过程".

变形更新过程(modified renewal process) 即"延迟更新过程".

普通更新过程(ordinary renewal process) 一类特殊的延迟更新过程. 指所有更新间距 $T_1, T_2, T_3, \cdots$ 都具有相同分布的更新过程. 有时也简称更新过程.

平衡更新过程(equilibrium renewal process) 一类特殊的延迟更新过程. 它的第一个更新间距 T_1 有分布

$$F_e(x) = \mu^{-1}\int_0^x [1 - F(t)]\mathrm{d}t,$$

其中 μ 是其余更新间距的共同分布 F 的数学期望. 这类过程的得名是由于 F_e 是 F 的平衡分布. 对于更新间距分布是 F 的普通更新过程, 有

$$\lim_{t\to+\infty} P(A(t) \leqslant x) = \lim_{t\to+\infty} P(Y(t) \leqslant x) = F_e(x),$$

这里 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是过程在时刻 t 的年龄和剩余寿命(参见"年龄"和"剩余寿命").

剩余寿命(更新过程的)(residual life of a renewal process) 更新过程的一个重要特性和研究对象. 设 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是一更新过程,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

是第 n 次更新时间. 对于任意固定的时刻 $t>0$, 从 t 到下一次更新的时间间隔 $Y(t) = S_{N(t)+1} - t$ 称为过程在时刻 t 的剩余寿命.

年龄(更新过程的)(age of a renewal process) 随机过程术语. 更新过程 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 在时刻 t 的年龄 $A(t) = t - S_{N(t)}$ 是指 t 和上一次更新的时间间隔.

更新定理(renewal theorem) 一类有关更新过程的极限定理. 其中常见的有:

1. 初等更新定理: 设 $M(t) = EN(t)$ 是在区间 $(0, t]$ 中更新的平均次数, $\mu = ET_n$ 是更新间距的平均长度, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

(注意, 对于齐次泊松过程和平衡更新过程, 精确的等式

$$\frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

对所有 $t>0$ 成立).

2. 布莱克韦尔关键更新定理:

1) 若更新间距 T 的分布 F 是非格子的(即不存在使得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T = nd) = 1$$

的正数 d), 则对任意 $h\geqslant 0$ 有

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M(t+h) - M(t)}{t} = \frac{h}{\mu}.$$

2) 若 F 是格子分布, 其周期是 d, 则

$$\lim_{n\to+\infty} P(\text{在 } nd \text{ 有更新发生}) = \frac{d}{\mu}.$$

3. 史密斯关键更新定理: 设 $Q(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上满足

$$\int_0^{+\infty} Q(t)\mathrm{d}t < +\infty$$

的非负不增函数, 更新间距 T_n 有非格子分布, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t Q(t-x)\mathrm{d}M(x) = \mu^{-1}\int_0^{+\infty} Q(t)\mathrm{d}t.$$

应当指出, 后面两个关键更新定理实质上是等价的, 它们在更新理论及应用中起重要作用.

初等更新定理(elementary renewal theorem) 见"更新定理".

布莱克韦尔关键更新定理(Blackwell's key renewal theorem) 见"更新定理".

史密斯关键更新定理(Smith's key renewal theorem) 见"更新定理".

更新过程的大数定律(law of large numbers for renewal process) 更新理论的基本定律之一. 设 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是一更新过程, 其更新间距有有限的数学期望 μ, 则

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right\} = 1.$$

这就是更新过程的大数定律.

更新函数(renewal function) 一种数学期望. 更新过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$在区间$(0,t]$中的更新次数的数学期望$M(t)=E[N(t)]$(作为变元t的函数)称为更新函数.

更新密度(renewal density) 一种导数. 更新函数的导数

$$m(t)=\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}$$

称为更新密度. 它有如下的概率解释:对于很小的$\Delta t>0$,$m(t)\Delta t$近似地给出在区间$(t,t+\Delta t)$中的平均更新次数.

更新方程(renewal equation) 一种积分方程. 指形如

$$g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

的积分方程. 其中$f(t)$,$h(t)$是已知函数,$g(t)$是作为这方程的解的未知函数. 由于在更新过程理论中许多重要的量满足这类型方程而得名. 例如,更新函数$M(t)$满足方程

$$M(t)=F(t)+\int_0^t M(t-s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中$F(t)$和$f(t)$分别是更新间距的分布函数和密度函数.

交替更新过程(alternating renewal process) 一类特殊的两状态马尔可夫更新过程. 其特征是两类型的更新区间交替出现. 确切地说,交替更新过程就是非负随机向量序列$\{(Z_n,Y_n),n\geqslant 1\}$,其中各$(Z_n,Y_n)$是独立同分布的(因而随机变量序列$\{Z_n\}$和$\{Y_n\}$也各自是独立同分布的),但$Z_n$和$Y_n$(对于任一正整数$n$)可以是相依的. 在元件更新模型中,若更新时间不恒等于零而是一个随机变量,令Z_n和Y_n分别表示第n个元件的使用寿命和它的更新时间,人们就得到一个交替更新过程(参见"马尔可夫更新过程").

有偿更新过程(renewal reward process) 有广泛应用的一种随机模型. 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一更新过程,$\{T_n\}$是这过程的更新间距序列. 假定每一次更新都导致一笔(数量是随机的)报偿,人们用R_n表示联系于第n次更新的报偿. 假设R_n,$n\geqslant 1$,是独立同分布的,但R_n可以依赖于T_n,于是随机向量(T_n,R_n),$n\geqslant 1$,是独立同分布的. 人们把随机向量序列$\{(T_n,R_n),\ n\geqslant 1\}$称为有偿更新过程. 这时,

$$R(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}R_n$$

表示直到时刻t为止的总报偿. 当对任意$n\geqslant 1$有$P(R_n=1)=1$时,有偿更新过程实质上就退化为更新过程.

标值更新过程(marked renewal process) 一种更新过程. 指每一次更新都伴随一标值变量的更新过程. 因为有偿更新过程的报偿R_n可以看做是伴随第n次更新的标值变量,故有些著作直接把有偿更新过程称为标值更新过程(参见"有偿更新过程"和"标值点过程").

马尔可夫更新过程(Markov renewal process) 马尔可夫链和更新过程的一种推广. 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是具有离散状态空间E的随机过程. 令$0(=t_0)<t_1<t_2<\cdots$是过程发生状态转移的时刻,从而$X(t_n)=X(t_n+0)$是过程在时刻t_n(发生状态转移后)所处的状态. 如果对任意$k\in E$,非负整数n和实数$t>0$,有

$$\begin{aligned}&P(X(t_{n+1})=k,\ (t_{n+1}-t_n)\leqslant t\,|\,X(t_0),\\&\quad X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=P(X(t_{n+1})=k,(t_{n+1}-t_n)\leqslant t\,|\,X(t_n)),\end{aligned}$$

则称$\{(X(t_n)\ t_n),\ n\geqslant 0\}$是一马尔可夫更新过程. 若令$\tau_n=t_n-t_{n-1}$,$X_n=X(t_n)$,则这过程也可记为$\{(X_n,\tau_n),\ n\geqslant 1\}$. 注意这时$\{X_n,n\geqslant 0\}$本身是一马尔可夫链. 而且对每一$j\in E$,把使得$X(t_n)=j$的$t_n$依次记为$S_1^j,S_2^j,S_3^j,\cdots$,则$\{S_n^j,n\geqslant 1\}$是一(可能是延迟的)更新过程,所有这样的过程$\{S_n^j,n\geqslant 1\}(j\in E)$的叠置就是序列$t_1,t_2,t_3,\cdots$以上事实正是取名马尔可夫更新过程的依据. 当状态空间$E=\{1,2,3,\cdots,m\}$是有限时,若令$N_j(t)$表示直到时刻t为止过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$转移到状态j的次数$(j=1,2,\cdots,m)$,则$\{N_j(t),t\geqslant 0\}$是对应于更新序列$\{S_n^j,n\geqslant 1\}$的计数过程. 因此人们又把马尔可夫更新过程定义为由$N(t)=\{N_1(t),N_2(t),\cdots,N_m(t)\}$给定的过程. 当$E$只含一个状态时马尔可夫更新过程就退化为更新过程.

半马尔可夫过程(semi-Markov process) 马尔可夫链的一种推广. 人们知道,若$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一马尔可夫链,$0(=t_0)<t_1<t_2<\cdots$是这链发生状态转移的时刻,则随机序列$\{X_n=X(t_n+0),n\geqslant 0\}$是一离散时间参数马尔可夫链,而且链$\{X(t)\}$在状态$X_n=X(t_n+0)$逗留的时间$\tau_{n+1}=t_{n+1}-t_n(n=0,1,2,\cdots)$是指数分布随机变量,其分布的参数可以依赖于状态$X_n$. 现在,如果保留$\{X_n,n\geqslant 0\}$是一马尔可夫链的要求,但允许$\tau_{n+1}(n=0,1,2,\cdots)$可以有依赖于状态$X_n$和$X_{n+1}$的任意分布,则过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$称为半马尔可夫过程.

若$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一半马尔可夫过程,则$\{X_n,t_n,n\geqslant 0\}$(X_n和t_n的意义如上)是一马尔可夫更新过程. 反之,若$\{(X_n,t_n),n\geqslant 0\}$是一马尔可夫更新过程,则由

$$X(t)=X_n\quad(t_n\leqslant t<t_{n+1},n\geqslant 0)$$

定义的过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一半马尔可夫过程. 因为半马尔可夫过程和马尔可夫更新过程有这样的对应

关系，所以人们有时把这两类过程看做是等同的(参见"马尔可夫更新过程").

再生过程(regenerative process)　一类存在再生点的随机过程.所谓"再生点"就是具有如下性质的时刻：从概率论的观点看，当过程演化到这样的时刻就可以认为一切从新开始.更确切地说，设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一随机过程，以概率1存在时刻S_1，使得过程在S_1以后的部分按其概率分布律是从初始时刻开始的整个过程的一个复本.这意味着过程在S_1以后的演变与它在S_1以前的历史无关.由S_1的存在及过程的再生性质可推出在S_1后存在具有同样性质的时刻$S_2<S_3<\cdots$，这样的随机过程就称为再生过程.普通更新过程是再生过程的一种特例，更新时刻就是过程的再生点.另一方面，若$\{S_n,n\geqslant 1\}$是一再生过程的再生点序列，则由$T_n=S_n-S_{n-1}$(令$S_0=0$)确定的更新间距序列$\{T_n,n\geqslant 1\}$给定一更新过程.

生灭过程(birth-death process)　一类描述群体中个体数目的增加和减少的马尔可夫链.设$N(t)$表示在时刻t群体中个体的数目.非负整值的马氏链$\{N(t),t\geqslant 0\}$称为(非齐次)生灭过程，如果它的转移概率$p_{m,n}(s,t)\equiv P(N(t)=n\,|\,N(s)=m)$满足以下条件：存在非负函数$\lambda_0(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots$和$\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t),\cdots$，使得对每一$t\geqslant 0$下列极限存在

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{n,n+1}(t,t+h)}{h}=\lambda_n(t)\qquad(n\geqslant 0),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{n,n-1}(t,t+h)}{h}=\mu_n(t)\qquad(n\geqslant 1),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{n,n}(t,t+h)}{h}=\lambda_n(t)+\mu_n(t)\quad(n\geqslant 0).$$

其中约定对一切$t\geqslant 0$有$\mu_0(t)=0$.这三个极限等式表示当$h>0$很小时，若已知群体在时刻t含有n个个体时，则在时间区间$(t,t+h]$中个体数目增加1，减少1或保持不变的概率分别是$\lambda_n(t)h+o(h)$，$\mu_n(t)+o(h)$和$1-[\lambda_n(t)+\mu_n(t)]h+o(h)$(于是，个体数目变化超过1的概率等于$o(h)$).$\{\lambda_n(t)\}$和$\{\mu_n(t)\}$分别称为过程的生率和过程的灭率，它们一般既依赖于观测时刻t，也和在这时刻的个体数目n有关.如果对所有n，$\lambda_n(t)$和$\mu_n(t)$，实际上只依赖于n而与t无关，则对应的生灭过程称为齐次生灭过程.

过程的生率(birth rate of a process)　见"生灭过程".

过程的灭率(death rate of a process)　见"生灭过程".

齐次生灭过程(homogeneous birth-death process)　见"生灭过程".

纯生过程(pure birth process)　一类特殊的生灭过程.这类过程描述的群体中所有个体能够繁殖而不会死亡，即灭率$\mu_n(t)=0$，对所有n和t.因此群体的个体数目只会随时间推移而增加.当生率$\lambda_n(t)$只依赖于n而与t无关时，过程称为齐次的.

齐次纯生过程(homogeneous pure birth process)　见"纯生过程".

具有线性生率的纯生过程(pure birth process with linear birth rate)　一种纯生过程.它是具有形如$\lambda_n(t)=n\lambda(t)$的生率的纯生过程.在齐次的情形，即$\lambda_n(t)=n\lambda$只依赖于n而与t无关时，对应的过程又称为尤尔-弗里过程(参见"纯生过程").

尤尔-弗里过程(Yule-Furry process)　见"具有线性生率的纯生过程".

有迁入的纯生过程(pure birth process with immigration)　线性生率的纯生过程的一种简单推广.这类过程所描述的群体除了其中的成员会繁殖外，还有从群体外按一定的分布律迁入的移民.确切地说，有迁入的纯生过程就是生率形如

$$\lambda_n(t)=\upsilon(t)+n\mu(t)\quad(n\geqslant 0)$$

的纯生过程，这时迁入的个体形成一强度为$\upsilon(t)$的(非齐次)泊松过程，这些个体迁入后和群体原有的成员一起，按照线性生率的纯生过程繁殖后代(参见"具有线性生率的纯生过程").

自校正点过程(self-correcting point process)　一类生率.是依萨姆(Isham,V.)和威斯科特(Westcott,M.)于1979年首先研究的，形如

$$\lambda(t)=\eta\varphi(\rho t-N(t))$$

的纯生过程.其中η和ρ是正常数，函数$\varphi(\cdot)$满足下列条件：

1. $0\leqslant\varphi(x)<+\infty$对任意$x\in\mathscr{R}$；
2. 存在常数$c>0$，使得$\varphi(x)\geqslant c$对所有$x>0$；
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\varphi(x)>1$和$\lim\limits_{x\to-\infty}\inf\varphi(x)<1$.

由条件3看出，当在区间$(0,t]$中发生的点较少时，对应的$x=\rho t-N(t)$有较大的正值.因而生率$\lambda(t)$有较大的值，这意味着在紧接着t后的区间$(t,t']$中将有较多的点发生.这样一来又导致$x'=\rho t'-N(t')$有绝对值较大的负值，从而$\lambda(t')$又变得较小并使得在t'后的区间将出现较少的点.这说明过程有自校正的特征.维尔-琼斯(Vere-Jones,D.)于1978年和冈田于1984年曾利用这类过程(带有指数形式的$\varphi(x)=\exp\{a+bx\}$)建立地震发生的应力释放模型.

纯灭过程(pure death process)　一类特殊的生灭过程.这类过程描述的群体中所有个体只会死亡而不能繁殖，即生率$\lambda_n(t)=0$对所有n和t.因此群体的个体数目只会随时间推移而减少.当灭率$\mu_n(t)$只依赖于n但与t无关时对应的过程称为齐次的.

齐次纯灭过程(homogeneous pure death process) 见"纯灭过程".

自激点过程(self-exciting point process) 一类强度可以依赖于过程自身历史的点过程.齐次泊松过程的强度是一常数,如果允许强度随时间 t 改变就得到带时倚强度的泊松过程.如果再允许强度在任一时刻 t 的值除了依赖于 t 之外,还与过程在这时刻的点数 $N(t)$有关.则得到的是非齐次纯生过程.现在,若进一步假设过程在任一时刻 t 的强度除了依赖于 t 和 $N(t)$之外,还可能与在时刻 t 前发生的 $N(t)$个点的位置有关.换句话说,依赖于过程在时刻 t 之前(包含 t)的全部历史.于是就得到更广泛一类的点过程——自激点过程.在数学上,自激点过程被定义为满足下述条件的计数过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$:对任意实数 $t\geqslant 0$ 和 $h>0$,

$$P(N_{t,t+h}\geqslant 1\mid N(t),S_1,S_2,\cdots,S_{N(t)}) = \lambda(t,N(t),S_1,S_2,\cdots,S_{N(t)})h + o(h).$$

其中 $S_1,S_2,\cdots,S_{N(t)}$依次是过程的第一,第二,……,第 $N(t)$个点发生时刻.在某些文献的定义中还加上有序性条件

$$P(N_{t,t+h}\geqslant 2\mid N(t),S_1,S_2,\cdots,S_{N(t)}) = o(h)$$

和对初始状态的规定:$P(N(0)=0)=1$.

注意自激点过程的强度 λ 不仅随时间 t 变化,而且还是过程 $N(t)$的现实 ω 的函数,即强度本身是一随机过程,但它受点过程自身的演化制约.

具有有限记忆的自激点过程(self-exciting point process with limited memory) 一类特殊的自激点过程.如果一个自激点过程在任意时刻 t 的强度只依赖于时刻 t、点数 $N(t)$和最靠近 t 的有限 m 个点的发生时间 $S_{N(t)},S_{N(t)-1},\cdots,S_{N(t)-m+1}$,则称它是具有有限 m 记忆的自激点过程.这里 m 是任意非负整数.例如,更新过程是 0 记忆自激点过程.

注意,按定义,0 记忆自激点过程的强度虽然与任何一个点发生时间都没有关系,但它并不是无记忆(即无后效)的.因为这时强度还可以依赖于点数 $N(t)$,亦即部分地依赖于过程在 t 以前的历史.例如,纯生过程是 0 记忆的自激点过程,而泊松过程才是无记忆的.

重随机泊松过程(doubly stochastic Poisson process) 亦称柯克斯过程.一类随机点过程.是柯克斯(Cox,D. R.)于 1955 年在研究处于随机环境的泊松过程时引入的.这类过程可以看做是点发生强度本身是一个随机过程(称为强度过程)的泊松过程.其中强度过程是由反映周围环境或被传送的信息等外部因素支配的.更确切地说,重随机泊松过程在给定了强度过程的条件下是具有给定强度的泊松过程.因此这类过程也称为条件泊松过程.

柯克斯过程(Cox process) 即"重随机泊松过程".

条件泊松过程(conditional Poisson process) 即"重随机泊松过程".

混合泊松过程(mixed Poisson process) 一种泊松过程.指强度本身是一个随机变量的泊松过程.它既可以看做是泊松过程的推广,也可以看做是重随机泊松过程的特例(参见"泊松过程"和"重随机泊松过程").

簇生点过程(clustering point process) 简称簇生过程.一类点过程.指由两级过程形成的点过程,过程由一个称为主过程的基本点过程和由主过程的每一断点(称为簇生中心)产生的点簇(称为从属过程)组成.按照不同的具体情况簇生点过程可以理解为主过程与所有从属过程的叠置,也可以只限于从属过程的叠置.但这种差异不是本质的,因为人们能够通过把簇生中心看做是它产生的点簇中的一点而把前一种情形化为后一种情形处理.

簇生过程(clustering process) 簇生点过程的简称.

奈曼-斯科特过程(Neyman-Scott process) 一类簇生点过程.是奈曼(Neyman,J.)于 1957 年和斯科特(Scott,E. L.)于 1958 年在研究宇宙星体分布时引入的.其基本假定如下:

1. 主过程是齐次泊松过程.
2. 每一主事件以概率分布$\{p_s(k)\}$产生随机 $k(\geqslant 0)$个从属事件.
3. 这 k 个从属事件离簇生中心的距离分别是 $D_1,D_2,\cdots,D_k$,各 $D_j(j=1,2,\cdots,k)$大于零且为相互独立同分布.
4. 主过程参与叠加.

维尔-琼斯(Vere-Jones,D.)于 1970 年曾利用这模型研究地震发生问题.这时若允许从属事件发生于主事件(即主震)之前就对应"前震",若只考虑发生于主事件之后的从属事件序列则是局限于考虑"余震".(参见"簇生点过程").

巴特利特-刘易斯过程(Bartlett-Lewis process) 亦称分支泊松过程.一类簇生点过程.是英国统计学家巴特利特(Bartlett,M. S.)于 1963 年在研究交通运输问题和刘易斯(Lewis,P. A. W.)于 1964 年在研究电子计算机故障问题时引入和讨论的.其基本假定如下:

1. 主过程是齐次泊松过程.
2. 主过程的每一点以概率分布$\{p_s(k)\}$产生随机 k 个从属事件,这些点事件形成一普通更新过程(的前部),各从属过程是相互独立的.
3. 主过程参与叠加(参见"簇生点过程").

分支泊松过程(branching Poisson process)

即“巴特利特-刘易斯过程”.

分支更新过程(branching renewal process) 一类特殊的簇生点过程. 其中基本点过程是更新过程,基本点过程的每一点产生一次级过程. 分支更新过程就是基本点过程和各个次级点的叠置.

平稳点过程(stationary point process) 一种随机点过程. 在许多文献中是指具有平稳增量的随机点过程(等价地说,计数过程)$\{N(t),t\geqslant 0\}$. 即对任意实数 $t>s\geqslant 0$ 和 $h>0$,过程在区间$(s,t]$和$(s+h,t+h]$中的点数(或者说,增量 $N_{s,t}=N(t)-N(s)$ 和 $N_{s+h,t+h}=N(t+h)-N(s+h)$)有相同的分布. 齐次泊松过程和平衡更新过程都是平稳点过程的特例.

应当指出,有些文献把这一术语用于对任意有限多个区间,其增量有平稳联合分布的点过程. 即对任意整数 $k\geqslant 2$ 和实数 $s_1<t_1,s_2<t_2,\cdots,s_k<t_k$ 和 $h>0$,增量

$$N_{s_1,t_1},N_{s_2,t_2},\cdots,N_{s_k,t_k}$$

和
$$N_{s_1+h,t_1+h},N_{s_2+h,t_2+h},\cdots,N_{s_k+h,t_k+h}$$

有相同的 k 维联合分布. 这时,为了把前面提到的具有平稳区间分布的点过程和这种具有较强的平稳性要求的点过程区别开来,常常把前者称为粗平稳点过程.

粗平稳点过程(crude stationary point process) 见“平稳点过程”.

具有平稳间距的点过程(point process with stationary interarrival time) 点间间距序列构成平稳随机序列的点过程. 齐次泊松过程和普通更新过程都是这类过程的特例. 注意这个概念与平稳点过程的概念是不相同的(参见“平稳点过程”).

标值点过程(marked point process) 一种点过程. 令点过程的每一点联系一个标值,就得到标值点过程. 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一基本的点过程. 如果对这过程的每一点 $t_n(n=1,2,3,\cdots)$,赋予一个辅助的随机变量 u_n,并称之为联系于该点的标值,变量 u_n 随机地取值于某一标值空间 $\mathscr{U}$,这种每一点都带有一个标值的点过程即称为标值点过程. 而由

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}u_n$$

定义的随机过程则称为伴随的标值累计过程. 当标值变量 u_n 不含取值 0(空间 $\mathscr{U}$ 的零元素)时,标值点过程和它的标值累计过程是一一对应的,因此认为它们是等同的.

标值空间 $\mathscr{U}$ 可以是一般的抽象空间. 但是,为了能够考虑标值的累加,通常要求在 $\mathscr{U}$ 中定义有“加法”运算. 在一般的标值点过程定义中既不要求标值$\{u_n\}$是独立随机变量序列,也没有规定标值要独立于基本点过程. 一般的标值点过程应用范围很广,复合泊松过程可以看做是一类特殊的标值点过程.

标值累计过程(mark-accumulant process) 见“标值点过程”.

多元点过程(multivariate point process) 一类特殊的标值点过程. 当一个点过程的点被区分为若干种不同的类型时,人们就把这点过程称为多元点过程. 这里的“元”实际上是点的“类型”. 点可以有有限或可数无穷多种类型,故多元点过程在时刻 t 的值可用一有限维或无穷维随机向量$(N^1(t),N^2(t),\cdots,N^m(t))$或$(N^1(t),N^2(t),\cdots,N^k(t),\cdots)$表示,其中 $N^k(t)$表示在区间$(0,t]$中发生的第 k 类型点的数目. 在实际中通常假定不同类型的点不会同时发生.

注意,多元点过程和多维点过程是两个不同的概念.

多维点过程(multidimensional point process) 一类随机点过程. 指点发生空间是多维空间的随机点过程.

排队过程(queueing process) 一种随机过程. 在多数情形中是指描述逗留在排队系统中的顾客数目(或排队长度)的随机过程. 但也有些著作利用这术语泛指在排队问题中涉及的各种随机过程,例如,还包括描述顾客到达和离开排队系统的随机过程等.

嵌入过程(imbedded process) 一种随机过程. 指由在某些特定的时刻对一连续时间参数随机过程的观测而得到的离散时间参数随机过程. 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一个连续时间参数随机过程,如果只在一系列特定的时刻 $t_1,t_2,t_3,\cdots$(在大多数情形中选取过程 $X(t)$发生某类状态变化的时刻)对 $X(t)$进行观测,由此人们得到一个离散时间参数随机过程$\{Y(n),n\geqslant 0\}$. 这个新过程在时刻 n 的状态由原过程在时刻 t_n 的状态确定,即$Y(n)=X(t_n)(n\geqslant 0$,通常设 $t_0=0)$. 人们把新过程$\{Y(n),n\geqslant 0\}$称为原过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$的嵌入过程.

嵌入马尔可夫链是最常见的一类嵌入过程,这时$\{Y(n),n\geqslant 0\}$是一马尔可夫链. 在理论和应用中,当被研究的随机过程不是马尔可夫过程时,利用嵌入马尔可夫链的方法常常能得到较满意的结果.

嵌入马尔可夫链(imbedded Markov chain) 见“嵌入过程”.

马尔可夫判决过程(Markov decision process) 一类把马尔可夫链和动态规划理论结合起来的随机模型. 假定支配人们关心的系统发展的概率规律具有马尔可夫性质(即当已知系统现在的状态对它将来的演变与过去的历史无关). 又设在离散时刻 $t=$

0,1,2,…对这系统进行观测,每次观测后都要根据观测的结果(即系统的状态)随即做出采取某种措施的决定并由此带来相应的报偿(或代价).同时系统状态的转移不仅依赖于它现在所处的状态,而且与决定采取的措施有关,这就是说转移概率不是固定不变的,它可以随措施的不同而改变.人们要求在上述观测和判决过程中选取一系列措施,使得在某种意义(例如,在平均的意义)下总的报偿达到最大(或者代价最小).这样的数学模型就称为马尔可夫判决过程,它可以看做是马尔可夫链模型和动态规划理论结合的一种衍生物.

不会瘫痪的计数器模型(non-paralyzable counter model) 亦称 I 型计数器模型.一类常用的计数器模型.这类计数器的特点是当某个粒子到达计数器并被记录(即计数)后,计数器要被封闭一段随机的时间.在这段时间到达的粒子既不会被记录,也不会对计数器产生任何影响.因此,这类计数器不会从某一时刻开始由于连续被封闭而陷于永远不能工作的瘫痪状态.描述这类计数器工作的随机过程称为不会瘫痪的计数器模型.这类计数器模型问题和更新过程理论有密切关系.

I 型计数器模型(type I counter model) 即“不会瘫痪的计数器模型”.

会瘫痪的计数器模型(paralyzable counter model) 亦称 II 型计数器模型.一类常用的计数器模型.这类计数器的特点是每个到达计数器的粒子不管它是否被记录,都会把计数器封闭一段随机的时间.因此这类计数器有可能从某一时刻开始由于连续被封闭而陷于永远不能工作的瘫痪状态.描述这类计数器工作的随机过程称为会瘫痪的计数器模型.

II 型计数器模型(type II counter model) 即“会瘫痪的计数器模型”.

***p* 型计数器模型**(type-*p* counter model) 一类包含不会瘫痪和会瘫痪计数器模型作为特例的计数器模型.这类模型描述的计数器在没有被封闭时到达的粒子将被记录,一旦粒子被记录后计数器随即被封闭一段随机的时间.当计数器被封闭时到达的粒子不会被记录,而且能以概率 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$封闭计数器一段随机的时间.易见不会瘫痪的计数器是 0 型计数器,会瘫痪的计数器是 I 型计数器.

跳过程(jump process) 跳跃地取值的随机过程.设给定基本概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及上升 σ 域族 $F=\{\mathscr{F}_t\}$,$(X_t)_{t\geqslant 0}$是取值于相空间$(E,\mathscr{B})$的随机过程.它称为跳过程,如果它分段为常值且在任意有限区间只有有限个跳跃点,而轨道是右连续的,即对任意 ω,t,存在 $\varepsilon_0>0$ 使 $X_t(\omega)=X_{t+\varepsilon}(\omega)$当 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.跳跃时间序列$\{T_n\}$可递归地定义如下:

$$T_0=0;$$

$$T_{n+1}(\omega)=\begin{cases}\inf\{t\mid t>\tau_n(\omega)X_t(\omega)\neq X_{T_n}(\omega)\} & (n\geqslant 0),\\ +\infty & (\text{若上面的集合是空集}).\end{cases}$$

点过程是跃度为正整数值的跳过程,离散状态的马尔可夫过程和半马尔可夫也是跳过程.

分支过程(branching process) 一种随机过程.是一类描述群体成员数目变化的随机过程,其中的群体是一代一代地繁殖演化的.在分支过程理论中人们主要关心群体每一代成员数目的分布、数字特征以及群体最终绝种的概率(参见“高尔顿-沃森过程”).分支过程是英国人类学家高尔顿(Galton,F.)和沃森(Watson,H. W.)于 1874 年在研究“家族灭种”问题时首先提出的.

高尔顿-沃森过程(Galton-Watson process) 一类离散时间参数分支过程.设 $X(n)$表示群体第 n 代($n=0,1,2,\cdots$)的成员数目.第 0 代的成员称为群体的“祖先”,他们直接繁殖的后代组成群体的第一代.一般地,群体第 n 代直接繁殖的后代组成群体的第 $n+1$ 代.假定群体中各个成员的繁殖相互独立,而且每一成员的直接后代数目是有相同分布的非负整值随机变量.这样的离散时间参数随机过程$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$称为高尔顿-沃森过程.这类过程也是马尔可夫链.

贝尔曼-哈里斯过程(Bellman-Harris process) 亦称依赖于年龄的分支过程.一类连续时间参数分支过程.假设群体每一代成员的寿命是有相同分布的独立非负随机变量,而且所有成员都是在他们的生命终止时繁殖后代.又设各成员的直接后代数目也是相互独立同分布的.如果用 $X(t)$表示群体在时刻 t 的成员总数,则连续时间参数随机过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$就称为贝尔曼-哈里斯过程.注意,这类过程一般不是马尔可夫过程.贝尔曼-哈里斯过程是贝尔曼(Bellman,R.)和哈里斯(Harris,T. E.)于 1948 年首先研究的.

马尔可夫分支过程(Markov branching process) 一类特殊的贝尔曼-哈里斯过程.这时群体成员的寿命有指数分布,因此这类过程是马尔可夫链(参见“贝尔曼-哈里斯过程”).

依赖于年龄的分支过程(age-dependent branching process) 即“贝尔曼-哈里斯过程”.

超过程(super processes) 亦称测度值分支过程.一种特殊的马尔可夫过程.超过程是分支过程的极限.从 20 世纪中叶起,高斯过程和独立增量过程在随机分析及其应用的发展中起着重要的作用.到了 20 世纪 90 年代,超过程吸引了越来越多的数学家的关注,它已成为研究无穷多个自由度的物理系统的重要工具.

超过程$\{X(t),t\in T\}$可由分支微粒系统取极限而得到. 高斯过程由其一、二阶矩确定,独立增量过程可由列维-辛钦公式确定,而超过程则由其对数拉普拉斯方程确定. 在某种正则性的假定下,超过程$\{X(t),t\in T\}$可视为马尔可夫过程,其投影部分$\{\xi(t),t\in T\}$确定了系统无穷小部分的空间运动. 如果$\{\xi(t),t\in T\}$是具有生成元L的扩散,则$\{X(t),t\in T\}$的对数拉普拉斯方程导出算子$Lu-\psi(u)$,其中非线性函数$\psi(\cdot)$描述分支机制. 通常有$\psi(u)=u^{\alpha}(1<\alpha\leqslant 2)$. 这时称$\{X(t),t\in T\}$为超扩散. 如果$\{\xi(t),t\in T\}$是布朗运动,则$\{X(t),t\in T\}$称为超布朗运动.

超过程与非线性偏微分方程有密切联系,邓肯(Dynkin,E. B.)和其他一些数学家在这方面做了许多很好的工作.

测度值分支过程(measure-valued branching process) 即“超过程”.

超扩散(super-diffusion) 见“超过程”.

超布朗运动(super-Brownian motion) 见“超过程”.

鞅论与随机分析

鞅(martingale) 一类重要的随机过程. 设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上适应于上升$\sigma$代数族$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$的随机过程. 称$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$鞅,如果下列两条件成立:

1. 对每一$t\in\mathscr{R}_+$,$X(t)$可积.

2. 对任意$t>s\geqslant 0$,$E[X(t)|\mathscr{F}_s]=X(s)$ a. s. p.

由条件 2 立即推出$E[X(t)]=E[X(s)]$. martingale 一词意指一种马具,即中文的“鞅”,但亦指西方赌博中的一种输后加倍下注的赌法.

在离散时间情形,鞅有如下直观意义:设$X(0)$表示赌徒开始参加赌博时的赌本,$X(n)(n\geqslant 1)$表示他在第n局赌博后的总赌金(即赌本$X(0)$与前n局的输赢之总和),而$\mathscr{F}_n=\sigma(X(i),\ i=0,1,\cdots,n)$,反映了前$n$局赌博的全部信息. 如果$\{X(n),n\geqslant 0\}$是关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$的鞅,则条件$E[X(n+k)|\mathscr{F}_n]=X(n)$表示在已知前$n$局输赢的条件下,再经过$k$局$(k\geqslant 1)$赌博后,赌徒的总赌金在平均意义下是和他在第$n$局后的总赌金相等的. 这就是说赌博是“公平的”. 对于这种赌博,不管用什么赌法,按平均来说,赌徒最终不会从赌博中得益或输蚀.

上鞅(supermartingale) 鞅的一种推广. 设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上关于上升$\sigma$代数族$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$适应的随机过程. 称$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$上鞅,如果下列两条件成立:

1. 对每一$t\in\mathscr{R}_+$,$X(t)$可积.

2. 对任意$t>s\geqslant 0$,$E[X(t)|\mathscr{F}_s]\leqslant X(s)$ a. s. P.

由条件 2 立即推出$E[X(t)]\leqslant E[X(s)]$.

下鞅(submartingale) 鞅的一种推广. 设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上关于上升$\sigma$代数族$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$适应的随机过程. 称$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$下鞅,如果下列两条件成立:

1. 对每一$t\in\mathscr{R}_+$,$X(t)$可积.

2. 对任意$t>s\geqslant 0$,$E[X(t)|\mathscr{F}_s]\geqslant X(s)$ a. s. P.

由条件 2 立即推出$E[X(t)]\geqslant E[X(s)]$. 若$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$上鞅,则由$Y(t)=-X(t)$定义的过程$\{Y(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$下鞅;反之亦然. 因此在许多问题的研究中只须就上鞅(或下鞅)的情形讨论.

局部鞅(local martingale) 鞅的局部化类. 设$X=\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$适应过程. 称$X$为$\{\mathscr{F}_t\}$局部鞅(简称局部鞅),如果存在停时序列$\{S_n\}$,$S_n\uparrow+\infty$ a. s. 使得$X^{S_n}=\{X(t\wedge S_n),t\in\mathscr{R}_+\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$一致可积鞅.

一个非负可积$\{\mathscr{F}_t\}$局部鞅必是$\{\mathscr{F}_t\}$上鞅. 最近许多著作在局部鞅的定义中对$X(0)$加以特别对待. 例如有,$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$称为局部鞅,如果$X(0)\in\mathscr{F}_0$,并且存在停时序列$\{S_n\}$,$S_n\uparrow+\infty$ a. s. 使得$X(t\wedge S_n)-X(0)$是$\{\mathscr{F}_t\}$一致可积鞅.

半鞅(semimartingale) 由鞅衍生作为随机积分最广类型的随机过程. 如果存在分解$X=M+A$. 其中$M=\{M(t),t\in R_+\}$为$\mathscr{F}_t$局部鞅,$A=\{A(t),t\in R_+\}$为$\mathscr{F}_t$适应局部有限变差过程,则随机过程$\{X(t)\ t\geqslant 0\}$称为半鞅. 此分解不惟一. 如A还是局部可积,则称X为特殊半鞅. 对特殊半鞅有惟一典则分解$X=M+A$,其中A是可料有限变差过程. 局部鞅,局部有限变差过程、局部上鞅和下鞅、平稳独立增量过程和确定性过程都是半鞅. 右连续上鞅和下鞅均是特殊半鞅.

特殊半鞅(special semimartingale) 见“半鞅”.

鞅差序列(martingale-difference sequence) 一类随机序列. 指部分和序列是鞅的随机序列. 设$X=\{X(n),n\geqslant 0\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机序列. $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$是一上升$\sigma$代数族. 称$X$为鞅差序列,如果下列条件成立:

1. X是$\{\mathscr{F}_n\}$适应,即对每一$n\geqslant 0$,$X(n)$是$\mathscr{F}_n$可测的.

2. 对每一$n\geqslant 0$,$X(n)$是可积的.

3. 对每一$n\geqslant 0$,$E[X(n+1)|\mathscr{F}_n]=0$ a. s. P.

如果$Y=\{Y(n),n\geqslant 0\}$是一$\{\mathscr{F}_n\}$鞅,则由$X(0)=Y(0)$,$X(n)=Y(n+1)-Y(n)$(对$n\geqslant 1$)定义的序列$X=\{X(n),n\geqslant 0\}$是关于$\{\mathscr{F}_n\}$的鞅差序

列. 反之,若 $\mathscr{X}=\{X(n),n\geqslant 0\}$ 是关于上升 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的鞅差序列,则由

$$Y(n)=\sum_{i=0}^{n}X(i)$$

定义的 $Y=\{Y(n),n\geqslant 0\}$ 是一 $\{\mathscr{F}_n\}$ 鞅.

增过程(increasing process) 一类随机过程. 指轨道是右连续增函数的随机过程. 随机过程 $\{A(t),t\in R_+\}$ 称为增过程,如果它的所有轨道 $A(\cdot,\omega)$ 为 $\mathscr{R}_+$ 上非负有限值右连续增函数. 增过程必为右连左极过程,因而适应增过程为可选过程. 增过程 $\{A(t)\}$ 称为可积增过程,如果

$$A(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}A(t)$$

是可积随机变量.

可积增过程(integrable increasing process) 见"增过程".

自然增过程(natural increasing process) 一类特殊的增过程. 设上升 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}}$ 为右连续,适应增过程 $\{A(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 称为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 自然增过程,如果 $A(0)=0$,且

$$E\int_0^{+\infty}Y(t_-)\mathrm{d}A(t)=EY(+\infty)A(+\infty)$$

对一切有界右连左极正鞅 $\{Y(t),\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 成立. 当 $\{A(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 为可积增过程时,它是自然增过程当且仅当它是可料增过程.

有限变差过程(process with finite variation) 一类随机过程. 指可以表为两个增过程之差的随机过程. 设 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是一有限变差过程,把

$$\left\{V(t)=\int_{[0,t]}|\mathrm{d}X(s)|,t\in\mathscr{R}_+\right\}$$

称为它的变差过程,其中积分意义是对每个固定的 $\omega\in\Omega$ 在勒贝格-斯蒂尔杰斯意义下的积分. 称 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 为可积变差过程,如果 $\{V(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是可积的. 这相当于 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 可表为两个可积增过程之差.

可积变差过程(integrable variation process) 见"有限变差过程".

平方可积鞅(square integrable martingale) 一类重要的鞅. 定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的右连续 $\{\mathscr{F}_t\}$ 鞅 $\{X(t),t\in R_+\}$ 称为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 平方可积鞅(简称平方可积鞅),如果

$$\sup_{t\geqslant 0}EX^2(t)<+\infty. \qquad (1)$$

若以 $\mathscr{M}^2$ 记平方可积鞅的全体,则 $\mathscr{M}^2$ 按内积 $(M,N)=E[M(+\infty)N(+\infty)]$(其中 $\{M(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 和 $\{N(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是 $\mathscr{M}^2$ 的元素)构成希尔伯特空间,而且与 $L^2(\Omega,\mathscr{F}_{+\infty},P)$ 同构,$\{M(t),t\in\mathscr{R}_+\}\to M(+\infty)$ 为其同构映像. 有些著作把条件(1)换为 $EX^2(t)<+\infty$,对所有 $t\geqslant 0$.

(D)类过程(class (D) process) 一类可测随机过程. 可测过程 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_t\}$ 称为(D)类过程,如果随机变量族 $\{X(T)I_{\{T<+\infty\}}\}_{T\in\mathscr{J}}$ 为一致可积族,其中 $\mathscr{J}$ 为全体 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时.

右连续一致可积鞅为(D)类过程,但一般的一致可积上鞅不一定是(D)类过程. 然而,存在上升的停时列 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$,$\tau_n\uparrow+\infty$(当 $n\to+\infty$ 时)使对每个 n,过程 $\{X(t\wedge\tau_n),t\in\mathscr{R}_+\}$ 为(D)类过程.

(DL)类过程(class (DL) process) 一类可测随机过程. 可测过程 $\{X(t)\ t\in\mathscr{R}_+\}$ 称为(DL)类过程,如果随机变量族 $\{X(T)\}_{T\in\mathscr{J}_a}$ 是一致可积族. 这里 $\mathscr{J}_a$ 表全体有界停时,即 T 满足 $P\{T\leqslant a\}=1$,其中 a 为某个非负实数. (D)类过程必是(DL)类过程.

右连续鞅、右连续负上鞅和右连续非负下鞅都是(DL)类过程.

杜布停止定理(Doob stopping theorem) 鞅论的一个重要定理. 设 $\{X(n),n\geqslant 0\}$ 是关于上升 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的下鞅(或鞅),S 和 T 是任意满足 $S\leqslant T$ 的有界停时,则:

1. $X(S)$ 和 $X(T)$ 可积.
2. $E[X(T)|\mathscr{F}_S]\geqslant X(S)$
(相应地,$=X(S)$) a.s.

如果除去 S 和 T 的有界性假设,则当 $\{X(n),n\geqslant 0\}$ 是右闭的时候,上面的结论 1 和 2 仍然成立. 这里"右闭"表示存在 $\mathscr{F}_{+\infty}$ 可测的可积随机变量 $X(+\infty)$,使得 $E[X(+\infty)|\mathscr{F}_n]\geqslant X(n)$ (相应地,$=X(n)$). 以上就是离散时间的杜布停时定理. 对于连续时间情形,杜布停时定理有如下形式:设 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是关于上升 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 的右连续闭下鞅(或鞅),而且 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 右连续,则对任意满足 $S\leqslant T$ 的停时 S 和 T,结论 1 和 2 成立.

杜布停止定理表明,在适当的条件下,刻画下鞅(或鞅)特性的条件中的固定时刻 s,t 用停时 S,T 代替后仍然成立.

下鞅极大值不等式(maximal inequality for submartingale) 鞅论的一个重要不等式. 设 $\{X(n),n>0\}$ 是下鞅,则对任意 $\lambda>0$ 及 $n\geqslant 0$ 有:

1. $\lambda P\{\max\limits_{k\leqslant n}X(k)\geqslant\lambda\}\leqslant\int_{\{\max\limits_{k\leqslant n}X(k)\geqslant\lambda\}}X(n)\mathrm{d}P$
$\leqslant E[X^+(n)]\leqslant E[|X(n)|]$.
2. $\lambda P\{\max\limits_{k\leqslant n}|X(k)|\geqslant\lambda\}$
$\leqslant 2E[X^+(n)]-E[X(0)]$.

若 $\{X(n),n\geqslant 0\}$ 是鞅,且对某 $q\geqslant 1$ 有 $E[|X(n)|^q]<+\infty$ 对任意 $n\geqslant 0$,则进一步有

$$\lambda^q P\{\max_{k\leqslant n}|X(k)|\geqslant\lambda\}\leqslant E[|X(n)|^q].$$

对于连续时间参数情形,相应的极大值不等式

是：设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是下鞅，$D$是$\mathscr{R}_+$的任意可数子集，则对任意满足$r<s$的$r,s\in\mathscr{R}_+$及任意$\lambda>0$有：

1. $\lambda P\{\sup\limits_{t\in D\cap[r,s]}X(t)\geqslant\lambda\}\leqslant E[X(s)]$.
2. $\lambda P\{\sup\limits_{t\in D\cap[r,s]}X(t)\geqslant\lambda\}$
$\leqslant 2E[X^+(s)]-E[X(r)]$.

若$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是鞅，且对某$q\geqslant1$有$E[|X(t)|^q]<+\infty$对任意$t\in\mathscr{R}_+$，则进一步有

$$\lambda^q P\{\sup_{t\in D\cap[r,s]}|X(t)|\geqslant\lambda\}\leqslant E[|X(s)|^q].$$

上穿不等式(upcrossing inequality)　鞅论的一个重要不等式. 设$\{X(n),n\geqslant0\}$是离散下鞅. 对于任意区间$[a,b]$，令$U_a^b(M)$表示序列$\{X(0),X(1),\cdots,X(M)\}$上穿区间$[a,b]$(即序列的元素取值从$\leqslant a$到$\geqslant b$)的次数，则对任意正整数$M$有

$$\begin{aligned}E\{U_a^b(M)\}&\leqslant\frac{1}{b-a}\{E[(X(M)-a)^+]\\&\quad-E[(X(0)-a)^+]\}\\&\leqslant\frac{1}{b-a}\{E[X^+(M)]+|a|\}.\end{aligned}$$

对于连续时间参数情形，设$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是下鞅，$D$是$\mathscr{R}_+$的任一可数子集，则对任意满足$r<s$的$r,s\in\mathscr{R}_+$和任意实数$\lambda>0$有

$$\begin{aligned}E\{U_a^b(D\cap[r,s])\}&\leqslant\frac{1}{b-a}E[(X(s)-a)^+]\\&\leqslant\frac{1}{b-a}\{E[X^+(s)]+|a|\}.\end{aligned}$$

这里$U_a^b(J)$(任意$J\subset\mathscr{R}_+$)定义为当H取遍J的所有有限子集时$U_a^b(H)$的上确界

$$\sup_{H\text{有限},H\subset J}U_a^b(H).$$

当下鞅$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$右连续时，上式可进一步写为

$$\begin{aligned}E\{U_a^b([r,s])\}&\leqslant\frac{1}{b-a}E[(X(s)-a)^+]\\&\leqslant\frac{1}{b-a}\{E[X^+(s)]+|a|\}.\end{aligned}$$

杜布不等式(Doob inequality)　鞅论的一个重要不等式. 设$\{X(n),n\geqslant0\}$是非负下鞅，则有

$$E[\sup_{n\geqslant0}X(n)]\leqslant\frac{e}{e-1}\{1+\sup_{n\geqslant0}E[X(n)\log^+X(n)]\}$$

和对任意$p>1$

$$\{E[\sup_{n\geqslant0}X^p(n)]\}^{1/p}\leqslant\frac{p}{p-1}\sup_{n\geqslant0}\{E[X^p(n)]\}^{1/p}.$$

对于连续时间参数情形，若$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$是右连续的非负下鞅，则也有类似的不等式：

$$E[\sup_{t\geqslant0}X(t)]\leqslant\frac{e}{e-1}\{1+\sup_{n\geqslant0}E[X(t)\log^+X(t)]\},$$

$$\{E[\sup_{n\geqslant0}X^p(t)]\}^{1/p}\leqslant\frac{p}{p-1}\sup_{n\geqslant0}\{E[X^p(t)]\}^{1/p},$$

对任意$p>1$.

上鞅的黎斯分解(Riesz decomposition for supermartingale)　上鞅的一种分解表示. 设上升σ代数族$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$右连续，$\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$为右连续$\mathscr{F}_t$上鞅，则当且仅当

$$\lim_{t\to+\infty}EX(t)>-\infty$$

时，$X(t)$可惟一地(在随机等价意义下)分解为

$$X(t)=Y(t)+\pi(t)\quad(t\geqslant0),\qquad(1)$$

其中$\{Y(t)\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$鞅，$\{\pi(t)\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$位势(即满足条件$\lim\limits_{t\to+\infty}E\pi(t)=0$的非负$\{\mathscr{F}_t\}$上鞅). 称上鞅$\{X(t)\}$有黎斯分解，如果(1)式成立.

在离散时间参数的情形，上述条件中两个右连续的字样可去掉.

杜布-迈耶分解(Doob-Meyer decomposition)　上鞅的一种分解表示. 设上升σ代数族$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$右连续，$\{X(t),t\in R_+\}$为右连续(D)类$\{\mathscr{F}_t\}$上鞅，则存在惟一的(在随机等价意义下)可积可料增过程$\{A(t),t\in\mathscr{R}_+\}$，使得$M(t)=X(t)+A(t)$为一致可积$\{\mathscr{F}_t\}$鞅. 分解式$X(t)=M(t)-A(t)$就称为上鞅$\{X(t)\}$的杜布-迈耶分解. $A(t)$称为补偿元.

和黎斯分解一样，杜布-迈耶分解显示了鞅与半鞅的关系，使对半鞅的研究化成对鞅的研究. 在随机积分的研究中有重要作用. 应当指出，杜布-迈耶分解对(DL)类亦成立，但这时$A(t)$只满足$EA(t)\geqslant+\infty$，即不一定是可积的，而$M(t)$是鞅或局部鞅.

补偿元(compensator)　见“杜布-迈耶分解”.

可料时(predictable time)　停时中的一类. 定义在Ω上的非负函数T称为$\{\mathscr{F}_t\}$可料时，简称可料时. 如果$[T,+\infty)$(即集合$\{(t,\omega):T(\omega)\leqslant t<+\infty\}$)为$\mathscr{F}_t$可料集. 可料时必为停时. 一切可料时都是几乎处处可预报，即若T为可料时，则存在一列上升停时$(T_n)_{n\in Z_+}$，$\forall n$有$T_n\leqslant T$且在$\{T>0\}$上有$T_n<T$ a. s. 以及

$$\lim_{n\to+\infty}T_n=T\text{ a. s.}$$

在完备概率空间、$\{\mathscr{F}_t\}$完备以及$\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$的条件下，停时$T$的可料性与可预报性(即上段中去掉“几乎处处”而得的性质)是等价的，故不少著作用后者作为前者的定义.

绝不可及时(totally inaccessible time)　停时中的一类. 设T为$\{\mathscr{F}_t\}$停时，称T为$\{\mathscr{F}_t\}$绝不可及时，简称绝不可及时，如果对一切$\{\mathscr{F}_t\}$可料时S，有$P(\{T=S<+\infty\})=0$ 绝不可及时的直观意义是：除去一个零概集外，绝不可及时T不能与任何可料时S在有限处相触及. 它在$\{T<+\infty\}$上是几乎处处不可预报的.

可及时(accessible time)　停时中的一类. 设T为$\{\mathscr{F}_t\}$停时. 称T为可及时，如果存在一列$\{\mathscr{F}_t\}$可料时$\{T_n\}_{n\geqslant1}$使得$[T]\subset\bigcup\limits_n[T_n]$，这里

$$[S]\triangleq\{(t,\omega)\in\mathscr{R}_+\times\Omega:t=S(\omega)<+\infty\}$$

称为停时 S 的图. 可及时的直观意义是:a. s. 可及时 T 是 a. s. σ 可预报的,即存在可数个被 T 控制的停时列 $\{S_n^k\}_{n\geq1}$ $(k=1,2,\cdots)$(即 $S_n^k\leq T,\forall n,k$)使每个 $(S_n^k)_{n\geq1}$ $(k=1,2,\cdots)$,在其上预报 T 的集合之并与全空间 Ω 只差一个零概集.

可料时必为可及时. 令 $\mathscr{A}$ 为可及时全体,由 $\{[S,+\infty[:S\in\mathscr{A}\}$ 在 $\mathscr{R}_+\times\Omega$ 上生成的 σ 代数,称为可及 σ 代数. 关于可及 σ 代数可测的过程称为可及过程.

可及 σ 代数(accessible σ-algebra) 见"可及时".

可及过程(accessible process) 见"可及时".

可料过程(predictable processes) 关于可料 σ 代数可测的随机过程. 在 $\mathscr{R}_+\times\Omega$ 上由全体左连续 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应过程产生的 σ 代数称为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 可料 σ 代数,记为 $\mathscr{P}$(在左连续条件下,对 $t>0$,$(\mathscr{F}_{t-})$ 适应等价于 $(\mathscr{F}_t)$ 适应). 可料 σ 代数 $\mathscr{P}$ 也可由 $\{\{0\}\times A:A\in\mathscr{F}_{0-})\}\cup\{(s,t)\times A:0<s<t,A\in\mathscr{F}_s\}$ 生成.

如果随机过程 $\{X(t)\}$ 是关于 σ 代数 $\mathscr{P}$ 可测的,则称它为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 可料过程,简称可料过程. $\mathscr{P}\subset\mathscr{O}$,从而可料过程必为可选过程(参见"可选过程").

可料 σ 代数(predictable σ-algebra) 见"可料过程".

可选过程(optional processes, well measurable processes) 关于可选 σ 代数可测的随机过程. 在 $\mathscr{R}_+\times\Omega$ 上由全体右连左极 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应过程所产生的 σ 代数称为 $\mathscr{F}_t$ 可选 σ 代数,记为 $\mathscr{O}$. 可选 σ 代数 $\mathscr{O}$ 也可由

$$\{[S,+\infty[:S\in\mathscr{J}\}$$

生成. 其中 $\mathscr{J}$ 为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时全体,

$$[S,+\infty[=\{(t,\omega)\in\mathscr{R}_+\times\Omega:S(\omega)\leq t<+\infty\}$$

为一个随机区间.

随机过程 $\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 称为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 可选过程,简称可选过程,如果它是关于 σ 代数 $\mathscr{O}$ 可测的.

可选 σ 代数(optional σ algebra) 见"可选过程".

可料二次变差过程(predictable quadratic variation processes) 一类可料增过程. 设 $M=\{M(t),t\in\mathscr{R}_+\}\in\mathscr{M}^2$,由杜布-迈耶分解知存在惟一(在随机等价意义下)的可料可积增过程,记为 $\langle M,M\rangle=(\langle M,M\rangle_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$,有时简记为 $\langle M\rangle=(\langle M\rangle_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$,使得 $\{M_t^2-\langle M,M\rangle_t\}_{t\in\mathscr{R}_+}$ 为一致可积鞅. 则称 $\langle M,M\rangle$ 为过程 M 的可料二次变差过程. 有时亦称 $\langle M,M\rangle$ 为与 M 联系的可料增过程. 这个概念还可以推广到局部鞅和半鞅的情形.

可选二次变差过程(optional quadratic variation processes) 一类可选增过程. 设 $M\in\mathscr{M}^2$,则 M 可分解为 M^c+M^d,其中 M^c 为 M 的连续鞅部分(它是连续平方可积鞅),M^d 为 M 的纯断鞅部分(它是纯断平方可积鞅),令

$$[M,M]_t=\langle M^c,M^c\rangle_t+\sum_{s\leq t}\Delta M_s^2$$

则 $[M,M]=([M,M]_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$ 为可积增过程. 人们称 $[M,M]$ 为 M 的可选二次变差过程. 有时简记为 $[M]=([M]_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$. 可以证明,

$$M_0^2+\sum_{i=0}^{k_n}(M_{t_{i+1}^{(n)}}-M_{t_i^{(n)}})^2\xrightarrow{P}[M]_t.$$

其中 $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{k_n}^{(n)}=t$ 为 $[0,t]$ 的有限分割序列,其步长趋于 0(当 $n\to+\infty$). 这就是称它为二次变差过程的原因. 对于离散时间参数有

$$[M]_n=M_0^2+\sum_{i=1}^{n}(M_i-M_{i-1})^2.$$

此概念亦可推广到局部鞅和半鞅的情形.

可料对偶投影(dual predictable projection) 由增过程对可测过程的可料投影积分经对偶关系所产生. 设 $\{A_t\}$ 为一增过程. 称可料增过程 A^p 为 $\{A_t\}$ 的对偶投影,如对一切正可测过程 X 的可料投影 ^pX 有对偶关系

$$E\int_0^{+\infty}{}^pX_s\mathrm{d}A_s=E\int_0^{+\infty}X_s\mathrm{d}A_s^p.$$

如 $\{A_t\}$ 为局部可积增过程,则它的可料对偶投影存在.

泊松过程的鞅刻画(martingale characterization of Poisson process) 杜布-迈耶分解的一种特殊表现形式. 即指如下的渡边(Watanabe)定理:设 $\{N(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的计数随机过程,$\lambda(t)$ 是局部可积的非负可测函数. 则使 $\{N(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是一具有强度 $\lambda(t)$ 的 $\{\mathscr{F}_t\}$ 泊松过程(即对任意 $0\leq s<t$,增量 $N(t)-N(s)$ 独立于 $\mathscr{F}_s$,且有参数为

$$\int_s^t\lambda(u)\mathrm{d}u$$

的泊松分布)的充分必要条件为

$$\{N(t)-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u,t\in\mathscr{R}_+\}$$

是一 $\{\mathscr{F}_t\}$ 鞅.

维纳过程的鞅刻画(martingale characterization of Wiener process) 杜布-迈耶分解的一种特殊表现形式. 即指如下的列维-杜布(Lévy-Doob)定理:设 $\{W(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是一连续的 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应过程,则使这过程是一(标准)$\{\mathscr{F}_t\}$ 维纳过程的充分必要条件为:

1. $\{W(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 是一 $\{\mathscr{F}_t\}$ 局部鞅且
   $W(0)=0$ a. s..
2. $\{W^2(t)-t,\ t\in\mathscr{R}_+\}$ 是一 $\{\mathscr{F}_t\}$ 局部鞅.

均方连续性(continuity in mean square)　随机过程的一种分析性质.设随机过程$\{X(t),t\in T\}$是一个二阶矩过程,如果对$t_0\in T$,均方极限

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in T}} E|X(t)-X(t_0)|^2=0,$$

则称该过程在t_0处均方连续.如果过程在每个$t\in T$处,都均方连续,则称该过程均方连续.过程在$t_0\in T$处均方连续的充分必要条件是它的相关函数$R(s,t)$在(t_0,t_0)处连续,通常称此为均方连续准则.

均方连续准则(criterion for continuity in mean square)　见"均方连续性".

均方导数(derivative in mean square)　随机分析的基本概念之一.设$\{X(t),t\in T\}$是一个二阶矩过程,对$t\in T$,如果均方极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=X'(t)$$

存在,$X'(t)$当然是一个二阶矩有限的随机变量,即$E|X'(t)|^2<+\infty$,则称该过程$\{X(t),t\in T\}$在t处均方可导(或可微),而称$X'(t)$为它的均方导数.如果它在每一个$t\in T$处都均方可导,则称此过程均方可导.二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在$t\in T$处均方可导的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h_1\to 0}}\frac{R(t+h,t+h_1)-R(t,t+h_1)-R(t+h,t)+R(t,t)}{hh_1}$$

存在,其中$R(s,t)$是过程的相关函数,通常称此为均方可导准则.过程的均方导数$\{X'(t),t\in T\}$的均值函数

$$E\{X'(t)\}=\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t},$$

其中$m(t)$是原过程的均值函数;而相关函数

$$R_{X'}(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}R(s,t),$$

其中$R(s,t)$是原过程的相关函数.

均方可导(differentiable in mean square)　见"均方导数".

均方可导准则(criterion for differentiability in mean aquare)　见"均方导数".

均方积分(integral in mean square)　随机分析的基本概念之一.设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是一个二阶矩过程,对区间$[a,b]$的任一划分:$a=t_{n_0}<t_{n_1}<\cdots<t_{n_n}=b$,定义黎曼和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X(t_{n_k})(t_{n_k}-t_{n_{k-1}}).$$

记　$\Delta_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_{n_k}-t_{n_{k-1}})$,

如果均方极限

$$S=\lim_{\Delta_n\to 0}S_n$$

存在,则称此过程在$[a,b]$上均方可积,而称S为此过程在$[a,b]$上的均方积分,并记为

$$\int_a^b X(t)\mathrm{d}t.$$

随机过程$\{X(t),t\in[a,b]\}$在$[a,b]$上均方可积的充分必要条件是此过程的相关函数$R(s,t)$的黎曼积分

$$\int_a^b\int_a^b R(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

存在.通常称它为均方可积准则.

过程的均方积分的均值、二阶矩及方差分别有以下的计算公式:

$$E\{\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\}=\int_a^b m(t)\mathrm{d}t,$$

$$E\{|\int_a^b X(t)\mathrm{d}t|^2\}=\int_a^b\int_a^b R(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{var}\{\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\}=\int_a^b\int_a^b \Gamma(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

其中$m(t)$,$R(s,t)$及$\Gamma(s,t)$分别是$\{X(t),t\in[a,b]\}$的均值函数、相关函数及协方差函数.

均方可积(integrable in mean square)　见"均方积分".

均方可积准则(criterion for integrability in mean square)　见"均方积分".

随机积分(stochastic integral)　一种随机积分.指可测过程对各种随机过程的积分,即形如

$$\int_{[0,t]}H_s\mathrm{d}X_s$$

的积分.其中$\{H_t,t\in\mathscr{R}_+\}$,$\{X_t,t\in\mathscr{R}_+\}$为两个随机过程.因为这积分可按各种意义来定义,从而就有各种意义下的随机积分.常见的有下列几类:

1.按逐条轨道的黎曼-斯蒂尔杰斯或勒贝格-斯蒂尔杰斯意义下的积分.这就是说,对每个固定的$\omega\in\Omega$,上述积分看成按通常的黎曼(或勒贝格)-斯蒂尔杰斯意义下的积分.

2.按均方收敛意义下积分(称为随机均方黎曼-斯蒂尔杰斯积分,简称均方积分).即把上述积分定义为和式

$$\sum_{i=1}^{n}H_{s_i}(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})$$

的随机均方极限(如果存在的话).其中$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$为$[0,t]$上任意划分,当$n\to+\infty$时满足

$$\mathrm{Max}_{0<i\leqslant n}(t_i-t_{i-1})\to 0\text{ 且 }s_i\in[t_{i-1},t_i];$$

3.伊藤随机积分.

4.斯特拉托诺维奇随机积分.

其中3和4两类随机积分将另条单独列出.

对正交增量过程的随机积分(stochastic integral with respect to process with orthogonal increments)　随机积分的一种.设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是正交增量过程,且均方右连续,即

$$\lim_{s \to t+0} E|X(s) - X(t)|^2 = 0.$$

令 $F(t)=E|X(t)-X(a)|^2$，则 F 是单调不减连续函数. 若以 $L^2(dF)$ 表示 $[a,b]$ 上关于勒贝格-斯蒂尔杰斯测度 dF 平方可积的复值波莱尔可测函数，则对任意 $f \in L^2(dF)$，可定义 f 关于 $\{X(t), t \in [a,b]\}$ 的随机积分

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}X(t).$$

它是具有有限二阶矩的复值随机变量，并有性质：

1. 若 $a \leqslant c < d \leqslant b$，则
$$\int_a^b I_{[c,d]}(t) \mathrm{d}X(t) = X(d) - X(c).$$
2. 若 $f, g \in L^2(\mathrm{d}F)$，$\alpha, \beta$ 是复数，则
$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] \mathrm{d}X(t) = \alpha \int_a^b f(t) \mathrm{d}X(t) + \beta \int_a^b g(t) \mathrm{d}X(t).$$
3. 若 $f, g \in L^2(\mathrm{d}F)$，则
$$E\left\{\int_a^b f(t) \mathrm{d}X(t) \overline{\int_a^b g(t) \mathrm{d}X(t)}\right\} = E\left\{\int_a^b f(t) \overline{g(t)} \mathrm{d}F(t)\right\}.$$

类似地，可对 $T=(-\infty, +\infty)$ 的正交增量过程定义随机积分.

伊藤积分(Itô integral)　一种随机积分. 它是由日本数学家伊藤清首先提出和研究的. 伊藤积分是指把均方积分

$$\int_0^t H_s dX_s$$

中的过程 $\{X_t, t \in \mathscr{R}_+\}$ 具体化为布朗运动 $\{W_t, t \in \mathscr{R}_+\}$ 的情形. 这时，因为布朗运动的轨道在任意区间内是无界变差的，而和数

$$\sum_{i=1}^n H_{s_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

的均方极限依赖于 s_i 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 中的选取方式，伊藤积分与均方黎曼-斯蒂尔杰斯积分的显著区别在于：前者的 s_i 指定取区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 的左端点而不是后者的任意值. 然而，为了便于推广和应用，伊滕积分一般采用如下的通过简单函数来逼近的方式定义. 记

$$H_{a,b}^2 (0 \leqslant a < b < +\infty)$$

为满足

$$\int_a^b E|f_t(\omega)|^2 \mathrm{d}t < +\infty$$

的 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应可测过程 $\{f_t(\omega), t \in R_+\}$ 的全体. 如果 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，$f_s(\omega)=f_{t_i}(\omega)$，当 $s \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$，且 $f_s(\omega) \in H_{a,b}^2$，则定义

$$\int_a^b f_s \mathrm{d}\omega_s = \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i}(\omega)(\omega_{t_{i+1}} - \omega_{t_i}).$$

这样，如果人们在 $H_{a,b}^2$ 上引入范数

$$\| f \|_{H^2} = \left(\int_a^b E|f_s(\omega)|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

及平方可积随机变量空间的范数

$$\| \xi \| = (E\xi^2)^{1/2},$$

则对简单函数已定义了保范映射

$$\eta_f : f \to \eta_f\left(= \int_a^b f_s dW_s\right).$$

此映射可保范地扩张到简单函数的闭包 $H_{a,b}^2$ 上去. 因此，对任意 $f \in H_{a,b}^2$，存在一个随机变量 η_f（仍记为 $\int_a^b f_s \mathrm{d}W_s$）与之对应，并称之为 f 关于布朗运动 $\{W_s\}$ 的伊藤积分. 如果考虑依概率收敛的话，还可以把 $H_{a,b}^2$ 拓广到很广的一类过程去. 用类似的方法可把伊藤积分推广到过程 $\{X_t\}$ 是平方可积鞅，局部鞅，半鞅等情形，但此时 $H_{a,b}^2$ 将有所不同.

伊藤积分的一个显著性质就是当把积分上限 b 看成参数 t 时，伊藤积分

$$\left\{\int_a^t f_s \mathrm{d}W_s\right\}_{t \geqslant a}$$

确定一个 $\{\mathscr{F}_t\}$ 鞅. 如果 $\{X_t\}$ 是局部鞅或半鞅时，则相应地其伊藤积分是局部鞅或半鞅.

斯特拉托诺维奇(随机)积分(stratonovich integral)　一种随机积分. 它是由苏联数学家斯特拉托诺维奇(Стратонович, Р. Л.)首先提出和研究的. 设 (X_t) 为布朗运动. 若和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i + t_{i+1}/2}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

的依概率收敛极限存在，其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 为 $[a,b]$ 的任意划分，

$$\max_{0 \leqslant i < n}(t_{i+1} - t_i) \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

则所得的极限记为

$$(S)\int_a^b f_s \mathrm{d}X_s (\text{或 } f \circ X),$$

并称之为 (f_s) 关于 (X_s) 的斯特拉托诺维奇积分. 这时对 (f_s) 的限制要比伊藤积分情形强得多.

斯特拉托诺维奇积分确定的不再是鞅或局部鞅了. 但它的微分法则与通常的微积分相似而不像伊藤积分那样遵循伊藤微分法则. 当 (f_s) 为连续的半鞅时，斯特拉托诺维奇积分与伊藤积分有如下关系：

$$(S)\int_0^t f_s \mathrm{d}X_s = \int_0^t f_s \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\langle f^c, X^c \rangle_t.$$

还可以把上述积分定义推广到 (f_s) 与 $\{x_s\}$ 为两个连续半鞅的情形.

伊藤积分公式(Itô formula)　随机积分理论的一个重要公式. 设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 为 $\mathscr{R}^{n+m}$ 上的函数，关于每个 x_j 一次连续可微，关于每个 y_k 二次连续可微. 令 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(n)}$ 为 n 个适应有限变差过程，$Y^{(1)}, Y^{(2)}, \cdots, Y^{(m)}$ 为 m 个半鞅，则

$$F(X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(n)};Y^{(1)},Y^{(2)},\cdots,Y^{(m)})$$

为一半鞅，且对一切 $t\in\mathscr{R}_+$ 有

$$\begin{aligned}F(\vec{X}_t,\vec{Y}_t) = & F(\vec{X}_0,\vec{Y}_0) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t F'_{x_i}(\vec{X}_{s-},\vec{Y}_{s-})\mathrm{d}X_s^{(i)} \\ & + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t F'_{y_j}(\vec{X}_{s-},\vec{Y}_{s-})dY_s^{(j)} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\int_0^t F''_{y_j y_k}(\vec{X}_{s-},\vec{Y}_{s-})d\langle Y^{(j)c},Y^{(k)c}\rangle_s \\ & + \sum_{0<s\leqslant t}[F(\vec{X}_s,\vec{Y}_s) - F(\vec{X}_{s-},\vec{Y}_{s-}) \\ & - \sum_{i=1}^{n}F'_{x_i}(\vec{X}_{s-},\vec{Y}_{s-})\Delta X_s^{(i)} \\ & - \sum_{z=1}^{m}F'_{yj}(\vec{X}_{s-},\vec{Y}_{s-})\Delta Y_s^{(j)}],\ \text{a.s.},\end{aligned}$$

其中 $\vec{X}=(X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(n)})$，

$\vec{Y}=(Y^{(1)},Y^{(2)},\cdots,Y^{(m)})$.

上面的伊藤积分公式是随机积分理论中一个最重要的结果，它给出了半鞅的复合函数的一个微分法则.

随机微分方程(stochastic differential equation) 随机分析中的一种微分方程. 指关于随机过程的含有随机积分项的方程. 关于随机过程 $X=\{X(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 的随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X(t) = a(t,X)\mathrm{d}t + b(t,X)\mathrm{d}B(t) \\ X(0) = \eta\end{cases} \tag{1}$$

是指 X 使如下式子成立：

$$\begin{aligned}X(t) = & \eta + \int_0^t a(s,X)\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t b(s,X)\mathrm{d}B(s)\ \forall t\geqslant 0.\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\{\mathscr{B}(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 为布朗运动，泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 及 $b(\cdot,\cdot)$ 必须满足一定条件使得式中积分有意义，一般情形至少要求当 X 为右连左极 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应过程时，$a(t,X)=a(t,X(\omega))$，$b(t,X)=b(t,X(\omega))$ 为局部有界 $\{\mathscr{F}_t\}$ 可料过程，(2)式中第一个积分为(a.s.或均方)黎曼意义下的积分，而第二个积分为伊藤意义下的积分. 此时方程(1)称为伊藤随机微分方程. 而最常见的重要情形是马尔科夫型随机微分方程：

$$\mathrm{d}X(t)=a(t,X(t))\mathrm{d}t+b(t,X(t))\mathrm{d}B(t).$$

此时，$\mathrm{d}t$ 及 $\mathrm{d}B(t)$ 的系数只依赖于时刻 t 及过程 X 在时刻 t 的值 $X(t)$.

随机微分方程的解有强解与弱解之分. 所谓 X 是方程(1)的强解，是指在基本概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上升 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t\}$ 上，除给定泛函 a,b 和随机变量 $\eta\in F_0$ 外，还给定了布朗运动 $\{B(t),t\in\mathscr{R}_+\}$. 由此构造出的解 X 满足(2) a.s. P，此时 X 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的. 所谓 X 是方程(1)的弱解，是指在基本概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上升 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t\}$ 上，只给定泛函 a 及 b，随机变量 $\eta\in F_0$，要求找到某个概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{P})$ 及其上的上升 σ 代数族 $\{\widetilde{\mathscr{F}}_t\}$、布朗运动 $\{\widetilde{B}(t),t\in\mathscr{R}_+\}$ 和随机过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$，满足

$$\begin{aligned}& X(t) - X(0) \\ = & \int_0^t a(s,X)\mathrm{d}s + \int_0^t b(s,X)\mathrm{d}\widetilde{B}(s)\ \text{a.s.}\ \widetilde{P}\end{aligned}$$

且 $X(0)$ 与 η 同分布.

随机微分方程的解的惟一性也有两种意义：一种是依分布惟一，即对方程(1)的任意两个解(可能在不同的概率空间上) X 与 X'，只要它们的初始分布(即 $X(0)$ 及 $X'(0)$ 的分布)相同，则 X 与 X' 有相同的有限维分布；另一种是按轨道惟一，即对方程(1)的任意两个定义在同一概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ (不一定是原来的概率空间)上的两个解 X 与 X'，只要它们的初值 $X(0)$ 和 $X'(0)$ 几乎处处相等，则对所有 $t\geqslant 0$，$X(t)$ 和 $X'(t)$ 几乎处处相等.

当然，还有在其他意义下的随机微分方程. 例如，(2)式中的随机积分也可以是斯特拉托诺维奇积分.

随机微分方程的强解(strong solution of stochastic differential equation) 见“随机微分方程”.

随机微分方程的弱解(weak solution of stochastic differential equation) 见“随机微分方程”.

随机微分方程解的惟一性(uniqueness of solution of stochastic differential equation) 见“随机微分方程”.

撰　稿　马志明　区景祺　邓永录　石北源　余耀棋
审　阅　马志明　严加安　陈培德　梁之舜

统　计　学

统计学(statistics)　关于确定性和带随机性数据资料的收集、整理、分析和推断的科学.统计学按其是否使用概率方法,可分为两个层次:描述统计学和推断统计学.推断统计学借助概率论和数学的方法,对使用样本进行推断所引起的错误和误差作估量,并对各种统计方法的性质和优良程度做理论上的探讨.因其广泛使用较深入的数学工具,又称数理统计学.统计方法在其他各学科领域的应用通称应用统计.

数理统计学作为数学的一个分支,它的任务是研究怎样用有效的方法去收集和处理带随机性影响的数据.数据的随机性来源于对总体的部分抽样的随机性,或试验误差的随机性.处理带随机性的数据才是数理统计的任务.如果对所研究的总体的每个个体都加以观测,例如,对人口普查所得数据予以简缩,欲求某种指标,如男女的比例指标和典型参数,如算术平均、方差等,则无随机性可言,不存在由所得数据对总体做推断的问题.因此,全面观测不属于数理统计的研究范围.运用图形、表格、计算数据的各种特征数等方法对资料进行简缩、分析和描述称为描述性统计.

对总体做部分观察以收集数据的方法,可以从有限总体中抽取一部分作为样本,也可以安排特定的实验,来收集数据.抽取样本的方法称为抽样技术或称抽样方法,研究安排试验的方法称为试验设计.数理统计的内容,除上述抽样方法和试验设计外,其最核心部分是所谓统计推断.统计推断是研究和分析所抽样的数据,进而对所关心的命题做出推断或预测.统计推断的重要特点是:它不是对所研究的全部对象进行观察,而是从中抽取一部分对象进行观察,由获得的部分数据推断所研究对象总体的相应特征,即"以样本推断总体"或"以部分推断整体".由于抽样是随机的,抽样数据不可能包含整体的全部信息.因此,所得到的结论也就不可能是准确无误的.但抽样数据毕竟来自总体,它与总体有严格数学意义的联系,这就使得虽然不能保证在每一具体情况下所作的统计推断不出错,但可以使用概率论的方法,对推断给出各种有意义的指标,去衡量推断的正确程度.统计推断的理论和方法主要有三个方面:提出各种具体的统计推断方法;计算有关这些方法性能的种种数量指标;在一定条件和意义下寻找最优的推断方法,或证明某种推断方法是最优的.统计推断的内容甚多,其最重要的基础性内容是参数估计和假设检验.其他内容主要有:根据特定的统计观点形成的一部分内容,贝叶斯统计与统计决策理论;具有特定的理论模型或样本结构的一部分内容,非参数统计、多元统计分析、回归分析、序贯分析、时间序列分析等.

数理统计的另一大类内容是针对特殊的应用问题或某些特定的学科发展起来的,主要有:抽样检验(或称验收抽样)、抽样调查、可靠性统计、统计质量管理、生物统计、计量经济学、气象统计、地质统计、医学统计、人口统计、农业统计、计量心理学、计量教育学等.

统计学的发展历史可以追溯得很远.在中国,纪元前大禹治水,依山川土质、人口物产及贡赋多寡,分全国为九州,编纂"禹贡九州篇";明初编制"黄册"与"鱼鳞册"."黄册"即全国户口名册,"鱼鳞册"即全国土地图籍.这些都说明中国历史上对统计工作沿革久远.在西方,古埃及、罗马帝国也有全国人口及土地调查.但以上这些工作均属统计的实际工作,未涉及学理的研究.作为统计理论研究,公认从古希腊哲学家、科学家亚里士多德(Aristotle)时代开始.亚氏曾撰写"城邦纪要",内容包括邦的历史、行政、艺术、科学与宗教等.由于这些内容是统治者所希望了解的,所以在亚氏以后仍有人继续编纂,通称"城邦政情"(matters of state),流传后世.到公元17～18世纪,以德国为主产生一门学问"政治学"(德文staateukunde),研究国家政治、社会与经济的状况.在德国统计学家阿亨瓦尔(Achenwall,G.)(1746)的著作中,则使用 statistics 一词,由拉丁文 status(状况)和意大利文 statisti(政治家)改造而成.但这些研究仍在"城邦政情"的研究内容与方法之内,与数学无关,属纯粹哲学形态,人们称这种以文字记述政情的统计为记述统计学派.1741年,丹麦人阿谢尔逊(Acherson,I.P.)对各国面积、人口、军队、货币等列表做出比较,1782年,德国人克罗姆(Crome,A.F.W.)应用几何图形表示统计结果,这就产生了图表统计学派.文字记述学派虽曾对其进行非难,但历史进程却淘汰了文字记述学派.而古代的"城邦纪要"的研究,只留下了一个学名"统计学"(statistics)沿用至今.

现代统计学是从数学上掌握总体性质,进行总体推断,通称数理统计学派.这方面最早做出较大贡献的人首推英国数学家格兰特(Graunt,J).他在1662年调查伦敦死亡人数时发现人口出生与死亡

率常常保持不变，提出了“大数恒静定律”，即今大数定律的雏形. 他所采用的研究方法是历史上最早出现的统计推断方法. 由于概率论的发展，使统计推断方法有了坚实的理论基础. 1733 年，英籍法裔数学家棣莫弗(De Moivre，A.)提出正态曲线这一极重要概念，1893 年，英国数学家、生物统计学家皮尔逊(Pearson，K.)第一次称其为正态分布. 正态分布的统计应用开始于法国数学家、天文学家拉普拉斯(Laplace，P.-S.)和高斯(Gauss，C. F.)，奎特莱特(Quételet，L. A. J.)提倡把它用于多种学科. 正态分布在数理统计中占有重要地位.

拉普拉斯和高斯讨论了参数估计方法，把参数 θ 与其估计量 $\hat{\theta}$ 的误差的评判标准分别取为 $W=|\hat{\theta}-\theta|$ 或 $W=(\hat{\theta}-\theta)^2$ 进行讨论，而后者导出了最小二乘法，高斯当时使用的术语与符号沿用至今. 19 世纪中叶，英国人类学家高尔顿(Galton，F.)在研究遗传学中，为弄清儿辈特征与父辈特征的相关关系，创始了回归分析及其相关理论，并提出了中位数、四分位数、百分位数等. 他的工作对统计学的发展起了很大作用. 但当时对样本特征与总体特征的区别尚不清楚. 随后，皮尔逊于 1896 年发展了回归及其相关理论，创建了生物统计学，并得到“总体”的概念. 总体就是由可观测的个体组成的集团. 从总体抽出的个体称为样本. 这就更加明确了下述观念：统计研究的目的不是样本自身，而是由样本的特征推断总体的特征. 为检验样本的经验分布是否能拟合总体分布，导出了 χ^2 统计量及相应的 χ^2 分布. 这个时期的统计学家们的大部分工作都属于大样本理论.

小样本统计推断理论是由戈赛特(Gosset，W. S.)提出的，从而开始了现代统计理论发展的新纪元. 他在 1908 年以笔名“学生”(Student)在 Biometrika 杂志上发表的重要成果是给出如下统计量的精确分布，即 t 分布

$$z=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)}{\hat{\sigma}},$$

其中 μ 为正态总体的均值，

$$\bar{x}=\sum\frac{x_i}{n},$$

$$\hat{\sigma}=\sum\frac{(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}\quad(x_1,x_2\cdots,x_n)$$

是容量为 n 的样本. 这里，不需要 n 充分大，把 z 看做具有近似正态分布去进行检验，可以使用小样本. 他还提出，应把总体理解为含有未知参数的概率分布所定义的概率空间，并提倡使用随机样本对总体进行推断. 他依据小样本理论，研究广泛的问题，诸如工业统计、市场分析、价格分析、产品质量控制问题等. 但他的方法当时尚未被人们广泛接受，而且他的 t 分布的推导方法也不甚完善. 十年后，英国著名统计学家费希尔(Fisher，R. A.)才给出完整的证明.

费希尔是估计理论的先驱. 首先提出相合性、有效性、充分统计量的概念. 倡导极大似然估计，不需贝叶斯估计的先验信息. 他还开创并发展了试验设计方法，成功地把概率模型引进实验领域. 作为此种模型的分析方法，又建立了方差分析法. 费希尔利用敏锐的直观，建立了许多统计理论和方法. 美籍俄国数学家奈曼(Neyman，J.)和皮尔逊之子皮尔逊(Pearson，E. S.)发展了假设检验的数学理论，引进了检验的功效函数概念，以作为判断检验方法好坏的标准. 美籍罗马尼亚数学家瓦尔德(Wald，A.)于 1939 年提出风险函数概念作为推断方法好坏的准则，系统地发展了统计判决函数理论. 至此，现代统计学已发展到成熟阶段，并且广泛地用于其他领域，形成了计量生物学、计量经济学、计量心理学、统计质量管理、抽样方法等学科分支.

中国最早发表数理统计论文者应推褚一飞(1930)，他讨论了“相关度”和“相变度”原理. 中国学者中，国际公认达到世界先进水平的一流统计学家是北京大学许宝騄教授. 他在统计学方面的工作，主要是有关一元、多元线性模型的推断及有关的精确与渐近分布理论的研究. 他的高斯马尔可夫模型中方差 σ^2 的最优估计问题的论文是关于方差分析和方差的最佳二次估计的众多研究的起点. 他 1945 年前后的论文，在多元分析数学理论方面处于研究的前沿. 多元理论的难点是样本协方差阵的分布. 1928 年，维夏特(Wishart，J.)推导这种分布密度的方法是几何的，有很多人试图给出严格证明，惟许宝騄基于代数和分析的证明是最优美的. 许宝騄最重要的工作之一是证明了：若独立同分布随机变量 ξ_n，$n\geqslant 1$，均值为 0，方差为 1，且有有限三阶绝对矩 β_3，则对任意 x，

$$F_n(x)=P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\leqslant x\right\}$$

与标准正态分布之差小于 $A\beta_3/\sqrt{n}$(其中 A 是绝对常数). 埃森(Essen，C. G.)虽然也独立地导出同样结果，但时间要晚于许宝騄. 许宝騄在概率论及其应用的大部分工作是出于他运用特征函数方法的完美的技巧，不回避困难，但又深入浅出.

应该重视的是贝叶斯学派的兴起. 英国学者贝叶斯(Bayes，T.)于 1763 年提出了贝叶斯公式作为归纳推理的一种思想，以后被统计学者发展为一种统计推断方法. 其主导思想是用后验分布做出推断，而无需像频率学派那样依赖样本分布族 $P_\theta(x)$ 进行推断. 使用这种推断的统计理论与结果，称为贝叶斯统计. 若已知原因 C，产生结果 E 的概率为

$P(E|C)$，并已知原因 C 的先验概率 $P(C)$，则已知结果 E 后，原因 C 的条件概率为

$$P(C|E)=\frac{P(C)P(E|C)}{\sum_{\alpha}P(\alpha)P(E|\alpha)}.$$

如果把原因 C 理解为某参数 θ，把样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\tau}$ 理解为结果 E，于是参数 θ 的后验概率分布 $P(\theta|X)$，可利用先验分布 $P(\theta)$ 和在参数 θ 的条件下的样本分布 $P(X,\theta)$ 计算出来. 这样，可做统计推断：如果知道结果 E（样本 X），可对所有的原因 C（参数 θ）计算出后验概率 $P(\theta|X)$ 进行比较，找出使之最大的 C^*（或 θ^*）：

$$P(\theta^*|X)=\max_{\theta}P(\theta|X),$$

就可推断 θ^* 为出现样本 X 的原因. 用这样的推断方法最主要的困难是如何确定先验概率，况且参数 θ 往往未必是随机变量. 自从费希尔引进极大似然法避开先验概率之后，人们在统计研究中就摒弃了使用先验概率的方法. 费希尔为解决 Behrens-Fisher 问题，引进了"信念分布"概念：设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别由总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 抽出的独立样本，当参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 均未知时，检验 $\mu_1=\mu_2$ 的问题，或做 $\delta=\mu_1-\mu_2$ 的区间估计问题时，他导出参数 μ_1 与 μ_2 或 δ 的样本分布，称之为信念分布，从而导致了信念学派的诞生. 由于信念分布取决于样本分布，不是主观的，故回避了先验概率的概念. 但人们对之也有很多争论：经典学派认为概率必须可用重复试验得到的频率来解释，称为频率学派；频率学派也受到贝叶斯学派的指责，例如，频率学派对检验置信水平的选取也是事前人为选定的，仍与样本无关.

综上所述，从 19 世纪末到 1945 年前后，上述一系列重要工作，使统计学借助数学与概率论奠定了坚实的理论基础，形成了一门独立的基础学科——数理统计学. 瑞典学者克拉默（Cramer，H. ）于 1946 年发表了《统计学的数学方法》，总结了第二次世界大战前有关数理统计的主要工作，该著作应作为这个领域的一个里程碑.

第二次世界大战后的统计理论的研究工作，不少是将战前开始的理论引向深入与更加完善，其中最重要的成果是在大样本理论方面. 此外，由于计算机的出现，使数理统计方法的应用达到前所未有的规模. 例如多个自变量的回归问题、多元统计分析问题、时间序列分析问题、序贯分析及其中有重要应用的选择问题等，由于大量计算问题的解决，使其内容更加丰富起来. 又由于能在短时间内处理大量数据，故可能不依赖于数学模型也能直接从数据中提取大量信息，从而产生了新的研究方法：数据分析，并认为它是数理统计发展的一个生长点. 总之，统计学不论在理论上还是在应用上，都已经是成熟的学科，其研究工作正处于十分活跃的时期.

数理统计（mathematical statistics）　见"统计学".

描述性统计（descriptive statistics）　见"统计学".

贝叶斯统计（Bayes statistics）　见"统计学".

信念分布（fiducial distribution）　见"统计学".

统计基础

总体（population）　亦称母体. 数理统计的基本概念之一. 统计问题要研究的全部对象组成的集合称为总体，总体中的每个成员是一个个体. 例如人口调查，要了解某地区人口情况，则该地区全部人口就是总体，每个个人就是个体. 数理统计要研究的是总体的一些属性，如人的身高、体重、收入、受教育的情况等. 它是个体的一些指标，实际上，个体指标在总体中的分布，才是真正的研究对象. 因此，数理统计是以问题研究对象的特性指标相应的分布为总体. 这个分布也称为总体的分布，用分布函数 $F(x)$ 或分布密度 $f(x)$ 来表示. 服从某种分布的特性指标称为随机变量，记为 X. X 可以是一元的或多元的. 通常，总体的分布是未知的. 从总体中抽取个体进行考察，就获得样本，亦称子样. 统计就是从子样的情况去推断总体的属性. 一切可能的样本组成一个空间，称为样本空间. 同样地，人们能观察到的是随机抽得的各个个体的某些特性指标，因此样本就是遵从总体分布 $F(x)$ 的随机变量（或向量）. 如果抽取了 n 个个体，则称 n 是样本的容量（或样本的大小）.

母体（population）　即"总体".

个体（individual）　见"总体".

样本（sample）　见"总体".

样本空间（sample space）　见"总体".

简单随机样本（simple random sample）　简称随机样本. 数理统计的基本概念之一. 是统计推断中最简单最常用的子样，是一组独立的遵从总体分布 $F(x)$ 的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 抽取样本的目的是为了对总体的分布进行各种分析推断. 设 X_i 的分布为 $F_i=F$，样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布

$$F^{(n)}=\prod_{i=1}^{n}F_i=F\times F\times\cdots\times F$$

是 n 个相同的一维分布 F 的卷积.

随机样本（random sample）　即"简单随机样本".

参数空间（parameter space）　数理统计的基本概念之一. 是统计推断中所研究参数的可能取值的集合. 设随机变量 X 的概率函数 $f(x,\theta)$ 的类型已

知，参数 θ 未知．则称参数 θ 所有可能取值的集合为参数空间．通常记为 Θ．

位置参数(location parameter)　描述总体最常用的一种参数，通常选其为集中趋势的度量．设样本空间及概率分布族为 $\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$，$\mathscr{X}=R^n$．如果参数空间为全体实数，即 $\Theta=R$，且对任意的 $B\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$，有 $P_\theta(B)=P_0(B-\theta)$，其中 $B-\theta=\{x:(x_1+\theta,x_2+\theta,\cdots,x_n+\theta)\in B\}$，则称 θ 为位置参数．例如，正态分布 $N(\alpha,\sigma^2)$ 的参数 α 就是位置参数；中位数自然也是位置参数．

尺度参数(scale parameter)　亦称刻度参数．对总体进行描述和比较常用的一种参数．设样本空间及概率分布族为 $\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$，$\mathscr{X}=R^n$．如果参数空间为正实数全体，即 $\Theta=(0,+\infty)$，且对任意 $B\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$，有 $P_\theta(B)=P_1(B/\theta)$，其中 $B/\theta=\{x:(\theta x_1,\theta x_2,\cdots,\theta x_n)\in B\}$，则称 θ 为尺度参数．正态分布 $N(\alpha,\sigma^2)$ 的参数 σ 是尺度参数．尺度参数描述总体分布的分散程度或变异性．

刻度参数(scale parameter)　即“尺度参数”．

概率函数(probability function)　数理统计的基本概念之一．是对随机变量分布的一种描述．随机变量 X 的概率函数为 $f(x)$ 的定义是：在连续型随机变量情形，$f(x)$ 是 $X=x$ 的密度函数值；在离散型随机变量情形，$f(x)$ 是 $X=x$ 的概率．

统计结构(statistical structure)　统计学的基本概念之一．设 $\mathscr{P}$ 为可测空间 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$ 上的一个概率测度(分布)族，则称三元总体 $\{\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},\mathscr{P}\}$ 为统计结构．假如 $\mathscr{P}$ 仅依赖于某个参数或参数向量 θ，即 $\mathscr{P}=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$，则称此结构为参数统计结构；否则称为非参数统计结构．统计结构在数理统计中的地位相当于概率空间在概率论中作为研究基础的地位，统计结构是研究统计问题的出发点．

参数统计结构(parametric statistical structure)　见“统计结构”．

非参数统计结构(nonparametric statistical structure)　见“统计结构”．

统计特征(statistical characteristics)　统计学的基本概念之一．在用数理统计方法研究总体时，人们所关心的实际上并非组成总体的各个个体本身，而主要是考察与它们相联系的某个(或某些)特征．研究有关特征在总体的各个个体间的分布情况，称所要考察的特征为总体的统计特征．

统计特征有数量特征和属性特征之分；数量特征又有计量特征和计数特征之分．数量特征可以直接用数值来表示，例如，元件的大小尺寸、小麦的株高等均是计量特征；而夏季暴雨的次数、一平方米布料上疵点的个数是计数特征．属性特征不能直接用数值来表示，如产品是否为合格品、每个人的性别等．特征就是要考察的指标．

决策空间(decision space)　亦称判决空间或行动空间．统计学的基本概念之一．在统计推断中，根据所抽取的样本来回答所提出的问题，每一个具体的回答都称为一个决定或决策(判决、行动)．例如，若问题要估计 $N(\alpha,\sigma^2)$ 中的参数 α，则 0.5 这个数就是一个决策，它表示“用 0.5 作为 α 的估计”这个决定．称一切可能决策的全体 $\mathscr{D}$ 为决策空间．为了理论的需要，在 $\mathscr{D}$ 中要给定一个 σ 域 $\mathscr{B}_{\mathscr{D}}$，所以决策空间又表示为 $(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$．

行动空间(action space)　即“决策空间”．

判决空间(decision space)　即“决策空间”．

判决(decision)　见“决策空间”．

多决策问题(multidecision problem)　一种统计推断问题．指决策空间 $\mathscr{D}$ 为一个有限集(一般要求元素个数大于 2)的统计推断问题．

损失函数(loss function)　统计决策理论的基本概念之一．设参数统计结构为 $\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$，其中 Θ 为参数空间，而判决空间为 $(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$．任一定义在 $\Theta\times\mathscr{D}$ 上的函数 $L(\theta,d)$ 称为损失函数．如果它满足以下两个条件：

1. $0\leqslant L(\theta,d)<\infty$，对任何 $\theta\in\Theta$ 和 $d\in\mathscr{D}$．
2. 对任何固定的 $\theta\in\Theta$，$L(\theta,d)$ 作为 d 的函数是 $\mathscr{B}_{\mathscr{D}}$ 可测的．

损失函数是评判一个判决优劣程度的量，可理解为：当参数真值为 θ，采取决策 d 所造成的损失 $L(\theta,d)$ 越小，表示决策越接近正确．当取 $L(\theta,d)=(\theta-d)^2$ 时，称之为平方损失函数．

平方损失函数(quadratic loss function)　见“损失函数”．

决策函数(decision function)　亦称判决函数．统计决策理论的基本概念之一．统计推断的任务就是建立一个定义于样本空间 $\mathscr{X}$ 上．取值于决策空间 $\mathscr{D}$ 内的函数 $\delta(x)$，使当有了样本 X 时，就采用判决 $\delta(x)$．这种函数称为非随机化的统计决策函数．若对每个样本 X，有决策空间 $(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$ 上的概率测度 $\delta^*(x)$ 与之对应，则称 $\delta^*(x)$ 为随机化的决策函数．通常，决策函数是指非随机化的决策函数．

判决函数(decision function)　即“决策函数”．

随机化决策函数(randomized decision function)　见“决策函数”．

非随机化决策函数(non-randomized decision function)　见“决策函数”．

风险函数(risk function)　统计决策理论的基本概念之一．设样本空间和分布族为 $\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$，决策空间为 $(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$，损失函数为 $L(\theta,d)$，而 $\delta(x)$ 是一个决策函数，则由

$$R(\theta,\delta)=E_\theta\{L(\theta,\delta(x))\}$$

$$= \int_{\mathscr{X}} L(\theta, \delta(x)) P_\theta(\mathrm{d}x), \theta \in \Theta$$

规定的 θ 的函数 $R(\theta,\delta)$ 称为决策函数 δ 的风险函数. 换言之,风险函数是采用决策函数 δ 时,真实参数为 θ 的平均损失. 显然,风险函数值(即风险)越小,决策函数就越好.

一致最优决策函数(uniformly best decision function) 衡量决策函数好坏的一种准则. 决策函数论的一个重要问题是选择最好的决策函数. 设 $\mathscr{D}$ 是决策函数全体,δ_1 与 δ_2 是两个决策函数,如果对 $\forall\theta\in\Theta, R(\theta,\delta_1)\leqslant R(\theta,\delta_2)$ 成立,并且存在一个 θ_0,使得 $R(\theta_0,\delta_1)<R(\theta_0,\delta_2)$ 成立,则称决策函数 δ_1 一致地优于 δ_2. 如果在 $\mathscr{D}$ 中存在一个决策函数 δ^*,一致地优于 $\mathscr{D}$ 中任何一个其他决策函数 δ,则称 δ^* 为一致最优决策函数.

极小化极大决策函数(minimax decision function) 决策函数的一种优良准则. 当采用决策函数 δ 时,可能遭受的最大风险可表示为

$$M(\delta) = \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta).$$

选择一个决策函数 δ^*,使 $M(\delta^*)=\inf_{\delta\in\mathscr{D}}M(\delta)$,这种使最大风险达到最小的准则,称为极小化极大原理. 在此准则下选出的决策函数 δ^*,称为极小化极大决策函数,或称极小化极大解. 当问题为估计或检验时,也称 δ^* 为极小化极大估计或极小化极大检验.

极小化极大解(minimax solution) 见"极小化极大决策函数".

极小化极大原理(minimax principle) 见"极小化极大决策函数".

极小化极大估计(minimax estimate) 见"极小化极大决策函数".

极小化极大检验(minimax test) 见"极小化极大决策函数".

决策函数的完全类(complete class of decision function) 一类最优决策函数. 对于给定的统计决策问题,若有两个决策函数类 μ_1 和 μ_2,且 $\mu_1\supset\mu_2$,如果对 μ_1 中每一个决策函数 δ_1,μ_2 中必存在一个决策函数 δ_2 一致地优于 δ_1(参见"一致最优决策函数"),则称 μ_2 关于决策函数类 μ_1 是完全类. 当 μ_1 是所有决策函数组成的类 $\mathscr{D}$ 时,则称 μ_2 是决策函数的完全类. 若对任意的决策函数 $\delta\in\mathscr{D}$,存在一个决策函数 $\delta'\in\mu_2$($\mathscr{D}$ 的子集),或者 δ' 一致优于 δ,或者 δ' 与 δ 有相同的风险函数,则称 μ_2 为本质完全类. 若 μ_2 是完全类,且 μ_2 的任何真子集都不是完全类,则称 μ_2 为最小完全类.

本质完全类(essentially complete class) 见"决策函数的完全类".

最小完全类(minimal complete class) 见"决策函数的完全类".

统计量(statistic) 进行统计推断的主要分析工具. 简单说来,统计量是不含未知参数的样本函数. 设样本空间为 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$,$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$ 是一个可测空间,从 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$ 到 $(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$ 的一个可测变换 $t(X)$ 称为统计量. 通常,以上两个空间均为欧氏的. 此时,统计量就是样本 $X=(X_1\ X_2\cdots\ X_n)$ 的波莱尔可测函数 $Y=t(X)$,且要求它不含任何未知参数. 一个统计量也是一个随机变量. 例如

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

就是一个统计量.

抽样分布(sample distribution) 亦称样本分布. 统计推断的重要概念之一. 是统计量的分布. 由于统计量的分布是对总体分布进行推断的基础,因此,统计量的分布是数理统计的基本问题之一. 通常是要寻找统计量的精确分布. 以下是若干统计量的精确分布:

1. 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个容量为 n 的样本,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ 与 } s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

分别为样本均值与样本方差,则随机变量

$$t = \frac{\overline{x}-\mu}{s}\sqrt{n-1}$$

服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布. 记为 $t\sim t(n-1)$.

2. 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的一个容量为 n 的样本,$(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 为取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的一个容量为 m 的样本,且这两个样本相互独立,则随机变量

$$T = \frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

服从自由度为 $n+m-2$ 的 t 分布,记为 $T\sim t(m+n-2)$,其中 $\overline{x}$ 与 $\overline{y}$ 分别为这两个样本的样本均值,s_1^2 和 s_2^2 分别为样本方差,且

$$s^2 = \frac{ns_1^2+ms_2^2}{n+m-2}.$$

3. 设总体 ξ 和 η 相互独立,且分别服从正态分布 $N(\alpha_1,\sigma^2)$ 与 $N(\alpha_2,\sigma^2)$. $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 分别来自总体 ξ 与 η. 设 $\overline{x}$ 与 $\overline{y}$ 分别为两个样本的样本均值,s_1^2 和 s_2^2 分别为样本方差,则随机变量

$$F = \frac{ns_1^2}{ms_2^2}\cdot\frac{(m-1)\sigma_2^2}{(n-1)\sigma_1^2}$$

服从第一自由度为 $n-1$,第二自由度为 $m-1$ 的 F 分布,记为 $F\sim F(n-1,m-1)$. 特别地,当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时

$$F = \frac{n(m-1)s_1^2}{m(n-1)s_2^2}$$

服从 $F(n-1,m-1)$ 分布.

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的随机样本,则统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布.

样本分布(sample distribution) 即"抽样分布".

诱导统计结构(induced statistical structure) 由统计量导出的统计结构.设统计结构为$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},\mathscr{P})$,$t(X)$是统计量,把$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$变到$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$,则 $\mathscr{P}$ 通过 $t(X)$,在$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$上导出了一族概率分布.对一切 $B\in\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 及 $P\in\mathscr{P}\}$,有 $\mathscr{P}^{\mathrm{T}}=\{P^{\mathrm{T}}: P^{\mathrm{T}}(B)=P(t^{-1}(B))$. 称统计结构$(T,B_T,P^{\mathrm{T}})$为统计量 $t(X)$的诱导统计结构,而称 $\mathscr{P}^{\mathrm{T}}$ 为诱导分布族.

诱导分布族(induced distribution family) 见"诱导统计结构".

完全统计量(complete statistic) 亦称完备统计量.一类重要的统计量.若统计量的诱导分布是完全的,则称为完全统计量.设$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},\mathscr{P})$是一个统计结构,其中 $\mathscr{P}=\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\}$是概率分布族,$\Theta$为参数空间.如果对于任何定义于 $\mathscr{X}$ 上的 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ 可测函数 $f(X)$,满足条件:对一切 $\theta\in\Theta,E_\theta(f(X))=0$,必有对一切 $\theta\in\Theta,f(X)=0$ (a.s. P_θ).则称分布族 $\mathscr{P}$ 为完全分布族,称$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},\mathscr{P})$为完全(备)统计结构.设 $t(X)$为定义于 $\mathscr{X}$ 上取值于可测空间$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$的统计量,若 $t(X)$的诱导分布族 $\mathscr{P}^{\mathrm{T}}=\{P_\theta^{\mathrm{T}}:\theta\in\Theta\}=\{P_\theta^{\mathrm{T}}:P_\theta^{\mathrm{T}}(B)=P_\theta(t^{-1}(B))$,对一切 $B\in\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 及 $\theta\in\Theta\}$是完全分布族,则称 $t(X)$为完全(备)统计量.

完备统计量(complete statistic) 即"完全统计量".

完全分布族(complete distribution family) 见"完全统计量".

完全统计结构(complete statistical structure) 见"完全统计量".

有界完全统计量(boundedly complete statistic) 常用的一类完全统计量.设$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},\mathscr{P})$是一个统计结构,其中 $\mathscr{P}=\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\}$.如果对于 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ 可测的有界函数$\varphi(X)$,由$\forall\theta\in\Theta$,有$E_\theta\varphi(X)=0$,可推出 $\varphi(X)=0$,a.s. 对 $\mathscr{P}$ 中任一分布成立.则称此统计结构为有界完全(备)的,或称分布族 $\mathscr{P}$ 是有界完全(备)的.如果统计量 $t(X)$的诱导统计结构$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}},\mathscr{P}^{\mathrm{T}})$是有界完全的,则称统计量$t(X)$是有界完全统计量.

有界完全统计结构(boundedly complete statistical structure) 见"有界完全统计量".

有界完全分布族(boundedly complete distribution family) 见"有界完全统计量".

充分统计量(sufficient statistic) 一种集中了样本中全部信息的统计量.设样本空间为$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$,$\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\}$为一族概率分布,其中 Θ 为参数空间,$t(X)$是定义于 $\mathscr{X}$ 之上取值于可测空间$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$的统计量,$\{P_\theta^{\mathrm{T}}:\ \theta\in\Theta\}$是诱导分布族.如果存在一个与 θ 无关的定义于 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}\times\mathscr{T}$ 上的函数 $P(A|t)$,满足:

1. 对固定的 $A\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$, $P(A|t)$作为 t 的函数是 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 可测的;

2. 对任意 $A\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$, $B\in\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 及 $\theta\in\Theta$ 有

$$P_\theta(A\cap t^{-1}(B))=\int_B P(A|t)\mathrm{d}P_\theta^{\mathrm{T}}(t);$$

则称 t 是关于分布族$\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\}$的充分统计量,简称充分统计量.意即以$\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\}$为分布族的随机变量 X 在给定统计量 t 时的条件分布 $P(A|t)$与 θ 无关.若$\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\}$对 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ 上的 σ 有限测度 μ 绝对连续,就有 $f(X,\theta)=\mathrm{d}P_\theta(X)/\mathrm{d}\mu$,则$t(X)$为充分统计量的充分必要条件是:存在定义于 $\mathscr{X}$ 上的非负 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ 可测函数 $h(x)$,及定义于 $T\times\Theta$ 上的函数 $g(t,\theta)$,对固定 $\theta\in\Theta$ 关于 t 为非负 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 可测,便有$\forall\theta\in\Theta,f(X,\theta)=g(t(X),\theta)h(X)$ (a.e. μ),称此充分性判定准则为分解定理,亦称费希尔-奈曼准则.若对任何定义于 $\mathscr{X}$,取值于可测空间$(S,\mathscr{B}_S)$的充分统计量 $S(X)$,必存在由$(S,\mathscr{B}_S)$到$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$的可测变换 $t=q(S)$,以及 $A\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$,对任何 $\theta\in\Theta$ 满足 $P_\theta(A)=0$,便有$\forall x\overline{\in}A,t(X)=q(S(X))$成立,则称 t 为最小充分统计量.充分统计量能把含在样本中有关参数的信息不受损失地提取出来,因而对统计推断是十分有利的.

最小充分统计量(minimal sufficient statistic) 见"充分统计量".

充分统计量分解定理(factorization theorem for sufficient statistic) 见"充分统计量".

费希尔-奈曼准则(Fisher-Neyman criteria) 见"充分统计量".

不变统计量(invariant statistic) 满足某种限制的统计量.设 $t(X)$是定义在样本空间$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta:\ \theta\in\Theta)$上的一个统计量;$G$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一个变换群,满足:若 $g_1,g_2\in G$,则 $g_1\cdot g_2\in G$;若 $g\in G$,则 $g^{-1}\in G$.若 $t(X)$在每个轨道,即在 $G_{x_0}=\{x:\ x=gx_0,g\in G\}$,$x_0\in\mathscr{X}$,上保持常数,即对一切 $g\in G$ 和几乎所有的 x,$t(X)$都满足 $t(gx)=t(x)$,

则称 $t(X)$是关于 G 的不变统计量.若一个不变统计量 $t(X)$,只要 $t(x_1)=t(x_2)$,就存在 $g\in G$,使得 $gx_1=x_2$. 这样的 $t(X)$称为最大不变统计量.

最大不变统计量(maximal invariant statistic)　见"不变统计量".

经验分布函数(empirical distribution function)　根据样本得到的分布函数. 如设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是总体的样本值,将它们按大小顺序排列为 $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \cdots \leqslant x_n^*$,则称分布函数

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant x_1^*); \\ \dfrac{k}{n} & (x_k^* < x \leqslant x_{k+1}^*), \\ & (k = 1, 2, \cdots, n-1); \\ 1 & (x > x_n^*). \end{cases}$$

为总体的一个经验分布函数. 它与样本矩的关系为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \int x \mathrm{d}F_n(x),$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \int (x - \bar{x})^2 \mathrm{d}F_n(x),$$

$$a_\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\nu = \int x^\nu \mathrm{d}F_n(x) \quad (\nu = 2, 3, \cdots),$$

$$b_\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^\nu = \int (x - \bar{x})^\nu \mathrm{d}F_n(x) \quad (\nu = 3, 4, \cdots).$$

频率直方图(frequency histogram)　一种统计图. 指刻画总体 X 概率密度的近似图形. 当样本容量大时,它能较完整地反映总体的分布规律. 设样本值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,作频率直方图的步骤如下:

1. 找出最大值 $x_n^* = \max\limits_i x_i$ 及最小值 $x_1^* = \min\limits_i x_i$,取 a 比 x_1^* 稍小,取 b 比 x_n^* 稍大.

2. 根据样本容量 n 的大小均匀分组,设分组数为 m,则组距 $d = (b-a)/m$.

3. 确定分点 $c_k (0 \leqslant k < m+1)$, $c_0 = a$, $c_k = c_0 + dk$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

4. 计算各组频数 ν_k 和频率 $f_k (1 \leqslant k \leqslant m)$,设样本 $\{x_i\}$ 落在第 k 个小区间 $[c_{k-1}, c_k)$ 中的个数为 ν_k,则频率 $f_k = \nu_k / n$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

5. 画频率直方图,以小区间 $[c_{k-1}, c_k)$ 为底,频率 f_k 为高作长方形 $(k = 1, 2, \cdots, m)$,得到的 m 个长方形构成频率直方图.

样本特征量(sample characteristics)　统计学的基本概念之一. 指描述样本特征的一组量. 已知总体 X 的容量为 n 的样本是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,常见的样本特征量如下:

1. 样本频数:属于事件 A 的样本中观察值个数 ν,称为 A 在样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中的频数,ν/n 称为 A 的相对频数,或称频率.

2. 样本均值: $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

3. 样本方差: $S_0^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$.

4. 样本标准差:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2}.$$

5. 样本(k 阶)原点矩: $\nu_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$.

6. 样本(k 阶)中心矩: $\mu_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$.

7. 样本中位数:

$$m_e = \begin{cases} X^*_{(n+1)/2} & (n \text{ 为奇数}), \\ \dfrac{1}{2}(X^*_{n/2} + X^*_{n/2+1}) & (n \text{ 为偶数}), \end{cases}$$

其中 $X_1^* \leqslant X_2^* \leqslant \cdots \leqslant X_n^*$ 是顺序统计量.

8. 样本极差:

$$R = \max X_i - \min X_i = X_n^* - X_1^*.$$

9. 样本变异系数:

$$C_\nu = \frac{S}{\overline{X}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2}}{\overline{X}}.$$

10. 样本偏态系数:

$$C_0 = \frac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^3}{S^3}.$$

11. 样本峰态系数:

$$C_e = \frac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{S^4}.$$

此外,样本众数是频数最大的 x_i 所取的值,但可以不惟一. 当总体为二维分布情形,设样本分量 $X_i = (U_i, V_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,则有另外两个样本特征量:

12. 样本协方差: $\gamma = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U})(V_i - \overline{V})$,

其中

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k, \overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k, \overline{X} = (\overline{U}, \overline{V}).$$

13. 样本相关系数:

$$\rho = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(U_k - \overline{U})(V_k - \overline{V})}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(U_k - \overline{U})^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(V_k - \overline{V})^2}}.$$

样本均值(sample mean)　见"样本特征量".

样本频数(sample absolute frequency)　见"样本特征量".

样本频率(sample relative frequency)　见"样本特征量".

样本方差(sample variance) 见“样本特征量”.

样本标准差(sample standard deviation) 见“样本特征量”.

样本(k 阶)原点矩(sample origin moment of order k) 见“样本特征量”.

样本(k 阶)中心矩(sample central moment of order k) 见“样本特征量”.

样本中位数(sample median) 见“样本特征量”.

样本极差(sample range) 见“样本特征量”.

样本变异系数(sample coefficient of variation) 见“样本特征量”.

样本偏态系数(sample coefficient of skewness) 见“样本特征量”.

样本峰态系数(sample coefficient of kurtosis) 见“样本特征量”.

样本协方差(sample covariance) 见“样本特征量”.

样本相关系数(sample correlation coefficient) 见“样本特征量”.

样本众数(sample mode) 见“样本特征量”.

顺序统计量(order statistics) 非参数统计中的一种重要统计量.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从总体 X 中抽取的一个样本,记 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一个样本观测值,将观测值按大小顺序排列,得到 $x_1^*\leqslant x_2^*\leqslant\cdots\leqslant x_n^*$.当$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$取值为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$时,定义 $X_k^{(n)}$ 取值为 x_k^* $(1\leqslant k\leqslant n)$.称由此得到的 $X_1^{(n)}$,$X_2^{(n)},\cdots,X_n^{(n)}$ 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的顺序统计量.如果$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个简单随机样本,即 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布且与总体 X 有相同的分布,并且假定总体具有密度函数 $f(x)$,记其分布函数分别为$F(x)$,那么顺序统计量的联合分布密度为

$$g(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)=\begin{cases}n!\prod_{k=1}^{n}f(x_k^*) & (x_1^*<x_2^*<\cdots<x_n^*),\\ 0 & (\text{其他}).\end{cases}$$

样本极差 $R=x_n^*-x_1^*$ 表示观测值波动的最大幅度,有时称为全距.称 $R/2$ 为全距中值,亦称中程数.样本极差的分布函数与密度函数为:

$$F_R(x)=n\int_{-\infty}^{\infty}[F(u+x)-F(u)]^{n-1}\mathrm{d}F(u),$$

$$f_R(x)=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}[F(u+x)-F(u)]^{n-1}\cdot f(u+x)f(x)\mathrm{d}u,$$

而顺序统计量 $X_k^{(n)}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$的分布函数与密度函数分别为:

$$F_{X_k^{(n)}}(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\int_0^{F(x)}t^{k-1}(1-t)^{n-k}\mathrm{d}t,$$

$$f_{X_k^{(n)}}(x)=nC_{n-1}^{k-1}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x).$$

样本中程数(sample mid-range) 见“顺序统计量”.

样本全距中值(sample mid-range) 见“顺序统计量”.

样本全距(sample range) 见“顺序统计量”.

样本p 分位数(sample quantile of order p) 一种样本特征量.设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体 X 的一个样本,$(X_1^{(n)},X_2^{(n)},\cdots,X_n^{(n)})$是样本的顺序统计量,对任何 $0<p<1$,取 $k=[np]+1$,$[np]$表示 np 的整数部分,则称 $X_k^{(n)}$ 为样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的 p 分位数.取 $p=25\%$和 75%,对应的分位数称为第 1 和第 3 四分位数.同样,可以定义十分位数、百分位数.

样本四分位数(sample quartile) 见“样本 p 分位数”.

样本十分位数(sample decile) 见“样本 p 分位数”.

样本百分位数(sample percentile) 见“样本 p 分位数”.

指数族分布(exponential family of distributions) 亦称指数型分布族.统计中最重要的参数分布族.设$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$为分布密度函数族,若 $f(x,\theta)$具有形式

$$f(x,\theta)=a(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}Q_j(\theta)T_j(x)\right\}\cdot h(x),$$

而 $a(\theta),Q_1(\theta),Q_2(\theta),\cdots,Q_k(\theta)$是 k 维参数空间 Θ 上的有限函数,$a(\theta)>1$,$T_1(x),T_2(x),\cdots,T_k(x)$是样本空间$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$上的有限可测函数,$h(x)$是$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$上的正值可测函数,则称$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$为指数族分布.对于离散概率分布族$\{P(x,\theta):\theta\in\Theta\}$,其中概率函数 $P(x,\theta)$具有形式

$$P(x,\theta)=Q(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}Q_j(\theta)T_j(x)\right\}\cdot h(x),$$

同样称为指数族分布.若指数分布中 $Q_j(\theta)$就是参数 θ_j,则称为自然指数族分布.若指数族分布中仅含有一个未知参数,即 Θ 为一维参数空间,则称为单参数指数族分布.二项分布、泊松分布、正态分布都属于指数族分布.

指数型分布族(exponential family of distribution) 即“指数族分布”.

自然指数族分布(nature exponential family of distribution) 见“指数族分布”.

参数统计推断

统计估计(statistical estimation)　统计推断的一种形式.统计估计的方法是用样本的函数来估计总体的分布函数、分布参数或数字特征.例如,用样本均值估计总体均值;用经验分布函数估计总体分布函数等.参数估计与非参数估计是统计估计的两大部分.

参数估计(parameter estimation)　统计估计的重要内容.是对总体分布的未知参数进行的估计.如果已知总体分布的数学形式(例如正态分布),就是参数估计问题.参数估计分为两大类:

1.点估计.是适当选择一个统计量,用此统计量的值作为未知参数的估计值的方法.

2.区间估计.是根据样本估计未知参数取值的一个范围,使它有较大的可能性包含未知参数真值的估计方法.

点估计(point estimation)　见“参数估计”.

区间估计(interval estimation)　见“参数估计”.

估计量(estimator)　用于估计参数的统计量.估计量作为随机样本的函数是随机变量,它所取的值称为估计值.在没有必要强调是估计量或估计值的时候,常把二者简称估计.例如样本均值 $\overline{X}$ 就是总体均值 μ 的估计.

估计值(estimate)　见“估计量”.

无偏估计(unbiased estimation)　一种参数估计.是数学期望与未知参数相等的估计.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是一个样本,如果参数 θ(或 θ 的函数$g(\theta)$)的估计 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$满足关系式 $E\hat{\theta}_n=\theta$(或 $E\hat{\theta}_n=g(\theta)$),则称 $\hat{\theta}_n$ 为参数 θ(或 $g(\theta)$)的无偏估计.如果成立关系式

$$\lim_{n\to\infty} E\hat{\theta}_n=\theta \ (\text{或}\lim_{n\to\infty} E\hat{\theta}_n=g(\theta)),$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是参数 θ(或 $g(\theta)$)的渐近无偏估计.若对参数 θ 的某一函数 $g(\theta)$存在无偏估计,则称$g(\theta)$为可估的.一个估计 $\hat{\theta}_n$ 如果不是无偏的,就称它是有偏的,且称函数 $b(\theta,\hat{\theta}_n)=E\hat{\theta}_n-\theta$ 为估计 $\hat{\theta}_n$ 的偏倚.

渐近无偏估计(asymptotically unbiased estimation)　见“无偏估计”.

有偏估计(biased estimation)　见“无偏估计”.

偏倚(bias)　见“无偏估计”.

一致最小方差无偏估计(uniformly minimum variance unbiased estimation)　亦称最小方差无偏估计.一种无偏估计.是一切无偏估计中方差最小的估计.设样本空间及分布族为$\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$.记$U\triangleq\{T:E_\theta T=\theta,E_\theta T^2<\infty$,对一切 $\theta\in\Theta$ 成立$\}$,即 U 是带有有限方差的 θ 的全体无偏估计所组成的集合.若某个 $T_0\in U$ 具有性质:对一切 $\theta\in\Theta$ 和 $T\in U,D_\theta(T_0)\leqslant D_\theta(T)$成立,则称 T_0 是 θ 的一致最小方差无偏估计.

最小方差无偏估计(minimum variance unbiased estimation)　即“一致最小方差无偏估计”.

一致最小方差线性无偏估计(uniformly minimum variance linearly unbiased estimation)　亦称最小方差线性无偏估计.一种无偏估计.是一切线性无偏估计中方差最小的估计.设样本空间及分布族为$\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$,如果估计 T 是样本的线性函数,即 T 可以表示为

$$T=a_0+\sum_{i=1}^n a_iX_i,$$

其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是固定常数,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个样本,则称估计 T 是线性估计.如果 T 既是线性估计又是无偏估计,则 T 称为线性无偏估计.如果 U_L 是 θ 的具有有限方差的线性无偏估计全体所组成的集合,而对 $T_0\in U_L$,若满足对一切 $\theta\in\Theta$ 和 $T\in U_L,D_\theta(T_0)\leqslant D_\theta(T)$成立,则称 T_0 为 θ 的一致最小方差线性无偏估计.

最小方差线性无偏估计(minimum variance linearly unbiased estimation)　即“一致最小方差线性无偏估计”.

线性无偏估计(linearly unbiased estimation)　见“一致最小方差线性无偏估计”.

相合估计(consistent estimation)　亦称相容估计或一致估计.一种参数估计.是参数估计量相合性的判别方法之一.相合性是估计量优劣的重要标准.相合估计指当样本容量 $n\to\infty$时依某种意义收敛于未知数的估计.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自分布族$\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$的样本,$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 θ 的估计,如果序列$\{\hat{\theta}_n\}$依概率收敛到参数 θ,亦即对任意 $\varepsilon>0$ 和一切 $\theta\in\Theta$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon\}=0$$

成立,则称估计 $\hat{\theta}_n$ 为参数 θ 的相合估计,$\hat{\theta}_n$ 具有相合性.这种依概率收敛意义下的相合性也称为弱相合性.

相容估计(consistent estimation)　即“相合估计”.

一致估计(consistent estimation)　即“相合估计”.

强相合估计(strongly consistent estimation)　亦称强相容估计或强一致估计.一种参数估计.是参数估计量相合性的判别方法之一.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自分布族$\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$的样本,$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是参数 θ 的估计,如果 $\hat{\theta}_n$ 依概率 1 收敛于 θ,

即对一切 $\theta\in\Theta$，

$$P\{\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_n=\theta\}=1$$

成立，则称 $\hat{\theta}_n$ 为参数 θ 的强相合估计.

强相容估计(strongly consistent estimation) 即"强相合估计".

强一致估计(strongly consistent estimation) 即"强相合估计".

均方相合估计(mean square consistent estimaton) 亦称均方一致估计.一种参数估计.是参数估计量相合性的判别方法之一.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自分布族 $\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$ 的样本，$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计，如果 $\hat{\theta}_n$ 均方收敛于参数 θ，即对一切 $\theta\in\Theta$，

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n-\theta)^2=0$$

成立，则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的均方相合估计.

均方一致估计(mean square consistent estimation) 即"均方相合估计".

最小均方误差估计量(minimum mean square error estimation) 一种参数估计量.是使均方误差达到最小的估计量.设 $T(X)$ 是参数 θ 的估计量，对 θ 的任一估计量 $T^*(X)$，如果对一切 $\theta\in\Theta$，$E(T(X)-\theta)^2\leqslant E(T^*(X)-\theta)^2$ 成立，则称 $T(X)$ 为 θ 的最小均方误差估计量.其中 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是样本，Θ 为参数空间.

线性最小均方误差估计(linear minimum mean square error estimation) 亦称最优线性估计.一种参数估计量.是线性估计量中均方误差最小的估计量.设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是一个样本，

$$T(X)=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$$

是 θ 的一个线性估计，如果对于 θ 的任一线性估计 $T^*(X)$ 和一切 $\theta\in\Theta$，有 $E(T(X)-\theta)^2\leqslant E(T^*(X)-\theta)^2$ 成立，则称 $T(X)$ 是参数 θ 的线性最小均方误差估计，其中 Θ 为参数空间.

最优线性估计(optimal linear estimation) 即"线性最小均方误差估计".

克拉默-拉奥不等式(Cramer-Rao inequality) 简称 CR 不等式.一个重要的统计不等式.它给出了无偏估计的方差下界.在某些场合，这样的下界还是下确界.设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自具有分布密度 $\{f_\theta(x),\theta\in\Theta\}$ 的总体的一个简单随机样本，其中 Θ 是实轴上的一个开区间，$T(X)$ 是参数 θ 的函数 $g(\theta)$ 的一个无偏估计，即对一切 $\theta\in\Theta$，有 $E_\theta T(x)=g(\theta)$，且满足条件：

1. 集合 $G=\{x:f_\theta(x)\neq0\}$ 与参数 θ 无关；

2. 对一切 $\theta\in\Theta$，$g'(\theta)$ 与 $\dfrac{\partial f_\theta(x)}{\partial\theta}$ 存在且

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int f_\theta(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\partial f_\theta(x)}{\partial\theta}\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\int\cdots\int T(x)\cdot\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$$

$$=\int\cdots\int T(x)\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)\Big]\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\tau$；

3. $0<I(\theta)=E_\theta\left(\dfrac{\partial\ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)^2<\infty$.

则 $T(X)$ 的方差 $D_\theta T(X)$ 对一切 $\theta\in\Theta$，有下述不等式(CR 不等式)：

$$D_\theta T(X)\geqslant\frac{[g'(\theta)]^2}{n\cdot I(\theta)},$$

且等式成立的充分必要条件为：存在一个不依赖于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，但可能依赖于 θ 的 K，使得等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln[f_\theta(X_i)]}{\partial\theta}=K\cdot(T(X)-g(\theta))$$

以概率 1 成立.其中 $I(\theta)$ 称为费希尔信息量.特别当 $g(\theta)=\theta$ 时，对一切 $\theta\in\Theta$，CR 不等式为

$$D_\theta T(X)\geqslant\frac{1}{[nI(\theta)]}.$$

若参数 θ 是 k 维向量，有类似结论.设 $T(X)=(T_1(X),T_2(X),\cdots,T_r(X))^\tau$ 是 $g(\theta)=(g_1(\theta),g_2(\theta),\cdots,g_r(\theta))^\tau$ 的一个无偏估计，即对一切 $\theta\in\Theta$，$E_\theta T(X)=g(\theta)$ 成立，且满足条件：

1. 对一切 $\theta\in\Theta$ 及 $i,j=1,2,\cdots,k$，有

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int L(x;\theta)\mathrm{d}x=\int\frac{\partial}{\partial\theta_i}L(x;\theta)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\int L(x;\theta)\mathrm{d}x=\int\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}L(x;\theta)\mathrm{d}x,$$

其中 $L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\tau$，

$$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)^\tau;$$

2. 对 $i=1,2,\cdots,r$，$j=1,2,\cdots,k$ 及 $\theta\in\Theta$，$\dfrac{\partial g_i(\theta)}{\partial\theta_j}$ 存在，且

$$\frac{\partial g_i(\theta)}{\partial\theta_j}=\frac{\partial}{\partial\theta_j}\int T_i(x)L(x;\theta)\mathrm{d}x$$

$$=\int T_i(x)\frac{\partial L(x;\theta)}{\partial\theta_j}\mathrm{d}x.$$

记 $I(\theta)$

$$=-E_\theta\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_1^2} & \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_1\partial\theta_k}\\ \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_2\partial\theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_2\partial\theta_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_k\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_k\partial\theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\ln f_\theta(X)}{\partial\theta_k^2}\end{pmatrix}$$

$$= -E_\theta \frac{\partial^2 \ln f_\theta(X)}{\partial\theta\partial\theta^\tau},$$

$$D_\theta T(x) = (\mathrm{cov}(T_i(x), T_j(x)))_{1\leqslant i,j\leqslant r},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial\theta_k} \\ \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial\theta_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_r(\theta)}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_r(\theta)}{\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r(\theta)}{\partial\theta_k} \end{pmatrix} = \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^\tau},$$

则对一切 $\theta\in\Theta$,有

$$D_\theta T(x) \geqslant \frac{1}{n}\Delta \cdot I^{-1}(\theta) \cdot \Delta^\tau,$$

即
$$D_\theta T(x) - \frac{1}{n}\Delta \cdot I^{-1}(\theta) \cdot \Delta^\tau$$

是非负定矩阵.通常称 $I(\theta)$ 为费希尔信息阵.以上CR不等式右端表达式称为克拉默-拉奥下界,简称CR下界.如果 T 是参数 θ 的无偏估计,其方差达到CR下界,则称 T 是有效估计.对于 θ 的任一无偏估计 T,称

$$e_\theta(T) = \frac{1}{nI(\theta)}\bigg/ D_\theta(T)$$

为无偏估计 T 的效率.如果 $T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 θ 的无偏估计,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nI(\theta)D(T_n)} = \lim_{n\to\infty} e_\theta(T_n) = C_0,$$

则称 C_0 是 T_n 的渐近效率.当 $C_0=1$ 时,称 T_n 是 θ 的渐近有效估计.但是CR下界不易达到,为提高下界,作为CR不等式的推广,有所谓巴塔恰里亚不等式.沿用前面记号,设 $T(x)$ 是参数 θ 的函数 $g(\theta)$ 的无偏估计,在一定正则条件下,记

$$V_{ij}(\theta) = E_\theta\left[\frac{1}{f_\theta^2(x)}\frac{\partial^i f_\theta(x)}{\partial\theta^i}\frac{\partial^j f_\theta(x)}{\partial\theta^j}\right]$$
$$(i,j=1,2,\cdots,k),$$
$$V(\theta) = [V_{ij}(\theta)]_{k\times k} \quad (\theta\in\Theta),$$
$$\tilde{g}(\theta) = (g^{(1)}(\theta), g^{(2)}(\theta), \cdots, g^{(k)}(\theta))^\tau$$
$$(\theta\in\Theta).$$

当 $V(\theta)$ 在 $\theta\in\Theta$ 处行列式不为零时,必有

$$D_\theta T(x) \geqslant \tilde{g}'(\tau)V^{-1}(\theta)\tilde{g}(\theta)$$

其右端称为巴塔恰里亚下界.$k=1$ 时,则为CR下界.克拉默-拉奥不等式是由瑞典学者克拉默(Cramer,H.)和印度学者拉奥(Rao,C.R.)分别于1946年和1945年证明的.

CR不等式(Cramer-Rao inequality)　即"克拉默-拉奥不等式".

克拉默-拉奥下界(Cramer-Rao lower bound)　见"克拉默-拉奥不等式".

有效估计(efficient estimate)　见"克拉默-拉奥不等式".

估计的效率(efficiency of an estimate)　见"克拉默-拉奥不等式".

渐近有效估计(asymptotically efficient estimate)　见"克拉默-拉奥不等式".

费希尔信息量(Fisher's amount of information)　见"克拉默-拉奥不等式".

费希尔信息阵(Fisher's matrix of information)　见"克拉默-拉奥不等式".

渐近效率(asymptotic efficiency)　见"克拉默-拉奥不等式".

巴塔恰里亚下界(Bhattacharyya lower bound)　见"克拉默-拉奥不等式".

巴塔恰里亚不等式(Bhattacharyya inequality)　见"克拉默-拉奥不等式".

广义方差(generalized variance)　一类行列式.是随机向量的协方差阵的行列式.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 有联合分布 $F(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,相应的各种二阶矩均有限,则随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^\tau$ 的协方差阵为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E(X-EX)(X-EX)^\tau \\ &= (E(X_i-EX_i)(X_j-EX_j))_{n\times n}\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(X)$ 的行列式 $|\mathrm{Var}(X)|$ 称为广义方差.

渐近正态性(asymptotic normality)　估计量的一种渐近性质.设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^\tau$ 是一个样本,$T(X)=(T_1(X),T_2(X),\cdots,T_r(X))^\tau$ 是参数 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)$ 的估计.如果当 n 趋于无穷时,$\sqrt{n}(T(\boldsymbol{X})-\theta)$ 的联合分布渐近于正态分布,则称 $T(\boldsymbol{X})$ 具有渐近正态性.设 $I(\theta)$ 表示费希尔信息阵,如果 $\sqrt{n}(T(\boldsymbol{X})-\theta)$ 的联合分布渐近于正态分布 $N(0,I^{-1}(\theta))$,则称 $T(\boldsymbol{X})$ 为 θ 的最优渐近正态估计.

最优渐近正态估计(best asymptotically normal estimate)　见"渐近正态性".

大样本理论(large sample theory)　亦称渐近理论.统计量性质的一种刻画.它研究样本容量趋于无穷时,统计量的渐近性质.例如,假定 $\mathscr{F}$ 是方差有限的一维分布族,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自 $\mathscr{F}$ 的某个分布 F 的简单随机样本.要估计 F 的均值 $\theta(F)$,使用样本均值

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

作为 $\theta(F)$ 的估计量,当样本容量 n 趋于无穷时,估计量有如下性质:

1. $\overline{X}_n$ 依概率收敛于 $\theta(F)$.这就意味着只要样本容量 n 足够大,估计量 $\overline{X}_n$ 可以渐近于1的概率接

近真值 $\theta(F)$. 此性质称为估计量的相合性.

2. 若 F 的方差 $\sigma_F^2 \neq 0$,且有限,则当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta(F))}{\sigma_F} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1),$$

即将 $\overline{X}_n$ 正则化后,它依分布收敛于标准正态分布. 此性质称为渐近正态性. 因此,当样本容量 n 充分大时,可以近似计算出 $\overline{X}_n$ 落在 $\theta(F)$某个范围内的概率有多大(当然需要预先知道 σ_F^2). 若 σ_F^2 未知,则用

$$\hat{\sigma}_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X}_n)^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

代替 σ_F^2,得统计量

$$z_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta(F))}{\hat{\sigma}_F},$$

当 n 很大时,如果仍服从正态分布,则可以做假设检验. 上述都是大样本理论. 总之,所谓大样本理论,是指当样本容量无限增加时,与该统计量的分布有关的种种极限性质.

渐近理论(asymptotic theory) 即"大样本理论".

小样本理论(small sample theory) 亦称精确样本理论. 统计量性质的一种刻画. 它研究样本容量固定时,各种统计量的性质及由此进行的统计推断. 精确样本理论最早的例子是由英国统计学家和化学家戈塞特(Gossett, W. S.)于 1908 年提出的 t 分布(参见"统计学").

精确样本理论(exact sample theory) 即"小样本理论".

贝叶斯估计(Bayes estimator) 依赖先验信息的估计方法. 假定总体 ξ 具有概率分布 $F(x;\theta)$,$\theta \in \Theta$,$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$是由总体中抽取的样本,样本空间及分布族为 $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}_{\mathscr{X}}, P_\theta), \theta \in \Theta\}$,$(\mathscr{D}, \mathscr{B}_{\mathscr{D}})$是决策空间,$L(\theta, d)$是损失函数. 如果把参数 θ 看做一个随机变量,一般称参数空间$(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$上的任意一个概率分布 π 为 θ 的一个先验分布. 其中 $\mathscr{B}_\Theta$ 为 Θ 的某些子集组成的 σ 域. 设 δ 是任一决策函数,以 $R(\theta, \delta)$记其风险函数,则称

$$R_\pi(\delta) = \int_\Theta R(\theta, \delta) \mathrm{d}\pi(\theta) = ER(\theta, \delta)$$

为 δ 在先验分布 π 之下的贝叶斯风险. 任一满足条件

$$R_\pi(\delta_\pi) = \inf_\delta R_\pi(\delta)$$

的决策函数 δ_π 称为所提统计问题的贝叶斯解或称贝叶斯决策函数. 在估计问题中,称为贝叶斯估计. 若前面的$\inf\limits_\delta$ 是对一切(包含随机化的)估计量取的,则称 δ_π 为随机化贝叶斯估计,如果只考虑非随机化的,则称为非随机化贝叶斯估计. 若记 $r(\pi) = R_\pi(\delta_\pi)$,则满足条件

$$r(\pi_0) = \sup_\pi r(\pi)$$

的先验分布 π_0 称为最不利先验分布.

假定 ξ 和 θ 都是连续型随机变量,并假定其概率分布密度分别为 $g(x)$和 $e(\theta)$,由贝叶斯公式

$$p(x, \theta) = f(x \mid \theta) \cdot e(\theta) = h(\theta \mid x) g(x),$$

$$h(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta) \cdot e(\theta)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0),$$

其中 $p(x,\theta)$,$f(x \mid \theta)$和 $h(\theta \mid x)$分别为 ξ 和 θ 的联合分布密度和条件分布密度,给定 $\xi = x$ 时,θ 的条件分布 $h(\theta \mid x)$称为后验分布. 对于 ξ, θ 均为离散型或其中之一为离散型时,定义完全类似,只需将分布密度函数换为相应的概率函数. 称

$$R_\pi(\delta, x) = \int_\Theta L(\theta, \delta(x)) h(\mathrm{d}\theta \mid x),$$

δ 非随机化,

$$R_\pi(\delta, x) = \int_\Theta h(\mathrm{d}\theta \mid x) \int_{\mathscr{D}} L(\theta, t) \delta(x, \mathrm{d}t),$$

δ 随机化,

为给定样本 $X = x$ 时的贝叶斯后验风险,如果存在 δ^* 使得对一切 $x \in \mathscr{X}$,

$$R_\pi(\delta^*, x) = \inf_\delta R_\pi(\delta, x)$$

成立. 则称 δ^* 为后验型贝叶斯解或后验型贝叶斯决策函数. 可以证明,它就是贝叶斯决策函数. 在估计问题中,即 $\mathscr{D} = \Theta$,则称 δ^* 为参数 θ 的后验型贝叶斯估计. 经验贝叶斯方法是求先验分布的一种方法. 设已有历史资料的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,据此对先验分布 $\pi(\theta)$的估计记为 $\pi(\theta \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)$. 若再有样本 X_{n+1},欲再作判决时,则可求基于先验分布 $\pi(\theta \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)$的贝叶斯解 $\delta_n(X_1, X_2, \cdots, X_n; X_{n+1})$称为经验贝叶斯决策函数. 其风险函数与 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 有关,记为 $R(\delta_n;\ X_1, X_2, \cdots, X_n)$,对 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 作平均,记为$R^*(\delta_n) = E[R(\delta_n;\ X_1, X_2, \cdots, X_n)]$. 以 R_π 记真先验分布的贝叶斯风险,若有

$$\lim_{n \to \infty} R^*(\delta_n) = R_\pi,$$

则称$\{\delta_n\}$为渐近最优经验贝叶斯解.

贝叶斯风险(Bayes risk) 见"贝叶斯估计".

贝叶斯解(Bayes solution) 见"贝叶斯估计".

贝叶斯决策函数(Bayes decision function) 见"贝叶斯估计".

随机化贝叶斯估计(randomized Bayes estimation) 见"贝叶斯估计".

非随机化贝叶斯估计(non-randomized Bayes estimation) 见"贝叶斯估计".

后验型贝叶斯解(posterior Bayes solution) 见"贝叶斯估计".

后验型贝叶斯决策函数(posterior Bayes decision function) 见"贝叶斯估计".

后验型贝叶斯估计(posterior Bayes estima-

tion） 见"贝叶斯估计".

经验贝叶斯决策函数(empirical Bayers decision function） 见"贝叶斯估计".

渐近最优经验贝叶斯解(asymptotically best empirical Bayes solution） 见"贝叶斯估计".

先验分布(prior distribution） 参数的一种概率分布.是抽样前就有的关于参数 θ 的先验信息的概率表述.推断参数 θ,需要已知样本 X 及样本分布族$\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$,$\Theta$ 是参数空间.贝叶斯统计需要参数 θ 的概率分布 $H(\theta)$.把 θ 看做随机变量,称 $H(\theta)$为先验分布.给定 $X=x$ 的条件下,θ 的条件分布称为 θ 的后验分布.

若 X 的概率密度为$f(x,\theta)$,θ 的先验分布$H(\theta)$有密度 $h(\theta)$,则后验密度为

$$h(\theta|x)=\frac{f(x,\theta)h(\theta)}{\int_\Theta f(x,\varphi)h(\varphi)\mathrm{d}\varphi}.$$

若 $h(\theta)$不是密度函数,但满足：

1. $h(\theta)\geqslant 0,\forall\theta\in\Theta$;

2. $0<\int_\Theta f(x,\varphi)h(\varphi)\mathrm{d}\varphi<\infty$

　(保证 $h(\theta|x)\geqslant 0$,且$\int_\Theta h(\theta|x)\mathrm{d}\theta=1$);

3. $\int_\Theta h(\theta)\mathrm{d}\theta=\infty$;

则称此 $h(\theta)$为广义先验密度.

设总体变量 X 的分布族 $P_\theta(x)$对某种变换群不变,若先验分布有相应的不变性,则称该先验分布为无信息先验分布.它是先验分布的一种选择.

后验密度(posterior density） 见"先验分布".

后验分布(posterior distribution） 见"先验分布".

广义先验密度(generalized prior density） 见"先验分布".

无信息先验分布(non-informative prior distribution） 见"先验分布".

共轭先验分布族(conjugate prior distribution family） 具有共轭性质的先验分布族.有时将共轭性作为选择先验分布族的原则.给定统计结构$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},\mathscr{P})$,如果 $\mathscr{P}$ 中的概率分布族可以由参数表示,即 $\mathscr{P}=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$,

$$P_\theta(E)=\int_E f(x;\theta)\mathrm{d}\mu\quad(\forall E\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}),$$

其中 μ 是$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$上一个 σ 有限测度.集合 Θ 是参数空间.考虑可测空间$(\Theta,\mathscr{B}_\Theta)$上的一个先验分布族 $\mathscr{K}$,如对 $\mathscr{K}$ 中每一个先验分布 $\pi(\theta)$,由它和 $f(x;\theta)$导出的后验分布 $h(\theta|x)$仍然属于分布族 $\mathscr{K}$,则称 $\mathscr{K}$ 对于$f(x;\theta)$是共轭的分布族.

冗余参数(nuisance parameter） 一类总体分布的参数.它不是研究者主要感兴趣的参数.例如,对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$,如果只对均值 μ 感兴趣,则 σ^2 就是冗余参数.冗余参数的存在会对所感兴趣的参数的推断问题变得复杂化.

不变估计(invariant estimate） 亦称同变估计,是评判估计量性能的准则之一.在一些参数估计问题中,当样本作某种特定变换时,可以要求估计量经受与之相应的一定变换.设样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$具有分布函数族$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$,其中 $\theta\in\Theta$ 为参数,Θ 为参数空间;$\mathscr{X}$ 是样本空间,g 是 $\mathscr{X}$ 上的一个变换.又设 gX 是一个随机向量,它当 $X=x$ 时取值 gx;当 X 服从分布 $F(x;\theta)$ $(\theta\in\Theta)$,要求 gX 的分布仍属于分布族$\{F(x;\theta),\theta\in\Theta\}$,不妨设为 $F(x;\theta')$,$\theta'\in\Theta$,记 $\bar{g}$ 是 Θ 上的一个变换,使得 $\theta'=\bar{g}\theta$,称 $\bar{g}$ 为 g 在 Θ 上的诱导变换.假定：

1. g 是样本空间 $\mathscr{X}$ 自身上的一对一的变换.

2. g 的诱导变换 $\bar{g}$ 是参数空间 Θ 自身上的一对一的变换.这一点保证了 g 保持问题的概率结构不变.

设 G 是由具有上述性质的 g 组成的变换群,则由 g 的诱导变换 $\bar{g}$ 全体也构成一个群 $\bar{G}$,称为 G 的诱导变换群.如果 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个估计,且满足对一切 $x\in\mathscr{X}$,$g\in G$,$\hat{\theta}(gx)=\bar{g}\hat{\theta}(x)$成立,则称 $\hat{\theta}$ 关于 G 是不变的,$\hat{\theta}$ 又称为 θ 关于 G 的不变估计,简称不变估计(或同变估计).把上面的估计问题推广到一般的统计推断情形,将参数空间 Θ 由决策空间 $\mathscr{D}$ 代替,则对应不变估计 $\hat{\theta}$ 的决策函数称为不变决策函数.若在不变决策函数类中某个不变决策函数的风险函数达到最小,则称其为最优不变判决函数.相应于估计问题称为最优不变估计.

同变估计(equivariant estimate） 即"不变估计".

不变决策函数(invariant decision function） 见"不变估计".

最优不变决策函数(optimum invariant decision function） 见"不变估计".

最优不变估计(optimum invariant estimation） 见"不变估计".

皮特曼估计(Pitman estimate） 平方损失下位置参数的最优同变估计.皮特曼(Pitman,E.J.)于1939 年提出了这一估计.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自密度函数 $p(x-\theta)$的一个样本,且 $EX_i^2<+\infty(i=1,2,\cdots,n)$,则 θ 的皮特曼估计为

$$\theta^*(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{\int\theta p(x_1-\theta,x_2-\theta,\cdots,x_n-\theta)\mathrm{d}\theta}{\int p(x_1-\theta,x_2-\theta,\cdots,x_n-\theta)\mathrm{d}\theta},$$

这个估计在位移变换下是 θ 的最优同变估计.

皮特曼效率(Pitman efficiency） 比较检验性

能的一种准则.它以达到同样功效所需抽样次数之比来衡量.设变量的分布族为 $\mathscr{P}$,要检验假设 $H_0:\theta\leqslant\theta_0;H_1:\theta>\theta_0$,设关于这个问题有两个检验 S 和 T,为对它们做出比较,假定当 $\theta=\theta_0$ 时,记样本大小为 N 时检验 S 和 T 的功效函数为 $\beta_{S,N}$和 $\beta_{T,N}$,取一串 $\theta_N\to\theta_0,\theta_N>\theta_0$,设 $C_1(N)$和 $C_2(N)$为 N 的两个整数函数,使得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\beta_{T,C_2(N)}(\theta_N)}{\beta_{S,C_1(N)}(\theta_N)}=\gamma\ \ (0<\gamma<1),$$

则定义 S 对 T 的皮特曼效率为

$$e(S/T)=\lim_{N\to\infty}\frac{C_2(N)}{C_1(N)}.$$

当然,$e(S/T)$与所考虑的分布族$\{P_\theta,\theta\geqslant\theta_0\}$有关,例如,若 $e(S/T)=2$,则检验 T 需要比用检验 S 多一倍的抽样,才能达到指定 γ 后大致一样的功效.由于上述效率是大样本性质,皮特曼效率也常称为皮特曼相对渐近效率.

皮特曼相对渐近效率(Pitman relative asymptotic efficiency) 见"皮特曼效率".

容许估计(admissible estimation) 在风险上不全面劣于其他任一估计的那种估计.设有一个统计结构$\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$和一个决策空间$(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$,$L(\theta,d)$是定义在 $\Theta\times\mathscr{D}$ 上的一个损失函数,δ 是一决策函数,$R(\theta,\delta)$是决策函数 δ 的风险函数.对给定的决策问题,如果对一切 $\theta\in\Theta$,没有另外一个决策函数 δ^* 满足 $R(\theta,\delta^*)\leqslant R(\theta,\delta)$,且至少有一个 θ 使不等号成立,则称决策函数 δ 是容许的.否则称为非容许的.如果所研究问题是估计问题,则称容许决策函数为容许估计,称非容许决策函数为非容许估计.

容许决策函数(admissible decision function) 见"容许估计".

非容许决策函数(non admissible decision function) 见"容许估计".

非容许估计(non admissible estimation) 见"容许估计".

矩估计法(moment method of estimate) 用样本矩代总体矩的估计方法.假定总体分布为 $F(x;\theta)$,θ 是 k 维参数向量,$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)^{\tau}$,又假定 $F(x;\theta)$相应的 k 阶矩都有限,用 μ_r 表示 r 阶原点矩,则有 k 个等式

$$\mu_r=\int x^r\mathrm{d}F(x;\theta)\ \ (r=1,2,\cdots,k).$$

由这 k 个等式,解出 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$,即将 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 分别表示为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$ 的函数:

$$\theta_i=\theta_i(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)\ (i=1,2,\cdots,k).$$

于是用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的原点矩

$$a_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r\ \ (r=1,2,\cdots,k)$$

代替 $\theta_i(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$,就获得 θ_i 的估计量

$$\hat\theta_i=\theta_i(a_1,a_2,\cdots,a_k)\ \ (i=1,2,\cdots,k).$$

这种估计量称为矩法估计,这种方法称为矩估计法.

最大似然法(method of maximum likelihood) 取似然函数的最大值点作为估计量的估计方法.设总体具有分布密度函数 $f_\theta(x)$,$\theta\in\Theta$ 是 k 维参数向量.$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是从总体中抽取的样本.取

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)$$

达到最大值的 $\hat\theta$ 作为参数 θ 的估计,称 $\hat\theta$ 为最大似然估计,称这种估计方法为最大似然法,$L(\theta)$称为样本似然函数.由于 $\ln L(\theta)$与 $L(\theta)$同时达到最大值,因此最大似然估计时常可通过解下列似然方程

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0\ \ (i=1,2,\cdots,k)$$

而求得.如果似然方程有解,且可以确定其某一解确使 $L(\theta)$达到最大,则它就是最大似然估计.如果总体分布是离散型的,只需将上面的密度函数用概率函数代替.

最大似然估计(maximum likelihood estimate) 见"最大似然法".

似然函数(likelihood function) 见"最大似然法".

小概率原理(small probability principle) 统计推断中使用的一种经验性原理.该原理认为:在一次试验中,概率很小(接近于零)的事件实际上不可能发生.

区间估计(interval estimation) 以区间形式表示的估计.1934 年,美籍俄国数学家奈曼(Neyman,J.)开始的一系列有关置信区间的工作,占据目前区间估计理论的主导地位,它不同于英国数学家、生物学家费希尔(Fisher,R. A.)依信念分布(参见"统计学")给出的区间估计.设总体 ξ 的样本空间及概率分布族为$\{(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta),\theta\in\Theta\}$且 $\Theta\subset R^1$,$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体的一个样本,$\hat\theta_1(x)$与$\hat\theta_2(x)$是两个统计量,且 $\hat\theta_1(x)\leqslant\hat\theta_2(x)$总成立.若$\forall\theta\in\Theta$,事件"区间$[\hat\theta^1(x),\hat\theta_2(x)]$包含 θ"的概率大于等于指定的常数 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$,即对$\forall\theta\in\Theta$,

$$P_\theta(\hat\theta_1(x)\leqslant\theta\leqslant\hat\theta_2(x))\geqslant 1-\alpha$$

成立,则称区间$[\hat\theta_1(x),\hat\theta_2(x)]$是 θ 的区间估计或称置信区间,且有置信水平 $1-\alpha$.$\hat\theta_1(x)$与 $\hat\theta_2(x)$称为置信限.若 $\hat\theta_2(x)>\hat\theta_1(x)$,则 $\hat\theta_2(x)$与 $\hat\theta_1(x)$分别称为置信上限与置信下限.置信水平最小者称为置信系数,即$[\hat\theta_1(x),\hat\theta_2(x)]$的置信系数为

$$\inf_{\theta\in\Theta}\{P_\theta(\hat\theta_1(x)\leqslant\theta\leqslant\hat\theta_2(x))\}.$$

区间估计的优良性准则：在 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间族中，对所有 θ，若 $[\hat{\theta}_1^*(x),\hat{\theta}_2^*(x)]$ 的区间长度总是达到最小时，则称它为一致最精确的置信区间；若 θ 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间 $[\hat{\theta}_1(x),\hat{\theta}_2(x)]$ 对任意 $\theta'(\theta\neq\theta')$，满足

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(x)\leqslant\theta'\leqslant\hat{\theta}_2(x))\leqslant 1-\alpha,$$

则称 $[\hat{\theta}_1(x),\hat{\theta}_2(x)]$ 为无偏置信区间. 也可类似定义一致最精确无偏置信区间.

置信区间(confidence interval) 即"区间估计".

置信水平(confidence level) 见"区间估计".

置信限(confidence limits) 见"区间估计".

置信系数(confidence coefficient) 见"区间估计".

一致最精确置信区间(uniformly most accurate confidence interval) 见"区间估计".

无偏置信区间(unbiased confidence interval) 见"区间估计".

一致最精确无偏置信区间(uniformly most accurate unbiased confidence interval) 见"区间估计".

置信集(confidence set) 亦称置信域. 置信区间概念推广到多维的形式. 设总体 ξ 的概率分布族为 $\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$，$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 ξ 的一个样本，$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in\Theta\subset R^k$. 如果 $S(X)$ 满足：

1. 对任一个样本观测值 x，$S(x)$ 是 Θ 的一个子集；

2. 对给定的 α $(0<\alpha<1)$ 和一切 $\theta\in\Theta$，有

$$P_\theta(\theta\in S(X))\geqslant 1-\alpha,$$

则称 $S(X)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信集，称

$$\inf_{\theta\in\Theta}P_\theta(\theta\in S(X))$$

为置信系数.

置信域(confidence region) 即"置信集".

容忍区间(tolerance interval) 统计推断的一种形式区间. 在对产品做抽样调查时，要寻求一个产品指标 x 合格的区间 $[t_1,t_2]$，使产品至少有 β(比如 99%)的概率落在其中，才算生产正常. 而该区间的端点则需通过样本 X 去确定，得 $T_1(X)$，$T_2(X)$. 由于它的随机性，需考查事件"以不小于 β 的概率使产品指标 x 落在 $[T_1(X),T_2(X)]$"的概率是否不小于 r (比如 $r=90\%$). 此问题归结为容忍区间问题.

设总体概率分布函数族为 $\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$，$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自该总体的一个样本，其概率分布为 P_θ. 给定 $0<\beta<1$，$0<r<1$，若 $T_1(X)$ 和 $T_2(X)$ 是两个统计量，$T_1(X)\leqslant T_2(X)$，且满足

$$P_\theta\{F_\theta[T_2(X)]-F_\theta[T_1(X)]\geqslant\beta\}\geqslant r,$$

则称 $[T_1(X),T_2(X)]$ 为总体分布 $F_\theta(x)$ 的容量为 β、水平为 r 的容忍区间. 简称 (β,r) 容忍区间. 类似地，可以定义 (β,r) 容忍上限 $\bar{T}(X)$ 和下限 $\underline{T}(X)$ 分别满足

$$P_\theta\{F_\theta[\bar{T}(X)]\geqslant\beta\}\geqslant r,$$
$$P_\theta\{F_\theta[\underline{T}(X)]\leqslant 1-\beta\}\geqslant r.$$

容忍上限(tolerance upper limit) 见"容忍区间".

容忍下限(tolerance lower limit) 见"容忍区间".

假设检验(hypothesis testing) 统计推断的一种基本方法. 它是根据样本的观察结果对总体分布的某个命题的真伪做出判断的方法. 在统计学上称这种命题为统计假设或简称假设. 一般地，假设是有关总体的分布函数或总体分布参数的命题. 例如要检验总体分布是否是正态的；又如对正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 要检验 $\mu\geqslant\mu_0$(其中 μ_0 是已知的常数)是否成立. 这两例体现了两个不同类型的假设检验问题.

假设检验有参数与非参数的区别. 如果总体的分布族可以用参数 θ 来确定，θ 的变化范围用 Θ 表示，待检验的假设，往往可以用 $\theta\in\Theta_0$ ($\Theta_0\subset\Theta$，且 Θ_0 非空)的形式来表示，称它为原假设，也称为零假设，通常记为 H_0: $\theta\in\Theta_0$. 它的对立的命题是 $\theta\in\Theta_1$ ($\Theta_1\subset\Theta$，$\Theta_1\cap\Theta_0=\varnothing$)，通常记它为 H_1: $\theta\in\Theta_1$，称为对立假设或备择假设. 上述正态总体的例中，H_0: $\mu\leqslant\mu_0$，H_1: $\mu>\mu_0$. 这是参数的假设检验问题. 上述的另一例要检验总体分布是否是正态，原假设是"总体分布是正态"，对立假设是"总体分布不是正态"，它无法参数化，因而是一个非参数假设检验问题. 又如要检验两个总体的分布是否相同，而分布类型是未知的，也是一个非参数的假设检验问题.

参数假设检验中，如 Θ_0 是单点集，则称 H_0 是简单假设，如 Θ_0 至少含有两个点，则称 H_0 是复合(或复杂)假设. 检验是指一个规则，由样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^\tau$ 按规则确定接受零假设还是拒绝零假设. 检验规则可以由样本空间中的一个区域来刻画，给定一个区域 W 之后，当 $X\in W$，拒绝假设；当 $X\overline{\in}W$，接受假设，W 就称为否定域，亦称临界域. 给出一个否定域就是给出一个检验方法. 如用否定域的指示函数来表示：

$$I_W(X)=\begin{cases}1 & (X\in W),\\ 0 & (X\overline{\in}W).\end{cases}$$

则可理解为：当 $X\in W$ 时，以概率 $I_W(X)$ 拒绝零假设；当 $X\overline{\in}W$ 时，以概率 $I_W(X)$ 接受零假设. 一般可以考虑取值于 $[0,1]$ 的样本 X 的可测函数 $\varphi(x)$，当样本值为 x 时，以概率 $\varphi(x)$ 拒绝零假设，这样的检

验称为随机化的检验;$\varphi(x)$只取 0,1 两个值的称为非随机化检验.函数$\varphi(x)$称为检验函数.

零假设(zero hypothesis) 见"假设检验".

原假设(null hypothesis) 见"假设检验".

对立假设(opposite hypothesis) 见"假设检验".

备择假设(alternative hypothesis) 见"假设检验".

简单假设(simple hypothesis) 见"假设检验".

复合假设(composite hypothesis) 见"假设检验".

统计假设(statistical hypothesis) 见"假设检验".

否定域(rejection region) 见"假设检验".

临界域(critical region) 见"否定域".

随机化检验(randomized test) 见"假设检验".

非随机化检验(non-randomized test) 见"假设检验".

检验函数(test function) 见"假设检验".

水平α检验(level α test) 一种假设检验.是原假设被错误地否定的概率不超过α的检验.设总体的概率分布族为$\mathscr{P}=\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$,$\Theta_0$为参数空间$\Theta$的非空真子集,给定假设$H:\theta\in\Theta_0$,设样本$X$的分布是样本空间$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$上的一个概率测度$P_\theta$,当$\theta$为参数真值时,拒绝$H$的概率可由式子

$$E_\theta\varphi(x)=\int_{\mathscr{X}}\varphi(x)P_\theta(\mathrm{d}x)$$

给出,其中$\varphi(x)$为检验函数.预先给定一个常数α $(0<\alpha<1)$,如果检验函数$\varphi(x)$对一切$\theta\in\Theta_0$满足$E_\theta\varphi(x)\leqslant\alpha$,即如果假设$H$真时,拒绝$H$的概率不大于$\alpha$,则称这样的检验为水平$\alpha$检验.$\alpha$称为检验$\varphi$的水平,亦称为显著性水平.全体水平$\alpha$检验记为$\Phi(\alpha)$.并且

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}E_\theta(\varphi)$$

称为检验φ的真实水平或称检验的大小.称定义在Θ上的函数

$$\beta_\alpha^*(\theta)=\sup_{\varphi\in\Phi(\alpha)}E_\theta\varphi$$

称为包络功效函数.水平为α的检验φ^*使

$$\sup_{\theta\in\Theta_1}[\beta_\alpha^*(\theta)-\beta_\varphi(\theta)]$$

达到极小值,则称φ^*为最严谨的水平为α的检验,其中$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta\varphi$.

显著性水平(significance level) 见"水平α检验".

检验的大小(size of test) 见"水平α检验".

包络功效函数(envelope power function) 见"水平α检验".

两类错误(error of two kinds) 参数统计推断术语.即在对假设作检验时可能出现的两种类型的错误:

1. 当假设H_0正确时,做出拒绝H_0的推断,犯了"以真当假"的错误,常称为第一类错误.犯第一类错误的概率为$\alpha=P\{$拒绝$H_0|H_0$正确$\}$.

2. 当假设H_0不正确时,做出接受H_0的推断,犯了"以假当真"的错误,常称为第二类错误.犯第二类错误的概率为$\beta=P\{$接受$H_0|H_0$不正确$\}$.

要使犯两类错误的概率α,β都变小,除了采用性能优良的检验法外,通常就要增加样本容量n.

功效函数(power function) 亦称势函数.假设检验中的一种概率.是指采用某检验时否定原假设的概率.设总体ξ的分布函数为$F_\theta(x)$,$\theta\in\Theta$,$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个样本,Θ_0为参数空间Θ的非空子集,假定Θ_1为$\Theta-\Theta_0$的一个子集,给定假设$H_0:\theta\in\Theta_0$和备选假设$H_1:\theta\in\Theta_1$,$\varphi(x)$为一个检验,称定义在Θ_1上的函数

$$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta[\varphi]=E_\theta\varphi(\mathrm{X})\quad(\theta\in\Theta_1)$$

为检验φ的功效函数.$\beta_\varphi(\theta)$是当参数真值为θ时,拒绝H_0的概率,当$\theta\in\Theta_0$时,即为犯第一类错误的概率.当$\theta\in\Theta_1$时,$1-\beta_\varphi(\theta)$是犯第二类错误的概率,此时,$\beta_\varphi(\theta)$则是做出正确决定的概率,称为功效.

势函数(power function) 即"功效函数".

一致最大功效检验(uniformly most powerful test) 亦称一致最强检验.简称 UMPT.一种水平α检验.设总体ξ的分布族$\mathscr{F}=\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$,$\Theta$是参数空间,它包含两个以上的元素.考察检验问题,原假设$H_0:\theta\in\Theta_0$,对备选假设$H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$(更一般$\Theta_1$为$\Theta-\Theta_0$子集).如果对两个水平为$\alpha$的检验$\varphi_1,\varphi_2$,即对一切$\theta\in\Theta_0$,$i=1,2$,$E_\theta\varphi_i\leqslant\alpha$,且对一切$\theta\in\Theta_1$,$\beta_{\varphi_1}(\theta)=E_\theta\varphi_1\geqslant E_\theta\varphi_2=\beta_{\varphi_2}(\theta)$成立,则称检验$\varphi_1$一致优于$\varphi_2$.如果存在水平为$\alpha$检验$\varphi_1$,对一切$\theta\in\Theta_1$和对任何水平为$\alpha$的检验$\varphi_2$,均有$\beta_{\varphi_1}(\theta)\geqslant\beta_{\varphi_2}(\theta)$,则称检验$\varphi_1$是水平$\alpha$的一致最大功效检验或一致最强检验.特别地,当$\Theta_1$只由一个点组成时,称$\varphi_1$为水平$\alpha$的最强检验.简称最强检验或最大功效检验.

一致最强检验(uniformly most powerful test) 即"一致最大功效检验".

最大功效检验(most powerful test) 见"一致最大功效检验".

显著性检验(test of significance) 最常见的一类统计假设检验.确切地说,它的任务是判断某种效应是否存在,某种假设是否成立;其手段是:利用某

种统计量之值是否超出了可以合理地用随机误差去解释的程度(即达到显著性)，从而做出拒绝或接受原假设的判断. 其基本步骤为：

1. 建立统计假设 H_0.

2. 构造一个合适的统计量 U 和从样本观察值计算出统计量 U 的观察值 u.

3. 给定一个显著水平 α $(0<\alpha<1)$，根据在 H_0 成立条件下统计量 U 的分布及其性质，确定 U 的取值范围的一个子集 W，使 $P_{H_0}\{U\in W\}\leqslant\alpha$.

4. 考察观察值 u，如果 $u\in W$，则拒绝原假设 H_0，否则接受 H_0.

u 检验(u-test)　一种假设检验. 即利用遵从正态分布的统计量 u 来检验下列假设 H_0 的方法. 常见的 u 检验法如下：

1. 对正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\sigma^2=\sigma_0^2$，检验 H_0：$\mu=\mu_0$(或 $H_0^{(1)}$：$\mu\leqslant\mu_0$ 和 $H_0^{(2)}$：$\mu\geqslant\mu_0$). 统计量

$$u=\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0}\sim N(0,1)\ (\text{在 } H_0 \text{ 下})$$

给定检验的显著水平 α，检验方法如下：

对 H_0：否定域 $W=\{|u|\geqslant\lambda\}$，其中 λ 是 $N(0,1)$ 的 $1-\alpha/2$ 分位数，即 λ 满足 $P\{|u|\geqslant\lambda\}=\alpha$；

对 $H_0^{(1)}$：否定域 $W_1=\{u\geqslant-\lambda_1\}$，其中 λ_1 是 $N(0,1)$ 的 $1-\alpha$ 分位数，即 λ_1 满足 $P\{u\geqslant\lambda_1\}=\alpha$；

对 $H_0^{(2)}$：否定域 $W_2=\{u\leqslant-\lambda_1\}$. 例如 $\alpha=0.05$ 时，$\lambda=1.96$，$\lambda_1=1.645$.

2. 设有两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，已知 σ_1^2 和 σ_2^2，检验 H_0：$\mu_1=\mu_2$(或 $H_0^{(1)}$：$\mu_1\leqslant\mu_2$ 和 $H_0^{(2)}$：$\mu_1\geqslant\mu_2$). 统计量

$$u=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)\ (\text{在 } H_0 \text{ 下}),$$

其中 $n_1,\overline{X}_1$ 为第一个正态总体的样本容量和样本均值，$n_2,\overline{X}_2$ 为第二个总体的样本容量和样本均值. 给定检验的显著水平 α，检验方法(即否定域)可仿效检验法 1 写出.

t 检验(t-test)　一种假设检验. 即利用遵从 t 分布的统计量 T 来检验假设 H_0 的方法. 常见的 t 检验法如下：

1. 设有正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，检验 H_0：$\mu=\mu_0$(或 $H_0^{(1)}$ $\mu\leqslant\mu_0$ 和 $H_0^{(2)}$ $\mu\geqslant\mu_0$). 统计量

$$T=\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu_0)}{S}\sim t(n-1)\ (\text{在 } H_0 \text{ 下}),$$

其中 $n,\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本容量、样本均值和样本方差. 这里

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

给定检验的显著水平 α，检验方法如下：

对 H_0：否定域 $W=\{|T|\geqslant t_{1-\alpha/2}\}$；

对 $H_0^{(1)}$：否定域 $W_1=\{T\geqslant t_{1-\alpha}\}$；

对 $H_0^{(2)}$：否定域 $W_2=\{T\leqslant t_\alpha\}$；

其中 t_p 为 $t(n-1)$ 的 p 分位数.

2. 设有两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，方差相等但未知，检验 H_0：$\mu_1=\mu_2$(或 $H_0^{(1)}$：$\mu_1\leqslant\mu_2$ 和 $H_0^{(2)}$：$\mu_1\geqslant\mu_2$). 统计量

$$T=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

(在 H_0 下)，

其中

$$S=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}},$$

$n_i,\overline{X}_i,S_i^2$ 是第 i 个总体的样本容量、样本均值和样本无偏方差($i=1,2$). 给定检验的显著水平 α 后，检验方法(即否定域)可仿效检验法 1 得出.

3. 设有两正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，方差不等且未知，检验 H_0：$\mu_1=\mu_2$，这是比兰斯-费希尔问题. 谢非尔(Scheffé, H.)给出解法如下：分别取得样本 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 不妨设 $n_1<n_2$. 定义变量

$$Z_i=x_i-\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}Y_i+\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\sum_{k=1}^{n_1}Y_K-\frac{1}{n_2}\sum_{K=1}^{n_2}Y_K$$

$$(i=1,2,\cdots,n_1),$$

则有 $EZ_i=\mu_1-\mu_2$，$D(Z_i)=\sigma_1^2+n_1\sigma_2^2/n_2$，$\mathrm{cov}(Z_i,Z_j)=0$ $(i\neq j)$，且 $Z_i\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+n_1\sigma_2^2/n_2\sigma_2^2)$. 此时可用 t 检验，检验 H_0：$\mu_1-\mu_2=0$. 则统计量

$$\sqrt{n_1-1}\,\frac{\bar{z}}{s}\sim t(n_1-1),$$

其中 $\overline{Z}$ 与 s^2 分别是 $Z_i(i=1,2,\cdots,n_1)$ 的样本均值与方差.

χ^2 检验(χ^2-test)　一种假设检验. 即利用遵从 χ^2 分布的统计量来检验假设 H_0 的方法. 常见的 χ^2 检验法如下：

1. 设有正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\mu=\mu_0$，检验 H_0：$\sigma=\sigma_0$(或 $H_0^{(1)}$：$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ 和 $H_0^{(2)}$：$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$). 统计量

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)\ (\text{在 } H_0 \text{ 下}),$$

其中 X 是容量为 n 的样本. 给定检验的显著水平 α，检验方法为：

对 H_0：否定域 $W=\{\chi^2\leqslant\chi^2_{\alpha/2}$ 或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha/2}\}$；

对 $H_0^{(1)}$：否定域 $W_1=\{\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha}\}$；

对 $H_0^{(2)}$：否定域 $W_2=\{\chi^2\leqslant\chi^2_\alpha\}$；

其中 χ^2_p 为 $\chi^2(n)$ 的 p 分位数.

2. 设有正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，检验 H_0：$\sigma^2=\sigma_0$(或 $H_0^{(1)}$：$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ 和 $H_0^{(2)}$：$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$)。统计量

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$$

(在 H_0 下)

给定检验的显著水平 α 后，检验方法(即否定域)可仿效检验法 1 写出.

χ^2 检验还用于判断分布函数与样本拟合的好坏(参见"皮尔逊检验").

F 检验(F-test)　一种假设检验. 即利用遵从 F 分布的统计量 F 来检验假设 H_0 的方法. 常见的 F 检验法如下：设两正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，均值和方差未知，检验 H_0：$\sigma_1=\sigma_2$(或 $H_0^{(1)}$：$\sigma_1\leqslant\sigma_2$ 和 $H_0^{(2)}$：$\sigma_1\geqslant\sigma_2$). 统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-2)$$

(在 H_0 下)，

其中 n_i,S_i^2 为第 i 个总体的样本容量和样本方差($i=1,2$). 给定检验的显著水平 α，检验方法为：

对 H_0：否定域 $W=\{F\geqslant F_{1-\alpha/2}$ 或 $F\leqslant F_{\alpha/2}\}$；

对 $H_0^{(1)}$：否定域 $W=\{F\geqslant F_{1-\alpha}\}$；

对 $H_0^{(2)}$：否定域 $W=\{F\leqslant F_\alpha\}$；

其中 F_p 为 $F(n_1-1,n_2-1)$ 的 p 分位数.

F 检验还常见于线性模型中回归系数是否为 0 的检验、回归方程是否有意义的检验、回归方程拟合不足的检验等；在方差分析、因子试验设计分析中，因子的主效应是否为 0、交互作用效应是否为 0 的各种检验也都是 F 检验.

奈曼-皮尔逊引理(Neyman-Pearson lemma)　假设检验的基本引理. 在原假设和对立假设都是简单的场合，利用该引理可确定最强检验的形式. 在这个基础上还可以导出某些复合假设检验问题的一致最强检验. 设样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是连续型随机变量(对离散型有类似的结论)，分布密度函数为 $f(X,\theta)$，其中 θ 是参数. 对于简单假设检验 H_0：$\theta=\theta_0\longleftrightarrow H_1$：$\theta=\theta_1$，如果检验函数 φ 满足

$$E_{\theta_0}\varphi(x)=\alpha, \tag{1}$$

$$\varphi(X)=\begin{cases}1 & (f(x,\theta_1)>kf(x,\theta_0)),\\ 0 & (f(x,\theta_1)<kf(x,\theta_0)).\end{cases} \tag{2}$$

则 $\varphi(X)$ 是水平为 α 的最强检验. 反之，若 $\varphi(X)$ 是水平 α 的最强检验，则存在常数 k，使(2)式 a.e. μ 成立，$\mu\triangleq P_{\theta_0}+P_{\theta_1}$；若 $E_{\theta_1}\varphi(X)<1$，则(1)式成立.

单调似然比分布族(monotone likelihood ratio distribution family)　似然比具有某种单调性质的分布族. 对样本 X 的实参数密度函数族 $P_\theta(x)$，$x\in R^n$，$\theta\in\Theta\subset R_1=(-\infty,\infty)$，若存在实值函数 $T(x)$，使得对任意 $\theta<\theta'$ ($\theta,\theta'\in\Theta$)，$\{f_\theta(x)=f_{\theta'}(x)\}$ 的概率为零，且比值 $P_{\theta'}(x)/P_\theta(x)$ 是 $T(x)$ 的单调非降(或非增)函数，则称 $P_\theta(x)$ 为单调似然比分布族. 对单调似然比分布族，其参数的单边假设检验问题有 UMP 检验存在.

似然比检验(test of likelihood ratio)　一种假设检验. 设总体的概率密度(或概率函数)为 $f_\theta(x)$，$\theta=\theta_0$ 或 $\theta_1(\theta_0\neq\theta_1)$，假设 H_0：$\theta=\theta_0$，对立假设 H_1：$\theta=\theta_1$. 样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的似然函数为

$$L(x,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i),$$

似然比为

$$\lambda=\frac{L(x,\theta_1)}{L(x,\theta_0)}.$$

令 $W_0=\{x:\lambda>\lambda_0\}$，其中 λ_0 满足 $P(x\in W_0\mid\theta=\theta_0)=\alpha$，而 α 为显著水平，则由否定域 W_0 确定的检验函数 $\varphi(x)=I_{W_0}(x)$ (即 W_0 的指示函数)的检验方法，称为似然比检验.

似然比(likelihood ratio)　见"似然比检验".

广义似然比检验(test of generalized likelihood ratio)　一种似然比检验. 设总体的概率密度(或概率函数)为 $f_\theta(x)$，假设 H_0：$\theta\in\Theta_0$，$\Theta_0\subset\Theta$，$\Theta_1=\Theta-\Theta_0$，对立假设 H_1：$\theta\in\Theta_1$，样本 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的似然函数为

$$L(x,\theta)=\prod_{j=1}^{n}f_\theta(x_j),$$

似然比

$$\lambda=\sup_{\theta\in\Theta_1}L(x,\theta)/\sup_{\theta\in\Theta_0}L(x,\theta)$$

称为样本 X 的广义似然比. 令 $W_\alpha=\{x:\lambda>\lambda_\alpha\}$，其中 λ_α 满足

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}P(x\in W_\alpha\mid\theta\in\Theta_0)\leqslant\alpha,$$

而 α 为显著水平，则由否定域 W_0 确定的检验法 $\varphi(x)=I_{W_\alpha}(x)$ 称为广义似然比检验. 在许多情况下，广义似然比检验具有某些优良性质.

广义似然比(generalized likelihood ratio)　见"广义似然比检验".

无偏检验(unbiased test)　功效函数在参数空间的特定子集上满足不等式要求的检验. 设总体分布族 $\mathscr{F}=\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$，其中参数 θ 可以是向量，$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为样本. 关于原假设 H_0：$\theta\in\Theta_0$，备选假设 H_1：$\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$ 的检验问题. 给定水平 α，如果检验 $\varphi(x)$，其功效函数 $\beta_\varphi(\theta)$ 及 $E_\theta(\varphi(x))$ 满足条件：

$$E_\theta(\varphi(x))\leqslant\alpha\quad(\theta\in\Theta_0),$$

$$\beta_\varphi(\theta)\geqslant\alpha\quad(\theta\in\Theta_1),$$

则称 $\varphi(x)$ 是水平 α 的无偏检验，简称无偏检验. 如果存在一个水平 α 的无偏检验 $\varphi(x)$，对于水平为 α 的其他无偏检验 $\tilde{\varphi}(x)$，对一切 $\theta\in\Theta_1$，均有不等式

$\beta_{\varphi}(\theta)\geqslant\beta_{\tilde{\varphi}}(\theta)$成立，则称$\varphi(x)$是水平$\alpha$的一致最强无偏检验，或称为一致最大功效无偏检验．

一致最大功效无偏检验(uniformly most powerful unbiased test)　见“无偏检验”．

相似检验(similar test)　功效函数在参数空间的特定子集上保持常数的检验．设总体分布族$\mathscr{F}=\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$，$X$为样本．一般对于$\Theta$的子集$\Theta^1$，其功效函数$E_\theta\varphi(x)$在$\Theta^1$上为常数，则称检验$\varphi(x)$对于$\Theta^1$相似，或者说，$\varphi(x)$关于分布族$\{F_\theta(x),\theta\in\Theta^1\}$相似．关于$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$的检验问题，如果检验函数$\varphi(x)$的水平是$\alpha$，且对于$\Theta_0$和$\Theta_1$公共边界$W$上的各点$\theta$，$E_\theta\varphi(x)=\alpha$总成立，则称检验$\varphi(x)$是边界相似的，简称相似的．若$t(x)$是关于分布族$\{F_\theta(x),\theta\in W\}$的一个充分统计量，则对样本空间的任意固定的事件$A$，对一切$\theta\in W$，存在公共的$P_\theta(A/t)$．对检验$\varphi(x)$有定义：如果存在$\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant1$，使对$\forall\theta\in W$，有$E_\theta[\varphi(x)/t]=\alpha$ (a. e. P_θ)，则称检验φ对于(t,W)有奈曼结构，它显然关于W相似．

奈曼结构(Neyman structure)　见“相似检验”．

不变检验(invariant test)　在某种变换群下保持不变的检验．当一个假设检验问题在某种变换群下保持不变时，可以要求其检验也具有相应的不变性．设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是从分布族$\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$的总体中抽取的一个样本，其中$\theta$是未知参数，$\Theta$为参数空间．设$G$是一个变换群，$\overline{G}$是$G$的诱导变换群(参见“不变估计”)．对于$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$的检验问题，若$g\in G$的诱导变换$\bar{g}$，既是$\Theta_0$本身上的一一变换，也是$\Theta_1$自身上的一一变换，则称该检验问题在$g$变换下保持不变．若对每个$g\in G$，此检验问题在$g$变换下保持不变，则称该检验问题对变换群$G$保持不变．若某个检验函数$\varphi(x)$对一切$g\in G$及$x\in\mathscr{X}$，满足$\varphi(gx)=\varphi(x)$．则称检验$\varphi$关于$G$不变，简称不变检验．若上式仅对几乎所有的$x$成立，则称为几乎不变检验．

设φ是水平α的不变检验，若对一切水平α的不变检验$\tilde{\varphi}$，它们的功效函数对一切$\theta\in\Theta_1$，都满足：$\beta_{\tilde{\varphi}}(\theta)=E_\theta\tilde{\varphi}(x)\leqslant E_\theta\varphi(x)=\beta_\varphi(\theta)$，则称$\varphi$为水平$\alpha$的一致最强不变检验．如果一个检验$\psi$与一个不变检验$\varphi$几乎处处相等，则称$\psi$对等于一个不变检验，显然$\psi$是一个几乎不变检验．

几乎不变检验(almost everywhere invariant test)　见“不变检验”．

一致最强不变检验(uniformly most powerful invariant test)　见“不变检验”．

相合检验(consistent test)　亦称相容检验．一种大样本性质满足的假设检验．设总体分布族为$\mathscr{F}=\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$，$\Theta_0$为$\Theta$的真子集且非空．假定对每个样本$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$确定了关于检验问题$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$的一个检验$\varphi_n(x)$，以$\beta_n(\theta)$记其功效函数，如果存在$\alpha<1$，且

$$\sup_n\beta_n(\theta)\leqslant\alpha\qquad(\theta\in\Theta_0),$$

$$\lim_{n\to\infty}E_\theta\varphi_n(x)=1\quad(\theta\in\Theta_1),$$

则称$\{\varphi_n\}$为相合检验．若这里的收敛关于θ是一致的，则称为一致相合检验．当一致相合检验存在时，称Θ_0和Θ_1是有限可辨识的．

相容检验(consistent test)　即“相合检验”．

一致相合检验(uniformly consistent test)　见“相合检验”．

贝叶斯检验(Bayes test)　基于贝叶斯方法的假设检验．假设检验问题也是一个决策问题．因而可以使用针对一般决策问题的贝叶斯方法去处理它．设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是分布族为$\{F_\theta(x),\theta\in\Theta\}$的总体中抽取的一个样本，关于一个假设检验问题$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$，决策空间由两点组成：$\mathscr{D}=\{d_0,d_1\}$，其中$d_0$表示接受$H_0$的决策，$d_1$表示接受$H_1$的决策．一个检验函数$\varphi_\pi$(即决策函数)，如果它满足

$$\int R(\theta,\varphi_\pi)\mathrm{d}\pi(\theta)=\min_\varphi\int R(\theta,\varphi)\mathrm{d}\pi(\theta),$$

其中$\pi(\theta)$是Θ上的先验概率分布，$L(\theta,\delta)$为决策函数δ的损失函数，$R(\theta,\varphi)$为风险函数：

$$\begin{aligned}R(\theta,\varphi)&=E_\theta L(\theta,\varphi(X))\\&=\int\{L(\theta,d_1)\varphi(x)\\&\quad+L(\theta,d_0)[1-\varphi(x)]f_\theta(x)\}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

则称φ_π为π相应的贝叶斯检验，

非参数统计推断

非参数统计(nonparametric statistics)　研究非参数统计问题的数理统计学分支．一个统计问题，如果其总体分布不能用有限个实参数去刻画，就称为非参数统计问题．非参数统计是相对于参数统计而言的．例如$X_1,X_2,\cdots,X_m$；$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$是分别来自一维分布F及G的简单随机样本，且假定$X_1,X_2,\cdots,X_m$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$相互独立，要据此检验这两个总体有相同分布．如果对问题的背景所知甚少，除了可以认为F,G在R上处处连续外，再无其他信息，此时总体分布就不能用有限个实参数去刻画，这是一个非参数统计问题．但若基于问题的背景，有理由假定F和G是具有相同方差的正态分布，此时总体分布可由至多三个实参数所设定，因而是参数统

计问题.当然,以上关于非参数统计的定义也不可完全拘泥于文字,有时还要考虑到习惯.例如,高斯-马尔可夫线性模型,并未对随机误差分布的具体形式作什么设定,按理,此模型应归入非参数一类,但习惯上却不将处理这种模型的理论和方法包括在非参数统计的范围内.究其原因是,在这种模型中,人们感兴趣的是回归系数及误差方差,而这只涉及有限个实参数.

一种统计方法,如果主要是用于非参数统计问题,则称这种方法是非参数统计方法;反之,是参数统计方法.例如秩方法(参见"秩统计量"及"秩统计方法")是非参数统计的经典方法,虽然在非参数统计和参数统计问题中都用到它,但主要是用于前者.应当指出,以上对统计方法属性的界定不能不分场合地一概套用.例如对点估计中许多有用的统计方法,既不能也无必要对其参数或非参数属性作一个明确的界定.大体上说,对于假设检验问题,方法的属性是可以界定的.这是由于在检验问题中,往往要求检验统计量在原假设下有所谓的分布无关性(参见"分布无关"),这就使得只在狭窄前提下使用的参数检验法不能用于更广的非参数检验问题中,从而显示其差别.例如 t 检验不是一个非参数检验.

非参数统计方法(nonparametric statistics method) 见"非参数统计".

非参数统计问题(nonparametric statistics problem) 见"非参数统计".

分布无关(distribution free) 亦称分布自由.统计量的一种属性.指其分布与总体分布无关.设样本 X 的分布 F 属于分布族 $\mathscr{F}$,而 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$,$T=T(X)$ 为一统计量.若当 $F\in\mathscr{F}_0$ 时,T 的分布同 F 无关,则称 T 相对于 $\mathscr{F}_0$ 为分布无关的.这个概念主要用于假设检验.若 $\mathscr{F}_0$ 是原假设,检验统计量 T 相对于 $\mathscr{F}_0$ 为分布无关,就可做出基于 T 的相似检验.一个显著的例子是秩统计量.在一些非参数检验问题中,往往在原假设下,样本为独立同分布且分布连续,此时,秩统计量相对于原假设下的分布族为分布无关的.秩统计量的重要性正在于此.

学生化极差(studentized range) 数理统计的基本概念之一.是极差与样本标准差的比值.设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是从总体 ξ 中抽取的一个样本,相应的顺序统计量为 $X_1^*\leqslant X_2^*\leqslant\cdots\leqslant X_n^*$,那么极差

$$R=X_n^*-X_1^*=\max_{1\leqslant i\leqslant n}X_i-\min_{1\leqslant i\leqslant n}X_i.$$

记样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

样本方差为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

则称统计量 $T=R/S$ 为学生化极差,其中 $S=\sqrt{S^2}$(取正值)为样本标准差.

极值分布(extreme-value distribution) 样本极端值(极大、极小等)的分布.对从分布函数是 $F(x)$ 的总体中抽取的独立同分布样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,研究当 $n\to\infty$ 时

$$X_1^*=\min_{1\leqslant i\leqslant n}X_i \text{ 和 } X_n^*=\max_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$$

的极限分布,在气象、水文、地震预报问题以及可靠性理论中有很重要的理论和实际意义.对适当选择常数 $c_n>0$ 及 d_n,如果 $c_nX_1^*+d_n$ 依分布收敛于 $G_*(x)$,则称 $G_*(x)$ 为极小值分布.如果 $c_nX_n^*+d_n$ 依分布收敛于 $G^*(x)$,则称 $G^*(x)$ 为极大值分布;极小值分布和极大值分布,统称极值分布,其中 F 称为底分布.极值分布理论的基本问题有:

1.有哪些分布可以作为极值分布?

2.收敛于某种特定类型的极值分布的条件.

极大值分布的类型:若 $G(x)$ 是一连续极大值分布,则 G 必与下列三个分布函数之一同类:.

Ⅰ型.$G^{(1)}(x)=\exp(-e^{-x})\quad(-\infty<x<\infty)$.

Ⅱ型.$G^{(2)}(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^k}\right) & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$

(k 为正参数).

Ⅲ型.$G^{(3)}(x)=\begin{cases}\exp(-(-x)^k) & (x<0),\\ 1 & (x\geqslant 0),\end{cases}$

(k 为正参数).

以上三类分别称为第Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ型极大值分布.所谓两个分布函数 F_1 和 F_2 同类,指如果存在常数 $a>0$ 及 b,使 $F_1(ax+b)=F_2(x)$ 成立,并记为 $F_1\sim F_2$.

极小值分布的类型:若 $G(x)$ 是一连续极小值分布,则 G 必与下列三个分布函数之一同类:

Ⅰ型.$G_1(x)=1-\exp\{-e^x\}\quad(-\infty<x<\infty)$.

Ⅱ型.$G_2(x)=\begin{cases}1-\exp\{-(-x)^{-k}\} & (x<0),\\ 1 & (x\geqslant 0),\end{cases}$

(k 为正参数).

Ⅲ型.$G_3(x)=\begin{cases}1-\exp\{-x^k\} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$

(k 为正参数).

以上三类分别称为第Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ型极小值分布.第Ⅰ型极值分布又称重指数分布或冈伯尔分布,第Ⅱ型和第Ⅲ型极值分布又称威布尔-格涅坚科分布.

极小值分布(minimal distribution) 见"极值分布".

极大值分布(maximal distribution) 见"极值分布".

底分布(base distribution) 见"极值分布".

重指数分布(iterated exponential distribution) 见"极值分布".

冈伯尔分布(Gumbel distribution) 见"极值分布".

威布尔-格勒坚科分布(Weibull-Гнеденко distribution) 见"极值分布".

极值分布吸引场(domain attraction of extremum distribution) 极值分布的重要概念之一.是极值分布所能"吸引"的底分布的全体.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为具有分布 F 的总体的独立同分布样本,若存在 $c_n>0$ 及 d_n,当 $n\to\infty$ 时,$c_nX_1^*+d_n$ 依分布收敛于 i 型极值分布,则称底分布 F 属于 i 型分布的吸引场.更确切地称底分布 F 属于 G_i 的吸引场.类似地,可定义 $G^{(i)}$ 的吸引场,其中 G_i 和 $G^{(i)}$ 分别为 i ($\mathrm{I}\leqslant i\leqslant \mathrm{III}$)型极小值分布和极大值分布(参见"极值分布").

U 统计量(U-statistic) 一种重要的统计量.是霍夫丁(Hoeffding,W.)于 1948 年引进的一种非参数统计量,是样本均值的推广.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本,φ 为 m 元的对称函数,称统计量

$$U_n=U(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

$$\triangleq\binom{n}{m}^{-1}\sum_{1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_m\leqslant n}\varphi(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2},\cdots,X_{\alpha_m})$$

为基于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 U 统计量,简称 U 统计量,φ 称为 U 统计量的核.U 统计量在估计理论与假设检验中都有重要的应用.

拟合优度检验(goodness of fit test) 关于给定模型或分布与观察数据拟合程度好坏的检验.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某个未知分布 F_0 的样本,$\mathscr{F}$ 是某个设定的分布族,所谓拟合优度检验就是统计假设 H: $F_0\in\mathscr{F}$ 的检验.其作用是检验选定的统计模型是否合适,或者说用已知分布(族)拟合现实数据是否合适.此种检验的临界水平(或 p 值),可用于度量拟合好坏的程度,称之为拟合优度.拟合优度检验的早期代表性工作是英国数学家、生物统计学家皮尔逊(Pearson,K.)在 1900 年发表的关于拟合优度的 χ^2 检验的论文,常被学者们称为近代数理统计学的发端.俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А.Н.)在 20 世纪 30 年代的工作及克拉默-米泽斯(Cramer,H.)的工作是这一方向的重要成果.

拟合优度(goodness of fit) 见"拟合优度检验".

皮尔逊检验(Pearson test) 亦称 χ^2(拟合优度)检验.一个著名的拟合优度检验.是英国数学家、生物统计学家皮尔逊(Pearson,K.)于 1900 年提出的.考虑一维的情况.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从分布 F 未知的总体中抽出的简单随机样本,要检验的假设有两种情况:

1. $F=F_0$,F_0 完全已知.

2. $F\in\mathscr{F}$,$\mathscr{F}$ 是一个给定的分布族.

把 $R^1=(-\infty,\infty)$ 分为适当个数的连接区间:$-\infty<a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}<a_k<+\infty$ 以 n_i 表示 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中落在区间$[a_{i-1},a_i)$内的个数,定义

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n\pi_i)^2}{n\pi_i}$$

其中 $\pi_i=F(a_i)-F(a_{i-1})$.在情况 1 及原假设下,F 已知为 F_0,χ^2 完全由样本决定,是统计量,称为皮尔逊 χ^2 统计量.皮尔逊证明了:在原假设($F=F_0$)成立之下,当 $n\to\infty$ 时,χ^2 统计量有自由度 $k-1$ 的 χ^2 分布 K_{k-1}(这正是 χ^2 统计量这名称的由来),据此可做出原假设的一大样本检验:当 $\chi^2>K_{k-1}(\alpha)$(自由度 $k-1$ 的 χ^2 分布的上 α 分位点)时,否定原假设,否则就接受原假设.当 n 很大时,此检验有渐近水平 α;在情况 2,即使在原假设下,F(因而 π_i)也非完全已知,上式定义的 χ^2 不是统计量.如果分布族 $\mathscr{F}$ 依赖于 r 个参数($1\leqslant r<k-1$),则 χ^2 依赖于此 r 个参数,以 $\underline{\chi}^2$ 记 χ^2 在此 r 个参数活动范围内的最小值,则 χ^2 称为(在情况 2 之下的)χ^2 统计量.皮尔逊起初以为当 $n\to\infty$ 时,$\underline{\chi}^2$ 的极限分布仍为 K_{k-1},但英国数学家、生物学家费希尔(Fisher,R.A.)于 1924 年指出,此极限分布应为 K_{k-1-r}.由此得出情况 2 之下原假设($F\in\mathscr{F}$)的一个大样本检验:当 $\underline{\chi}^2>K_{k-1-r}(\alpha)$ 时,否定原假设.如果总体为多维的,处理的方法一样.例如,在 2 维情况,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是平面 R^2 上的 n 个点,代替把 R^1 分为 k 个区间,这里应把 R^2 剖分为 k 个两两不相交的区域,其余一切无变化.

斯米尔诺夫检验(Smirnov test) 关于两组样本是否来自具有相同分布总体的检验.设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是从未知的连续分布 F 及 G 中抽出的简单样本,待检验的原假设是 H: $F\equiv G$,分别以 F_{n_1},F_{n_2} 记 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 的经验分布函数,定义

$$S_{n_1n_2}=\sup_{-\infty<x<\infty}|F_{n_1}(x)-G_{n_2}(x)|,$$

称它为斯米尔诺夫统计量.基于它的检验则称为斯米尔诺夫检验:当 $S_{n_1n_2}>C$ 时否定 H,反之则接受 H.其中常数 C 由样本大小 n_1,n_2 及给定水平 α 定出.注意到统计量 $S_{n_1n_2}$ 只与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 在合样本中之秩 $R_1,R_2,\cdots,R_{n_2}$ 有关,因而 $S_{n_1n_2}$ 在原假设成立时为分布无关的,因而可定出临界值 C.当 n_1 和 n_2 都不超过 100 时,C 值可由英国学者哈特(Harter)和欧文(Owen)的表查出.在 n_1 和 n_2 都很大时,可使用俄国数学家斯米尔诺夫(Смирнов,В.И.)于 1939 年提出的下述极限定理求出 C 的近似值:当 $F\equiv G$ 时,

$$\lim_{\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}} P\left\{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} S_{n_1 n_2} \leqslant x\right\}$$

$$=\begin{cases}\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i \exp(-2i^2x^2) & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

若事先知道可能的备选假设是 K: $G(x)\leqslant F(x)$（对一切 x，且 $F\not\equiv G$），则检验统计量可改换成

$$S^+_{n_1 n_2} = \sup_{-\infty<x<\infty}[F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)],$$

其相应的极限定理是：当 $F\equiv G$ 时

$$\lim_{\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}} P\left\{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} S^+_{n_1 n_2} \leqslant x\right\}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-2x^2} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

斯米尔诺夫统计量(Smirnor statistic)　见"斯米尔诺夫检验".

柯尔莫哥洛夫检验(Kolmogorov test)　一类拟合优度检验.是俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)于1933年提出来的.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自未知分布 F 的简单样本，F_0 是某个已知连续分布.要据此检验 H: $F=F_0$.记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的经验分布为 F_n，令

$$S_n = \sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x) - F_0(x)|,$$

它称为柯尔莫哥洛夫统计量.基于它的检验称为柯尔莫哥洛夫检验：以 $\{S_n>C\}$ 为检验的否定域，C 值由 n 及给定水平 α 定出.注意到在 H 成立时，S_n 的分布与 F_0 无关，因此 C 可由 S_n 的分布定出.当 $n\leqslant 100$ 时，有米勒(Miller, L. H.)的专用表可查.当 n 很大时，可使用柯尔莫哥洛夫如下的极限定理：

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}S_n\leqslant x)$$

$$=\begin{cases}1-2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\exp(-2i^2x^2) & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

顺便提到的是柯尔莫哥洛夫检验同另一类拟合优度检验，即 χ^2 检验（参见"皮尔逊检验"）相比，有不少优点.例如，它没有 χ^2 检验那样因分组的任意性而可能得出不同结果的弊病；又当 n 较小时，柯尔莫哥洛夫检验的临界值 C 由精确分布算出，而 χ^2 检验的临界值只能是近似的.

柯尔莫哥洛夫统计量(Kolmogorov statistic)　见"柯尔莫哥洛夫检验".

不相关检验(test of non-correlation)　两个随机变量是否相关的检验.设(ξ,η)服从二维正态分布 $N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ρ 为 ξ 与 η 之间的相关系数，假设检验问题 H_0: $\rho=0$　H_1: $\rho\neq 0$，从总体(ξ,η)中抽取一个容量为 n 的样本$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$，采用统计量

$$T=\sqrt{n-1}\,\frac{R}{\sqrt{1-R^2}},$$

R 为样本相关系数.如果 ξ 与 η 不相关，则 $T\sim t(n-2)$分布.对于给定的显著性水平 α，查 t 分布表得临界值 t_α.当统计量 T 的绝对值大于 t_α 时拒绝原假设，即 ξ 与 η 是相关的，否则接受原假设.

独立性检验(test of independence)　两个变量是否独立的检验.设(ξ,η)的联合分布函数为 $F(x,y)$，ξ 及 η 的边缘分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$，问 ξ 与 η 是否相互独立？考虑检验问题.

$$H_0:\ F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$$

$$\longleftrightarrow H_1:\ F(x,y)\neq F_1(x)F_2(y),$$

χ^2 检验法可用于此问题：从总体(ξ,η)中随机抽取一个样本$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$，将 ξ 及 η 的可能取值的范围分别分成 r 个及 s 个互不相交的小区间，用 n_{ik}表示样本中"第一个分量属于 ξ 的第 i 个小区间且第二个分量属于 η 的第 k 个小区间"的个数.记

$$n_{i\cdot}=\sum_{k=1}^{s}n_{nk},\ n_{\cdot k}=\sum_{i=1}^{r}n_{ik},\ n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}n_{ik}.$$

采用统计量

$$K_n = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left[n_{ik}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot k}}{n}\right]^2\Big/(n_{i\cdot}n_{\cdot k}),$$

当 ξ 与 η 独立而 n 较大时，K_n 近似服从 $\chi^2_{(r-1)\cdot(s-1)}$ 分布.对于给定的水平 α，在 χ^2 分布表中查得临界值 $\chi^2_{(r-1)\cdot(s-1)}(\alpha)$，如果 K_n 的值大于此临界值，则拒绝原假设 H_0，否则接受原假设.

全相关系数检验(test of multiple correlation coefficient)　见"独立性检验".

游程检验(run test)　判定若干个总体是否同质的检验（参见"齐性检验"）.以两个总体为例，设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是取自总体 ξ_1 和 ξ_2 的两个简单随机样本，将这两个样本合并在一起，并按大小排序得 $Z_1\leqslant Z_2\leqslant\cdots\leqslant Z_{n_1+n_2}$，记

$$\mu_j=\begin{cases}0 & (Z_j\text{ 是 }\xi_1\text{ 的观察}),\\ 1 & (Z_j\text{ 是 }\xi_2\text{ 的观察}).\end{cases}$$

由此得到一个由0和1两个元素组成的序列，$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n_1+n_2}$.如果

$$\mu_{j-1}\neq\mu_j=\mu_{j+1}=\cdots=\mu_{j+l-1}\neq\mu_{j+l},$$

则称 $\mu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_{j+l-1}$是一个游程.组成这个游程的 μ 的个数 l 称为该游程的长度.具有两种类型的游程：0的游程和1的游程.设序列的总游程数为 U，显然 $2\leqslant U\leqslant 2\min(n_1,n_2)+1$.

检验假设 H_0: $F(x)=G(x)$，采用统计量 U，给定水平 α，确定临界值 u_α 满足 $P(U\leqslant u_\alpha)\leqslant\alpha$.利用样

本值计算 U 的值 u. 若 $u \leqslant u_\alpha$,则拒绝原假设 H_0,否则接受 H_0. 为了确定临界值 u_α,就需知道在 H_0 成立时,U 的概率分布

$$P(U=2k)=2\frac{\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}},$$

$$P(U=2k+1)=2\frac{\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k}+\binom{n_1-1}{k}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

$$(k=1,2,\cdots,\min(n_1,n_2)).$$

齐性检验(homogeneity test) 亦称同质性检验. 判定若干个总体(变量)是否有相同分布的检验. 设有 s 个变量 $\xi_j(1\leqslant j\leqslant s)$,从 ξ_i 中取出简单随机样本 $X_i=(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{in_i})$,$i=1,2,\cdots,s$,且全体 $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ 个变量 $\{X_{ij}\}$ 是相互独立的,欲检验假设 H_0: s 个总体有相同的分布. 此问题亦称为多样本问题. 用 χ^2 检验来处理这个问题的方法如下:

1. 把一切可能的观察值的集合进行分割

$$X=\bigcup_{k=1}^{r}A_k, A_k\cap A_l=\varnothing(k\neq l).$$

2. 统计出各种情形出现的实际观察频数 μ_{kj},并将其列入下表,表中 μ_{ki} 是落入 $A_k(k=1,2,\cdots,r)$ 的第 i $(i=1,2,\cdots,s)$ 个样本之观察值的个数,μ_k 是落入 A_k 之观察值的总数.

样本 \ 频数 \ 分割	A_1 A_2 $\cdots$ A_r	$\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}=n_j$
X_1	μ_{11} μ_{21} $\cdots$ μ_{r1}	n_1
X_2	μ_{12} μ_{22} $\cdots$ μ_{r2}	n_2
$\vdots$	$\cdots$ $\cdots$	$\vdots$
X_s	μ_{1s} μ_{2s} $\cdots$ μ_{rs}	n_s
$\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}=\mu_i$	μ_1 μ_2 $\cdots$ μ_r	n
$\frac{\mu_i}{n}$	$\hat{p}_1$ $\hat{p}_2$ $\cdots$ $\hat{p}_r$	1

3. 在假设 H_0 为真的情况下,求出落入 A_k 的第 i 个样本之观察值的期望频数 $E_{kj}=n_kp_k$,其中概率 $p_k=P\{\xi_j\in A_k|\ H_0\}(k=1,2,\cdots,r)$ 不依赖于 $j=1,2,\cdots,s$. 由于总体分布未知,故用频率 $\hat{p}_i=\mu_i/n$ $(i=1,2,\cdots,r)$ 来估计相应的概率 $p_1,p_2,\cdots,p_r$.

4. 采用统计量

$$K_n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(\mu_{ij}-n_j\hat{p}_i)^2}{n_j\hat{p}_i},$$

当 n 充分大时,统计量 K_n 的渐近分布是 $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ 分布. 给定水平 α,在 χ^2 分布表中查得临界值 $\chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha)$. 若统计量 K_n 的值 $\hat{K}_n>\chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha)$,则拒绝 H_0,否则接受 H_0.

齐性检验在实际中有许多重要应用. 例如,为比较在不同条件下生产的同型号产品是否符合同一标准;比较不同实验室(实验员或方法)对同种试验的分析结果是否一致和检验原材料的均匀性等,均属于齐性检验问题.

同质性检验(homogeneity test) 即"齐性检验".

游程长度(length of run) 见"游程检验".

秩统计量(rank statistic) 用于统计检验的一种统计量. 是基于样本值的大小在全体样本中所占位次(秩)的统计量. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本,$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 为该样本的顺序统计量. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 互不相等,则存在惟一的 R_i,使 $X_i=X_{(R_i)}$,称 R_i 为 X_i 之秩. 记 $R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$,称 R 或 R 的任一已知函数为秩统计量,使用秩统计量的统计方法为秩统计方法,或简称秩方法. 特别重要的一类秩统计量是线性秩统计量,即形如

$$\sum_{i=1}^{n}C_{ni}a_n(R_i)$$

的统计量. 其中 $C_{n1},C_{n2},\cdots,C_{nn}$ 为已知常数,而 $a_n(\cdot)$ 为定义在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的已知函数.

秩方法主要用于统计检验,称为秩检验. 秩方法最主要的优点是由秩方法构造的检验统计量在原假设下往往是分布无关的.

秩方法始自斯皮尔曼(Spearman,C.)于 1904 年使用秩统计量检验两变量是否相关的工作,而威尔柯克松(Wilcoxon,F.)于 1945 年关于秩和检验的工作(参见"威尔柯克松两样本秩和检验"),则是对秩方法发展史上的一个重要贡献.

秩统计方法(rank statistics method) 见"秩统计量".

威尔柯克松两样本秩和检验(Wilcoxon's two samples rank sum test) 两样本位置参数的秩检验. 是威尔柯克松(Wilcoxon,F.)于 1945 年提出的. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别抽自总体 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的两个独立的简单随机样本. 而 $G(x)=F(x-\theta)$,其中 F 及 θ 均未知,只假定 $F(\cdot)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上处处连续. 检验假设 H: $\theta=0$,而备选假设 K: $\theta>0$ (或 $\theta<0$,或 $\theta\neq0$),令 R_i 为 Y_i 在合样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 中的秩,记 $W=R_1+R_2+\cdots+R_n$. 对于某个适当选择的常数 C,当 $W<C$ 时,否定原假设 $\theta>0$(若原假设为 $\theta<0$,则当 $W>C$ 时否定;原假设为 $\theta\neq0$ 时,当 $|W-n(m+n+$

1)/2|>C 时否定). 这个检验称为威尔柯克松两样本秩和检验. 为确定此检验中常数 C,需要计算以下概率:

$$P_{\theta=0}(W=i)=\frac{t_{mn}(i)}{\binom{N}{n}},N=m+n,$$

$$i=\frac{1}{2}n(n+1),\cdots,\frac{1}{2}n(N+m+1),$$

其中 $t_{mn}(i)$是从 1,2,…,N 中取出 n 个数,使其和恰为 i 的取法总数. 对于给定显著水平 α,C 值可由此分布定出(按原假设为 $\theta>0$,$\theta<0$ 或 $\theta\neq 0$,C 值的定法不同). 当 m,n 较小时,C 值有统计表可查,当 m,n 都较大时,可应用有关的极限定理. 威尔柯克松秩和检验统计量 W 是线性秩统计量的特例. 它也可用 U 统计量的形式去定义.

序 贯 分 析

序贯分析(sequential analysis) 数理统计的一个重要分支. 它研究在样本容量不预先固定的前提下的统计推断的理论和方法. 统计学中最基本的概念是总体和样本. 总体用随机变量刻画,其特性用分布函数描述;样本由总体的若干个体组成,表现为数据,常称为观察值,由一组通常是独立同分布的随机变量来刻画. 样本中所含观察值的个数称为样本容量. 统计学的基本任务是根据样本推断总体特性. 因为抽取样本需要费用,样本容量愈大费用愈高. 因此自然希望在推断达到一定可靠度或精度的前提下,样本容量愈小愈好. 而通常统计方法中样本容量是抽样前确定的,这种做法有时造成不必要的浪费,有时无法达到所要求的精度. 例如验收一批产品是否合格,即检验该批产品的次品率是否小于给定值. 固定样本验收方案是抽取 n 件产品,若次品数$\geq c$,则拒收;否则接收. 设当抽取到 m ($m<n$)个产品时已发现有 c 个次品,这时理应停止抽样而拒收该批产品,但固定方案仍要求抽完 n 个,而造成浪费. 在假设检验中,通常做法是只控制第一类错误,而在固定样本下,一般无法同时控制第二类错误. 序贯分析是解决这些问题的统计方法,是研究如何进行序贯抽样和统计推断的统计学分支. 序贯分析的思想可追溯到道奇(Dodge,H. F.)和罗明(Roming)于 1929 年提出的二样本验收方案:验收一批产品是否合格,分两阶段进行. 第一阶段抽取 N_1 个产品,其中次品数记为 M_1,根据 M_1 的大小采取下面三个步骤之一:

1. 如果 $M_1\leq c_1$,接收这批产品.
2. 如果 $M_1>c_2$,拒收这批产品.
3. 如果 $c_1<M_1<c_2$,继续抽取 N_2 个产品.

以 M_2 记 N_2 个产品中的次品数. 据 M_1+M_2 的值作如下决定:

1. 如果 $M_1+M_2\leq c_2$,接收这批产品.
2. 如果 $M_1+M_2>c_2$,拒收这批产品.

这种二阶段抽样方案由四个数 N_1,N_2,c_1,c_2 完全确定,是更一般的序贯验收方案的特例. 该方案中包含两个要素:

1. 停止法则:指明何时停止抽样.
2. 决策法则:停止抽样后,如何根据样本做出推断.

上述两要素正是序贯分析的两要素,即一序贯分析方法由停止法则和决策法则组成. 序贯分析的主要内容是序贯假设检验和序贯估计,以及延伸出的序贯选择问题. 从方法上讲,如通常的固定样本统计一样,也有频率学派方法和贝叶斯学派方法之分.

停止法则(stopping rule) 见"序贯分析".

决策法则(decision rule) 见"序贯分析".

序贯检验的基本结构(basic structure of a sequential test) 组成序贯检验的主要内容. 所谓序贯检验,是指样本容量不预先固定的假设检验方法. 以 $F(x,\theta)$,$\theta\in\Theta$ 记总体 X 的分布函数,其中 θ 为参数,Θ 是参数空间. 以 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$记总体 X 的样本序列,即 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立且同分布,有相同的分布函数 $F(x,\theta)$. 假设检验问题 H_0: $\theta=\theta_0$;H_1: $\theta\neq\theta_0$ 的序贯检验的一般结构或模型如下:以

$$R^n=\mathop{\times}_{i=1}^{n}R_1$$

记 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本空间,以

$$R^\infty=\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}R_1$$

记样本序列空间.

序贯检验由停止法则和决策法则组成. 用 G_n 表示观察了 n 个样本后还不能作判断的区域,G_n^c 是 G_n 的余集,S_n^a 表示抽到 n 个样本后接受的假设的区域,S_n^r 表示抽到 n 个样本后拒绝假设的区域. 检验方法如下:

1. 停止法则:令 $G_n\subset R^n$,$n=1,2,\cdots$,且满足 $G_n\subset G_{n-1}\times R_1$,$n>1$. 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\notin G_n$,则停止抽样,否则抽取 X_{n+1}. 其中$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in G_n\subset G_{n-1}\times R_1$ 的意义是:若抽样在第 n 步不停止,则在第 $n-1$ 步当然不停止.

2. 决策法则:令 S_n^a,$S_n^r\subset R^n$ 且满足

$$S_n^a\cup S_n^r=\{G_{n-1}\times R_1\}\cap G_n^c,S_n^a\cap S_n^r=\varnothing,$$

其中$\{G_{n-1}\times R_1\}\cap G_n^c$ 表示抽样在 $n-1$ 步尚未停止,而在 n 步后停止. 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in S_n^a$,则接受假设 H_0;若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in S_n^r$,则拒绝假设 H_0. 停止法则可表示为空间 R^∞上的取整数值的可

测函数，即停时 τ：$\tau(X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots)=n$，若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in\{G_{n-1}\times R_1\}\cap G_n^c$，于是按停时 τ 抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 而决策函数可表示为

$$\phi(X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots)=I_{S_n^r}(X_1,X_2,\cdots,X_n),$$

其中 I 为指示函数，当 $\phi=1$ 时拒绝原假设，当 $\phi=0$ 时接受原假设. 在 R^∞ 中考虑，以 S_n^a，S_n^r $(n=1,2,\cdots)$ 为底的柱集是互不相交的，而以 G_n 为底的柱集是单调下降的.

序贯检验中的概率(probability in a sequential test)　描述序贯检验过程特性的一组概率. 接受概率、拒绝概率和继续抽样概率分别是描述序贯检验中接受原假设 H_0 的概率，拒绝原假设 H_0 的概率以及第一阶段抽样后无法决策仍需继续抽样的概率. 称它们为序贯检验中的概率. 在抽取了容量为 n 的样本后，接受概率、拒绝概率和继续抽样概率分别是：

$$P(S_n^a;\theta),\ P(S_n^r;\theta),\ P(G_n;\theta).$$

样本容量不超过 n 时，接受概率、拒绝概率和继续抽样概率分别是：

$$A_n(\theta)=\sum_{i=1}^n P(S_i^a;\theta),$$

$$R_n(\theta)=\sum_{i=1}^n P(S_i^r;\theta),$$

$$C_n(\theta)=\sum_{i=1}^n P(G_n;\theta).$$

于是，一序贯检验的接受概率、拒绝概率和不停止抽样的概率分别是：

$$A(\theta)=\lim_{n\to\infty}A_n(\theta),$$

$$R(\theta)=\lim_{n\to\infty}R_n(\theta),$$

$$C(\theta)=\lim_{n\to\infty}C_n(\theta).$$

由于 $A_n(\theta)+R_n(\theta)+C_n(\theta)=1$ 和 $A_n(\theta)$，$R_n(\theta)$ 不减，$C_n(\theta)$ 不增，故上面三个极限存在，且

$$A(\theta)+R(\theta)+C(\theta)=1.$$

令 $S_n=S_n^a\cup S_n^r$，则

$$P(n;\theta)=P(\tau=n;\theta)=P(S_n;\theta)$$

是序贯检验抽取容量为 n 的样本后停止的概率，而抽取有限个样本后停止的概率是 $P(\theta)=A(\theta)+R(\theta)$，永不停止抽样的概率是 $C(\theta)$. 一般地，一序贯检验应满足 $C(\theta)=0$，即经有限次抽样后停止抽样而做出决策. 这种要求是合理的，但在某些特殊情形下，$C(\theta)\neq 0$ 也会出现，并有某种说得通的解释.

序贯检验的平均样本量(average sample number of a sequential test)　序贯检验样本量的数学期望. 序贯检验的平均样本量为

$$E_\theta(\tau)\equiv N(\theta)=\sum_{n=1}^\infty nP(n;\theta)+\infty\cdot C(\theta).$$

如果序贯检验以有限样本停止的概率为 1，即 $C(\theta)=0$，那么平均样本容量为

$$E_\theta(\tau)=N(\theta)=\sum_{n=1}^\infty nP(n;\theta),$$

由此可知，若 $N(\theta)<\infty$，则必有 $C(\theta)=0$，其逆不一定成立. 固定样本检验可视为序贯检验的特例，即对某个 n 有 $P(n,\theta)=1$，这时当然有 $N(\theta)=n$. 令 $S_\tau=X_1+X_2+\cdots+X_\tau$，若 $E_\theta(|X|)<\infty$ 且 $E_\theta(\tau)<\infty$，则 $E_\theta(S_\tau)=E_\theta(\tau)E_\theta(X)$. 上述关系是序贯检验的基本公式之一. 该公式首先由美籍罗马尼亚数学家瓦尔德(Wald, A.)和美国学者布莱克韦尔(Blackwell, D.)分别于 1945 年和 1946 年得到.

序贯检验的选取原则(criteria for choosing a sequential test)　评判不同序贯检验好坏的标准. 对一序贯检验的基本要求是有限次抽样停止的概率为 1，即 $C(\theta)=0$. 此外，和固定样本检验一样，要控制第一类错误概率，同时也希望能控制第二类错误概率. 例如，考虑检验问题 H_0: $\theta\leqslant\theta_0$; H_1: $\theta\geqslant\theta_1$，这里 $\theta_1>\theta_0$. 这时将参数空间分为三个子集：$\theta\leqslant\theta_0$，$\theta_0<\theta<\theta_1$，$\theta\geqslant\theta_1$. 若一序贯检验的接受概率 $A(\theta)$ 是 θ 的减数，且满足 $A(\theta_0)=1-\alpha$ 及 $A(\theta_1)=\beta$，称 $(\alpha,\theta_0;\beta,\theta_1)$ 为序贯检验的强度. $A(\theta)$ 作为 θ 的函数常称为操作特性函数，简称 OC 函数. 若 S_1 和 S_2 是两个序贯检验，其 OC 函数分别是 $A_1(\theta)$，$A_2(\theta)$，且满足

$$A_1(\theta_0)=A_2(\theta_0)=1-\alpha,\ A_1(\theta_1)<A_2(\theta_1),$$

则称 S_1 强于 S_2. 设 S^* 是水平为 α 的检验，若 S^* 强于任意水平为 α 的检验，则在水平为 α 下，称 S^* 是最强的. 设 S_1 和 S_2 是两个有相同强度的序贯检验，其平均样本量分别是 $N_1(\theta)$ 和 $N_2(\theta)$，若满足

$$N_1(\theta)\leqslant N_2(\theta)\quad(\theta=\theta_1,\theta_2),$$

且等号不同时成立，则称 S_1 好于 S_2. 那么最好的序贯检验，是指在相同强度下最好的检验，即平均抽样次数最少，而又达到指定功效的检验.

序贯检验的强度(strength of sequential test)　见"序贯检验的选取原则".

操作特性函数(OC function)　见"序贯检验的选取原则".

序贯概率比检验(sequential probability ratio test)　基于似然比的序贯检验. 对于简单假设，用似然比可构造的最大功效序贯检验. 考虑简单假设 H_0: $\theta=\theta_0$; H_1: $\theta=\theta_1$ 或复合假设 H_0: $\theta\leqslant\theta_0$; H_1: $\theta\geqslant\theta_1$. 令

$$Q_{jn}=\prod\nolimits_{i=1}^n f(x_i;\theta_j)\ (j=0,1).$$

接受域、拒绝域和继续抽样域定义如下：

$$S_n^a=\left\{x^{(n)}:\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}}\leqslant k_0\right\},$$

$$S_n^r=\left\{x^{(n)}:\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}}\geqslant k_1\right\},$$

$$G_n = \left\{ x^{(n)}: k_0 < \frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} < k_1 \right\},$$

这里 $x^{(n)}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$f(x;\theta)$是概率密度(或概率函数). 由集序列$\{S_n^a,S_n^r,G_n\}$确定的序贯检验称为序贯概率比检验. 1945 年，由美籍罗马尼亚数学家瓦尔德(Wald,A.)提出. 抽取 x_n 后是接受 H_0，接受 H_1，还是继续抽样，取决于概率似然比值的大小. 临界值 $k_0<k_1$ 要由 $A(\theta_0)=1-\alpha, A(\theta_1)=\beta$ 确定，即由事先确定的第一、第二类错误概率计算临界值的大小. 对一序贯检验的基本要求是，以有限样本停止的概率为 1. 序贯概率比检验也具有这一性质. 令

$$z = \log\left(\frac{(f(x;\theta_1))}{f(x;\theta_0))}\right)$$

及以 $H(x;\theta)$记参数为 θ 时 z 的分布函数. 若 H 是非退化的，且 $k_0<1<k_1$，则序贯概率比检验有以下性质：

1. $P(N(\theta)<\infty)=1$，即以有限样本停止的概率为 1.

2. z 的各阶矩存在.

3. $E_\theta(z_1+z_2+\cdots+z_\tau)=E_\theta(z)E_\theta(\tau)$.

确定序贯概率比检验的临界值 k_0 和 k_1 是困难的，这里给出效果较好的近似公式. 接受概率为

$$A(\theta) = P_\theta(S_1^a) + P_\theta(S_2^a) + \cdots,$$

强度为$(\alpha,\theta_0,\beta,\theta_1)$序贯概率比检验必须满足$A(\theta_0)=1-\alpha, A(\theta_1)=\beta$. 其临界值

$$k_0 \geqslant \frac{A(\theta_1)}{A(\theta_0)} = \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad k_1 \leqslant \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

在实际应用中，取

$$k_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad k_1 = \frac{1-\beta}{\alpha} \tag{1}$$

称$(\alpha,\theta_0,\beta,\theta_1)$为标称强度，实际强度记为$(\alpha',\theta_0,\beta',\theta_1)$，那么由上面的不等式得

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \geqslant \frac{\beta'}{1-\alpha'}, \quad \frac{1-\beta}{\alpha} \leqslant \frac{1-\beta'}{\alpha'}.$$

于是

$$\beta' \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha}, \alpha' \leqslant \frac{\alpha}{1-\beta}, \alpha'+\beta' \leqslant \alpha+\beta,$$

此表明按(1)式确定的临界值序贯检验的实际两类错误概率之和不大于标称值的和，且当 α,β 很小时，实际的两类错误概率 α',β' 也不会超出设定值 α,β 太多. 可能的问题是 α',β' 分别比设定的 α,β 小得太多，以致造成过多的抽样次数而增加费用.

序贯概率比检验的OC 曲线(operating characteristic function for the sequential probability ratio test) 衡量序贯检验性能的曲线. 准确确定 OC 曲线是困难的. 美籍罗马尼亚数学家瓦尔德(Wald, A.)给出了一近似公式. 首先给出瓦尔德引理：令

$$z=\log f(x,\theta_1)-\log f(x,\theta_0),$$

其中 x 是随机变量，有密度函数 $f(x,\theta)$，θ 是参数，$\theta\in\Theta$，Θ 是参数空间，$\{\theta_1,\theta_2\}\subset\Theta$. 若：

1. 对任意实数 h，$E_\theta e^{hz}<\infty$；

2. $P_\theta(z>0)>0, P_\theta(z<0)>0$；

3. $E_\theta z\neq 0$，则存在 $h=h(\theta)\neq 0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right]^h f(x,\theta)\mathrm{d}x = 1.$$

利用上述结果可以推出

$$A(\theta) \doteq \frac{k_1^{h(\theta)}-1}{k_1^{h(\theta)}-k_0^{h(\theta)}};$$

此即为 OC 曲线的近似表达式. 对于序贯概率比检验，可得到平均样本量的近似公式. 由序贯检验的平均样本量的基本公式

$$E_\theta(\tau) = \frac{E_\theta(z_1+z_2+\cdots+z_\tau)}{E_\theta(z)},$$

可以证明有近似式：

$$\begin{aligned} & E_\theta(z_1+z_2+\cdots+z_\tau) \\ \doteq\ & A(\theta)\ln k_0 + (1-A(\theta))\ln k_1 \\ =\ & \ln k_1 + A(\theta)(\ln k_0 - \ln k_1). \end{aligned}$$

于是

$$E_\theta(\tau) \doteq \frac{\ln k_1 + A(\theta)(\ln k_0 - \ln k_1)}{E_\theta(z)}.$$

当 $\theta=\theta_0$ 或 θ_1 时，还可用下列近似式：

$$E_{\theta_0}(\tau) \doteq \frac{(1-\alpha)\log\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right]+\alpha\log\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]}{E_{\theta_0}(z)},$$

$$E_{\theta_1}(\tau) \doteq \frac{\beta\log\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right]+(1-\beta)\log\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]}{E_{\theta_1}(z)}.$$

截断的序贯概率比检验(truncation for the sequential likelihood ratio test) 对样本容量规定上限的序贯概率比检验. 即当 $\tau<N$ 时按序贯规则处理，当 $\tau=N$ 时，若 $z_1+z_2+\cdots+z_N\leqslant 0$，则接受 H_0；若 $z_1+z_2+\cdots+z_N>0$，则接受 H_1. 这时显著水平记为 α_N，有

$$\begin{aligned} \alpha_N = & \sum_{n=1}^{N-1} P_{\theta_0}(S_n^a) \\ & + P_{\theta_0}\{\tau N, (z_1+z_2+\cdots+z_N) \leqslant 0\}. \end{aligned}$$

当 N 足够大时，可用近似公式计算.

二项分布序贯概率比检验(probability ratio sequential test for binomial distribution) 总体为二项分布时的序贯概率比检验. 设$(X_1,X_2,\cdots)$为独立同分布随机变量序列，其概率函数为 $f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}$，$x=0,1$，$\theta\in\Theta=(0,1)$. 考虑假设 $H_0:\theta\leqslant\theta_0$；$H_1:\theta\geqslant\theta_1$，$\theta_0<\theta_1$ 关于该假设的序贯检验，按有关公式计算得：

$$\frac{Q_{1n}}{Q_{0n}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{Y_n}\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right]^{n-Y_n},$$

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

用临界值近似公式作适当变换得如下序贯检验：当 $Y_n \leqslant a_n$ 时，接受原假设；当 $Y_n \geqslant b_n$ 时，拒绝原假设；当 $a_n < Y_n < b_n$ 时，继续抽样.

$$a_n = \frac{\log\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right] - n\log\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right]}{\log\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]},$$

$$b_n = \frac{\log\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right] - n\log\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right]}{\log\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]}.$$

OC 函数为

$$A(\theta) \doteq \frac{1-\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]^{h(\theta)}}{\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right]^{h(\theta)} - \left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]^{h(\theta)}},$$

其中 $h(\theta)$ 作为 θ 的函数由下式确定：

$$\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right]^h (1-\theta) + \left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]^h \theta = 1,$$

平均样本量为

$$E_\theta(\tau) \doteq \frac{A(\theta)\log\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right] + (1-A(\theta))\log\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]}{\theta\log\frac{\theta_1}{\theta_0} + (1-\theta)\log\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right]}.$$

正态分布序贯概率比检验(sequential probability ratio test for normal distribution)　总体为正态分布时的序贯概率比检验. 设 $(X_1, X_2, \cdots)$ 为抽自正态分布 $N(\theta, 1)$ 的样本序列，考虑假设 H_0: $\theta = \theta_0$; H_1: $\theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$. 给定两类错误概率 α, β，按近似公式可得如下序贯概率比检验：当抽得样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 后，首次出现

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqslant \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}\log\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right] + n\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

时，接受原假设；当首次出现

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geqslant \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}\log\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right] + n\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

时，接受对立假设；上述两种情况均不出现时，继续抽样. 同时按序贯概率比检验的平均样本量和 OC 函数公式分别为：

$$E_\theta(\tau) \doteq -\frac{A(\theta)\log\left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right] + (1-A(\theta))\log\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]}{h(\theta_1-\theta_0)^2/2},$$

$$A(\theta) \doteq \frac{\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]^h - 1}{\left[\frac{1-\beta}{\alpha}\right]^h - \left[\frac{\beta}{1-\alpha}\right]^h},$$

其中

$$h = \frac{\theta_0 + \theta_1 - 2\theta}{\theta_1 - \theta_0}.$$

如果 $(X_1, X_2, \cdots)$ 是抽自正态分布 $N(0, \sigma^2)$. 考虑假设 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$; H_1: $\sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$. 应用序贯概率比检验的一般公式，得到如下序贯检验：当抽取样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 后，首次出现

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \leqslant \frac{\sigma_0^2\sigma_1^2\left[2\log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) + n\log\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)\right]}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$$

时，接受原假设；首次出现

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \geqslant \frac{\sigma_0^2\sigma_1^2\left[2\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) + n\log\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)\right]}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$$

时，接受对立假设；上述两种情况均不出现时，继续抽样. 同时按序贯概率比检验的公式得到下面平均样本量和 OC 函数的公式

$$E_\theta(\tau) \doteq \frac{2\sigma_0^2\sigma_1^2\left[A(\sigma^2)\log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \left(1 - A(\sigma^2)\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\right)\right]}{(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)\sigma^2 + \sigma_0^2\sigma_1^2\log\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)}$$

$$A(\sigma^2) \doteq \frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^h - 1}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^h - \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h}$$

其中 $h = h(\sigma^2)$ 且满足：

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2\sigma_1^2\left[1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{2h}\right]}{h(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)}.$$

序贯估计(sequential estimation)　用序贯方法处理的一种参数估计. 是序贯分析的组成部分. 但是，序贯估计的理论还未达到成熟的阶段. 序贯估计的重要性表现在两方面：其一是序贯估计可以满足固定样本无法满足的要求，其二是有较高的效率. 较为一般的序贯估计模型：设 $X_1, X_2, \cdots$ 是抽自 $F \in \{F: F = F(\cdot\,; \theta), \theta = (\mu, \eta) \in \Theta = (a, b) \times \Phi, -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty\}$ 的简单样本. 在序贯估计中，特别关注以下问题：

1. 寻找参数 μ 的估计，它满足固定样本下无法满足的某种要求. 如相对误差一致地小，或风险一致地不超过某一设定的界限等. 参数 η 称为讨厌参数，它不是估计的对象，且往往起着不利于更确切估计 μ 的作用.

2. 寻找给定长度和置信系数的置信区间.

序贯估计和序贯检验一样，由停止法则和估计法则两部分组成. 前者决定何时停止抽样，后者给出如何根据观察值估计参数的方法. 和序贯检验一样，停止法则用定义在 R^∞ 上的取整数值的可测函数 $\tau = \tau(X_1, X_2, \cdots)$ 表示停止时间. 对任意自然数 n，使得 $\{\tau = n\}$ 是以某可测集 $A^{(n)} \in \mathscr{B}^n$ 为底的柱集，$\mathscr{B}^n$

为 n 维波莱尔域，实际上和序贯检验的停止一样定义. 估计量有形式 $d=d(X_1,X_2,\cdots,X_\tau)$. 从两方面衡量序贯估计的优良性：一是要求平均样本量尽量小；二是估计要有某种优良性，如无偏性，方差一致最小等，也可以是对估计精度的某种要求，如均方误差不超过设定界限，这种要求在固定样本下有时无法达到. 若 $d=d(X_1,X_2,\cdots,X_\tau)$ 是 $g(\theta)$ 的估计，满足 $E_\theta(d)=g(\theta)$，则称 d 为 $g(\theta)$ 的无偏估计. 固定样本时，CR 不等式给出了无偏估计方差的下界. 美国学者沃尔弗威茨(Wolfowitz,J.)将这一结果推广到序贯估计情形：设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量序列，其共同的分布密度函数为 $f(x;\theta),\theta\in(a,b)$，$g(\theta)$ 是连续可微函数，$\hat{g}(X_1,X_2,\cdots,X_\tau)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计. 假定下列条件成立：

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}\mathrm{d}x=0.$

2. $I(\theta)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\log f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 f(x,\theta)\mathrm{d}x>0.$

3. 对任何 n 及 n 维波莱尔集 B_n，函数

$$g_n(\theta)\equiv\int_{B_n}\hat{g}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\times\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

可以积分号下微商且级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}g_i(\theta)$$

在 (a,b) 一致收敛，则必有

$$E_\theta(\hat{g}-g(\theta))^2\geqslant\frac{(g'(\theta))^2}{E_\theta\tau\cdot I(\theta)}.$$

此定理的证明和固定样本时类似. 对固定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来讲

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right]=EX_1,$$

但是对序贯样本可举出使

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{\tau}X_i}{\tau}\right]=EX_1$$

成立和不成立的例子. 因此要得到序贯无偏估计并非易事，具体问题要具体分析. 在序贯估计中并不把寻求无偏估计作为重要目标.

两点分布的序贯估计(sequential estimation of two points distribution) 总体为两点分布的序贯估计. 对给定置信度和置信区间长度，存在两点分布的序贯估计. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量序列，其共同分布为两点分布：$P_p(X_1=1)=p=1-P_p(X_1=0)$，这里 p 是未知参数. 在固定样本条件下，当样本量足够大时可获得小于给定长度的置信区间，但是，对给定置信度 $r\in(0,1)$，$d\in(0,1)$ 和 $\forall p\in(0,1)$，不存在 p 的估计 p^* 满足

$$P_p\left[\left|\frac{p^*-p}{p}\right|<d\right]\geqslant r,$$

而存在满足这一要求的序贯估计：对给定的 $r,d\in(0,1)$，令

$$\tau_1=\inf\{n:\ X_n=1\},$$

$$\tau_2=\left[1-\left(\frac{1+r}{2}\right)^{1/\tau_1}\right]^{-1}\frac{2}{1-r}d^{-2}+1.$$

则

$$\inf_{p\in(0,1)}P_p\left[\left|\frac{p^*-p}{p}\right|<d\right]\geqslant r,$$

其中

$$p^*=\frac{1}{\tau_2}\sum_{i=1}^{\tau_2}X_{\tau_1+i}.$$

正态分布均值的两样本估计(Stein's fixed interval estimator for mean of normal distribution) 正态分布总体利用两组样本来给出均值的序贯估计. 在均值和方差均未知的条件下，斯坦因(Stein, C. M.)于 1945 年对均值给出了有给定长度和置信度的区间估计. 方法如下，给 $l>0$ 及 $r\in(0,1)$，从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的总体中先取一个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ $(m\geqslant2)$，再取第二个样本 $X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_\tau$，其中 τ 按下列规则确定. 记

$$\overline{X}_m=\frac{1}{m}\sum_{1}^{n}X_i,$$

$$v_m=\left(\frac{1}{m-1}\sum_{1}^{m}(X_i-\overline{X}_m)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta=v_m\cdot t_{\frac{1-r}{2}}(m-1)$$

($t_\alpha(n)$ 乃是 n 个自由度的 t 分布的上侧 α 分位数). 令

$$\tau=\min\left\{n:n\geqslant m\text{ 且 }n\geqslant\frac{4\delta^2}{l^2}\right\},$$

$$\overline{X}_\tau=\frac{1}{\tau}\sum_{1}^{\tau}X_i.$$

则

$$I=\left[\overline{X}_\tau-\frac{\delta}{\sqrt{\tau}},\overline{X}_\tau+\frac{\delta}{\sqrt{\tau}}\right]$$

便是均值 μ 的长度不超过 l 的置信区间，其置信度为 r.

线 性 模 型

线性模型(linear model) 一种常用的统计模型. 实际问题中，常需研究一个变量 y(因变量)与另一些变量 $x_1,x_2,\cdots,x_p$(自变量)的关系，一般可以认为它们有函数关系加上误差，即

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_p)+\varepsilon.$$

由于 f 一般未知，在局部范围内可以用简单的线性

形式去近似，再通过观察数据估计出其中的参数，一般地，若 y 的 n 次观测 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，表成形如

$$\begin{cases}\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times p(p+1)\times 1}{X\beta} + \underset{n\times 1}{e}\\ E(e)=\mathbf{0}\\ \operatorname{cov}(e)=\Sigma\end{cases}$$

的模型，称其为线性统计模型，简称线性模型. 其中

$$\underset{n\times 1}{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

称为观测向量；

$$\underset{n\times p}{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1p}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{np}\end{pmatrix}$$

称为设计矩阵，$\underset{n\times p}{X}$ 中元素的取值对于不同的特殊模型具有不同的特点，可取离散值，也可取连续值；

$$\underset{(p+1)\times 1}{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_p\end{pmatrix}$$

为未知参数向量；$\underset{n\times 1}{e}$ 为随机误差向量；Σ 为协差阵，其形式一般假定已知.

线性统计模型(linear statistical model)　即"线性模型".

观测向量(observation vector)　见"线性模型".

设计矩阵(design matrix)　见"线性模型".

线性回归模型(linear regression model)　一种特殊的线性模型. 若变量 y 与变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ 的关系表示为 $y=f(\boldsymbol{x})+\varepsilon$，且

$$f(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}yF(\mathrm{d}y|\boldsymbol{x}),$$

称 $f(\boldsymbol{x})$ 为 y 对 $\boldsymbol{x}$ 的回归，$f(\boldsymbol{x})$ 称为回归函数. 通常在正态分布情形，若 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数 $\beta_0+\boldsymbol{\beta}_x^T\boldsymbol{x}$，此时称为线性回归，$\beta_0$ 称为回归常数，$\boldsymbol{\beta}_x^T=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$ 称为回归系数. 取 y 为 n 个观测，得观测值向量 $\boldsymbol{Y}^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，表示为如下模型：

$$\begin{cases}\underset{n\times 1}{Y}=(\underset{n\times 1}{\mathbf{1}}\ \ \underset{n\times p}{X^*})\underset{(p+1)\times 1}{\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_*\end{pmatrix}}+\underset{n\times 1}{e}\\ E(e)=\mathbf{0}\\ \operatorname{cov}(e)=\sigma^2\mathrm{I}_n\end{cases}$$

其中 $\mathbf{1}$ 是坐标全为 1 的向量，I_n 为 n 阶单位阵，记 $\boldsymbol{\beta}^T=(\beta_0,\boldsymbol{\beta}_*^T)$，且假定 $(\mathbf{1},X^*)$ 这个矩阵的秩为 $p+1$，而记

$$X^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1^T\\\boldsymbol{x}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{x}_n^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1p}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{np}\end{pmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{\beta},\sigma^2$ 为未知参数，$\underset{n\times 1}{e}$ 是随机向量.

回归(regression)　见"线性回归模型".

线性回归(linear regression)　见"线性回归模型".

回归函数(regression function)　见"线性回归模型".

回归系数(regression coefficient)　见"线性回归模型".

方差分析模型(variance analysis model)　一种特殊的线性模型. 其设计矩阵 X 的元素全为 0 或 1，模型参数为因素水平的效应值，且满足一定的线性约束条件. 以双因素 A,B 的方差分析模型(无交互效应)为例，其数据结构可表为

$$y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+e_{ij}$$
$$(i=1,2,\cdots,a;j=1,2,\cdots,b),$$
$$\sum_i\alpha_i=0,\ \sum_j\beta_j=0,$$

这里 y_{ij} 为因素 A,B 在水平组合 A_i,B_j 时的观测值，μ 为总平均，参数 α_i 和 β_j 分别为因素 A,B 在水平 A_i 和 B_j 时的主效应(固定效应)，且 $e_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$ 对一切 i,j,e_{ij} 都相互独立. 它是线性模型 $\boldsymbol{Y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e}$ 的一种特殊形式，这里

$$\boldsymbol{Y}^T=(y_{11},\cdots,y_{1b},y_{21},\cdots,y_{2b},y_{a1'},\cdots,y_{ab}),$$
$$\boldsymbol{e}^T=(e_{11},\cdots,e_{1b},e_{21},\cdots,e_{2b},e_{a1''}\cdots,e_{ab}),$$
$$\boldsymbol{\beta}^T=(\mu,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_a,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_b),$$
$$X=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&&&I\\\mathbf{1}&&\mathbf{1}&&I\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\\mathbf{1}&&&\mathbf{1}&I\end{pmatrix}_{ab\times(a+b+1)}.$$

其中，$\mathbf{1}$ 为 b 个 1 组成的 $b\times 1$ 向量，I 为 b 阶单位阵，$\boldsymbol{e}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathrm{I}_{ab})$. 方差分析模型一般包括：一种方式分组模型、多种方式分组模型及套分类模型等.

协方差分析模型(covariance analysis model)　一种特殊的线性模型. 由于模型中不是所有的自变量都为可控变量，故自变量分为不可控的协变量与可控变量两部分. 相应地，模型分为回归部分与方差分析部分. 所以协方差分析模型是线性回归模型与方差分析模型的一种"混合". 一般形式为

$$\boldsymbol{Y}=X\boldsymbol{\beta}+Z\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{e}\ \ (\boldsymbol{e}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2I)),$$

其中：$\boldsymbol{Y}$ 为 $n\times 1$ 观测向量；$X\boldsymbol{\beta}$ 为模型的回归部分，X 为 $n\times p$ 的已知矩阵，其元素可以取任意实数值，$\boldsymbol{\beta}_{p\times 1}$ 为回归系数；$Z\boldsymbol{\gamma}$ 为方差分析部分，Z 为 $n\times q$ 的已知矩阵，其元素皆为 0 或 1，$\boldsymbol{\gamma}$ 为因子效应向量

(固定效应);e 为随机误差向量.

方差分量模型(variance components model) 一种特殊的线性模型.一般形式为

$$Y = X\beta + u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_k\xi_k,$$

其中:$X, u_1, u_2, \cdots, u_k$ 为已知设计阵;β 为固定效应向量;ξ_i 为 $t_i \times 1$ 的随机效应向量,且假定

$$E(\xi_i) = \mathbf{0},\ \text{cov}(\xi_i) = \sigma_i^2 I \quad (i = 1,2,\cdots,k)$$
$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathbf{0} \quad (i \neq j),$$

故

$$\text{cov}(Y) = \sum \triangleq \sigma_1^2 u_1 u_1^T + \sigma_2^2 u_2 u_2^T + \cdots + \sigma_k^2 u_k u_k^T.$$

每个 σ_i^2 称为 Y 的方差分量,模型也由此得名.此类模型包括:一般的随机效应模型和混合模型,诸如,单向分类随机模型、双向分类随机模型、双向分类混合模型等.

随机效应模型(random effect model) 一种方差分量模型.即只含有随机效应的方差分量模型.

混合线性模型(mixed linear model) 一种方差分量模型.在方差分量模型中,把既含有固定效应,又含有随机效应的模型,称为混合线性模型.

一种方式分组模型(one-way classification model) 亦称单因素方差分析模型.一类特殊的方差分析模型.即只含一个因素效应分析的方差分析模型.一般形式为

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$
$$(i = 1,2,\cdots,a;\ j = 1,2,\cdots,n_i),$$
$$\sum_{i=1}^{a} n_i\alpha_i = 0, e_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$$

且相互独立.其中:y_{ij}为因素的第 i 个水平的第 j 次重复观测值;μ 为总平均;α_i 为因素的第 i 个水平的主效应(固定效应);e_{ij}为随机误差.

单因素方差分析模型(one-way classification model) 即"一种方式分组模型".

两种方式分组模型(two-way classification model) 一类特殊的方差分析模型.是含有两个因素效应分析的方差分析模型.其一般数据结构为

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$$
$$(i = 1,2,\cdots,a;\ j = 1,2,\cdots,b;\ k = 1,2,\cdots,n),$$
$$\sum_{i=1}^{a}\alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0, \sum_{i=1}^{a}\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{b}\gamma_{ij} = 0,$$

$e_{ijk} \sim N(0,\sigma^2)$ 且相互独立.

其中 y_{ijk}为因素 A 的第 i 个水平与因素 B 的第 j 个水平组合的第 k 次重复试验的观测值;μ 为总平均;α_i 和 β_j 分别为 A 的第 i 个水平和 B 的第 j 个水平的主效应;γ_{ij}为 A 的第 i 个水平与 B 的第 j 个水平的交互效应;e_{ijk}为随机误差.

套分类模型(nested classification model) 一类特殊的方差分析模型.是一个因素的水平取值依赖另一个因素水平取值的方差分析模型.以两个因素 A,B 为例.若 B 的水平取值依赖于 A 的水平值,则称 B 套于 A 中,用 $j(i)$表示因素 B 在 A 取第 i 个水平时的第 j 个水平,$j(i)=1,2,\cdots,b_i$,b_i 为 A 为第 i 个水平时 B 的水平数.其模型为

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + e_{ijk}$$
$$(i = 1,2,\cdots,a;\ j = 1,2,\cdots,b_i;\ k = 1,2,\cdots,n_{ij}),$$
$$e_{ijk} \sim N(0,\sigma^2)$$

且相互独立.其中 y_{ijk}表示在水平组合 A_i 和 $B_{j(i)}$时的第 k 个观测值;α_i 为 A 因素的第 i 个水平的主效应;$\beta_{j(i)}$为水平 $B_{j(i)}$的效应;e_{ijk}为随机误差,且相互独立(参见"套设计").

回归系数的最小二乘估计(least square estimator of regression coefficient) 简称 LS 估计.参数估计的一种方法.线性回归模型中,未知参数 β 的最小二乘估计为满足

$$\min_{\beta} \| Y - X\beta \|^2$$

的 β.可知 β 是方程$(X^TX)\beta = X^TY$ 的解.此方程称为正规方程.由于线性回归模型中,X 矩阵列满秩,故 β 可解出,记为 $\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY$.

LS 估计(LS estimator) 回归系数的最小二乘估计的简称.

经验回归方程(empirical regression equation) 经过回归分析得到的变量间的关系式.线性回归分析中,用常数项 β_0 及回归系数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$的估计量 $\hat{\beta}' = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_p)$代入回归方程得到的关系式 $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_p x_p$,称为经验回归方程.

回归平方和(regression sum of squares) 衡量回归拟合程度的一个量.线性回归分析中,考察等式

$$Y - \mathbf{1}\overline{Y} = (Y - \hat{Y}) + (\hat{Y} - \mathbf{1}\overline{Y})$$

其中

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \hat{Y} = X\hat{\beta}, \mathbf{1} = (1,1,\cdots,1)^T.$$

上式两边取模,平方,可得

$$\| Y - \mathbf{1}\overline{Y} \|^2 = \| Y - \hat{Y} \|^2 + \| \hat{Y} - \mathbf{1}\overline{Y} \|^2,$$

上式左端 $\| Y - \mathbf{1}\overline{Y} \|^2$为总平方和 TSS;$\| Y - \hat{Y} \|^2$ 为残差平方和 RSS;$\| \hat{Y} - \mathbf{1}\overline{Y} \|^2$ 称为回归平方和 $SS_{回}$.显然 $SS_{回} = TSS - RSS$.

高斯-马尔可夫假定(Gauss-Markov supposition) 简称 GM 假定.有关模型的一种基本假设.线性回归模型中,各次观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 互不相关,且有等方差($\text{cov}(Y) = \sigma^2 I_n$)的假定,称为高斯-马尔可夫假定.

GM 假定(GM supposition) 即"高斯-马尔可夫假定".

高斯-马尔可夫定理(Gauss-Markov theorem) 简称 GM 定理.阐明 LS 估计优良性的一个定理.该

定理断言：在GM假定下，回归系数β的最小二乘估计在它的线性无偏估计类中，是一致最小方差无偏估计.

GM定理(GM theorem) 即“高斯-马尔可夫定理”.

方差稳定化变换(variance stabilize transformation) 方差齐性的一种变换.假设Y的方差σ与均值μ之间有函数关系$\sigma=\phi(\mu)$.对Y作变换

$$U=f(Y)=\sigma_u\int\frac{\mathrm{d}Y}{\phi(Y)},$$

则U的方差近似地为σ_u^2(常值).此处$f:Y\to U$即为方差稳定化变换.

正态化变换(normalized transformation) 数理统计的一种重要而常用的变换.若随机变量Y不服从正态分布，经过适当的变换$U=f(Y)$，使U服从正态或近似服从正态分布，该变换称为正态化变换.常用的正态化变换主要有博克斯-柯克斯变换.

博克斯-柯克斯变换(Box-Cox transformation) 一种常用的正态化变换.具体为

$$Y^{(\lambda)}=\begin{cases}\dfrac{Y^\lambda-1}{\lambda} & (\lambda\neq 0),\\ \ln Y & (\lambda=0).\end{cases}$$

其中λ为待定参数.通过观测数据，可选择适当的λ，使$Y^{(\lambda)}$近似服从正态分布.它由英国学者博克斯(Box,G.E.P.)与柯克斯(Cox,D.R.)于1964年提出，故称为博克斯-柯克斯变换.

残差(residual) 观测值与其估计值的差.模型的残差定义为$\delta=\boldsymbol{Y}-\hat{\boldsymbol{Y}}$，其中$\hat{\boldsymbol{Y}}=X\hat{\beta}$为拟合值，$\hat{\beta}$为$\beta$的估计.残差$\delta$的分量$\delta_i=y_i-x_i'\hat{\beta}$称为第$i$次观察的残差.

残差分析(residual analysis) 用于分析模型的假定正确与否的方法.其内容一般包括：异常值检验、方差齐性检验、误差的正态性检验、相关性检验以及相伴随的方差稳定化变换，正态化变换等修正方法.

残差平方和(residual sum of squares) 衡量模型拟合程度的一个量.线性模型中，称

$$\mathrm{RSS}\triangleq\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\|Y-\hat{Y}\|^2$$

为残差平方和，在一定条件下，$\mathrm{RSS}/(n-p-1)$是σ^2的一致最小方差无偏估计，p为回归系数的个数.

帽子矩阵(hat matrix) 一类正交投影矩阵.对于线性模型$\boldsymbol{Y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e}$，$E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0}$，$\mathrm{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2\boldsymbol{I}$，矩阵$H\triangleq X(X^TX)^{-1}X^T$是将观测向量$Y$正交投影到由$X$的列向量所生成的子空间上的投影矩阵.$\hat{Y}=HY$.习惯上称$H$为帽子矩阵.

高杠杆点(high leverage case) 自变量因子空间中的离群点.帽子矩阵$H\triangleq X(X^TX)^{-1}X^T$中，对角线上较大的元素所对应的那一组数据，称为高杠杆点，即$H=(h_{ij})$，若h_{ii}相对较大，则(x_i',y_i)称为高杠杆点.高杠杆点将回归直线拉向自己，故而得名.

强影响点(influence case) 对统计推断影响较大的点.是回归分析中，对统计推断(如估计或预测等)有较大影响的试验点$(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{pi},y_i)$.探查强影响点的方法很多，一般用柯克距离探查.

异常点(outlier) 残差较大的数据点.线性回归分析中，一个数据点(x_i',y_i)，若它的残差δ_i比其他数据点的残差大得多，则称(x'_i,y_i)为异常点.检验一个数据点是否为异常点，方法较多，常用的方法有t化残差检验法和均值漂移线性回归模型检验法.

回归诊断(regression diagnostics) 回归分析的一个分支.对于线性回归模型，诊断它的基本假定$E(\boldsymbol{e})=0$，$\mathrm{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2I$，$\boldsymbol{e}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma^2I)$等正确与否，有无强影响点，当基本假定不正确时如何修正的一系列方法，称为回归诊断.其内容一般包括残差分析与影响分析两部分.

柯克距离(Cook distance) 线性回归分析中的一个概念.指用于分析、识别线性回归分析中强影响点的一种距离.它的一般形式为

$$D_i(M,C)=\frac{(\hat{\beta}_{(i)}-\beta)^TM(\hat{\beta}_{(i)}-\beta)}{C},$$

其中M为给定的正定阵，C为给定的正数，$\hat{\beta}$为回归系数β的最小二乘估计，$\hat{\beta}_{(i)}$为去掉第i组数据(x_i',y_i)后得到的回归系数的最小二乘估计.柯克距离的大小，反映了第i组观测值(x_i',y_i)对回归系数估计的影响程度.它由柯克(Cook,D.R.)于1977年提出，故称为柯克距离.

均值漂移线性回归模型(mean shift linear regression model) 亦称均值漂移异常点模型.一种特殊的线性回归模型.常用于含有异常点的数据.它的一般形式如下：假定$y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_k}$对应于$k$个异常点，则这种线性回归模型可表示为

$$y_i=\begin{cases}x_i'\beta+\eta_i+e_i & (i\in I=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}),\\ x_i'\beta+e_i & (i\overline{\in}I).\end{cases}$$

写成矩阵的形式为

$$\boldsymbol{Y}=X\boldsymbol{\beta}+D\eta+\boldsymbol{e},$$

其中$D=(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_k})$，这里$d_{i_j}=(\overbrace{0,\cdots,0}^{i_j-1},1,0,\cdots,0)^T$，即第$i_j$个分量为1，其余分量为0的向量；$\boldsymbol{\eta}^T=(\eta_{i_1},\eta_{i_2},\cdots,\eta_{i_k})$，其他符号意义和线性回归模型中的相同.

均值漂移异常点模型(mean shift outlier model) 即“均值漂移线性回归模型”.

t化残差(studentized residual) 亦称学生化

残差.标准化的残差.在线性回归分析中,将普通残差 δ_i 除以其标准差的估计的结果,称为 t 化残差.若用不同的标准差估计量,就得到不同的 t 化残差.当用 $[\hat{\sigma}^2(1-h_{ii})]^{\frac{1}{2}}$ 估计 δ_i 的标准差 $[\sigma^2(1-h_{ii})]^{\frac{1}{2}}$ 时,得

$$r_i \triangleq \frac{\delta_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}}} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

这里 $\hat{\sigma}^2=\mathrm{RSS}/(n-p-1)$.称 r_i 为内 t 化残差.当用 $[\hat{\sigma}^2(i)(1-h_{ii})]^{\frac{1}{2}}$ 估计 δ_i 的标准差时,得

$$r_i' \triangleq \frac{\delta_i}{\hat{\sigma}(i)\sqrt{1-h_{ii}}} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

这里 $\hat{\sigma}^2(i)=\mathrm{RSS}(i)/(n-p-2)$.称 r_i' 为外 t 化残差.RSS(i)为去掉第 i 组数据后得到的残差平方和.

学生化残差(studentized residual) 即"t 化残差".

内 t 化残差(internal studentized residual) 见"t 化残差".

外 t 化残差(external studentized residual) 见"t 化残差".

C_p 统计量(C_p-statistic) 用于选择回归自变量的一个统计量.常记为 C_p.其具体形式为

$$C_p=\frac{\mathrm{RSS}_q}{\hat{\sigma}^2}-(n-2q).$$

其中RSS_q 为由所选模型得到的残差平方和,q 为所选模型中自变量的个数,$\hat{\sigma}^2$ 为从全模型得到的 σ^2 的估计.用 C_p 统计量得到的回归自变量选择的一个准则,称为 C_p 准则.具体来说,是将 C_p 看成 q 的函数,在以(q,C_p)为点的平面直角坐标系中,取距第一象限角平分线最近,且使 C_p 最小的点所对应的模型.

C_p 准则(C_p-criterion) 见"C_p 统计量".

C_p 图(C_p-plot) 用 C_p 统计量选择自变量的一种直观、有效的工具.对于每个可能的模型,计算出对应的 C_p 统计量的值,将(q,C_p)看做点的平面直角坐标,这些点构成的散点图称为(q,C_p)图,简称 C_p 图.

PRESS 准则(criteria of PRESS) 一种回归自变量选择的准则.PRESS 是英文 Prediction Error of Square Sum 缩写,是以预测误差平方和作为选择自变量的准则,具体方法如下:从模型 $\boldsymbol{Y}=X_q\boldsymbol{\beta}_q+\boldsymbol{e}$, $E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0}$,$\mathrm{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2I$ 中计算出

$$\mathrm{PRESS}_q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_q(i))^2 =\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta_i}{1-h_{ii}}\right)^2,$$

将其看成自变量个数 q 的函数,选择使 PRESS_q 达到最小的自变量子集.这里 $x_i^T=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iq})$为 X_q 的第 i 行,$\hat{\boldsymbol{\beta}}_q^T(i)$为去掉第 i 组数据(x_i^T,y)后得到的 $\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘估计,δ_i 为残差,h_{ii}为帽子矩阵的对角元.

逐步回归(stepwise regression) 一种回归变量选择的方法.从一元回归开始,然后每次引入一个自变量,作回归系数的 F 检验,看看该变量是否应当引入.每当引入一个变量,需看以前引入的变量是否应当剔除(每次只剔除一个),直到不能再剔除为止,再行引进变量.重复上述过程,直到既没有变量引入,也没有变量剔除为止.

复共线性(multi-collinearity) 亦称多重共线性.设计矩阵的一种数据特征.在线性回归模型:$\boldsymbol{Y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e}$,$E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0}$,$\mathrm{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2I$ 中,若设计矩阵 X 的列向量 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 之间有近似线性关系,则称设计矩阵 X 或线性回归模型存在复共线性.衡量 X 的复共线性程度,一般用 X^TX 的条件数来度量.条件数定义为

$$k=\lambda_{\max}/\lambda_{\min},$$

这里 $\lambda_{\max}$为 X^TX 的最大特征根,$\lambda_{\min}$为 X^TX 的最小特征根.k 越大说明 X 的复共线性越强.

病态条件(ill-condition) 设计矩阵的一种特征.线性回归模型:$\boldsymbol{Y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e}$,$E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0}$,$\mathrm{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2I$ 中,若 X^TX 至少有一个特征根很小,即很接近于零,或 $|X^TX|$ 近似为零,则称设计阵 X 呈病态,称 $|X^TX|\approx 0$为病态条件.设计阵 X 呈病态和 X 存在复共线性本质上是一样的.

方差扩大因子(variance inflation factor) 简称 VIF.表征自变量观察值之间复共线性程度的数值.线性回归分析中,回归系数 β_j 的估计量的方差为 $\mathrm{var}(\hat{\beta}_j)=\sigma^2C_{jj}$,其中 $C_{jj}=(1-R_j)^{-1}$,称 C_{jj}为 β_j 的方差扩大因子,这里 R_j 为 x_j 对其余 $p-1$ 个自变量的复相关系数的平方,显然 $C_{jj}\geqslant 1$.它的大小可以反映出自变量的观察值之间是否存在复共线性以及其程度如何.C_{jj}越大,复共线性越严重.

回归系数显著性检验(significant test of regression coefficients) 检验某些回归系数是否为零的假设检验.考虑线性回归模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}=\underset{n\times(p+1)}{X}\ \underset{(p+1)\times 1}{\boldsymbol{\beta}}+\boldsymbol{e},\\ \boldsymbol{e}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma^2\mathrm{I}_n),\end{cases}$$

不失一般性,可假定要检验后 k 个$(1\leqslant k\leqslant p)$回归系数是否为零,即 $H:\beta_{p-k+1}=\cdots=\beta_p=0$.一般用 F 统计量

$$F=\frac{(\mathrm{RSS}_{p-k}-\mathrm{RSS}_p)/k}{\mathrm{RSS}_p/(n-p-1)}\sim F(k,n-p-1)$$

去检验,这里 RSS_p 为上述模型的残差平方和,RSS_{p-k}为假定后 k 个系数为零时(即少了 k 个自变量)的模型的残差平方和.用 F 检验有许多优良性,

在这方面,中国统计学家许宝騄早期做了许多工作,后来美籍罗马尼亚数学家瓦尔德(Wald,A.)发展了他的工作.

岭估计(ridge estimator) 回归系数的一种有偏估计.考虑线性回归模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}=\alpha\boldsymbol{1}+X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e},\\ E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0},\\ \operatorname{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2 I,\end{cases}$$

其中 X 为中心标准化后的设计阵.其回归系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的岭估计定义为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)=(X^TX+kI)^{-1}X^TY$,这里 $k>0$,称为岭参数.一般地,k 可取一常数,也可取和观测数据有关的数.将 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)$ 的每一分量 $\hat{\beta}_j(k)$ 看成 k 的函数,当 k 在$[0,+\infty)$上变化时,在平面直角坐标系中画出 $\hat{\beta}_j(k)$ 的图形称为岭迹,岭迹可用来选择岭参数 k.岭估计是针对 X 呈病态时,为减小 $\boldsymbol{\beta}$ 估计的方差,提高其精度而给出的一种估计.

岭参数(ridge parameter) 见"岭估计".

岭迹(ridge trace) 见"岭估计".

广义岭估计(generalized ridge estimate) 岭估计的推广.对线性回归模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}=\alpha\boldsymbol{1}+X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e},\\ E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0},\\ \operatorname{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2 I,\end{cases}$$

其中 X 为中心标准化后的设计阵.其回归系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的广义岭估计定义为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)=(X^TX+\Phi k\Phi^T)^{-1}X^TY$,这里 $k=\operatorname{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_p)\ (k_i\geqslant 0)$;$\Phi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p)$ 为 X^TX 的相应于特征根 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$ 的正交标准化特征向量组成的矩阵.显然岭估计是广义岭估计在 $k_1=k_2=\cdots=k_p$ 时的特例.

主成分估计(principal components estimate) 回归系数的一种有偏估计.考虑线性回归模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}=a\boldsymbol{1}+X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e},\\ E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0},\\ \operatorname{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2 I,\end{cases}$$

其中 X 为中心标准化后的设计阵.将其正交标准化后,转成线性回归模型的典则形式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}=a\boldsymbol{1}+Z\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e},\\ E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0},\qquad \operatorname{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2 I,\end{cases}$$

其中 $Z=X\Phi$; $\boldsymbol{\alpha}=\Phi^T\boldsymbol{\beta}$,且 $\Phi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p)$为 X^TX 的特征值 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$ 相对应的正交标准化特征向量组成的矩阵.当 X 存在复共线性时,特征根 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$ 中有一部分接近于零.不妨设

$$\lambda_{k+1}\approx\lambda_{k+2}\approx\cdots\approx\lambda_p=0,$$

相应地将模型分解为

$$\boldsymbol{Y}=a\boldsymbol{1}+Z_{(1)}\boldsymbol{\alpha}_{(1)}+Z_{(2)}\boldsymbol{\alpha}_{(2)}+\boldsymbol{e},$$

这里

$$\begin{pmatrix}Z_{(1)}\\ Z_{(2)}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}X\Phi_1\\ X\Phi_2\end{pmatrix}=Z,\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}\Phi_1'\boldsymbol{\beta}\\ \Phi_2'\boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}$$

其中 $\Phi_1=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k)$;$\Phi_2=(\varphi_{k+1},\varphi_{k+2},\cdots,\varphi_p)$,$\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$.为减弱 X 的复共线性的影响,去掉模型中 $Z_{(2)}\boldsymbol{\alpha}_{(2)}$ 部分,得 $\boldsymbol{Y}=a\boldsymbol{1}+Z_{(1)}\boldsymbol{\alpha}_{(1)}+\boldsymbol{e}$.求出 $\boldsymbol{\alpha}_{(1)}$ 的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(1)}=(Z_{(1)}^TZ_{(1)})^{-1}Z_{(1)}^TY$.令

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\Phi\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(1)}\\ 0\end{pmatrix}=\Phi_1(Z_T(1)Z_{(1)})^{-1}Z_{(1)}^TY,$$

此估计称为回归系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的主成分估计.

施坦估计(Stein estimator) 回归系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的一种有偏估计.对线性回归模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}=\alpha\boldsymbol{1}+X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e},\\ E(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0},\\ \operatorname{cov}(\boldsymbol{e})=\sigma^2 I,\end{cases}$$

其中 X 为中心标准化后的设计阵.其回归系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的施坦估计定义为:$\hat{\boldsymbol{\beta}}_s(c)=c\hat{\boldsymbol{\beta}}$,这里 $c\ (0\leqslant c\leqslant 1)$,称为压缩系数,$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 为 LS 估计.虽然施坦估计为 $\boldsymbol{\beta}$ 的有偏估计,但可以证明:存在 $0<c<1$,使得 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_s)<\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$,即可使估计的均方误差减小,故施坦估计可提高精度.

压缩系数(contraction coefficient) 见"施坦估计".

广义线性模型(generalized linear model) 简称GLM.线性回归模型的一类推广模型.事实上,线性回归模型也可表为 $Ey_i=\mu_i=x_i^T\boldsymbol{\beta}(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 独立,同方差,有时还要更强的假定:$y_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$.广义线性模型在以下两方面作了推广:

1. 存在一个严格增的可微函数 g,使 $\eta_i=g(\mu_i)=x_i^T\boldsymbol{\beta}\ (i=1,2,\cdots,n)$,这里 $\mu_i=Ey_i$,g 称为连接函数.当 $g(\mu_i)=\mu_i$ 时,就是一般的线性回归模型,$E(y_i)=\mu_i=x_i^T\boldsymbol{\beta}$.

2. $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 相互独立,且 y_i 的分布 $f(y_i,\mu_i,\varphi)$属于指数型.更确切地说,在固定 φ 时,分布族 $f(y_i,\mu_i,\varphi)$是带参数 μ_i 的指数型分布族,当然包括正态分布.广义线性模型是很实用的一类模型,常用的模型有:Logit 模型,Probit 模型,log-log 模型等.

连接函数(link function) 见"广义线性模型".

Logit **模型**(Logit model) 一种特殊的广义线性模型.其因变量 y 为属性变量,即只取 0,1 两个值,故 $0<Ey<1$.其连接函数为

$$g(p)=\log\frac{p}{1-p},$$

其中 $p=Ey$.故其模型形式为

$$\log\frac{p}{1-p}=X^T\boldsymbol{\beta}.$$

Probit **模型**(Probit model) 一种特殊的广义线性模型.其因变量 y 为属性变量,即只取 0,1 两个值,故 $0<Ey<1$.其连接函数为

$$g(p)=\Phi^{-1}(p),$$

其中 $p=Ey$,Φ 为 $N(0,1)$的分布函数. 故其模型形式为

$$\Phi^{-1}(p)=X^T\beta.$$

log-log 模型(log-log model) 一种特殊的广义线性模型. 其因变量 y 为属性变量,即只取 0,1 两个值,故 $0<Ey<1$. 其连接函数为

$$g(p)=\log(-\log(1-p)),$$

其中 $p=Ey$. 故其模型形式为

$$\log(-\log(1-p))=X^T\beta.$$

试 验 设 计

试验(experiment) 统计学的重要概念之一. 是为了了解因变量与可控因素之间关系而安排的一种统计分析过程. 目的在于回答一个或几个经过精心构思的问题. 一个好的试验,首先必须有明确目的,即明确要回答的问题. 如为提高产品质量或数量而寻找最佳的或满意的工艺参数的搭配;为开发产品而寻找性能稳定和成本低廉的设计方案;为控制生产过程而寻求描述该过程的数学模型等. 这里的"实践活动"是指一个试验的三个阶段:

1. 制定试验计划.
2. 实施试验计划,记录试验结果.
3. 分析试验数据,写出试验报告及问题的答案.

试验设计(design of experimental) 简称 DOE. 统计学中应用最为广泛的一个分支. 它是为了减少随机误差对试验结果的影响,有时还为了减少试验次数,并使获得的试验结果(数据)适合使用统计方法进行数据分析,得出有效的和客观的结论,而对试验进行的总体安排. 试验设计是英国数学家、生物学家费希尔(Fisher,R. A.)在进行农业田间试验时提出的. 他发现在田间试验中,环境条件难于严格控制,随机误差不可忽略,故提出对试验方案必须作合理的安排,以减轻随机误差的影响,提高试验结论的可信程度. 一项试验设计包括两个内容:安排试验计划和数据的统计分析. 在安排试验计划时就要想到,对将来的数据如何分析才是科学和合理的;在进行数据分析前就要知道试验是怎样进行的,要获得哪些数据. 这二者是紧密相连的. 不同的试验设计方案应采用不同的数据分析方法. 试验设计方法有多种. 早期的试验设计有各种区组设计、拉丁方设计、尤登方设计等. 因为这些早期设计能处理的因素个数较少(如区组设计一般只能对单因素试验进行设计),又不能考察交互作用的影响,统计分析方法也较为复杂,这些试验设计现在已很少使用. 新的试验设计方法完全可以替代它们. 当今在生产和科学实验中使用最多的是正交试验设计、响应曲面设计、混料设计、饱和设计、参数设计、均匀设计等.

因素(factor) 亦称因子. 试验设计术语. 指影响试验结果的事物. 因素分为定量因素与定性因素. 定量因素是指因素本身的变化可以用数量来表示的因素,如试验中的温度和试验持续时间等;若因素的变化只能定性地描述,如催化剂的种类,农业试验中种子的不同品种等,这类因素称为定性因素. 因素也可分为可控因素与不可控因素. 可控因素是指因素的水平在试验中可人为控制的因素;由于技术、设备等条件的限制,水平取值不能人为控制或因花费昂贵而不去控制的因素,称为不可控因素.

可控因素(controllable factor) 见"因素".

不可控因素(uncontrollable factor) 见"因素".

水平(level) 亦称处理. 试验设计术语. 指试验中因素所处的状态. 因素有 n 种状态,该因素就有 n 个水平. 因素的水平对定量因素是一给定值,对定性变量是一种特定的措施或状态. 例如,在考察品种、施肥量、田间管理措施对作物产量的影响的试验中,品种、施肥量、田间管理措施都是因素. 采用具体的每一品种,每一施肥量,每一种田间管理措施分别是相应因子的一个水平.

处理(treatment) 试验设计术语. 有时指水平,有时指水平组合.

区组(block) 试验设计术语. 在试验过程中,保持试验操作条件相同或相似的若干个试验组成的集合. 一个区组中包含试验的个数称为区组的大小.

区组因素(block factor) 划分区组依据的因素. 区组因素是试验操作中的干扰因素,但区别于误差,它能够通过试验来估计或辨别出来. 同一区组中,区组因素保持同一水平,不同的区组,区组因素可有不同的水平,整个试验使用了 n 个区组,就称区组因素有 n 个水平.

试验误差(experimental error) 亦称随机误差. 统计试验的一种误差. 指除了被考察的可控因素和区组因素外的不可控因子对试验结果的综合影响所引起的误差. 若把试验结果记为 y,则 y 常可分两部分:可控因素和区组因素的影响部分 μ 及不可控的随机误差部分 ε. 即

$$y=\mu+\varepsilon.$$

这里可加性的假设已为很多试验证实是成立的. 随机误差 ε 是随机变量,它时大时小、时正时负、时有时无. 以不可预测之势在影响试验结果 y. 理论和实践都证实,在一般场合下,ε 取较小值的可能性大,取较大值的可能性小,并且正负机会相当. 故常假设 ε 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$.

随机误差(random error) 即"试验误差".

响应(response) 试验设计术语. 指在给定的试验条件下的试验结果.

主效应(main effect) 反映一因素某水平平均响应的度量. 一个因素第 i 个水平上的所有响应之平均,与全部响应的平均之差,称为该因素第 i 个水平的主效应(参见"交互效应").

固定效应(fixed effect) 试验设计的基本概念之一. 试验中,若因素的水平选取已定好,该因素的水平效应作为固定参数,称此为固定效应. 若因素的水平选取是随机地从某一总体中抽取,水平效应值是一随机变量,称此效应为随机效应. 仅含有固定效应的模型称为固定效应模型;模型中仅含有随机效应时,称为随机效应模型;部分效应是随机的,而其他效应为固定时的模型,称为混合模型.

随机效应(random effect) 见"固定效应".

交互效应(interaction) 亦称交互作用. 试验设计的基本概念之一. 是两个或两个以上因素相互搭配对试验结果的特殊作用. 譬如在研究氮肥 N 和磷肥 P 对某农作物的影响时,选土地情况大致相同

N \ P	$P_1=0$	$P_2=3$(千克)
$N_1=0$	150	180
$N_2=5$(千克)	175	240

的 4 块试验田. 进行如下 4 个试验:其中 $P_1=0$ 表示不加磷肥,$P_2=3$(千克)表示加 3 千克磷肥,类似理解 $N_1=0$ 与 $N_2=5$(千克). 上表中间数字表示每公亩产量(千克),从中可以看出,只加 5 千克氮肥,每公亩可增加 25(千克);只加 3 千克磷肥,每公亩可增加 30 千克;两种肥料都加,每公亩可增加 90 千克. 若从 90 千克中扣去 5 千克氮肥的效应 25 千克,扣去 3 千克磷肥效应 30 千克,尚存的 35 千克就是两种肥料同时施加时产生的联合效应. 它就是交互效应. 因素 A 与 B 的交互作用常记为 AB,因子 A,B,C 的交互作用常记为 ABC. 二个因素的交互效应称为二因素交互效应或一阶(级)交互效应;三个因素的交互效应称为三因素交互效应或二阶(级)交互效应;依此类推. 四个因子 A,B,C,D 只有 4 个主效应,但交互效应有 11 个,其中一级交互效应有 6 个,二及交互效应有 4 个,三级交互效应有 1 个. 实际中,常把二级以上交互效应忽略,只考虑部分一级交互效应. 这一观点不是在所有场合都正确,但经验表明,有 90%以上场合是妥当的. 它在试验设计中很有用,可以大大减少试验次数.

混杂(confounding) 试验设计术语. 因素的主效应或因素间的交互效应,与其他因素(包括区组因素)的效应或交互效应相混合,而在统计上无法分辨,称为效应间的混杂. 避免混杂是试验设计的一项要求. 当一项试验中因素过多,又要考察部分交互效应时,若要完全避免混杂,就要进行大量试验,以至于工厂和企业很难承受,与其停止试验不如允许有部分效应发生混杂. 与其被动地让混杂随意发生,不如主动地在试验设计阶段让一些不太重要的交互效应之间发生混杂,而保证各主效应不受混杂干扰.

对照(contrast) 亦称对比. 试验设计术语. 指参数(例如因素的主效应或因素间的交互效应)的一个线性组合,其系数之和为零,称为一个对照. 系数向量正交的两个对照,称为正交对照. 例如若 $a_1,a_2,\cdots,a_I,b_1,b_2,\cdots,b_I$ 是常数,且

$$\sum_{i=1}^{I}a_i=0,\quad \sum_{i=1}^{I}b_i=0,$$

则

$$\sum_{i=1}^{I}a_i\mu_i^A,\quad \sum_{i=1}^{I}b_i\mu_i^A$$

分别为一个对照. 若

$$\sum_{i=1}^{I}a_ib_i=0,$$

则

$$\sum_{i=1}^{I}a_i\mu_i^A,\quad \sum_{i=1}^{I}b_i\mu_i^A$$

是两个正交对照,这里 μ_i^A 为 A 因素的第 i 个水平的主效应.

对比(contrast) 即"对照".

正交对照(orthogonal contrast) 见"对照".

完全随机设计(completely randomized design) 一种试验设计. 按随机顺序进行的试验设计. 这里随机顺序可用抽签或随机数表方法实现.

区组设计(block design) 一种单因素试验设计方法. 将全部试验分成若干个区组的设计. 使得试验中的区组因素的变化不干扰要考察的因素各处理(水平)的分析.

完全区组设计(complete block design) 一种区组设计方案. 是每个区组都包含全部处理的设计方案.

不完全区组设计(incomplete block design) 一种区组设计方案. 是每个区组只包含部分处理的设计方案.

随机完全区组设计(randomized complete block design) 一种完全区组设计. 在完全区组设计中,全部试验按随机顺序进行就得到随机完全区组设计.

平衡不完全区组设计(balanced incomplete block design) 简称 BIB 设计. 一种不完全区组设计. 对不完全区组设计,将 n 个处理安排在大小为 k 的 b 个区组中去,要求:

1. 每个处理在同一区组中最多只能出现一次.
2. 在不同的区组中重复 r 次.

3. 任意两个处理，同时在 λ 个区组中出现.

这样的区组设计称为平衡不完全区组设计. 由定义可直接得到，BIB 设计的三个必要但非充分条件为：

1. $nr = bk$.
2. $\lambda(n-1) = r(k-1)$.
3. $b \geqslant n$.

BIB 设计(balanced incomplete block design) 平衡不完全区组设计的简称.

对称平衡不完全区组设计(symmetric balanced incomplete block design) 简称 SBIB 设计. 一种特殊的 BIB 设计. 对 BIB 设计，当 $n=b$ 时，也即处理个数 n 等于区组个数 b 时，这样的 BIB 设计，称为对称平衡不完全区组设计.

SBIB 设计(symmetric balanced incomplete block design) 对称平衡不完全区组设计的简称.

拉丁方(Latin square) 试验设计中使用的一种方阵. n 个不同的记号(字母或数字)排成 n 行 n 列的方阵，使得各个记号在每行每列都各出现一次，如此的方阵称为一个 n 阶拉丁方. 例如

$$\begin{matrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{matrix}$$

是一个 3 阶拉丁方.

拉丁方设计(Latin square design) 使用拉丁方安排的一种试验方案. 用 n 阶拉丁方的行和列分别表示两个 n 个水平的因素，用拉丁方中的记号表示第三个因素的 n 个水平，如此的包含 n^2 处理的三因素试验方案，称为一个拉丁方设计. 例如 $n=4$(见下表)，第三因素的水平用 A,B,C,D 表示. 在拉丁方设计中，任何两个因素的水平组合都各出现，且只出现一次.

		列 因 素			
		1	2	3	4
行因素	1	A	B	C	D
	2	B	C	D	A
	3	C	D	A	B
	4	D	A	B	C

正交拉丁方(Greco-Latin square) 亦称希腊拉丁方. 一种特殊的拉丁方. 由两个同阶拉丁方相同位置的记号组成 n^2 个记号对，如果一个拉丁方的每个记号同另一个拉丁方的每个记号都出现一次，则称这两个拉丁方是正交的. 当 k 个同阶拉丁方中任何两个都正交时，称这 k 个拉丁方相互正交. 例如两个 3 阶拉丁方

$$\begin{matrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{matrix}$$

相同位置的字母对为

$$\begin{matrix} A\alpha & B\beta & C\gamma \\ B\gamma & C\alpha & A\beta \\ C\beta & A\gamma & B\alpha \end{matrix}$$

满足正交条件，故为两个正交拉丁方.

希腊拉丁方(Greco-Latin square) 即"正交拉丁方".

正交拉丁方设计(Greco-Latin square design) 使用正交拉丁方安排的一种试验方案. 当存在 m 个相互正交的 n 阶拉丁方时，用拉丁方的行和列分别表示两个因素的 n 个水平，用这 m 个拉丁方的记号分别表示其他 m 个因素的水平，如此包含 n^2 个处理的 $m+2$ 个因素的试验方案，称为一个正交拉丁方设计. 例如，3 阶正交拉丁方设计为

		列 因 素		
		1	2	3
行因素	1	$A\alpha$	$B\beta$	γC
	2	$B\gamma$	$C\alpha$	$A\beta$
	3	$C\beta$	$A\gamma$	$B\alpha$

第三因素的水平用 A,B,C 表示，第四因素的水平用 α,β,γ 表示. 在正交拉丁方设计中，任何两个因子的各水平组合都出现，且只出现一次. 这个设计就是 $L_9(3^4)$ 正交设计. 任一个正交拉丁方设计都可改写一个正交设计.

结合类(associate classes) 试验设计的基本概念之一. 将某一集合 S 按一定的规则分类的方法. 设 S 是 n 个不同元素组成的集合，若对任意 $\theta \in S$，把 S 中余下的 $n-1$ 个元素，划分成 m 个不相交的子集，记为

$$S(\theta,i) \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

若 $\varphi \in S(\theta,i)$，则称 θ 与 φ 是第 i 结合关系，而称 $S(\theta,i)$ 为 θ 的第 i 结合类. 换言之，$S(\theta,i)$ 为与 θ 成第 i 结合关系的所有元素的集合. 假若其满足以下条件：

1. 与任意 $\theta \in S$ 为第 i 结合关系的元素个数 n_i $(i=1,2,\cdots,m)$，不依赖于 θ；

2. 若 θ 与 φ 为第 r 结合关系，记为$[\varphi,\theta]=r$，则与 θ 为第 i 结合关系而与 φ 为第 j 结合关系的元素个数记为 p_{ij}^r，也不依赖于 θ 与 φ，对一切 $r,i,j=1,2,\cdots,m$ 皆成立；

如此，则称 S 上定义了 m 个结合类.

部分平衡不完全区组设计(partially balanced incomplete block design) 简称 PBIB 设计. 一种比 BIB 条件更弱的不完全区组设计. 假定有 n 个定义了 m 个结合类的处理，现将其安排在大小为 k 的 b 个区组中去，要求：

1. 每个处理在同一区组中最多出现一次.

2. 每个处理在 b 个区组中重复 r 次.

3. 任何一对第 i 结合类的处理，在 λ_i $(i=1,2,\cdots,m)$个区组中相遇.

满足上述条件的区组设计，称为部分平衡不完全区组设计. 当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m$ 时，上述区组设计就是 BIB 设计.

PBIB 设计(partially balanced incomplete block design) 部分平衡不完全区组设计的简称.

尤登方设计(Younden square design) 一种区组设计. 是由拉丁方导出的一类两向区组设计. 其构造方法是从拉丁方中删去某些行，使得行作为区组时是完全区组，而列作为区组时构成平衡不完全区组设计.

格子方设计(lattice design) 一种区组设计. 是处理数 $n=t^2$(t 为素数幂)的两向区组设计. 设有 $n=t^2$ 个处理，令其与 $L_{t^2}(t^{t+1})$表(参见"正交表")的行号对应，设$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i(t+1)})$为 $L_{t^2}(t^{t+1})$的第 i 行向量，$1<a_{ij}<t$，当 t 为奇数时，分别把第 i 个处理排列到 $R=(t+1)/2$ 个 $t\times t$ 的方块区组中去，其行列坐标为

$$(a_{i1},a_{i2}),(a_{i3},a_{i4}),\cdots,$$
$$(a_{it},a_{i\,t+1})\ (i=1,2,\cdots,t^2).$$

由于 $L_{t^2}(t^{t+1})$表可导出参数为

$$n=t^2,\ b=t(t+1),\ k=t,\ R=t+1,\ \lambda=1$$

的 BIB 设计，因此，任意一对处理，在上述 R 个方块中或同行或同列相遇一次. 若当 t 为偶数时，则分别把第 i 个处理排列到 $R=t+1$ 个 $t\times t$ 的方块区组中去，其行列坐标分别为

$$(a_{i1},a_{i2}),(a_{i3},a_{i4}),\cdots,$$
$$(a_{i\,t-1},a_{i\,t}),(a_{i\,t+1},a_{i1}),\cdots,$$
$$(a_{it},a_{i\,t+1})\ (i=1,2,\cdots,t^2).$$

这时任意一对处理，一次在行，一次在列区组中各相遇一次，按此方法排列的设计就称为格子方区组设计，一般简称格子方设计.

格子方区组设计(lattice block design) 即"格子方设计".

响应曲面设计(response surface design) 亦称回归设计. 一类试验设计. 一种对二次多项式模型

$$\eta=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_mx_m$$
$$+\beta_{12}x_1x_2+\cdots+\beta_{m-1,m}x_{m-1}x_m$$
$$+\beta_{11}x_1^2+\cdots+\beta_{mm}x_m^2$$

分批进行试验的回归设计. 试验分三批完成，第一批试验，试验点分布在自变量因子空间中以 $\sqrt{2}$ 为半径的球面上，每个变量取两个水平：+1，−1. 令−1对应 2，选用一张适当大小的完备型正交表(参见"完备型正交表")$L_n(2^m)$来安排试验. 第二批试验在球心重复 n_0 次. 第三批试验分布在半径为 α 的球面与坐标轴的交点上，每个变量同样取两水平. 适当地选择 α 和 n_0，使得设计矩阵 X 满足：X^TX 成对角阵，以便正规方程求解简便. 这样的回归设计称为正交回归设计. 适当选择 α 与 n_0，使预测值的方差在单位球内近似相等，这样的设计矩阵称为旋转回归设计. 此种设计对各次多项式均可类似进行. 使用此种设计时要把因子空间变换到单位正方体上进行.

回归设计(regression design) 即"响应曲面设计".

正交回归设计(orthogonal regression design) 见"响应曲面设计".

旋转回归设计(rotation regression design) 见"响应曲面设计".

分割设计(split-plot design) 亦称裂区设计. 一种试验设计. 在实际问题中有一类试验，它需经 n 道工序来完成. 前道工序完成的半成品交由下道工序去加工. 试验中各个因素分别属于不同的工序，每道工序至少有一个考察因子. 分割设计就是研究如何安排此类试验，使得整个试验过程中各道工序上的因素水平调整次数最少，使试验便于实施.

裂区设计(split-plot design) 即"分割设计".

套设计(nested design) 一种试验设计. 考察两因素 A,B 的试验，若在试验中，B 因素的水平选取取决于 A 因素所取的水平，称 B 因素嵌套于 A 因素. 研究如何安排具有嵌套关系的因素的试验，称为套设计. 例如 A 因素取二水平 A_1,A_2. 对于水平 A_1，B 因素取两水平 B_{11},B_{12}；对于水平 A_2，B 因素取三个水平 B_{21},B_{22},B_{23}. 共有五个处理：

$$A_1B_{11},A_1B_{12},A_2B_{21},A_2B_{22},A_2B_{23}.$$

A 因素与 B 因素是嵌套关系，即可以推广到多个因素的水平之间的一种嵌套关系.

因子设计(factorial design) 一种试验设计. 为考察因素的主效应和感兴趣的交互效应，用各因素的全部或部分处理进行试验，使得需要考察的效应不被混杂的试验设计，称为因子设计. 当试验包括因素的全部处理时，称为完全试验，否则称为部分实施. 例如：三个因素 A,B,C 各取二水平 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 的试验，全部水平组合

$$A_1B_1C_1,A_1B_1C_2,A_1B_2C_1,A_1B_2C_2,$$
$$A_2B_1C_1,A_2B_1C_2,A_2B_2C_1,A_2B_2C_2$$

都在试验中实施时，就是完全试验. 如果在试验中仅实施水平组合

$$A_1B_1C_1,A_1B_2C_2,A_2B_2C_1,A_2B_1C_2$$

则为部分实施.

完全试验(complete treatment) 见"因子设计".

部分实施(factorial treatment)　见“因子设计”.

混料设计(mixture design)　一种试验设计. 是几种配料相混合的试验设计. 试验中各因素水平是各种成分量的比例,不是各成分的绝对用量. 若试验中考虑 m 个因素

$$x_1, x_2, \cdots, x_m, x_i > 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

且有约束

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

因此,试验区域是一个正单纯形. 混料设计就是研究如何在正单纯形上安排试验(布点)的方法.

混杂因子设计(confounded factorial design)　一种因子设计. 是使一个或多个预先指定的效应与区组效应混杂,而感兴趣的效应不与区组效应相混杂的一种区组实施的因子设计.

t^p 因子设计(t^p factorial design)　一种特殊因子设计. 此试验中有 p 个因素,每个因素取 t 个水平.

正交设计(orthogonal design)　一种特殊的因子设计. 是一种用正交表安排试验的因子设计. 对试验中的任何两个因素的水平组合构成一个等重复的完全试验.

正交表(orthogonal array)　一种特殊的矩阵. 一个 $n\times m$ 矩阵,其第 j 列元素由 $0,1,2,\cdots,t_{j-1}$ 整数组成,对给定的整数 $\alpha>1$,从该矩阵中任意选 α 个列 $j_1, j_2, \cdots, j_\alpha$,由这 α 个列组成 $n\times\alpha$ 阶子矩阵 Θ,把这个子矩阵的每一行看做一个向量,若恰巧有

$$t_{j_1} \times t_{j_2} \times \cdots \times t_{j_\alpha} \triangleq \prod t_{n\alpha}$$

个不同向量,且每个向量在子矩阵中出现

$$\frac{n}{\prod t_{n\alpha}}$$

次. 满足以上条件的 $n\times m$ 阶矩阵称为水平数 $t_1, t_2, \cdots, t_m$,大小为 n,约束为 m,强度为 α 的正交阵列或正交表,记为

$$L_n(t_1\times t_2\times\cdots\times t_m),$$

一般也记为 $OA(t_1\times t_2\times\cdots\times t_m)$. 强度 $\alpha=2$,且

$$n = 1 + \sum_{j=1}^{m} (t_j-1)$$

的正交表,称为饱和正交表.

饱和正交表(full OA)　见“正交表”.

广义正交表(generalized OA)　比正交表条件更弱的一种特殊矩阵. 设(a_{ij}) 为 $n\times m$ 矩阵,其第 j 列元素 a_{ij}由 $1,2,\cdots,t_j$ 个自然数构成,对任意 k,$1\leqslant k\leqslant t_j$,它在第 j 列中出现 $R_k(j)>0$ 次,若任意 α 列组成的 n 个有序集$(a_{ij_1}, a_{ij_2}, \cdots, a_{ij_\alpha})$是一个完全集(即 $t_{j_1}\times t_{j_2}\times\cdots\times t_{j_\alpha}$个),每个重复出现

$$\frac{R_{a_{ij_1}}^{(j_1)} \cdot R_{a_{ij_2}}^{(j_2)} \cdots R_{a_{ij_\alpha}}^{(j_\alpha)}}{n^{\alpha-1}}$$

次,那么这样的一个矩阵就称为强度 α 的广义正交表,记为 $gL_n(t_1\times t_2\times\cdots\times t_m)$.

拟水平(dummy levels)　正交表中的一种水平. 给一个因素虚拟一些水平,或将原表中水平合并,使该因素的水平数增多(或减小),以使能安排在适当的正交表中,这种虚拟的水平称为拟水平,该设计称为拟水平设计.

拟水平设计(dummy levels design)　见“拟水平”.

阿达马矩阵(Hadamand matrix)　一种正交矩阵. 以 $+1$ 和 -1 为元素的正交矩阵. 即在 $n\times n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中,其中 $a_{ij}=+1$ 或 -1,满足

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 0 & (i\neq j), \\ n & (i=j), \end{cases}$$

称 A 为 n 阶阿达马矩阵.

差集表(difference array)　一种矩阵. 设 $G(t)$ 是 t 阶加法群,A 是元素属于 $G(t)$ 的 $\lambda t\times k$ 阶矩阵,如果 A 的任何两列有序差遍历 $G(t)$ 的每个元素恰好 λ 次,则称 A 为 $G(t)$ 上的差集表,记为

$$D(\lambda t, k, t, 2).$$

差集型正交表(difference OA)　一类正交表. 型如$L_{\lambda t^2}(t^k)$,其中 $t=p^r$(素数次幂),$\lambda\geqslant 2$ $(k=\lambda t+1)$的正交表称为差集型正交表. 由于它们的构造等同于差集表$D(\lambda t,k,t,2)$的构造,故此得名. 此类表一般包括:$L_{18}(3^7)$,$L_{36}(3^{13})$,$L_{54}(3^{25})$,$L_{32}(4^9)$,$L_{50}(5^{11})$等.

阿达马型正交表(Hadamand OA)　一类正交表. 型如$L_{4m}(2^{4m-1})$ $(m=1,2,\cdots)$的正交表. 由于它们的构造是由阿达马矩阵改造得来,故此得名. 此类表一般包括:$L_{12}(2^{11})$,$L_{20}(2^{19})$等.

完备型正交表(complete OA)　一类正交表. 型如 $L_{t^k}(t^m)$ 的正交表,其中 t 为素数或素数次幂,

$$m = \frac{t^k-1}{t-1},$$

且表中任何两列的交互列均在表中. 此类表常用的有:

$L_4(2^3)$,$L_8(2^7)$,$L_{16}(2^{15})$,$L_{32}(2^{31})$,$L_{64}(2^{63})$,

$L_9(3^4)$,$L_{27}(3^{13})$,$L_{81}(3^{40})$,$L_{16}(4^5)$,

$L_{64}(4^{21})$,$L_{25}(5^6)$.

交互列(columns of interaction)　试验设计的基本概念之一. 在完备型正交表 $L_{t^k}(t^m)$ 中,当任何

两个因素在表中对应的两列确定后，这两因素的交互效应在表中占有的 $t-1$ 列的位置也随之而惟一确定，这 $t-1$ 列称为该两列的交互列.

正交表的并列(combination of columns) 试验设计的基本概念之一. 将正交表中某两列连同其交互列合并为水平数更高的一列，且该列与原正交表中余下的列仍构成正交表，称此为正交表的并列. 例如，把正交表 $L_{18}(2^1\times3^7)$ 第1列与第2列的水平组合 11,12,13,21,22,23 分别换成 1,2,3,4,5,6，合并为一个6水平列，便得并列后的正交表

$$L_{18}(6^1\times3^6).$$

***R* 分解方案**(resolution *R*) 一种试验设计方案. 一个设计方案是 R 分解方案，是指在此方案下，假定 $R-k-1$ 阶以及更高的因素的交互效应为零时，小于等于 $k-1$ 阶的因素的交互效应(包括主效应)都可估. 这里 k 为 $R/2$ 的整数部分. 若一个 R 分解方案同时也是正交设计方案，称为正交 R 分解方案.

正交 *R* 分解方案(orthogonal resolution *R*) 见"R 分解方案".

表头设计(top design) 一种试验设计方案. 为使某些感兴趣的效应不和其他效应混杂，按照一定的规则将试验中的因素安排在正交表中，称此为表头设计. 例如，在正交表 $L_8(2^7)$ 上安排皆为2水平的4因素 A,B,C,D 的试验. 假定因素一阶以上的交互效应为零，为使各因素主效应不和交互效应混杂，表头设计应为

$L_8(2^7)$	1	2	3	4	5	6	7
因　素	A	B		C			D

多重比较(multiple comparisons) 因素效应对照之间的比较. 指推断因素效应对比之间有无显著差异的一类检验方法. 常用的有 Duncan 多重比较法，Scheffe 多重比较法.

统计质量管理

统计质量管理(statistical quality management) 质量管理的一个分支学科. 在质量管理中所用的统计方法的总称，除了一些常用统计方法(如回归分析与诊断、方差分析、多元分析等)在质量管理中有广泛应用外，还有一些围绕产品设计、制造、检验等方面开发出来的一些独特的统计方法. 它们是:统计过程控制(SPC)、试验设计(DOE)、测量系统分析(MSA)、可靠性统计分析(RSA)、抽样检验(SI)，这些独特的统计方法构成统计质量管理的主体.

线内质量管理(on-line quality control) 统计质量管理术语. 指产品制造阶段的质量管理. 主要是对生产现场进行及时的动态管理，工序的诊断、调节和改善，以及产品的检验. 主要使用统计过程控制，抽样检验，以及寻找质量原因的一些图表方法，如调查表、排列图、因果图、直方图等.

线外质量管理(off-line quality control) 统计质量管理术语. 指产品设计阶段和工艺设计阶段的质量管理. 每个阶段又都可分为系统设计、参数设计和公差设计等三个步骤. 其中系统设计主要使用工程知识和经验，参数设计和公差设计要用试验设计和回归分析等统计方法.

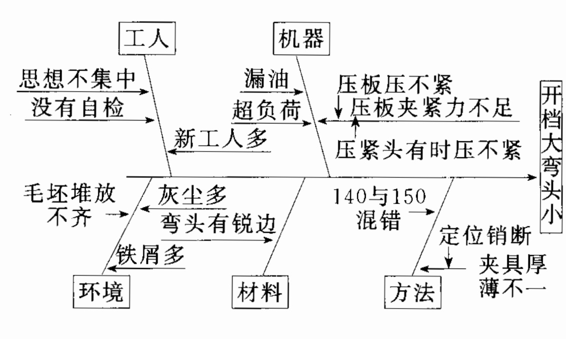
全面质量管理(total quality control) 简称TQC. 统计质量管理术语. 它是指企业全体职工及有关部门同心协力，综合运用现代科学管理、专业技术和科学方法，经济地开发、研制、生产和销售用户满意的产品的管理活动. 是由美国通用电器公司的费根堡(Feigenbaum, A. V.)和质量管理专家朱兰(Juran, J. M.)在20世纪50年代末和60年代初提出的.

PDCA 循环(PDCA cycle) 统计质量管理术语. PDCA 是计划(plan)、实施(do)、检查(check)、处理(action)的英文缩写. 质量管理的过程按照 P, D, C, A 先后顺序不停地循环. 即PDCA循环.

质量管理小组(quality control group) 简称QC小组. 质量管理活动的基层组织. 是由工人、工程师等组织起来，运用科学的质量管理思想和方法，为解决某一质量问题而开展质量管理活动的基层组织，是广大职工参加质量管理的一种重要形式.

QC 小组(quality control group) 即"质量管理小组".

因果图(relation diagram) 亦称关联图、树形

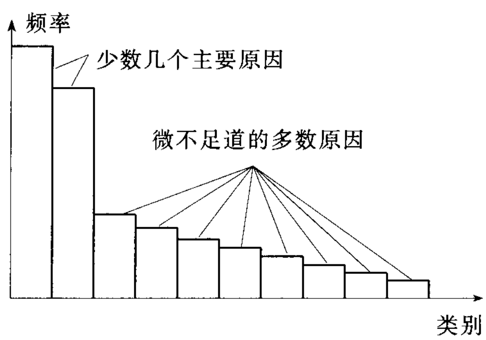


因果图

图、鱼刺图. 一种用于质量管理的流程图. 是分析产生质量问题原因所使用的一种图. 如某厂生产的曲拐有开档大、弯头小的缺陷，从操作者、机器、材料、

方法和环境等五个方面去分析原因，画出因果图，再从中寻找主要原因.

排列图(arrange diagram)　亦称巴雷特统计图.一种用于质量管理的统计图.是用来寻找影响产品质量的主要因素的统计图.其原理是:引发质量问题的原因有多种，但其出现机会不全相同，大部分质量问题可能是由少数几个主要原因引起的.因此把引发质量问题的原因依发生频率的大小依次排列，



排列图

就得到排列图(见图).该图把原因分为两大类:少数几个主要原因和多数微不足道的原因.人们首先应把资源用于解决少数几个主要原因上，从而获得最大效益.

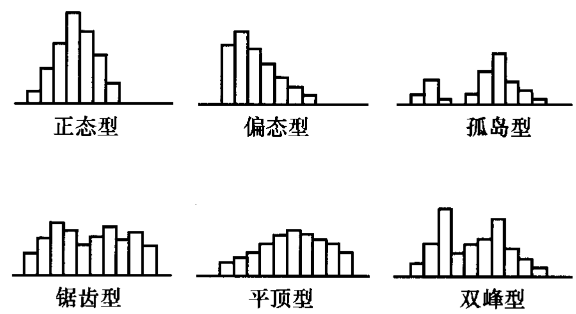
巴雷特图(Pareto chart)　即"排列图".

调查表(survey form)　亦称检查表或核对表.一种统计图表.是记录、收集数据的一种好形式.其格式各种各样，一般视调查质量特性的要求而自行设计.企业常用的有不合格品项目调查表、产品故障调查表、工序质量调查表、产品缺陷调查表等，下面是一张产品不合格项目调查表.

产品不合格项目调查表

产品号	不合格原因					
	操作	设备	工具	工艺	材料	其他
1005	✓					
1098				✓		
2177		✓				
3576	✓					
…						
…						
…						
…						
合计	7	6	0	3	0	0

频数直方图(frequency histogram)　一种用于质量管理的统计图.是一种描述产品质量特性值分布情况的统计图形.收集一批产品，一般在50～200个之间，分别测量其质量特性值，按事先划定的区间进行分组，统计各区间内的频数；在横坐标轴上算出区间端点，纵坐标轴上算出频数.以区间为底边，以相应频数为高画出一系列长条矩形，这个图形称为该质量特性的频数直方图.通过频数直方图可以看出质量特性的分布情况，如分布的位置、散布大小，中位数的位置等，下面给出六种不同类型的频数直方图.在进行质量管理时，对非正态型直方图都要查找原因，及时采取措施，改进质量.

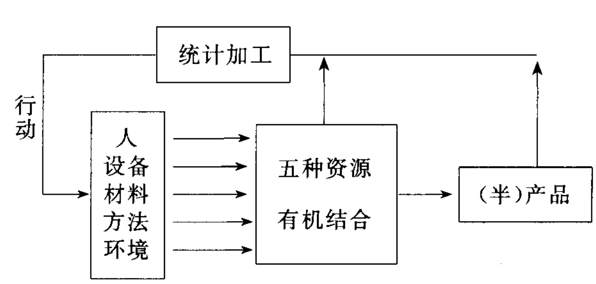


各种形状的直方图

频率直方图(frequency histogram)　一种用于质量管理的统计图.是类似于频数直方图的一种统计图形.假如把频数直方图的纵坐标由频数改为频率/组距＝频数/(样本量×组距).该直方图就是频率直方图.

过程(process)　统计质量管理的基本概念之一.是将各项输入(人、设备、材料、方法和环境等五项资源)按一定要求组合起来，并能转化为输出的活动.一种产品的制造常可分解为若干过程.如一道工序、一个工段、一项操作等都是一个过程的例子，质量管理的所有工作都通过过程来实现的.

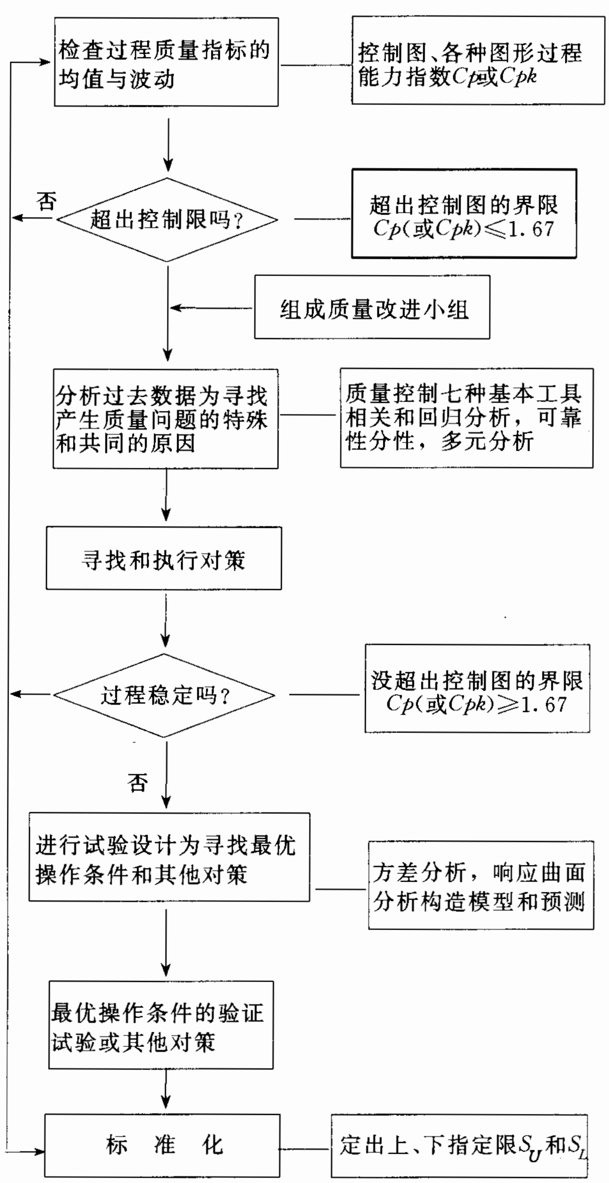
过程控制系统(process control system)　一种统计质量管理系统.是带有反馈系统的统计质量管



过程控制系统框图

理系统.见过程控制系统框图.其中反馈系统具有收集信息、统计加工和采取行动三项功能.在产品制造中的关键过程都应建立过程控制系统，用于监察产品质量波动，预防异常波动出现，使产品质量处于管理者的控制之中.实现此种控制的工具就是选用适当的控制图.

统计过程控制(statistical process control)　简称 SPC. 一种统计质量管理方法. 它是用控制图对生产过程中的质量特性及其波动进行控制的一套统计质量管理方法. SPC 的重点在于防止出现缺陷，出现废品. 预防出现缺陷永远比事后矫正为好，损失也少. 当发现缺陷时，立即查找原因，采取行动，这里专业技术和统计方法将会协助完成这些工作. 详见 SPC 的一般流程框图. SPC 的目的是使产品质量稳定，满足顾客要求. SPC 需要公司、企业里每个人参与. 当今没有一个人能把事情全部做好，但每个人都会对事情有所贡献.

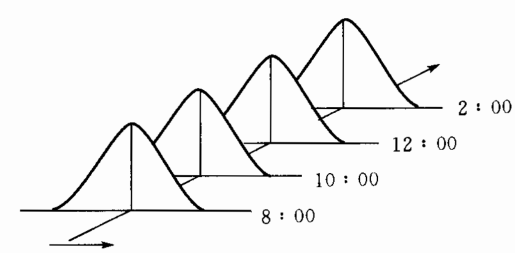


SPC　一般流程框图

质量特性(quality characteristic)　产品的质量指标. 是用来表征产品(或半成品)的性能、可靠性、安全性、经济性和外观等的质量指标. 一种产品的质量特性常有多个，应把注意力放在影响产品质量、成本和顾客满意程度的关键质量特性上. 保证产品质量特性稳定在设计规格内，主要是生产者的责任；提高产品质量特性是设计者的任务.

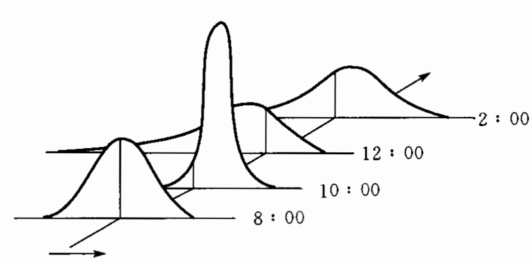
波动(variation)　统计质量管理的基本概念之一. 刻画产品质量特性的差异. 没有两个产品是完全一样的，即使自动化生产线上的产品也不例外. 譬如，自动装罐线上的午餐肉罐头，每罐的午餐肉重量是不同的，其间的差异就是波动. 波动是客观存在，质量持有波动是正常的，无波动是不正常现象；消失波动是不可能的，但减少波动是可能的；波动在指定公差内是可以接受的，超出指定公差是不能接受的；及时报告波动超出公差是受欢迎的，迟到的报告会引起损失，是失职的行为.

正常波动(common variation)　一种波动形态. 使过程输出的质量特性呈正态分布，且此分布不随时间而变的波动称为正常波动. 正常波动过程是可预测的(见图). 这种状态称为过程在统计意义上受控，简称过程受控.



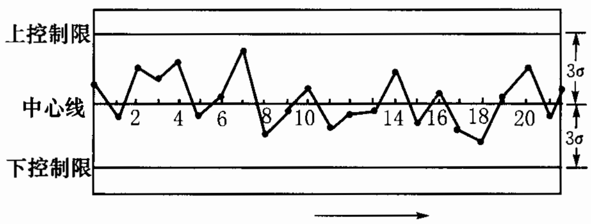
过程受控-输出特性呈正态分布，且不变

异常波动(special variation)　一种波动形态. 使过程输出的质量特性的分布是随时间而变化的、不稳定的波动称为异常波动. 异常波动过程是不可预测的(见图)，这种状态称为过程失控.



过程失控-输出特性的分布随时间变化

控制图(control chart)　一种用于质量管理的统计图. 是根据统计原理制定，用于分析和判断过程是处于受控状态，还是处于失控状态的一种统计图. 它是于 1924 年提出的. 一张控制图是由中心线和上、下控制限等三条平行线组成. 中心线与上、下控制限是等距的，一般距离为数倍的标准差. 常用的控



制图是取 3 倍标准差(3σ)作为其间距离(见图),这意味着,允许千分之 2.7 个产品位于上、下控制限之外,在这个限度内认为过程受控,否则认为过程失控. 一张控制图一般只能控制一个质量特性. 常用的控制图有均值控制图($\bar{x}$ 图、$\tilde{x}$ 图、x 图)、标准差控制图(R 图、S 图)、不合格品率控制图(p 图),不合格品数控制图(np 图)、缺陷数控制图(c 图)、单位缺陷数控制图(u 图).

常观控制图(conventional control chart) 一类控制图. 指中国国家标准 GB4091. 1～4091. 9～83,对其制订方法和使用方法做出详细规定的生产过程中常用的 8 张(对)控制图.

这 8 张(对)控制图可分为两类. 计量值控制图有 4 对,它们是:

1. 均值-极差控制图,即 $\bar{x}$-R 图.
2. 均值-标准差控制图,即 $\bar{x}$-S 图.
3. 中位数-极差控制图,即 $\tilde{x}$-R 图.
4. 单值-移动极差控制图,即 x-MR 图.

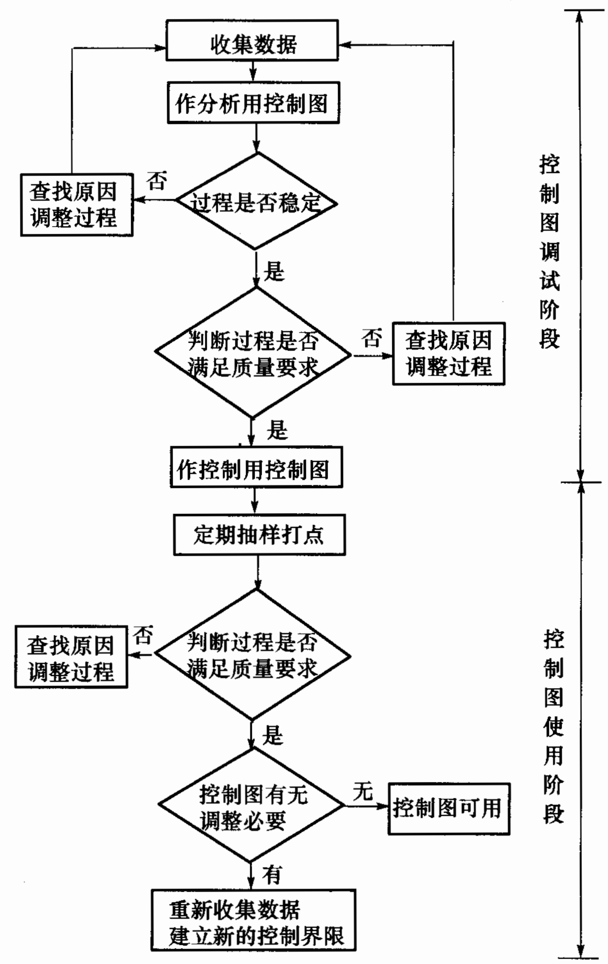
另一类是计数值控制图,它有 4 张,具体是:

5. 不合格品率控制图,即 p 图.
6. 不合格品数控制图,即 np 图.
7. 单位缺陷数控制图,即 u 图.
8. 缺陷数控制图,即 c 图.

制订和使用控制图可分为两个阶段:控制图调试阶段和控制图使用阶段. 这两个阶段的具体操作见右上图.

异常现象(special situation) 统计质量管理术语. 指控制图上点子的排列与正态分布假设不相容的现象. 以下是一些异常现象:

1. 20 到 25 个点子中有 1 点超出控制限.
2. 控制限内连续 7 点有上升或下降的趋势.
3. 控制限内连续 7 点位于中心线一侧.
4. 控制限内连续 11 点中至少有 10 点位于中心线一侧.
5. 控制限内连续 14 点中至少有 12 点位于中心线一侧.
6. 控制限内连续 17 点中至少有 14 点位于中心线一侧.
7. 控制限内连续 20 点至少有 16 点位于中心线一侧.



制订与使用控制图的框图

8. 控制限内有明显多于 2/3 的点落在 $\pm\sigma$ 的中心区内.
9. 控制限内有明显少于 2/3 的点落在 $\pm\sigma$ 的中心区内.
10. 控制限内连续 3 点中至少有 2 点落在 $\pm 2\sigma$ 和 $\pm 3\sigma$ 区内.
11. 控制限内连续 7 点中至少有 3 点落在 $\pm 2\sigma$ 和 $\pm 3\sigma$ 区内.

均值-极差控制图(mean-range control chart) 亦称 $\bar{x}$-R 图. 一种控制图. 是用于同时判断正态分布的均值和标准差这两个参数是否保持在正常状态下的一对控制图. 其中用于估计正态均值的统计量是样本均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$$

用于估计正态标准差的统计量是样本极差

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

这是在样本量 $n \leqslant 9$ 时用得最频繁的一对控制图. 在 $\bar{x}$ 图和 R 图中的任一张图上出现异常现象时都要及

时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

$\bar{x}$-R 图（$\bar{x}$-R chart）　即“均值-极差控制图”.

均值-标准差控制图（mean-standard deviation control chart）　亦称 $\bar{x}$-S 图. 一种控制图. 是用于同时判断正态分布的均值和标准差两个参数是否保持在正常状态下的一对控制图. 其中用于估计正态均值的统计量是样本均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$$

用于估计正态标准差的统计量是样本标准差

$$S = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

它常在样本量 $n \geqslant 10$ 时使用，使用者要具有计算 S 的能力. 在 $\bar{x}$ 图和 S 图中任一张图上出现异常现象时都要及时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

$\bar{x}$-S 图（$\bar{x}$-S chart）　即“均值-标准差控制图”.

中位数-极差控制图（median-range control chart）　亦称 $\tilde{x}$-R 图. 一种控制图. 是用于同时判断正态分布的均值和标准差这两个参数是否保持在正常状态下的一对控制图，其中用于估计正态均值的统计量是样本中位数 $\tilde{x}$，它依赖于样本量 n 的奇偶性，即

$$\tilde{x} = \begin{cases} \text{样本中间的数} & (n \text{ 为奇数}), \\ \text{样本中间两个数的平均} & (n \text{ 为偶数}); \end{cases}$$

用于估计标准差的统计量是样本极差

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

这一对控制图的使用最为简单，计算量最少，适合于对样本均值 $\bar{x}$ 计算仍感不便的使用者. 虽精度有所损失，但使用控制图总比不使用有收获.

在 $\tilde{x}$ 图和 R 图中，任一张图出现异常现象时，都要及时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

$\tilde{x}$-R 图（$\tilde{x}$-R control chart）　即“中位数-极差控制图”.

单值-移动极差控制图（single value-moving range control chart）　亦称 x-MR 图. 一种控制图. 是在特定场合（一次只能获得一个数据）下用于同时判断正态分布的均值和标准差两个参数是否保持在正常状态下的一对控制图. 如液体浓度，由于在短时间内液体浓度是均匀的，无需抽多个样品，一次只需抽检一个样品的浓度；又如复杂的化学分析，生物培养或破坏性检查，由于成本高或时间长，一次只能检查一个样品.

在构造 x-MR 图中，用于估计正态均值的统计量就是一个样品的观察值，用于估计标准差的统计量就是相邻二个样品观察值之差的绝对值.

在 x 图和 R 图中，任一张图出现异常现象时都要及时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

x-MR 图（x-MR chart）　即“单值-移动极差控制图”.

不合格品率控制图（control chart for fraction defective）　亦称 p 图. 一种控制图. 是用于判断二项分布的惟一参数（不合格品率）是否保持在正常状态的一张控制图. 其中用于估计不合格品率的统计量是样本中的不合格品数在样本中所占的比率. 当 p 图上出现异常现象时要及时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

p 图（p chart）　即“不合格品率控制图”.

不合格品数控制图（control chart for number of defectives）　亦称 np 图. 一种控制图. 是用于判断一过程的不合格品数是否保持在正常状态下的一张控制图. 其中用于估计不合格品数的统计量是样本中的不合格品数，但要求所用样本的容量都相等. 当 np 图上出现异常现象时要及时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

np 图（np chart）　即“不合格品数控制图”.

单位缺陷数控制图（control chart for defects per unit）　亦称 u 图. 一种控制图. 是用于判断泊松分布的惟一参数（单位产品缺陷数）是否保持在正常状态下的一张控制图. 其中用于估计单位产品缺陷数的统计量是样本中的缺陷数与样本中的单位产品数之比. 例如有如下两个样本，其中一个方框表示一个单位产品，×表示缺陷，则可算得单位产品缺陷数.

样　　本	[××][×][ ][××]	[ ][×××]
单位产品数	$n_1=4$	$n_2=2$
缺　陷　数	$c_1=5$	$c_2=3$
单位产品缺陷数	$u_1=\frac{5}{4}=1.25$	$u_2=\frac{3}{2}=1.5$

当 u 图上出现异常现象时要及时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

u 图（u chart）　即“单位缺陷数控制图”.

缺陷数控制图（control chart for number of defects）　亦称 c 图. 一种控制图. 是用于判断一过程的缺陷数是否保持在正常状态下的一张控制图. 其中用于估计缺陷数的统计量是样本中的缺陷数，但要求所用样本的容量都是相等的，当 c 图上出现异常现象时要及时查找原因，采取行动，使这种异常现象不再延续下去.

c **图**(c chart)　即"缺陷数控制图".

计数型累积和图(cusum chart for counted data)　一种效率更高的计数型控制图. 所用的统计量是从逐次抽取的样本中检出不合格品数(或缺陷数)x_i 对其参考值 k 值的偏差的累积和

$$c_m = \sum_{i=1}^{m}(x_i - k),$$

其中 m 为累计抽取的样本数,当累积和 c_m 超过规定的判定距 h 时,则判定过程有异常,应及时查找原因、采取行动,使过程转入正常,然后从零开始再重复上述步骤. 若以样本序号 m 为横坐标和累积和 c_m 为纵坐标描点,亦可用得到的图面信息来判定过程是否有异常现象,其中 k 与 h 是根据一定要求确定的. 一些(k,h)值可在国家标准 GB4 887－85 中找到.

多目标控制图(multitarget control chart)　一种控制图. 是同时控制两个或多个相互依赖的目标的控制图. 目前研究最多的是两目标控制图.

过程能力指数(process capability index)　衡量生产过程的一个指标. 过程满足顾客要求能力大小的一种指数,它的计算是在如下两个假设下进行的:

1. 过程受控,过程输出的质量特性 x 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

2. 产品的规格限(下规格限 LSL 和上规格限 USL)能准确反映顾客(如使用者、订货人、下道工序的操作者等)的要求. 因此这种规格限应是用文件形式下达的(半)产品要求.

过程能力指数的计算也有潜在型和实际型之分. 潜在过程能力指数 c_p 是规格限的宽度(USL－LSL)与过程控制限的宽度 6σ 之比,即

$$c_p = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6\sigma}.$$

例如,印刷电路板阻抗的规格限为 $100\pm10\Omega$,而生产线上该项阻抗 $X\sim N(92.37,2.75^2)$,阻抗偏低,其潜在过程能力指数为

$$c_p = \frac{110-90}{6\times 2.75} = 1.21.$$

这个指数尚可,但其不合格品率可算得为 0.19,原因在于正态均值 $\mu=92.37$ 与规格中心

$$M = \frac{\text{USL}+\text{LSL}}{2} = 100$$

相距甚远. 实际过程能力指数 c_{pk}是下规格限过程能力指数

$$c_{pl} = \frac{\mu - \text{LSL}}{3\sigma}$$

与上规格限过程能力指数

$$c_{pu} = \frac{\text{USL} - \mu}{3\sigma}$$

之间的最小值,即

$$\begin{aligned} c_{pk} &= \min(c_{pL},c_{pU}) \\ &= \min\left(\frac{\mu-\text{LSL}}{3\sigma},\frac{\text{USL}-\mu}{3\sigma}\right) \\ &= \frac{\text{USL}-\text{LSL}}{6\sigma} - \frac{|\mu-M|}{3\sigma} \\ &= (1-k)c_p, \end{aligned}$$

其中

$$k = \frac{2|\mu-M|}{\text{USL}-\text{LSL}}.$$

在印刷电路板阻抗的例子中,可算得实际过程能力指数为

$$c_{pk} = \min\left(\frac{92.37-90}{3\times 2.75},\frac{110-92.37}{3\times 2.75}\right) = 0.29.$$

当工程师采取行动,把阻抗的分布调整到

$$N(100.83,2.26^2),$$

这时两种过程能力指数分别为

$$c_{pk}=\min(1.35,1.60)=1.35,$$

$$c_p=\frac{110-90}{6\times 2.26}=1.47,$$

两者就较为接近了.

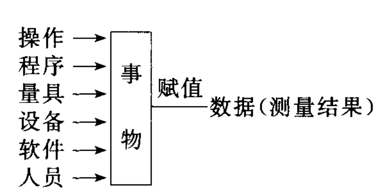
潜在过程能力指数(potential process capability index)　见"过程能力指数".

实际过程能力指数(practical process capability index)　见"过程能力指数".

测量(measurement)　统计质量管理术语. 指赋值给具体事物,并用来表示它们在指定特性上的(大小、多少等)关系. 所赋之值称为测量值,或测量结果,或数据.

量具(gauge)　观测数据使用的工具. 是用来获得测量结果的装置. 包括用来测量合格与不合格的装置.

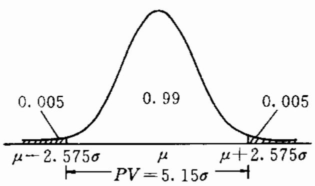
测量系统(measurement system))　测量涉及的各类对象. 是用来对被测特性赋值的操作、程序、量具、设备、软件和操作人员的集合,并用来获得测量结果. 一个测量系统可看做一个过程,测量数据可看做该过程的输出特性值(见图),这样就可用 $\bar{x}$-R 图或 $\bar{x}-S$ 图来评价测量系统.



测量系统框图

过程变差(process variation)　统计质量管理的基本概念之一. 指 99%的过程输出值所占区间的长度,记为 PV. 在测量值 x 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

时，$PV=5.15\sigma$，见图. 例如对某物体重复测量 6 次，得数据 217，216，216，214，212，125，其极差 $R=5$，在正态分布假设下，测量值的标准差



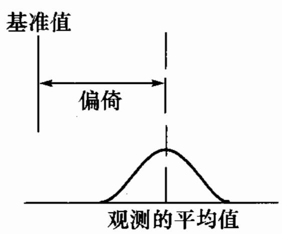
$$\hat{\sigma}=\frac{R}{d_2}=5\div 2.534=1.97.$$

其中 d_2 是将极差 R 折算为 $\hat{\sigma}$ 的调整量. 于是该过程变差

$$PV=5.15\hat{\sigma}=10.15.$$

这表明：该测量过程（即测量系统）在测该物体时，99%的测量值将散布在长度为 10.15cm 的区间上.

偏倚(bias)　测量的误差. 是测量结果的均值与基准值的差（如图）. 而基准值可通过更高级别的量具进行多次测量，取其平均来确定. 偏倚就是随机误差. 例如，对一样品测量 5 次，得测量值（单位：mm）0.75，0.80，0.70，0.75，0.80，其均值 $\bar{x}=0.76$mm，若该样品用更高级别量具测量得均值为 0.80mm，则偏倚为 $0.76-0.80=-0.04$.



重复性(repeatability)　亦称设备的变差. 统计质量管理的基本概念之一. 指由 $k(\geqslant 1)$ 位测量员用同一量具对 $n(\geqslant 1)$ 个产品的同一质量特性各进行 $m(\geqslant 2)$ 次重复测量所获得的变差. 记为 EV，计算公式为

$$EV=5.15\sigma_e.$$

其中 σ_e 为重复测量的标准差. 研究重复性的前提是：过程受控，质量特性服从正态分布. 例如，2 位测量员用同一量具对 5 个零件直径各进行 3 次重复测量，获得如下数据：

零件号 / 重复号	测量员 1					测量员 2				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	217	220	217	214	216	216	216	216	216	220
2	216	216	216	212	219	219	216	215	212	220
3	216	218	216	212	220	220	220	216	212	220
均值 $\bar{x}$	216.3	218.0	216.3	212.7	218.3	218.3	217.3	215.7	213.3	220.0
极差 R	1.0	4.0	1.0	2.0	4.0	4.0	4.0	1.0	4.0	0.0

在 $\bar{x}$-S 图上显示出测量过程受控，再计算极差平均值 $\overline{R}=25/10=2.5$. 由 $\overline{R}$ 可算得重复测量的标准差

$$\sigma_e=\frac{\overline{R}}{d_2{}^*}=\frac{2.5}{1.72}=1.45.$$

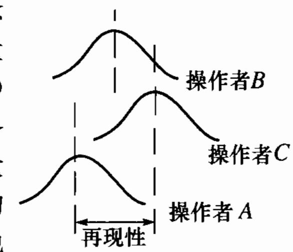
其中

$$d_2{}^*=d_2{}^*(m,g)$$

为调整量，可从专门表上查得，m 为重复测量次数，g＝样品数×测量员人数$=nk$. 最后算得该测量过程（即量具）的重复性

$$EV=5.15\times 1.45=7.47.$$

再现性(reproducibility)　亦称测量员的变差. 统计质量管理的基本概念之一. 指由 $k(\geqslant 2)$ 位测量员用同一量具对 $n(\geqslant 1)$ 个产品的同一质量特性各进行 $m(\geqslant 2)$ 次重复测量时，各位测量员的测量均值的变差（见图）. 简单地说，再现性就是测量员在测量技术上的变差. 它的计算公式为



$$AV=5.15\sigma_o,$$

$$\sigma_o^2=\sigma_o'^2-\frac{\sigma_e^2}{nm},$$

其中 σ_e^2 是重复测量的方差，

$$\sigma_o'^2=\frac{\bar{x}_{\max}-\bar{x}_{\min}}{d_2{}^*},$$

$\bar{x}_{\max}$ 与 $\bar{x}_{\min}$ 分别是 k 位测量员的 k 个测量均值中的最大值与最小值，$d_2{}^*=d_2{}^*(m,1)$ 可从专门表上查得. 例如，在重复性的例子中，

$$k=2,\ n=5,\ m=3,\ \sigma_e^2=1.45^2,$$

$$\begin{aligned}\sigma_o'^2&=\frac{(\bar{x}_{\max}-\bar{x}_{\min})}{d_2{}^*}\\&=(216.9-216.3)/1.41\\&=0.43.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_o^2&=\sigma_o'^2-\frac{\sigma_e^2}{nm}\\&=0.43-1.45^2/(5\times 3)\\&=0.29,\end{aligned}$$

$$\sigma_o=0.54.$$

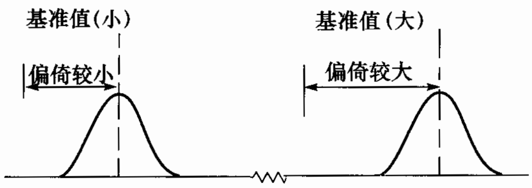
最后算得该测量过程（即量具）的再现性

$$AV=5.15\times 0.54=2.78.$$

线性(linearity)　一种测量术语. 是对测量系统的一项合理要求. 它要求在量具量程内，偏倚 y 是基准值 x 的线性函数. 这项要求在量程较低部分（基准值小），偏倚要小；在量程较高部分（基准值大），偏倚允许大一些，且按线性增长（见下图）. 线性还是评价测量系统的一个指数，它定义为该直线斜率 b 的绝对值与过程变差 PV 的乘积，即

$$\text{线性}=|b|\times PV$$

它是愈小愈好的指标，减少过程变差或压低直线斜率都可使线性减少.



测量系统的重复性与再现性的变差(measurement system variation for repeatability and reproducibility) 统计质量管理的基本概念之一. 是评价测量系统好坏的重要指标. 简记为 $R\&R$. 它愈小愈好,其计算公式为

$$R\&R = \sqrt{(EV)^2 + (AV)^2} = 5.15\sqrt{\sigma_e{}^2 + \sigma_o{}^2} = 5.15\sigma_m,$$

其中 EV 和 AV 分别为重复性和再现性,σ_o^2 为服从正态分布的测量值的方差,σ_e^2 为重复测量的方差,

$$\sigma_m{}^2 = \sigma_e{}^2 + \sigma_o{}^2$$

称为重复性与再现性的方差,σ_m 称为重复性与再现性的标准差.

重复性和再现性的变差在总变差中所占的百分比(简记为 $\%R\&R$)愈小愈好,用它来评价测量系统(或量具)是否可以使用. 它的计算公式为

$$\%R\&R = \frac{R\&R}{TV} \times 100\% = \frac{\sigma_m}{\sigma_T} \times 100\% = \frac{\sqrt{\sigma_e{}^2 + \sigma_o{}^2}}{\sqrt{\sigma_p{}^2 + \sigma_e{}^2 + \sigma_o{}^2}} \times 100\%.$$

其中

$$R\&R = 5.15\sigma_m$$

是测量系统重复性与再现性的变差,

$$\sigma_m{}^2 = \sigma_e{}^2 + \sigma_o{}^2$$

是重复性与再现性的方差,

$$TV = 5.15\sigma_T$$

是测量系统的总变差,

$$\sigma_T{}^2 = \sigma_p{}^2 + \sigma_e{}^2 + \sigma_o{}^2$$

是测量系统的总方差,$\sigma_p{}^2$ 是产品间的方差,例如,一测量员用一量具分别对 n 个零件同一质量特性 x 各测量一次,共得 n 个测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 零件间的标准差

$$\sigma_p = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{d_2},$$

当 n 较大时可用样本方差计算 $\sigma_p{}^2$,即

$$\sigma_p{}^2 = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\bar{x}$ 为样本均值,d_2 为将极差 R 折算为 σ_p 的调整量.

全数检验(total inspection) 一种检验方法. 是对每件产品逐一检验,以判断其是否合格的一种检验方法. 这种方法只在少数特定场合下使用. 如批量小、单价高的产品,稍有一点缺陷就会带来巨大损失的产品,以及量具和各种测量仪表等.

抽样检验(sampling inspection) 一种检验方法. 用统计方法从一产品批(参见“产品批”)中随机抽取部分样品进行检查,从检查结果判定是接收还是拒收该产品批的一种检验方法. 抽样检验常按事先设计好的抽样检验方案进行. 抽样检验方案有多种,按单位产品质量特性的不同,抽样检验方案可分为计数型与计量型两大类;每类中又可按抽样次数分为一次抽样检验方案、二次抽样检验方案、多次抽样检验方案和序贯抽样检验方案等. 无论哪种抽样检验方案的制订,都要根据生产方与使用方的要求,用统计方法规定样本量和确定接收准则.

单位产品(unit product) 抽样检验的基本概念之一. 它是为实施抽样检验的需要而划分的产品的基本单位. 有的单位产品自然形成,如一块集成电路、一台空调器、一双皮鞋等;有的单位产品要人们按一定的长度、面积、重量等去划分才能形成. 如一升水、一千克小麦、一米光纤等.

单位产品质量特性(quality characteristic of unit product) 抽样检验的基本概念之一. 是用来表示单位产品质量的指标,如一台空调器,从开始使用到第一次需要维修的时间,一升自来水中大肠干菌的个数等. 单位产品质量特性可分为二类:计量的和计数的. 可用仪器测量并用实数表示的质量特性称为计量质量特性,如机械轴的直径、灯泡的寿命等. 可用非负整数表示的质量特性称为计点的,如一匹布上的疵点数,一铸件上的沙眼数等;还有一些单位产品只分合格与不合格,这样的质量特性称为计件的,计点的与计件的质量特性统称为计数质量特性.

产品批(lot of units) 抽样检验的基本概念之一. 是为实施抽样检验需要而汇总起来的若干单位产品的全体. 通常可按生产和流通过程自然形成. 如一个投料批、一船小麦,一工人一天生产的产品等. 一般还要求同批产品是在生产稳定条件下由同型号同规格产品组成.

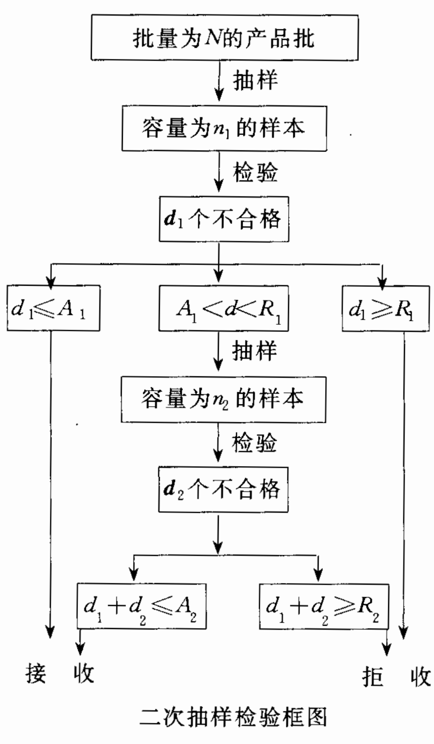
批量(size of lot) 抽样检验的基本概念之一. 是一产品批中所含单位产品的个数. 常用大写字母 N 表示.

批的质量(quality of lot) 抽样检验的基本概念之一. 是衡量一产品批好坏的质量特性. 对不同的单位产品的质量特性,应选用不同指标表示其批的质量. 对计件的质量特性,常用“不合格品率”;对计

点的质量特性，常用“每百单位产品中的平均缺陷数”；对计量的质量特性，常用其均值、标准差或变异系数.

一次抽样检验方案(single sampling inspection plans)　一种最简单、最常用的抽样检验方案. 以计数型一次抽样检验方案为例，它由三个数(N,n,c)确定，其含义是：从批量为N的一个产品批中随机抽取容量为n的样本，对样品中的产品逐一检验，若其中不合格品数d不超过合格判定数c，则接收该产品批；若$d>c$，则拒收该产品批. 其操作过程可利用合格判定数c，当$d\leqslant c$时接收；当$d\geqslant c+1$拒绝.

二次抽样检验方案(double sampling inspection plans)　一种抽样检验方案. 它可能需要从一产品批中随机抽取两个样本来推断该产品批是否可接收. 以计数型二次抽样检验方案为例，它由7个数$(N,n_1,n_2,A_1,A_2,R_1,R_2)$确定，其含义是：从批量为$N$的产品批中先抽取一个样本，其样品量为$n_1$，若不合格品数$d_1\leqslant A_1$，则接收该产品批；若$d_1\geqslant R_1$，则拒收该产品批；若$A_1<d_1<R_1$，则不作判断，继续抽取容量为$n_2$的第二个样本，若两个样本中的不合格品的累计数$d_1+d_2\leqslant A_2$，则接收该产品批；若$d_1+d_2\geqslant R_2$，则拒收该产品批. 一般常有$R_2=A_2+1$. 该二次抽样检验方案的操作过程见框图.



二次抽样检验框图

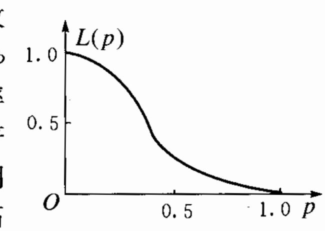
多次抽样检验方案(multiple-sampling inspection plans)　二次抽样检验方案的推广. 国家标准GB2828－87《逐批检查计数抽样程序及抽样表》中含有计数型五次抽样检验方案. 它可能需要从一产品批中抽取五个样本来推断该产品批是否可以接受. 它由如下16个数$(N,n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,R_1,R_2,R_3,R_4,R_5)$确定，其中$N$是批量，$n_i,A_i,R_i$分别是第$i$抽取的样本容量、合格判定数、不合格判定数，$i=1,2,\cdots,5$. 其操作如同二次抽样检验方案. 当前四次抽样检验结果尚不能做出判断时，即$A_4<d_1+d_2+d_3+d_4<R_4$时，则需抽取容量为n_5的第五个样本. 若其中不合格品数d_5与前四个样本的不合格品数之和：$d_1+d_2+d_3+d_4+d_5\leqslant A_5$时，则接收该产品批；若$d_1+d_2+d_3+d_4+d_5\geqslant R_5$时，则拒收该产品批，其中$R_5=A_5+1$.

接收概率(probability of acceptance)　抽样检验的基本概念之一. 它是根据给定抽样检验方案判定一产品批可以接收的概率. 不同的抽样检验方案，其接收概率的表达式是不同的，如计数型一次抽样检验方案(N,n,c)的接收概率$L(p)$可用超几何分布算得

$$L(p)=P(X\leqslant c)=\sum_{d=0}^{c}\binom{Np}{d}\binom{N(1-p)}{n-d}\Big/\binom{N}{n},$$

其中p为一产品批中的不合格品率，X是容量为n的样本中不合格品数，接收概率$L(p)$是不合格品率p的函数，对给定的批量N和厂方与用户要求，可由$L(p)$定出需抽检的样本量n和合格判定数c，对不同的一次抽样检验方案，亦可用此接收概率比较其好坏，故接收概率亦称为抽样特性函数或操作特性函数.

表征接收概率(抽样特性函数)的曲线，称为抽样特性曲线，亦称OC曲线. 以计数型一次抽样检验方案的接收概率$L(p)$为例，它是在区间$[0,1]$上的下降曲线，p愈小接收概率$L(p)$愈大，随着p的逐渐增加，接收概率$L(p)$愈来愈小. 这是符合厂方与用户双方期望的，大家都希望以高概率接收高质量(其p小)的产品批，同时又以小概率接收低质量(其p大)的产品批. 一般地，OC曲线的中段愈陡，相应的抽样检验方案愈灵敏，也就愈好.



计数型一次抽样检验方案曲线

抽样特性曲线(operating characteristic curve)　见“接收概率”.

OC曲线(operation characteristic curve)　见“接收概率”.

平均抽检量(average amount of inspection)　抽样检验的基本概念之一. 是执行一个抽样检验方案所需要抽取产品的平均个数. 它是衡量一个抽样

检验方案好坏的一个重要指标，平均抽检量愈小就愈能节省人力和物力. 不同的抽样检验方案有不同的平均抽检量的计算公式. 例如，对计数型二次抽样检验方案

$$(N,n_1,n_2,A_1,A_2,R_1,R_2),$$

其平均抽检量为

$$n_1[P(d_1\leqslant A_1)+P(d_1\geqslant R_1)] + (n_1+n_2)P(A_1<d_1<R_1).$$

一般地，二次抽样检验方案的平均抽检量要比一次抽样检验方案的抽检量要少.

厂方风险(producer's risk)　抽样检验的基本概念之一. 是犯第一类错误(弃真)的概率. 即在抽样检验中把合格批当做不合格批而拒收的概率，记为 α. 例如，规定一产品批的不合格品率 $p\leqslant 1\%$ 时为合格批. 现有一产品批由 400 件组成，其中有 4 件不合格品，应为合格批. 但按一次抽样检验方案

$$(N,n,c)=(400,30,1)$$

抽取 30 件进行检验时，发现其中有 2 件不合格品，按该方案规定，应拒收该产品批，这就是犯了第一类错误，把合格批当做不合格批而拒收了，从而厂方吃亏了. 为了不使厂方经常吃亏，在制定抽样检验方案时，厂方风险 α 不宜过大，常取 0.01 到0.10之间的某个数.

用户风险(consumer's risk)　抽样检验的基本概念之一. 是犯第二类错误的概率. 即在抽样检验中把不合格批当做合格批而接收的概率，记为 β. 例如，规定一产品批的不合格品率 $p\geqslant 0.05$ 时为不合格批，现有一产品批由 400 件组成，其中有 25 件不合格品，应为不合格批，但按一次抽样检验方案(400,30,1)抽取 30 件进行检验时，发现只有 1 件不合格品，按该方案规定，应接收该产品批，这就犯了第二类错误，把不合格批当做合格批而接收了. 从而用户吃亏了. 为不使用户经常吃亏，在制定抽样检验方案时，用户风险 β 一般不宜过大，常取 0.05 到 0.20之间的某个数.

合格质量水平(acceptable quality level)　简称 AQL. 抽样检验的基本概念之一. 以计数型抽样检验为例，厂方可接受的不合格品率的上限值 p_0 就是 AQL. 当不合格品率

$$p\leqslant \mathrm{AQL}$$

时，认为是高质量的产品批，应以高概率接收该产品批.

过程平均不合格品率(process average rate of defectives)　简称过程平均. 抽样检验的基本概念之一. 它定义为

$$\bar{p}=\frac{d_1+d_2+\cdots+d_k}{n_1+n_2+\cdots+n_k}$$

其中 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 为从连续生产的 k 个产品批中依次随机抽取的 k 个样本的容量，$d_1,d_2,\cdots,d_k$ 分别为此 k 个样本经检验后的不合格品数. 该过程平均表示一段时间的连续生产中不合格品率的估计值. 若此种过程平均累积了若干个，譬如 m 个，记为 $\bar{p}_1,\bar{p}_2,\cdots,\bar{p}_m$，且它们都是生产稳定下的记录，则其中的最大值

$$\max\{\bar{p}_1,\bar{p}_2,\cdots,\bar{p}_m\}$$

可作为 AQL 的估计值.

过程平均(process average)　即"过程平均不合格品率".

极限质量水平(limiting quality level)　简称 LQL. 抽样检验的基本概念之一. 以计数型抽样检验为例，用户不能接受的不合格品率的下限值 p_1 就是 LQL. 当不合格品率

$$p\geqslant \mathrm{LQL}$$

时，认为是低质量的产品批，应以高概率拒收该产品批.

标准型抽样检验方案(standard sampling inspection plans)　一种抽样检验方案. 是一种两类风险(厂方风险和用户风险)都得到控制的抽样检验方案. 如在计数型抽样检验方案的制定中，双方(厂方与用户)共同商定如下四个参数：厂方风险 α，用户风险 β，合格质量水平 p_0(又称 AQL)，极限质量水平 p_1($p_0<p_1$)，根据这四个参数，利用接收概率 $L(p)$可列出如下两个不等式

$$\begin{cases}L(p_0)\geqslant 1-\alpha\\ L(p_0)\leqslant \beta\end{cases}$$

由此解出样本量 n 和合格判定数 c，即得标准型一次抽样检验方案(N,n,c)，其中批量 N 根据实际情况确定.

AQL 方案(acceptable quality level plans)　一种抽样检验方案. 是只根据厂方风险 α 和合格质量水平 p_0 而制定的抽样检验方案，是主要考虑厂方利益的方案. 用户接收此种方案的前提是：厂方有连续稳定生产且能满足用户要求的历史. 在此前提下，用户为减少检验工作和费用，而同意采用 AQL 方案. 在选用 AQL 方案时，常配一个加严抽样方案，一旦发现产品质量变坏或生产不稳定时，立即改用加严抽样方案来保护用户利益.

LTPD 方案(lot tolerance percent defective plans)　一种抽样检验方案. 是只根据用户风险 β 和极限质量水平 p_1 而制定的抽样检验方案，是主要考虑用户利益的方案. 主要用于小批量试生产和单独提交的少数批的抽样检验方案.

调整型抽样检验方案(sampling inspection

plans with adjustment） 一种抽样检验方案.是一种随着产品批质量变化可对抽样检验方案进行调整(加严或放宽)的抽样检验方案.它通常由三个AQL方案和一套转换规则组成,具体组成方式是：

1.正常AQL方案.是当过程平均接近合格质量水平(AQL)时采用的抽检方案.若连续五批或不足五批中有两批不合格,则从正常转到加严;若下列条件同时满足:连续十批合格且累计不合格品数不超过规定的限制数、生产正常、主管质量部门同意时,则由正常转到放宽.

2.加严AQL方案.是当过程平均显著劣于AQL时采用的抽检方案.若连续五批合格,则从加严转到正常;若累计五批不合格,则从加严退出本方案.

3.放宽AQL方案.是当过程平均显著优于AQL时采用的抽检方案.当有一批放宽检查不合格、或生产不正常、或主管质量部门认为有必要回到正常检验时,则从放宽转到正常.

挑选型抽样检验方案(sampling inspection plans with defectives replaced by nondefectives) 一种抽样检验方案.是一种附加执行条款的抽样检验方案.所附加的执行条款有如下两条：

1.当按抽样检验方案判为合格批时,要将抽检样本中的不合格品换成合格品后才能出厂.

2.当按抽样检验方案判为不合格批时,要将该批中产品逐一进行检验,并以合格品替换不合格品后才能出厂.

这种附加执行条款的抽样检验方案适用于非破坏性检验的产品批.

序贯抽样检验方案(sequential sampling inspection plans) 一种抽样检验方案.是根据似然比原则制定的一种连续抽样检验方案.

当检验是破坏性的、或检验代价较大、或希望抽检量尽量减少时,常采用这种方案.它事先不规定抽取样本量,在抽取一个产品后一定要对产品批做出下列三个判断之一：

1.接收.

2.拒收.

3.再抽一个产品.

当做出前两个判断时则抽检终止.否则抽检就继续下去.直至得出接收或拒收的判断为止.理论研究表明,序贯抽检方案的平均抽检量最小.需要抽检量很大的概率是很微小的,几乎是不可能的.计数型序贯抽样检验方案的制定,需要双方商定四个参数值:厂方风险 α,用户风险 β,合格质量水平 p_o,极限质量水平 p_1.据此,先计算两个界限：

$$A=\frac{\beta}{1-\alpha},\ B=\frac{1-\beta}{\alpha}.$$

设在第 n 次抽检时累计检出的不合格品数为 d_n,计算似然比

$$L_n=\frac{p_1^{d_n}(1-p_1)^{n-d_n}}{p_o^{d_n}(1-p_o)^{n-d_n}}.$$

当 $L_n\leqslant A$ 时,判该产品批合格;当 $L_n\geqslant B$ 时,判该产品批不合格;当

$$A<L_n<B$$

时,不作判断,继续抽检一个产品.以上计算和抽样从 $n=1$ 开始进行,不断循环,直到做出接收或拒收的结论为止.

重复(repetition) 试验设计的基本手段之一.在相同条件下超过一次的试验称为重复.试验总是有误差的,重复就可以把试验误差显露出来.试验误差是由许多不可控因子的变化引起的,常用样本方差 s^2 或样本标准差 s 来度量：

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,$$

$$s=\sqrt{s^2}.$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 次重复的试验结果,$\bar{x}$ 是其算术平均数.有了试验误差,就可以正确评价各因子效用的大小.重复次数愈多,试验误差就会估计得愈准确,从而可增加数据分析结果的可信度.但也不能只追求精度,还要考虑到重复带来的费用增加和时间延长.试验设计要使两者取得平衡.

随机化(randomization) 试验设计的基本手段之一.若从一个包含自然数1至 n 的总体中,接连不放回地一个一个地取出,直至抽完为止,这一列数称为"按随机顺序"抽取的;若前 n 个自然数就与 n 次试验相联系,并把 n 个试验"按随机顺序"重新排列,这个顺序被称为随机化了的;上述过程就称为随机化.试验实施随机化,可保证各试验结果的相互独立性,可抵消不可控因子对试验结果的部分影响,还可减少没有考虑到的因子对试验结果的影响.

三次设计(three steps design) 统计质量管理的基本概念之一.是一个产品设计所经历的三个阶段:系统设计,参数设计和容差设计.这是日本田口玄一提出的产品设计的思路.其核心是在传统的产品设计中增加了参数设计.这一思路已被愈来愈多国家的工程师和统计学家接受.并在产品设计中产生好的效果.

系统设计(system design) 统计质量管理的基本概念之一.是产品设计的第一阶段.它是专业人员利用专业知识、技术和经验对产品进行的工程设计,使得能依此而制造出符合顾客要求的产品.

参数设计(parameter design)　统计质量管理的基本概念之一. 它是产品设计的第二阶段. 它是对产品系统设计中的各种参数选择的最佳搭配,从而使产品的质量特性波动小,且在目标值周围波动,提高产品的固有质量,故有人把参数设计又称为稳健设计. 其实,参数设计,既包含稳健设计,还包含灵敏度分析. 完成这一阶段设计,主要使用各种试验设计(DOE)等统计方法.

容差设计(tolerance design)　统计质量管理的基本概念之一. 它是产品设计的第三阶段. 它是在参数设计基础上确定产品中各元件、部件的公差,并在波动允许范围内尽量选用二级品或三级品,从而使产品的制造成本降低. 完成这一阶段设计主要用回归分析和正交多项式等统计方法.

稳健设计(robustness design)　统计质量管理的基本概念之一. 稳建设计致力于减少产品性能波动的研究与开发. 它的主要任务有如下两项:

1. 如何有效率地降低顾客手中的产品性能波动.

2. 如何保证实验室里所得到的最佳条件到生产线上或顾客手中仍然是最佳的.

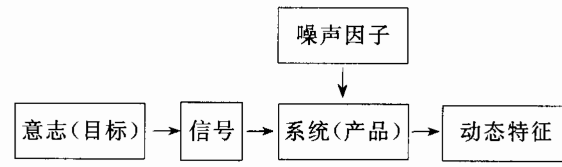
完成稳健设计主要使用正交试验法和内外表法等统计方法.

望目特性(nominal-the-type characteristic)　统计质量管理术语. 是愈接近目标值$m(0<m<\infty)$愈好的质量特性. 其中目标值 m 是产品规格中指定的值. 如瓷砖的尺寸,稳压电源的输出电压等都是各有目标值 m 的望目特性.

望小特性(smaller-the-better type characteristic)　统计质量管理术语. 它是愈接近于零愈好的质量特性. 如橡胶轮胎的磨损量、药品的毒性、测量误差等都是望小特性.

望大特性(large-the-better type characteristic)　统计质量管理术语. 是愈大愈好的质量特性. 如材料的强度、弹簧的寿命等都是望大特性.

动态特性(dynamic characteristic)　统计质量管理术语. 它是目标值可随着需要而变化的望目特性. 如空气调节器(空调器)的温度是动态特性,因为当人们希望房间温度为 25℃时,给它一个信号,空调器就会在 25℃左右波动;而当人们希望房间温度为 20℃时,再发一个信号,空调器也会在 20℃左右波动,它是会随着人们需要而变化的望目特性. 类似地,汽车的速度、方向盘的转向角、机床切削的深度、轧钢机轧制钢板的厚度等都是动态特性. 假如把产品看做一个系统,那么按人们意志发出的信号就是该系统的输入特性,而该系统的输出特性就是动态特性,这可从下图上直观地看出.



动态特征示意图

可控因子(control factor)　统计质量管理的基本概念之一. 它是在生产和试验中水平可以指定并加以挑选的因子,即水平可以被人们控制的因子. 如化工生产中的反应时间、反应温度,电镀液的浓度,电路中的电阻器和电容器的电阻和电容等都是可控因子.

试验中考察可控因子的目的在于寻找其最佳水平搭配,使产品的质量特性既接近目标值,又波动最小,即使质量特性具有稳健性.

噪声因子(noise factor)　统计质量管理的基本概念之一. 它是人们不能控制、或很难控制、或花费昂贵才能控制的因子. 它是引起质量特性波动的"元凶",或者说是引起试验误差的源泉. 一项好的产品设计都应具有抗噪声因子的能力,此种能力愈大,设计就愈完善. 因为有些噪声因子可能人们至今还不知道,所以要罗列一切噪声因子是困难的,但试验者要尽量列出噪声因子,并运用工程知识和经验去判断其中哪些是重要的,哪些可用试验条件去模拟的,以便考察它们对质量特性影响的大小. 为罗列噪声因子,可从外部噪声、内部噪声和产品间噪声等三方面去考察.

由产品之外引发的一类噪声称为外部噪声. 如产品生产时的环境温度、湿度、灰尘、磁场等环境条件都是外部噪声;又如小汽车方向盘的设计要适应老人与年轻人、男人与女人,这时购买者就是方向盘设计的一个外部噪声因子;彩色电视机的清晰度与输入电压大小密切相关,这时民宅的交流电压对彩电设计就是一个外部噪声因子.

由产品内部产生的一类噪声称为内部噪声. 如贮存时间过长,材料变质、元件老化都是产品的内部噪声;又如产品长时间使用,一些零件发生磨损也是内部噪声,因为这些都会引起产品质量特性的波动.

由产品间的差异引发的一类噪声称为产品间噪声. 如在一项电路设计中需要 100Ω 的电阻,而从市场买来的标称值为 100Ω 的电阻未必恰好是 100Ω,可能是 99Ω,也可能是 102Ω,其间差值对电路输出值会有影响,此种影响是不可控的,所以零部件、元器件的实际值与标称值间的差异是产品间的噪声因子.

把若干个噪声因子综合成一个因子，以图减少参数设计中的试验次数，称此为综合噪声因子．构造综合噪声因子的关键在于要知道被综合的噪声 z 对产品质量特性 y 影响的方向，即当噪声因子水平变化时，y 是在增加还是还是在减少．这一点常常凭着工程知识和实践经验是可以判断的．假如能做到这一点，那么立即可得出综合噪声因子的两个水平：N_1——负侧最坏水平，它是使质量特性 y 取最小值的各个噪声因子的水平的组合；N_2——正侧最坏水平，它是使质量特性 y 取最大值的各个噪声因子的水平的组合．这就形成一个二水平的综合噪声因子．假如被综合的噪声因子都是三水平的，那么各取其中间水平组成一个新水平 N_o，插在上述 N_1 与 N_2 之间，形成一个三水平 (N_1, N_o, N_2) 的综合噪声因子．假如仅有部分噪声因子可以参加综合，那么把未被综合的噪声因子与综合噪声因子重新设计一张外表（参见“内外表设计”）．

信号因子（signal factor）　统计质量管理的基本概念之一．指能指挥动态特性按人们意志去变化的因子．信号因子总是伴随着动态特性而出现的．至于选什么因子作为信号因子，那是设计人员的任务．但他要使信号因子的水平改变应该是易于操作，并且使信号因子对动态特性的影响尽可能是线性关系，用以减少动态特性的波动．

信号因子的例子也常见，钢板的厚度是通过轧钢机的压力来实现的，轧钢机的压力就是信号因子，压力大小就是信号因子的水平；汽车的速度可用改变加速器的位级来实现，加速器就是信号因子，其位级就是该信号因子的水平．

标示因子（mark factor）　统计质量管理的基本概念之一．它是使用时不能挑选和控制、但试验中可指定其水平的因子．如一纺织厂用的棉花来自三个不同产地，则可把棉花产地看做一个标示因子．人们考察这个标示因子的目的不在于选取最好的棉花产地，而是探索此标示因子与可控因子（操作条件）之间有无交互作用．假如没有交互作用，可能只要选择一种操作条件就可适应各个产地的棉花；假如有交互作用，那可能需对不同产地的棉花制定不同的操作条件才能奏效．类似地，设备间的差别、操作人员间的差别、车床转速之间的差别等都可当做标示因子去进行考察．

信噪比（signal-noise ratio）　亦称 SN 比．统计质量管理的基本概念之一．它是在参数设计中用来度量质量特性波动大小的一种指标．它来源于信号传输中的信噪比．在信号传输中，信噪比是定义为信号的功率与噪声的功率之比的（常用）对数，再乘以10，即

$$\text{SN 比} = 10\lg\frac{\text{信号的功率}}{\text{噪声的功率}}.$$

它的单位是分贝(db)．在参数设计中，对不同的质量特性，信噪比有不同的形式．如在望目特性场合，可把望目特性 y 的均值的平方 $(Ey)^2=\mu^2$ 看做信号功率，把望目特性 y 的方差 $V_{ar}(y)=\sigma^2$ 看做噪声功率，当望目特性 y 有 n 个观察值时，μ^2 与 σ^2 分别用其无偏估计代替，可得信噪比的估计值，记为 η：

$$\eta = 10\lg\frac{\bar{y}^2-\hat{\sigma}^2/n}{\hat{\sigma}^2}\quad(\text{db}),$$

其中

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2.$$

在望小特性场合，SN 比的估计量为

$$\eta=-10\lg\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\quad(\text{db}),$$

在望大特性场合，SN 比的估计量为

$$\eta=-10\lg\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i^2}\right)\quad(\text{db}).$$

无论在什么场合，信噪比愈大，质量特性的波动愈小．

灵敏度分析（sensitivity analysis）　统计质量管理的基本概念之一．它是在参数设计中保持信噪比基本不变的情况下，使质量特性 y 向目标值 m 逐渐靠近所作的统计分析．假如在稳健性分析中已使 y 与 m 的相距很近，已达到满意的程度，则灵敏度分析可略去．灵敏度分析能成功的关键有两点：

1. 选择灵敏度指数．目前用得最多的灵敏度指数有两种，一是信噪比的分子部分

$$\bar{y}^2-\frac{\hat{\sigma}^2}{n};$$

另一个是 $\bar{y}$.

2. 在可控因子中选择调节因子，它的水平变化不使信噪比有明显改变，但可使灵敏度指数有显著变化．

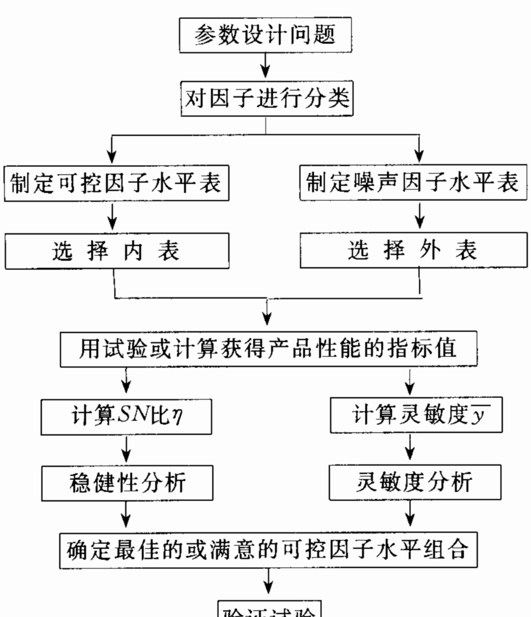
内外表设计（orthogonal design by inside and outside array）　亦称直积法．一种试验设计．它是为考察一类因子对另一类因子的影响情况，用两张正交表垂直排列的一种试验设计．

参数设计问题中恰有两类因子：可控因子类和噪声因子类．若把它们各放入一张正交表上，诸可控因子所在的正交表亦称为内表（inside array）；噪声因子所在的正交表亦称为外表（outside array），然后把它们垂直排列形成直积表．下面是四个三水平

的可控因子(A,B,C,D)和三个二水平噪声因子(M,N,P)的直积表.

内表试验号 i					外表试验号 j		1	2	3	4		
					P	3	1	2	2	1		
	A	B	C	D	N	2	1	2	1	2		
	1	2	3	4	M	1	1	1	2	2	η_1	$\bar{y}$
1	1	1	1	1			y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	η_1	$\bar{y}_1$
2	1	2	2	2			y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	η_2	$\bar{y}_2$
3	1	3	3	3			y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	η_3	$\bar{y}_3$
4	2	1	2	3			y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}	η_4	$\bar{y}_4$
5	2	2	3	1			y_{51}	y_{52}	y_{53}	y_{54}	η_5	$\bar{y}_5$
6	2	3	1	2			y_{61}	y_{62}	y_{63}	y_{64}	η_6	$\bar{y}_6$
7	3	1	3	2			y_{71}	y_{72}	y_{73}	y_{74}	η_7	$\bar{y}_7$
8	3	2	1	3			y_{81}	y_{82}	y_{83}	y_{84}	η_8	$\bar{y}_8$
9	3	3	2	1			y_{91}	y_{92}	y_{93}	y_{94}	η_9	$\bar{y}_9$

表中 y_{ij} 是内表第 i 行与外表第 j 列结合所做的试验结果.以每一行数据(如第一行 $y_{11},y_{12},y_{13},y_{14}$)计算信噪比 η 和灵敏度 $\bar{y}$,再对 η 和 $\bar{y}$ 作统计分析,从中确定既接近目标值 m 又使波动最小的可控因子的最佳水平组合.当然,对最后结果作验证试验是不可少的.上述操作步骤见框图.



内外表设计与统计分析框图

直积法(direct product method)　即"内外表设计".

抽 样 技 术

抽样技术(sampling techniques)　统计学的一个分支学科.研究抽样调查中的抽样方法及总体目标量估计方法(包括估计量的精度)的一门技术.一般地,抽样方法可以分为两类,概率抽样与非概率抽样.估计方法一般有简单估计、比估计、回归估计等.

抽样调查(sampling survey)　一种调查方法.是按照一定的程序,从全体调查对象(总体)中抽取一部分(样本)进行调查,根据样本数据估计总体的目标量.一项完整的抽样调查还需包括抽样误差的估计.

全面调查(census)　亦称普查.一种调查方法.就是将全部调查对象(总体)中每一个对象(个体)都进行的调查.

普查(census)　即"全面调查".

调查目标量(survey characteristics)　调查者所关心的总体参数.它包括总体总和、总体均值、总体中具有某种特定特征的个体总数或它们在总体中所占的比例、总体中两个不同指标的总和或均值的比值、总体分位数.

抽样单元(sampling unit)　抽样技术的基本概念之一.将总体划分成互不重叠且又穷尽的若干部分,每个部分称为一个抽样单元.抽样单元不一定是个体.抽样单元可以是自然形成的,也可以是人为划分的.抽样单元又可以有大小之分.一个大的抽样单元(初级单元或一级单元)可以分成若干个较小的单元(次级单元或二级单元),次级单元又可以分为更小的三级单元、四级单元等.最小的抽样单元称为基本抽样单元.

基本抽样单元(basic sampling unit)　见"抽样单元".

抽样框(sampling frame)　抽样技术的基本概念之一.记录或表明总体所包含的全部(初级)单元或一个较大的抽样单元所包含的全部次一级单元的名册、清单或地图.在抽样框中,每个抽样单元都被编上号码.

抽样误差(sampling error)　一种统计误差.指抽样调查中,由于用样本数据估计总体参数所引起的误差.抽样误差愈小,估计量的精度就愈高.若 $\hat{\theta}$ 为通过样本获得的关于总体某个参数 θ 的估计,则抽样误差一般用 $\hat{\theta}$ 的均方误差

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

表示,其中 E 表示数学期望.若 $E(\hat{\theta})=\theta$,则

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta})=V(\hat{\theta}),$$

其中 V 表示方差.

可用估计量(feasible estimator)　一种估计量.如果一个估计量的偏倚及均方误差都随着样本量 n 的增大而减小,而且偏倚比均方误差的平方根小得更快,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|E(\hat{\theta}-\theta)|}{\sqrt{\mathrm{MSE}(\hat{\theta})}}=0.$$

则称这个估计量是可用的.

概率抽样(probability sampling) 亦称随机抽样.一种抽样方法.它是从总体中按一定概率获取样本的方法.概率抽样能够保证样本的代表性,避免人为的误差,它还可以对由于抽样造成的误差进行估计,因此可获得估计量的精度.概率抽样一般包括简单随机抽样、分层抽样、整群抽样、多阶抽样、二重抽样、系统抽样等.

随机抽样(random sampling) 即"概率抽样".

等概率抽样(sampling with equal probabilities) 一种抽样方法.它是总体中的每个个体(或尚未进入样本的个体)被抽中的概率相等的抽样方法.

简单随机抽样(simple random sampling) 亦称单纯随机抽样.一种抽样方法.若从总体的 N 个单元中一次抽取 n 个单元,使所有可能的

$$\binom{N}{n}$$

个样本,每个被抽到的概率都等于

$$1\Big/\binom{N}{n},$$

这种抽样称为简单随机抽样.

单纯随机抽样(simple random sampling) 即"简单随机抽样".

简单随机样本(simple random sample) 抽样技术的基本概念之一.它是按简单随机抽样得到的样本.

设计效应(design effect) 衡量一个复杂抽样设计效率的量.它是从使用该设计获得的样本对总体目标量估计的方差,与按相同样本量的简单随机样本获得的总体目标量估计的方差之比.设计效应常用 doff 表示,它的数值愈小,抽样效率愈高.设计效应还可用来估计按此复杂抽样对一定精度所需的样本量.

层(stratum sampling) 抽样技术的基本概念之一.把大小为 N 的总体分成 L 个不相重叠的子总体,每个子总体称为层.若记层的大小分别为

$$N_1, N_2, \cdots, N_L$$

$$\left(N_h \text{ 皆已知}, \sum_{h=1}^{L} N_h = N,\right)$$

每层大小 N_h 对总体大小 N 之比

$$n_h = \frac{N_n}{N}$$

称为层权.

层权(weight of stratum) 见"层".

分层抽样(stratified sampling) 亦称类型抽样.一种抽样方法.它是从每层中独立地进行抽样的抽样方法.

类型抽样(stratified sampling) 即"分层抽样".

分层样本(stratified sample) 抽样技术的基本概念之一.它是分层抽样得到的一种样本.

分层随机抽样(stratified random sampling) 一种抽样方法.指每层都是简单随机抽样的分层抽样.

分层随机样本(stratified random sample) 一种随机样本.它是分层随机抽样所得到的一种样本.

比例配置(proportional allocation) 样本量的一种分配方案.在分层抽样中,每层的样本量 n_h 都与层的大小 N_n 成比例的样本量的分配方案.其中 n_h 满足

$$\frac{n_h}{n} = \frac{N_h}{N},$$

n 为样本量.

最优配置(optimum allocation) 样本量的一种分配方法.分层随机抽样中,在给定费用下,使估计量的方差 V 达到最小;或在给定精度要求(如给定方差 V)下,使总费用最小的各层样本量 n_h 的分配称为最优配置.假定费用函数为线性费用函数

$$C = C_0 + \sum_{h=1}^{l} C_h n_h,$$

其中 C_0 为基本费用;C_h 为第 h 层中调查一个单元的平均费用,则最优配置为

$$\frac{n_h}{n} = \frac{W_h S_h \Big/ \sqrt{C_h}}{\sum\limits_K W_k S_k \Big/ \sqrt{C_k}},$$

其中 W_h 是层权(参见"层权"),S_h 为各层的标准差.

若 $C_h = C$ $(h=1,2,\cdots,l)$,则最优配置为

$$\frac{n_h}{n} = \frac{W_h S_h}{\sum\limits_k W_k S_k},$$

这时的最优配置称为奈曼配置.

奈曼分配(Neyman allocation) 一种最优配置.每层中单位抽样费用相等的最优配置(参见"最优配置").

事后分层(post stratification) 一种分层方法.它是先用简单随机抽样从总体中抽取一个样本.然后再对样本中的单元按某些特征进行分层.

二相抽样(two-phase sampling) 亦称二重抽样.一种抽样方法.在总体中先抽取一个较大的样本称为第一相样本,以获取某些辅助信息,在此基础上再在第一样本中抽取第二相样本.

例如在分层抽样时,当层数 w_h 未知时,可先从总体抽取一个较大的简单随机样本,对这个样本只需区分每个被抽中的单元属于哪一层,从而用以估

计层数.

然后按分层抽样在这个第一相样本中进行再抽样,得第二相样本.这第二相样本需测量单元的指标值,并以此对总体指标量做出估计.

二相抽样常用于:第一相抽样费用相对较低,而根据所获得的辅助信息对估计量精度的提高能足够补偿由于需抽第一相样本而造成第二相样本量减少引起的精度降低的情形.

二重抽样(double sampling)　即"二相抽样".

多项抽样(multi-nomial sampling)　一种抽样方法.设总体包含 N 个单元,对其进行 n 次放回抽样,在每次抽样中,抽到第 i 个单元的概率为

$$\sum_{i=1}^{N} Z_i = 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

称这种不等概率抽样为多项抽样.多项抽样中抽到的 n 个单元有可能重复.

PPS 抽样(sampling with probability proportional to size)　一种特殊的多项抽样.是按与单元大小成比例的概率抽样.

不放回抽样(sampling without replacement)　一种抽样方法.它是在逐个抽取个体时,每次被抽到的个体不放回总体中,或整个样本一次同时抽取的抽样方法.

严格的πPS 抽样(strict π PS sampling)　一种抽样方法.它是每个单元的入样概率与其大小严格成比例的不放回抽样.

放回抽样(sampling with replacement)　一种抽样方法.它是在逐个抽取个体时,每次被抽到的个体放回总体中后,再进行下次抽取的抽样方法.

整群抽样(cluster sampling)　亦称集团抽样.一种抽样方法.设总体由 N 个单元(初级单元)组成,第 i 个初级单元又分为 M_i 个小的单元(参见"抽样单元"),称为次级单元或二级单元,从总体中按某种方式抽取 n 个初级单元,观测其中所包含的所有次级单元,这种抽样称为整群抽样.

更确切地说,上述抽样应称为单阶(单级)整群抽样,这里每个初级单元称为"群"(cluster,也译为"集团"),实际抽样是整群进行的,故称为整群抽样.

整群抽样的主要优点是样本集中,从而可大大节省调查费用,缺点是在同样的样本量情形,精度较低.

集团抽样(cluster sampling)　即"整群抽样".

单阶整群抽样(single-stage cluster sampling)　见"整群抽样".

不等概率抽样(sampling with unequal probability)　一种为提高抽样效率的抽样方法.是总体的每个个体(或尚未进入样本的个体)被抽到的概率不相等的抽样方法.例如,最常用的不等概率抽样是入样概率与单元大小 M_i 成比例,简称 PPS 抽样.不等概率抽样分放回与不放回两种.例如,放回的 PPS 抽样是在总体中独立地进行 n 次抽样,每次按

$$z_i = \frac{M_i}{M_0} \left(M_0 = \sum_{i=1}^{N} M_i \right)$$

的概率抽取一个单元,此时,总体总量 Y 的估计用以下汉森-哈韦茨估计:

$$\hat{Y}_{\text{HH}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{z_i}.$$

对于按某种不放回形式抽取的不等概率样本,若 π_i 是第 i 单元进入样本的概率,则 Y 的估计用以下的霍维茨-汤姆森估计

$$\hat{Y}_{\text{TH}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\pi_i}.$$

汉森-哈韦茨估计(Hanson-Harwitz estimate)　见"不等概率抽样".

霍维茨-汤姆森估计(Horvitz-Thompson estimate)　见"不等概率抽样".

多级抽样(multistage sampling)　亦称多阶抽样.一种分阶段抽取样本的方法.第一级抽样是从总体中抽取初级单元,以后每一级抽样是从上一级抽样得到的抽样单元中抽取次一级的抽样单元.由初级单元组成的样本称为初级样本,或一级样本;从初级样本中抽取的由二级抽样单元组成的样本称为二级样本.

在多级抽样的最后一级,从上一级样本中抽取的由最小抽样单元组成的样本称为末级样本.

多阶抽样(multistage sampling)　即"多级抽样".

一级样本(primary sample)　见"多级抽样".

末级样本(final sample)　见"多级抽样".

系统抽样(systematic sampling)　一种抽样方法.将总体中的抽样单元按某种次序排列,在规定的范围内随机抽取一个或一组初始单元,然后按一套规则确定其他样本单元的抽样方法.

周期系统抽样(periodic systematic sampling)　亦称等距抽样.一种系统抽样方法.将总体中的 N 个抽样单元按某种次序排列,编上 1 到 N 的号码,包含 n 个单元的周期系统抽样即是抽取号码为

$$h, h+k, h+2k, \cdots, h+(n-1)k$$

的 n 个单元,其中 k 是最接近 N/n 的一个整数,h 是从 1 到 k 的整数中随机抽取的初始单元的号码.当

$$k = \frac{N}{n}$$

时,周期系统抽样是一个严格的概率抽样.

等距抽样(equal interval sampling)　即"周期系统抽样".

散料抽样(bulk sampling)　一种抽样方法.它是对成批的但不易区分抽样单元的散装材料的抽样.例如,对一批煤、水泥或矿石的抽样.用试样缩分器,等分法等方法取得一个或多个子样本的过程,称为样本缩分;而获得的每个子样本称为细分样本.从较大量的散装材料或连续材料中一次抽取的一定数量的材料称为份样;若干份样的混合样本称为集样;散料抽样中,由从总体中抽取的每个抽样单元采得的样本混合而成的样本称为全样.将集样或全样通过分取、混合、缩分等程序制成测试样本的过程,称为样本制备.

样本制备(sample preparation)　见"散料抽样".

样本缩分(sample division)　见"散料抽样".

细分样本(multiplicate sample)　见"散料抽样".

份样(increment)　见"散料抽样".

集样(aggregated sample)　见"散料抽样".

全样(gross sample)　见"散料抽样".

非抽样误差(non-sampling error)　抽样技术的基本概念之一.它是除抽样误差外,由于各种原因引起的误差.它不仅在概率抽样中存在,而且在非概率抽样、其他非全面调查以至全面调查中都存在.

无回答(non-response)　抽样技术的基本概念之一.它是由于种种原因没有能够对被抽出的样本单元进行计量,从而没有获得有关这些单元的数据.

敏感性问题(sensitive question)　抽样技术研究的问题之一.指调查内容涉及私人机密不愿或不便于公开表态或陈述的问题.

随机化回答(randomized response)　抽样技术的基本方法之一.它是为敏感性问题调查特别设计的技术.其基本特征是被调查者对所调查的问题采取随机回答的方式,避免在没有任何保护的情况下直接回答敏感性问题,从而既对被调查者的隐私和秘密加以保护,而且又能获得所需要的真实资料.

多元统计分析

多元统计分析(multivariate statistical analysis)　简称多元分析.数理统计的一个分支.它是研究多变量总体统计问题的理论和方法.其内容包括一元统计学的许多推广,如参数估计、假设检验、分布理论等;也包括许多实用可行的方法,如回归分析、判别分析、聚类分析、主成分分析(或称主分量分析)、因子分析等.在这些方法中,大多是多变量所特有的.

多元统计分析是一门应用性很强的学科,形成于20世纪初.1928年,维夏特(Wishart,J.)导出了多元正态总体样本协差阵的精确分布.20世纪30年代,英国数学家、生物学家费希尔(Fisher,R. A.)、霍特林(Hotelling,H.)、许宝騄及罗伊(Roy,S. N.)等人作了一系列奠基性的工作,使多元统计在理论上得到迅速发展.后来由于第二次世界大战以及计算条件的限制,多元分析的发展有一段时间停滞不前.

随着电子计算机的发展和普及,20世纪50年代中期以后,多元分析在气象、心理学、古生物学、教育学、医学、地质学等方面得到广泛地应用.近年来,许多统计学家把正态理论推广到更广泛的多元分布类,如椭球等高分布族.从而形成了一个重要的新分支,即所谓广义多元分析.至今,多元分析仍是数理统计中非常活跃的一个分支.

随机向量的数学期望(expectation of the random vector)　亦称均值向量.随机向量的数字表征.随机向量是指多个随机变量的有序数组,如

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_p)^T$$

是 p 维随机向量.随机向量的数学期望是指每一个分量的数学期望所构成的向量.具体表示方法是

$$E\boldsymbol{X}=(Ex_1,Ex_2,\cdots,Ex_p)^T,$$

称 $E\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的数学期望.随机向量的数学期望 $E\boldsymbol{X}$ 是随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的数字表征之一.

均值向量(mean vector)　即"随机向量的数学期望".

随机向量的协方差阵(covariance matrix of random vector)　两个随机向量的所有分量之间的线性关联程度的一种度量.由两个随机向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\\&=\begin{bmatrix}\operatorname{cov}(x_1,y_1)&\operatorname{cov}(x_1,y_2)&\cdots&\operatorname{cov}(x_1,y_m)\\\operatorname{cov}(x_2,y_1)&\operatorname{cov}(x_2,y_2)&\cdots&\operatorname{cov}(x_2,y_m)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\operatorname{cov}(x_n,y_1)&\operatorname{cov}(x_n,y_2)&\cdots&\operatorname{cov}(x_n,y_m)\end{bmatrix}\\&\triangleq\underset{\sim}{\Sigma},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 是 n 维随机向量,$\boldsymbol{Y}$ 是 m 维随机向量,$\underset{\sim}{\Sigma}$ 称为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵.一般地

$$\operatorname{cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\neq\operatorname{cov}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}).$$

当 $n=m$ 时,$\underset{\sim}{\Sigma}^T$ 为方阵.特别地

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})\\&=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(x_1,x_1)&\operatorname{cov}(x_1,x_2)&\cdots&\operatorname{cov}(x_1,x_n)\\\operatorname{cov}(x_2,x_1)&\operatorname{cov}(x_2,x_2)&\cdots&\operatorname{cov}(x_2,x_n)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\operatorname{cov}(x_n,x_1)&\operatorname{cov}(x_n,x_2)&\cdots&\operatorname{cov}(x_n,x_n)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

这时，$\underset{\sim}{\Sigma}$ 称为随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵(或方差阵).

随机向量的相关矩阵(correlation matrix of random vector) 随机向量的特征之一.是由随机向量的分量之间的相关系数构成的矩阵.其表示方法为

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix} \rho(x_1,x_1) & \rho(x_1,x_2) & \cdots & \rho(x_1,x_p) \\ \rho(x_2,x_1) & \rho(x_2,x_2) & \cdots & \rho(x_2,x_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho(x_p,x_1) & \rho(x_p,x_2) & \cdots & \rho(x_p,x_p) \end{pmatrix},$$

其中

$$\rho(x_i,x_j)=\frac{\operatorname{cov}(x_i,x_j)}{\sqrt{D(x_i)}\sqrt{D(x_j)}}\ (i,j=1,2,\cdots,p),$$

$$D(x_i)=\operatorname{cov}(x_i,x_i)\ (i=1,2,\cdots,p).$$

称 $\underset{\sim}{R}$ 为随机向量 $\boldsymbol{X}$ (p 维)的相关矩阵.其矩阵的阶数为 $p\times p$，简称 $\underset{\sim}{R}$ 矩阵.若 $\boldsymbol{X}$ 的各分量之间不相关，则 $\underset{\sim}{R}$ 为对角矩阵.

偏相关系数(partial correlation coefficient) 部分变量相关的一种度量.在已知若干个变量取值的情况下，描述另外若干个变量之间的线性相关程度，将 p 维随机向量写成分块向量的形式

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{(1)} \\ \boldsymbol{X}_{(2)} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 是 q 维向量($q<p$)，$\boldsymbol{X}_{(2)}$ 是($p-q$)维向量.将 $\boldsymbol{X}$ 的方差阵作相应分块后得

$$D(\boldsymbol{X})=D\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{(1)} \\ \boldsymbol{X}_{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

此处 $\underset{\sim}{\Sigma}_{11}$，$\underset{\sim}{\Sigma}_{22}$ 分别是 $q\times q$ 阶及 $(p-q)\times(p-q)$ 阶正定阵.$\underset{\sim}{\Sigma}_{21}^T=\underset{\sim}{\Sigma}_{12}$ 是 $q\times(p-q)$ 阶矩阵.记

$$\underset{\sim}{\Sigma}_{22\cdot 1}\triangleq\underset{\sim}{\Sigma}_{22}-\underset{\sim}{\Sigma}_{21}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{12},$$

此处 $\underset{\sim}{\Sigma}_{22\cdot 1}$ 为 $(p-q)\times(p-q)$ 阶矩阵，每个元素记为

$$\sigma_{q+i,q+j;\,1,2,\cdots,q}\ (i,j=1,2,\cdots,p-q).$$

称 $\underset{\sim}{\Sigma}_{22\cdot 1}$ 为在给定 $\boldsymbol{X}_{(1)}=\boldsymbol{x}_{(1)}$ 时，$\boldsymbol{X}_{(2)}$ 的条件方差矩阵.现在利用条件方差，建立偏相关系数.定义

$$\rho_{q+i,q+j;\,1,2,\cdots,q}=\frac{\sigma_{q+i,q+j;\,1,2,\cdots,q}}{\sqrt{\sigma^2_{q+i;\,1,2,\cdots,q}}\cdot\sqrt{\sigma^2_{q+j;\,1,2,\cdots,q}}},$$

$$(i,j=q+1,q+2,\cdots,p)$$

称相关系数 $\rho_{q+i,q+j;\,1,2,\cdots,q}$ 为在给定 $\boldsymbol{X}_{(1)}=\boldsymbol{x}_{(1)}$ 时，$\boldsymbol{X}_{(2)}$ 中的两个分量 x_{q+i} 与 x_{q+j} 之间的 q 阶偏相关系数.它与 x_{q+i} 与 x_{q+j} 之间的简单相关系数的含义是不同的.偏相关系数是在已知子向量 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 取值情况下，描述 $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 中两个分量之间的线性相关程度的一个度量指标.q 阶是指 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 的维数为 q.偏相关系数的递推公式

$$\rho_{q+i,q+j;\,1,2,\cdots,q}=\frac{\rho_{q+i,q+j;\,1,2,\cdots,q-1}-\rho_{q+i,q;\,1,2,\cdots,q-1}\rho_{q,q+j;\,1,2,\cdots,q-1}}{\sqrt{1-\rho^2_{q+i,q;\,1,2,\cdots,q-1}}\cdot\sqrt{1-\rho^2_{q,q+j;\,1,2,\cdots,q-1}}}.$$

这个递推公式是用($q-1$)阶偏相关系数计算 q 阶偏相关系数.同样，可以建立，在给定 $\boldsymbol{X}_{(2)}=\boldsymbol{x}_{(2)}$ 时，$\boldsymbol{X}_{(1)}$ 中任意两个分量 x_i 与 x_j 之间的偏相关系数

$$\rho_{i,j;q+1,\cdots,p}=\frac{\sigma_{i,j;\,q+1,\cdots,p}}{\sqrt{\sigma^2_{i;\,q+1,\cdots,p}}\cdot\sqrt{\sigma^2_{j;\,q+1,\cdots,p}}},$$

$$(i,j=1,2,\cdots,q)$$

此处 $\sigma_{i,j;\,q+1,\cdots,p}$ 是矩阵

$$\underset{\sim}{\Sigma}_{11\cdot 2}=\underset{\sim}{\Sigma}_{11}-\underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21}$$

的第(i,j)元素 ($i,j=1,2,\cdots,q$).

偏协方差阵(partial covariance matrix) 随机向量的特征之一.将 p 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 分为三块：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{(1)} \\ \boldsymbol{X}_{(2)} \\ \boldsymbol{X}_{(3)} \end{pmatrix}\begin{matrix} :p_1 \\ :p_2 \\ :p_3 \end{matrix}\quad\begin{pmatrix} p_1+p_2+p_3=p \\ p_i\geqslant 1,\quad i=1,2,3 \end{pmatrix},$$

记

$$E\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} E\boldsymbol{X}_{(1)} \\ E\boldsymbol{X}_{(2)} \\ E\boldsymbol{X}_{(3)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \\ \mu_{(3)} \end{pmatrix},$$

$$D(\boldsymbol{X})=D\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{(1)} \\ \boldsymbol{X}_{(2)} \\ \boldsymbol{X}_{(3)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} & \underset{\sim}{\Sigma}_{13} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} & \underset{\sim}{\Sigma}_{23} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{31} & \underset{\sim}{\Sigma}_{32} & \underset{\sim}{\Sigma}_{33} \end{pmatrix},$$

此处 $\underset{\sim}{\Sigma}_{ij}$ 是 $p_i\times p_j$ 阶阵($i,j=1,2,3$)且 $\underset{\sim}{\Sigma}_{11}$，$\underset{\sim}{\Sigma}_{22}$，$\underset{\sim}{\Sigma}_{33}$ 皆为正定阵.当给定 $\boldsymbol{X}_{(1)}=\boldsymbol{x}_{(1)}$ 时，则有条件方差

$$D\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{(2)} \\ \boldsymbol{X}_{(3)} \end{pmatrix}\middle|\boldsymbol{X}_{(1)}=\boldsymbol{x}_{(1)}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{22} & \underset{\sim}{\Sigma}_{23} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{32} & \underset{\sim}{\Sigma}_{33} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{21} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{31} \end{pmatrix}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{12} & \underset{\sim}{\Sigma}_{13} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{22} & \underset{\sim}{\Sigma}_{23} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{32} & \underset{\sim}{\Sigma}_{33} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{21}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{12} & \underset{\sim}{\Sigma}_{21}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{13} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{31}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{12} & \underset{\sim}{\Sigma}_{31}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{13} \end{pmatrix}$$

$$\triangleq\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{22\cdot 1} & \underset{\sim}{\Sigma}_{23\cdot 1} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{32\cdot 1} & \underset{\sim}{\Sigma}_{33\cdot 1} \end{pmatrix}.$$

称 $\underset{\sim}{\Sigma}_{23\cdot 1}$ 为在给定 $\boldsymbol{X}_{(1)}=\boldsymbol{x}_{(1)}$ 时，$\boldsymbol{X}_{(2)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(3)}$ 的条件协

方差阵. 亦称 $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(3)}$ 的偏协方差阵. 同理, 可得 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 的偏协方差阵和 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(3)}$ 的偏协方差阵. 称 $\underset{\sim}{\sum}_{22\cdot 1}$ 为在给定 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 时, $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 的条件方差阵, 亦称 $\boldsymbol{X}_{(2)}$ 的偏方差阵. 称 $\underset{\sim}{\sum}_{33\cdot 1}$ 为在给定 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 时, $\boldsymbol{X}_{(3)}$ 的条件方差阵, 亦称 $\boldsymbol{X}_{(3)}$ 的偏方差阵.

条件方差阵(conditional variance matrix)　见"偏协方差阵".

偏方差阵(partial variance matrix)　见"偏协方差阵".

广义方差(generalized variance)　一种行列式的值. 通常指随机向量的协方差矩阵的行列式值. 用 $\underset{\sim}{\sum}$ 表示随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵, $\underset{\sim}{\sum}$ 的行列式值 $\det(\underset{\sim}{\sum})$ 就是 $\boldsymbol{X}$ 的广义方差.

广义相关系数(generalized correlation coefficient)　对两个随机向量之间相关关系的度量. 设 $\boldsymbol{X}$ 为 p 维随机向量, $\boldsymbol{Y}$ 为 q 维随机向量. 记 $\underset{\sim}{\sum}_{XX}$, $\underset{\sim}{\sum}_{YY}$, $\underset{\sim}{\sum}_{XY}$ 分别表示 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 及 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵, 令 $\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\sum}_{XX}^{+}\underset{\sim}{\sum}_{XY}\underset{\sim}{\sum}_{YY}^{+}\underset{\sim}{\sum}_{YX}$ 的非零特征根为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r>0$, 其中 $r=rk(\underset{\sim}{M})$, 而 $\underset{\sim}{\sum}_{+XX}$ 表示矩阵 $\underset{\sim}{\sum}_{XX}$ 的穆尔-彭罗斯广义逆, 以下各式定义的量均称为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的广义相关系数:

1. $\xi_{XY}^{(1)}=\left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{1/r}$.
2. $\xi_{XY}^{(2)}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i$.
3. $\xi_{XY}^{(3)}=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\lambda_i$.
4. $\xi_{XY}^{(4)}=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\lambda_i$.
5. $\xi_{XY}^{(5)}=\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i}\right)^{-1}$.

若 $r=0$, 规定 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的广义相关系数为零. 上面 5 个式子定义的样本相关系数分别称为第一、第二、第三、第四和第五广义相关系数.

全相关系数(multiple correlation coefficient)　亦称复相关系数或多重相关系数, 表示一个随机变量和一组随机变量的相关性. 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$ 为 m 维随机向量, 它和随机变量 y (一维)的全相关系数有如下定义: 设

$$\operatorname{cov}\left(\begin{pmatrix}y\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}\right)\triangleq\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \underset{\sim}{\sum}_{12}\\ \underset{\sim}{\sum}_{21} & \underset{\sim}{\sum}_{22}\end{pmatrix}>0,$$

则称

$$\underset{\sim}{R}_{(y,x_1,\cdots,x_m)}=\left(\frac{\underset{\sim}{\sum}_{12}\underset{\sim}{\sum}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\sum}_{21}}{\sigma_{11}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

为 y 与 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的全相关系数. 其中:

$$\operatorname{cov}(y,\boldsymbol{X})=\underset{\sim}{\sum}_{12};$$

$$\operatorname{cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=\underset{\sim}{\sum}_{22};$$

$$\operatorname{cov}(y,y)=\sigma_{11}.$$

复相关系数(multiple correlation coefficient)　即"全相关系数".

多重相关系数(multiple correlation coefficient)　即"全相关系数".

多维随机样本(multidimensional random sample)　亦称多元随机样本. 多元分析的基本概念之一. 是从多维(多元)总体中随机抽取的独立样本. 在 p 维随机向量的总体中, 随机抽取 N 个向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N$, 其中 $\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 相互独立, 则称 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N$ 为样本容量为 N 的 p 维随机样本. 由容量为 N 的 p 维随机样本组成数据矩阵, 记为

$$\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Np}\end{pmatrix}_{N\times p}$$

$$=(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(p)})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1^T\\ \boldsymbol{X}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_N^T\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{X}_i^T$ 表示 p 维行向量 $(i=1,2,\cdots,N)$; $\boldsymbol{X}^{(j)}$ 表示 N 维列向量 $(j=1,2,\cdots,p)$, 则 $\underset{\sim}{X}$ 是样本容量为 N 的 p 维随机样本矩阵, 阶数是 $N\times p$. 由于历史上形成的习惯, 亦称 $\underset{\sim}{X}$ 为多元随机样本矩阵, 简称样本矩阵. 样本矩阵 $\underset{\sim}{X}$ 具有二重性: 当讨论样本矩阵 $\underset{\sim}{X}$ 的有关分布时, 视 $\underset{\sim}{X}$ 为随机矩阵; 在实际应用计算处理时, 常把 $\underset{\sim}{X}$ 视为样本数据矩阵, 或样本观测矩阵.

多元随机样本(multivariate random sample)　即"多维随机样本".

数据矩阵(data matrix)　见"多维随机样本".

观测矩阵(observation matrix)　见"多维随机样本".

多维随机样本均值向量(mean vector of multidimensional random sample)　亦称样本均值. 多元分析的基本概念之一. 是对多维随机样本取平均值所得的向量. 具体作法是对每个分量的抽样取平均值. 这里的样本是

$$\boldsymbol{X}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ip})^T\ (i=1,2,\cdots,N),$$

每个分量的平均值是

$$\bar{x}_j=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{ij}\ (j=1,2,\cdots,p),$$

则称 $\overline{\boldsymbol{X}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_p)^T$ 为 p 维随机样本的平均值向量, 即 p 维随机样本均值向量.

样本均值(sample mean)　即"多维随机样本均值".

样本协方差矩阵(sample covariance matrix) 多元分析的基本概念之一. 它是用多维随机样本构造的矩阵. 具体构造方法如下: 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_N$ 是样本容量为 N 的 p 维随机样本. 样本均值向量为

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i,$$

则

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})^T$$

称为样本离差矩阵. 而

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}} = \frac{1}{N-1}\underset{\sim}{S}$$

称为样本协方差矩阵. 它通常用来作为总体协方差矩阵 $D(\boldsymbol{X})$ 的估计量. 而且, 样本协方差矩阵 $\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 是总体协方差矩阵 $D(\boldsymbol{X})$ 的无偏估计.

样本离差矩阵(sample deviation matrix) 见"样本协方差矩阵".

样本相关矩阵(sample correlation matrix) 样本各分量之间线性相关关系的一种度量. 它是多维随机样本中各个分量之间的相关系数, 按照二维有序数组排列成的矩阵. 其构造如下:

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}} \quad (i,j = 1,2,\cdots,p),$$

其中 s_{ij} 是样本离差(或协差)矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 的第 (i,j) 元素. r_{ij} 就是 p 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 中的第 i 个分量与第 j 个分量的简单相关系数. 记 $\hat{\underset{\sim}{R}} = (r_{ij})_{p\times p}$. 称 $\hat{\underset{\sim}{R}}$ 为多维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的样本相关系数矩阵. 简称样本相关阵.

样本广义方差(sample generalized variance) 一种行列式. 样本协方差矩阵 $\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 的行列式 $\det(\hat{\underset{\sim}{\Sigma}})$ 称为样本广义方差. $\det(\hat{\underset{\sim}{\Sigma}})$ 是样本协方差矩阵变异情况的一种度量.

矩阵拉直运算(matrix vec operator) 处理矩阵的一种方法. 把矩阵按照列(或行)的顺序, 一列接一列(或一行接一行)地组成一个长向量. 然后进行某些运算, 称为矩阵拉直运算. 矩阵拉直运算亦称矩阵的向量化处理. 它有两种方式:

1. 将矩阵的列向量依次一个向量接一个向量地组成一个长向量. 如 $\underset{\sim}{A}$ 是 $n\times m$ 阶矩阵, 记 $\mathrm{vec}(\underset{\sim}{A}) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}, \cdots, a_{nm})^T$, 称 vec 为按列拉直算子. $\underset{\sim}{A}$ 拉直后的 $\mathrm{vec}(\underset{\sim}{A})$ 是一个 $nm\times 1$ 的列向量.

2. 将矩阵的行向量依次一个向量接一个向量地组成一个长向量, 记 $\mathrm{ran}(\underset{\sim}{A}) = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m}, \cdots, a_{nm})^T$. 称 ran 为按行拉直算子.

一般地 $\mathrm{vec}(\underset{\sim}{A}) \neq \mathrm{ran}(\underset{\sim}{A})$. 只当 $\underset{\sim}{A}$ 是对称矩阵时, 两者才相等.

随机矩阵分布(distribution of random matrix) 多元分析的基本概念之一. 它是随机矩阵按列拉直后所成向量的分布. 即 $\mathrm{vec}(\underset{\sim}{X})$ 的分布, 其中 $\underset{\sim}{X}$ 是 $n\times m$ 阶的随机矩阵. 如果随机矩阵是对称阵, 可以只取其上(或下)三角矩阵的元素拉直.

维夏特分布(Wishart distribution) 一种随机矩阵分布. 它是由多维正态独立随机向量构造的随机矩阵的分布. 具体构造如下: 设 $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma)$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 且相互独立, 记

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1^T \\ \boldsymbol{X}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_N^T \end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{M} = E(\underset{\sim}{X}) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1p} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{N1} & \mu_{N2} & \cdots & \mu_{Np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \vdots \\ \mu_N^T \end{pmatrix}.$$

称

$$\underset{\sim}{W} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^T = \underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}$$

的分布为非中心维夏特分布, 简记 $\underset{\sim}{W} \sim W_p(N, \Sigma, \underset{\sim}{\Delta})$. 特别地, 当 $\underset{\sim}{M}=0$ 时, 称 $\underset{\sim}{W}$ 遵从中心维夏特分布. 其密度函数为

$$f(\underset{\sim}{W}) = \begin{cases} C|\underset{\sim}{W}|^{\frac{1}{2}(N-p-1)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{W}\right)\right\} & (\underset{\sim}{W} > 0), \\ 0 & (\text{其他}), \end{cases}$$

其中 C 是归一化常数,

$$C^{-1} = 2^{\frac{Np}{2}}\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\left|\underset{\sim}{\Sigma}\right|^{\frac{N}{2}}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{N-i+1}{2}\right).$$

简记 $\underset{\sim}{W} \sim W_p(N, \Sigma)$.

这个分布是维夏特(Wishart, J.)于 1928 年导出的. 它是多元统计中的重要分布之一, 也是一元统计中 χ^2 分布在多元情况下的推广. 当 $p=1$ 时, 非中心(或中心)维夏特分布退化成非中心(或中心) χ^2 分布.

维尔克斯 Λ 统计量(Wilks Λ statistic) 多元分析中的一种统计量. 它是多维正态总体的两样本的广义方差之比构成的统计量. 它在多元方差分析和回归分析的假设检验中很有用处. Λ 统计量的具体构造如下: 设 $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(0, \Sigma)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 且相互独立, $\Sigma > 0$, $n = n_1 + n_2$ (n_1 或 $n_2 > p$), 并且

$$\underset{\sim}{W}_1 = \sum_{i=1}^{n_1}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^T \sim W_p\left(n_1, \underset{\sim}{\Sigma}\right),$$

$$\underset{\sim}{W}_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^T \sim W_p\left(n_2, \underset{\sim}{\Sigma}\right),$$

则

$$\Lambda = \frac{|\underset{\sim}{W}_1|}{|\underset{\sim}{W}_1 + \underset{\sim}{W}_2|}$$

称为维尔克斯 Λ 统计量，相应分布称为维尔克斯分布，记为 $\Lambda \sim \Lambda(p_1, n_1, n_2)$. 当 $p=1,2$，或 $n_2=1,2$ 时，维尔克斯分布可化为 F 分布，见下表.

$\Lambda(p,n_1,n_2)$与 F 分布的关系表($n_1 \geqslant p$)

p	n_2	F 统计量	自由度
任意	1	$\frac{n_1-p+1}{p}\frac{1-\Lambda}{\Lambda}$	p, n_1-p+1
任意	2	$\frac{n_1-p}{p}\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}$	$2p, 2(n_1-p)$
1	任意	$\frac{n_1}{n_2}\frac{1-\Lambda}{\Lambda}$	n_2, n_1
2	任意	$\frac{n_1-1}{n_2}\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}$	$2n_2, 2(n_1-1)$

当 $p>2$，或 $n_2>2$ 时，Λ 统计量的分布可用 χ^2 分布或 F 分布进行近似：

1. $V=-\left(n_1+n_2-\frac{n_2+p+1}{2}\right)\ln\Lambda(p,n_1,n_2)$的近似分布为 $\chi_{2f}(f=pn_2)$.

2. $R=\frac{ts-2\lambda}{pn_2}\cdot\frac{1-\Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}}$的近似分布为 $F(pn_2, ts-2\lambda)$，其中

$$t = n_1 + n_2 - \frac{n_2+p+1}{2},$$

$$s = \sqrt{\frac{p^2n_2^2-4}{n_2^2+p^2-5}},$$

$$\lambda = \frac{n_2p-2}{4}.$$

当 $ts-2\lambda$ 不是整数时，取与它最近的正整数作为 F 分布的自由度.

维尔克斯Λ 分布(Wilks Λ distribution)　见"维尔克斯 Λ 统计量".

霍特林T^2 分布(Hotelling T^2-distribution)　多元统计中的重要分布之一，也是一元统计中 t 分布的推广. 对于 p 维正态总体，当协方差矩阵未知时，检验均值向量及计算置信椭球时，经常用到 T_2 统计量. 设 $\underset{\sim}{W}\sim W_p(n,I_p)$与 $\boldsymbol{u}\sim N_p(\mu,I_p)$独立，且 $n>p$，称 $T^2=n\,\boldsymbol{u}^T\underset{\sim}{W}_{-1}\boldsymbol{u}$ 的分布为非中心 T_2 分布，记为 $T_2\sim T_2(p,n,\mu)$. 当 $\mu=\mathbf{0}$ 时，称 T_2 遵从中心 T_2 分布，记为 $T_2\sim T_2(p,n)$. T_2 分布与 F 分布有密切关系，即

$$\frac{n-p+1}{np}T^2 \sim F(p, n-p+1, \lambda),$$

其中 $\lambda=\mu^T\mu$ 为非中心参数.

T^2 统计量(T^2-statistic)　多元分析中的一种统计量. 它是多维正态总体的独立随机样本构造的统计量. 设 $\boldsymbol{X}_i\sim N_p(\mu,\underset{\sim}{\Sigma})(i=1,2,\cdots,N)$且相互独立. 则

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i \sim N_p\left(\mu, \frac{1}{N}\underset{\sim}{\Sigma}\right),$$

$$\underset{\sim}{W}_X = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}}_i)(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})^T \sim W_p\left(N-1, \underset{\sim}{\Sigma}\right),$$

且 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 与 $\underset{\sim}{W}_X$ 相互独立. 则称

$$T_X^2 = N(N-1)(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu)^T\underset{\sim}{W}_X^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu),$$

为 T^2 统计量，且有 $T_X^2\sim T^2(p,N-1)$. 对 $\boldsymbol{X}_i$ 作线性变换：令 $\boldsymbol{Y}_i=Q\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,N)$，其中 Q为 $p\times p$ 阶非退化矩阵. 则

$$\overline{\boldsymbol{Y}} = Q\overline{\boldsymbol{X}} \sim N_p\left(Q\mu, Q\underset{\sim}{\Sigma}Q^T/N\right),$$

$$\underset{\sim}{W}_Y = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{Y}_i-\overline{\boldsymbol{Y}})(\boldsymbol{Y}_i-\overline{\boldsymbol{Y}})^T = Q\underset{\sim}{W}_XQ^T \sim W_p\left(N-1, Q\underset{\sim}{\Sigma}Q^T\right),$$

且 $\overline{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\underset{\sim}{W}_Y$ 相互独立. 这时相应的 T^2 统计量为

$$\begin{aligned} T_Y^2 &= N(N-1)(\overline{\boldsymbol{Y}}-Q\mu)^T\underset{\sim}{W}_Y^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}-Q\mu) \\ &= N(N-1)(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu)^T\underset{\sim}{W}_X^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu) \\ &= T_X^2. \end{aligned}$$

这表明 T^2 统计量对样本的一切非退化的线性变换 Q是不变的. 此性质称为 T^2 的不变性.

T^2 统计量的不变性(invariance of statistic T^2)　见"T^2 统计量".

似然比检验法(likelihood ratio test)　一种多元统计检验方法. 它是根据两种假设(原假设及备选假设)提出的一种统计检验方法. 设 $L(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N;\theta)$是似然函数($\theta$ 可以是参数、参数向量或参数矩阵)，把参数空间 Ω 划分成两个互不相交的非空子集 $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1, \Omega_0\cap\Omega_1=\varnothing$. 提出两种假设：$H_0$(原假设)：$\theta\in\Omega_0$；$H_1$(备选假设)：$\theta\in\Omega_1$. 这时，两个极大似然估计之比

$$\lambda[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N] = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Omega_0}L(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N;\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Omega}L(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N;\theta)}$$

称为似然比统计量. 用统计量 $\lambda[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N]$进行的假设检验，即 $P\{\lambda[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N]\leqslant\lambda_\alpha\}=\alpha$，其中 α 是显著性水平，λ_α 为临界值. 当 $\lambda\leqslant\lambda_\alpha$ 时，否定 H_0(原假设)，当 $\lambda>\lambda_\alpha$ 时，接受 H_0(原假设)，这种检验方法称为似然比检验法.

似然比统计量(likelihood ratio statistic)　见"似然比检验法".

多元正态总体参数的极大似然估计(maximum likelihood estimates of parameters of multivariate normal population)　一种参数估计方法. 其应用的

条件是：知道总体分布的形式，而总体分布中的参数向量(或参数矩阵)未知的情况下，根据样本，可用极大似然估计方法求得参数向量(或参数矩阵)的估计量(值). 设 $\boldsymbol{X}_j(j=1,2,\cdots,N)$ 是从 p 维正态总体 $N_p(\mu,\underset{\sim}{\Sigma})$ 抽取的独立随机样本，$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N)$ 的联合分布密度函数为

$$L\left(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N;\ \mu,\underset{\sim}{\Sigma}\right)=(2\pi)^{-\frac{Np}{2}}\left|\underset{\sim}{\Sigma}\right|^{-\frac{N}{2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[(\boldsymbol{X}_j-\mu)^T\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X}_j-\mu)\right]\right\}.$$

把联合密度函数看成是参数 $(\mu,\underset{\sim}{\Sigma})$ 的函数，称为似然函数. 令 $L(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N;\mu,\underset{\sim}{\Sigma})$ 分别关于 μ 及 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的导数等于 0，可解出

$$\hat{\underset{\sim}{\mu}}=\overline{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{X}_j,$$

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\underset{\sim}{A} & (\mu\text{已知}),\\[2mm] \dfrac{1}{N}\underset{\sim}{S} & (\mu\text{未知}),\end{cases}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是样本均值，$\underset{\sim}{S}$ 是样本离差阵，

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{X}_j-\mu)(\boldsymbol{X}_j-\mu)^T.$$

称 $\hat{\underset{\sim}{\mu}}$ 及 $\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 分别是参数向量 μ 及参数矩阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计量. 为保证估计量具有无偏性，常取样本协方差阵

$$\frac{1}{N-1}\underset{\sim}{S}$$

作为 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的无偏估计，这时有 $E\overline{\boldsymbol{X}}=\mu$，

$$E\,\frac{1}{N-1}\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{\Sigma}.$$

多元独立性检验(independence test in multivariate)　一种多元统计检验. 独立性检验指下列三类检验：

1. 对多维(p 维)分布总体的各个分量之间是否独立进行的检验.

2. 把多维(p 维)随机向量分成 k 个($k\leqslant p$)子向量，对这 k 个子向量的独立性进行的检验. 如果 k 个子向量相互独立，那么 p 维总体可化为 k 个低维的总体去处理，使得问题得到简化. 在多维正态总体条件下，有如下结果：设总体 $\boldsymbol{X}\sim N_p(\mu,\underset{\sim}{\Sigma})$，将 $\boldsymbol{X}$，μ 和 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 剖分为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(1)}\\ \boldsymbol{X}^{(2)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}^{(k)}\end{pmatrix},\quad \mu=\begin{pmatrix}\mu^{(1)}\\ \mu^{(2)}\\ \vdots\\ \mu^{(k)}\end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{\Sigma}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} & \cdots & \underset{\sim}{\Sigma}_{1k}\\ \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} & \cdots & \underset{\sim}{\Sigma}_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \underset{\sim}{\Sigma}_{k1} & \underset{\sim}{\Sigma}_{k2} & \cdots & \underset{\sim}{\Sigma}_{kk}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{X}^{(i)}$，$\mu^{(i)}$ 为 p_i 维向量，$\underset{\sim}{\Sigma}_{ii}$ 为 $p_i\times p_i$ 阶矩阵($i=1,2,\cdots,k$)，$p_1+p_2+\cdots+p_k=p$. 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N$ 为来自 $N_p(\mu,\underset{\sim}{\Sigma})$ 的容量为 N 的样本，将离差阵

$$\underset{\sim}{S}=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})^T$$

相应地剖分为

$$\underset{\sim}{S}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{S}_{11} & \underset{\sim}{S}_{12} & \cdots & \underset{\sim}{S}_{1k}\\ \underset{\sim}{S}_{21} & \underset{\sim}{S}_{22} & \cdots & \underset{\sim}{S}_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \underset{\sim}{S}_{k1} & \underset{\sim}{S}_{k2} & \cdots & \underset{\sim}{S}_{kk}\end{pmatrix},$$

其中 $\underset{\sim}{S}_{ii}$ 为 $p_i\times p_i$ 阶矩阵($i=1,2,\cdots,k$)，检验 $\boldsymbol{X}_{(1)}$，$\boldsymbol{X}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}_{(k)}$ 是否相互独立，等价于检验假设

$$H_0:\ \underset{\sim}{\Sigma}_{ij}=0\ \ (i\neq j),$$
$$H_A:\ \underset{\sim}{\Sigma}_{ij}\quad(\text{不全为 }0).$$

检验以上假设的似然比统计量为

$$\lambda_5=\left(\frac{|\underset{\sim}{S}|}{\prod\limits_{i=1}^{k}|\underset{\sim}{S}_{ii}|}\right)_{\frac{N}{2}}\triangleq V_{\frac{N}{2}},$$

即 $V=(\lambda_5)^{\frac{2}{N}}$. 否定域为 $P\{\lambda_5\leqslant C_{5\alpha}\}=\alpha$. 当假设成立时，还可用 χ^2 分布近似，即

$$P\{-a\ln V\leqslant u\}$$
$$=P\{\chi^2(f)\leqslant u\}+\frac{r}{a^2}[P\{\chi^2(f+4)\leqslant u\}$$
$$-P\{\chi^2(f)\leqslant u\}]+O(N^{-3}),$$

其中

$$a=N-\frac{3}{2}-\frac{q_3}{3q_2},f=\frac{1}{2}q_2,$$
$$r=\frac{1}{48}q_4-\frac{5}{96}q_2-\frac{q_3^2}{72q_2},$$
$$q_\alpha=p_\alpha-\sum_{i=1}^{k}p_i^\alpha\quad(\alpha=2,3,4).$$

在大样本情况下有 $-a\ln V$ 的渐近分布为 $\chi^2(f)$. 对一些特殊情况，还可得到进一步的结果：

1) $k=2$ 时，$V\sim\Lambda(p_2,N-p_2-1,p_1)$.

2) $k=p$ 时，相当于检验所有变量的相关系数为 0. 这时 V 与 $\prod\limits_{i=1}^{p-1}\xi_i$ 的分布相同，

$$\xi_i\sim\beta\left(\frac{n-i}{2},\frac{i}{2}\right)\ (i=1,2,\cdots,p-1)$$

且相互独立. 如果用渐近分布(*)，相应的参数为

$$a = N - \frac{2p+11}{6},$$

$$f = \frac{1}{2}p(p+1),$$

$$r = \frac{1}{288}p(p-1)(2p^2-2p-13).$$

3. 全相关系数(参见"全相关系数")检验. 取 $k=2, p_1=1, p_2=p-1$, 这时检验 $\underset{\sim}{\Sigma}_{12}=0$ 等价于检验全相关系数 $r=0$. 统计量 $V=1-\hat{r}^2$, 其中

$$\hat{r}^2 = \frac{\underset{\sim}{S}_{12}\underset{\sim}{S}_{22}^{-1}\underset{\sim}{S}_{21}}{\underset{\sim}{S}_{11}}$$

为 x_1 与 $(x_2, x_3\cdots, x_p)$ 的全相关系数. 由 1 知

$$V \sim \Lambda(1, N-p, p-1),$$

从而得到统计量

$$F = \frac{N-p}{p-1}\frac{\hat{r}^2}{1-\hat{r}^2} \sim F(p-1, N-p).$$

这就是检验全相关系数 $r=0$ 的统计量.

全相关系数检验(test of multiple correlation coefficient) 见"多元独立性检验".

多元正态总体均值向量的检验(test specifying mean vector of a multivariate normal population) 一种多元统计检验. 它是检验一个正态总体的均值向量是否等于已知向量的问题. 按总体协差阵已知或未知分为两种情形讨论. 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 为来自多元正态总体 $N_p(\mu, \underset{\sim}{\Sigma})$ 的样本, $n>p$, 检验假设为 $H_0: \mu=\mu_0$(已知向量); $H_A: \mu\neq\mu_0$. 则:

1. 协方差阵已知的情形. 构造统计量

$$T_0^2 = n(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu_0)^T \underset{\sim}{\Sigma}_{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu_0),$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i.$$

当零假设成立时, $T_0^2 \sim \chi^2(p)$, 给定检验水平 α, 其否定域为 $P\{T_0^2>\chi_\alpha^2\}=\alpha$, 其中 χ_α^2 为 $\chi^2(p)$ 分布的上 α 分位点.

2. 协差阵未知的情形. 这时 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的无偏估计量是 $\underset{\sim}{S}/(n-1)$, 构造统计量

$$T^2 = n(n-1)(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu_0)^T \underset{\sim}{S}_{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu_0),$$

其中

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})^T \sim W_p\left(n-1, \underset{\sim}{\Sigma}\right).$$

当假设成立时, $\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu_0) \sim N_p(0, \underset{\sim}{\Sigma})$. 故 $T^2 \sim T^2(p, n-1)$, 于是在假设成立时, 统计量

$$F = \frac{n-p}{(n-1)p}T^2 \sim F(p, n-p).$$

给定显著水平 α, 其否定域为

$$P\left\{\frac{n-p}{(n-1)p}T^2 > F_\alpha\right\} = \alpha,$$

其中 F_α 为 $F(p, n-p)$ 分布的上 α 分位点.

两个多元正态总体均值向量相等的检验(test for the equality of mean vectors (in the case of two multivariate normal populations)) 一种多元统计检验. 它是检验两个正态总体的均值向量是否相等的问题. 分别讨论两总体协差阵已知和未知情形, 后者又区分为协差阵相等和不等两种情况. 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_{n_1}$ 为来自多元正态总体 $N_p(\mu_1, \underset{\sim}{\Sigma}_1)$ 的样本; $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \cdots, \boldsymbol{Y}_{n_2}$ 为来自多元正态总体 $N_p(\mu_2, \underset{\sim}{\Sigma}_2)$ 的样本, 且 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 间相互独立, $n_1>p, n_2>p$. 要检验的假设为 $H_0: \mu_1=\mu_2$; $H_A: \mu_1\neq\mu_2$. 则:

1. 协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_2$ 已知的情形. 选取统计量

$$T_0^2 = (\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}})^T\left(\frac{1}{n_1}\underset{\sim}{\Sigma}_1 + \frac{1}{n_2}\underset{\sim}{\Sigma}_2\right)^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}}),$$

式中

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\boldsymbol{X}_i, \overline{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\boldsymbol{Y}_i.$$

当假设 H_0 成立时, $T_0^2 \sim \chi^2(p)$, 可用以检验 H_0.

2. 协差阵未知但相等的情形(即 $\underset{\sim}{\Sigma}_1 = \underset{\sim}{\Sigma}_2 \triangleq \underset{\sim}{\Sigma}$). 用如下统计量

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}})^T \hat{\underset{\sim}{\Sigma}}_{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}}),$$

式中

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}} = \frac{1}{n_1+n_2-2}(\underset{\sim}{S}_1+\underset{\sim}{S}_2),$$

$$\underset{\sim}{S}_1 = \sum_{i=1}^{n_1}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})^T,$$

$$\underset{\sim}{S}_2 = \sum_{i=1}^{n_2}(\boldsymbol{Y}_i-\overline{\boldsymbol{Y}})(\boldsymbol{Y}_i-\overline{\boldsymbol{Y}})^T.$$

当假设 H_0 成立时, $T^2 \sim T^2(p, n_1+n_2-2)$, 从而统计量

$$F = \frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)p}T^2 \sim F(p, n_1+n_2-p-1).$$

给定显著水平 α, 其否定域为 $P\{F>F_\alpha\}=\alpha$, 其中 F_α 为 $F(p, n_1+n_2-p-1)$ 分布的上 α 分位点.

3. 协差阵未知且不等的情形. 当 $\underset{\sim}{\Sigma}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_2$ 相差甚大时, 可用如下方法. 令

$$T^2 = (\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}})^T \underset{\sim}{\Sigma}_*^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}}),$$

式中

$$\underset{\sim}{\Sigma}_* = \frac{1}{n_1(n_1-1)}\underset{\sim}{S}_1 + \frac{1}{n_2(n_2-1)}\underset{\sim}{S}_2.$$

又令

$$f_{-1} = \sum_{k=1}^{2}\frac{\left[(\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}})^T \underset{\sim}{\Sigma}_*^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_k\underset{\sim}{\Sigma}_*^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{Y}})\right]^2}{(n_k^3-n_k^2)T^4},$$

其中

$$\underset{\sim}{\Sigma}_k = \frac{1}{n_k - 1}\underset{\sim}{S}_k \ (k = 1,2).$$

当假设 H_0 成立时，

$$\frac{f - p + 1}{fp}T^2$$

近似于 $F(p,f-p+1)$ 分布，当 $\min(n_1,n_2)\to\infty$时，T^2 渐近于 $\chi^2(p)$.

多元正态总体协差阵的检验(test specifying covariance matrix of a multivariate normal population)　一种多元统计检验. 用以检验一个多元正态总体的协差阵是否等于一个已知正定阵. 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 为来自多元正态总体 $N_p(\mu,\underset{\sim}{\Sigma})$的随机样本，$n>p$. 考虑下面两种假设检验问题：

1. 检验假设

$$H_0:\ \underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\Sigma}_0(\text{已知正定阵}),$$

$$H_A:\ \underset{\sim}{\Sigma} \neq \underset{\sim}{\Sigma}_0.$$

利用似然比方法得统计量

$$\lambda_1 = \left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{np}{2}}\cdot\left|\underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}\right|^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}\right)\right\},$$

式中

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{t=1}^{n}(\boldsymbol{X}_t - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_t - \overline{\boldsymbol{X}})^T;$$

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{X}_t.$$

当假设 H_0 成立时，$-2\ln\lambda_1$ 的极限分布为

$$\chi^2\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$$

分布. 给定显著水平 α，否定域上的概率为 $P\{-2\ln\lambda_1>\chi^2_\alpha\}=\alpha$，其中 χ^2_α 为临界值.

2. 检验假设

$$H_0:\ \underset{\sim}{\Sigma} = \sigma^2\underset{\sim}{\Sigma}_0(\text{已知正定阵}),$$

$$H_A:\ \underset{\sim}{\Sigma} \neq \sigma^2\underset{\sim}{\Sigma}_0,$$

式中$\underset{\sim}{\Sigma}_0$ 为已知，σ^2 未知，当$\underset{\sim}{\Sigma}_0=I_p$ 时，这个检验为球性检验. 检验假设 H_0: $\underset{\sim}{\Sigma}=\sigma^2\underset{\sim}{\Sigma}_0$ 的似然比统计量为

$$\lambda_2 = \frac{\left|\underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}\underset{\sim}{S}\right|^{\frac{n}{2}}}{\left(\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}\underset{\sim}{S}\right)/p\right)^{\frac{np}{2}}}.$$

令

$$W = (\lambda_2)^{\frac{2}{n}} = \frac{p^p\left|\underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}\underset{\sim}{S}\right|}{\left(\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{\Sigma}_0^{-1}\underset{\sim}{S}\right)\right)^p}.$$

当假设 H_0 成立时，统计量

$$\xi = \left((n-1) - \frac{2p^2+p+2}{6p}\right)\ln W$$

的近似分布为

$$\chi^2\left(\frac{p(p+1)}{2} - 1\right)$$

分布. 给定检验水平 α，否定域上的概率为 $P\{\xi>\chi^2_\alpha\}=\alpha$，其中 χ^2_α 为相应的临界值.

球性检验(sphericity test)　见“多元正态总体协差阵的检验”.

几个多元正态总体均值向量相等的检验(test for the equality of mean vectors in the case of several multivariate normal populations)　一种多元统计检验. 它是在协差阵相等时，检验多个正态总体均值向量是否相等的问题. 设有 k 个总体，分别抽取样本如下：

$$\boldsymbol{X}_1^{(1)},\boldsymbol{X}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_1}^{(1)} \sim N_p(\mu_1,\underset{\sim}{\Sigma}),$$

$$\boldsymbol{X}_1^{(2)},\boldsymbol{X}_2^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_1}^{(2)} \sim N_p(\mu_2,\underset{\sim}{\Sigma}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{X}_1^{(k)},\boldsymbol{X}_2^{(k)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_k}^{(k)} \sim N_p(\mu_k,\underset{\sim}{\Sigma}),$$

$n_\alpha>p\ (\alpha=1,2,\cdots,k)$，且$\{\boldsymbol{X}_t^{(\alpha)},\alpha=1,2,\cdots,k,t=1,2,\cdots,n_\alpha\}$样本相互独立，要检验的假设是：

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k,$$

$$H_A:\ \{\mu_\alpha,\alpha = 1,2,\cdots,k\}\ \text{不全相等}.$$

利用似然比方法得统计量

$$\Lambda = \frac{\left|\underset{\sim}{E}\right|}{\left|\underset{\sim}{E}+\underset{\sim}{B}\right|},$$

其中

$$\underset{\sim}{B} = \sum_{\alpha=1}^{k}n_\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)} - \overline{\boldsymbol{X}})(\overline{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)} - \overline{\boldsymbol{X}})^T$$

为组间离差阵，这里

$$\overline{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)} = \frac{1}{n_\alpha}\sum_{t=1}^{n_\alpha}\boldsymbol{X}_t^{(\alpha)}\quad(\alpha = 1,2,\cdots,k),$$

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_\alpha}\boldsymbol{X}_t^{(\alpha)}\quad\left(n = \sum_{\alpha=1}^{k}n_\alpha\right),$$

$$\underset{\sim}{E} = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_\alpha}(\boldsymbol{X}_t^{(\alpha)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)})(\boldsymbol{X}_t^{(\alpha)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)})^T$$

为组内离差阵. 统计量 $\Lambda\sim\Lambda(p,n-k,k-1)$. 从而给定显著水平 α，检验 H_0 的否定域为 $P\{\Lambda<\Lambda_\alpha\}=\alpha$，其中 Λ_α 为维尔克斯分布的 α 下分位点.

几个多元正态总体协差阵相等的检验(test for the homogeneity of covariance matrix in the case of multivariate normal populations)　一种多元统计检验. 用以检验多个正态总体的协差阵是否都相等. 设有 k 个总体，分别抽取样本如下：

$$\boldsymbol{X}_1^{(1)},\boldsymbol{X}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_1}^{(1)} \sim N_p(\mu_1,\underset{\sim}{\Sigma}_1)$$

$$\boldsymbol{X}_1^{(2)},\boldsymbol{X}_2^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_1}^{(2)} \sim N_p(\mu_2,\underset{\sim}{\Sigma}_2)$$

……………………………………

$$X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \cdots, X_{n_k}^{(k)} \sim N_p(\mu_k, \underset{\sim}{\Sigma}_k).$$

记 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k, n_\alpha>p$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$, $\{X_t^{(\alpha)}, \alpha=1,2,\cdots,k, t=1,2,\cdots,n_\alpha\}$相互独立. 要检验假设

$$H_0: \underset{\sim}{\Sigma}_1 = \underset{\sim}{\Sigma}_2 = \cdots = \underset{\sim}{\Sigma}_k,$$

$$H_A: \{\underset{\sim}{\Sigma}_\alpha, \alpha = 1,2,\cdots,k\}\text{不全相等}.$$

利用似然比方法,得统计量

$$\lambda_3 = n^{\frac{np}{2}} \prod_{\alpha=1}^{k} |\underset{\sim}{S}_\alpha|^{\frac{n_\alpha}{2}} \Big/ \left(\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha^{\frac{n_\alpha p}{2}} \right) |\underset{\sim}{S}|^{\frac{n}{2}},$$

其中

$$\underset{\sim}{S}_\alpha = \sum_{t=1}^{n_\alpha} (X_t^{(\alpha)} - \overline{X}^{(\alpha)})(X_t^{(\alpha)} - \overline{X}^{(\alpha)})^T \quad (\alpha = 1,2,\cdots,k),$$

$$\overline{X}^{(\alpha)} = \frac{1}{n_\alpha}\sum_{t=1}^{n_\alpha} X_t^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,k),$$

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{\alpha=1}^{k} \underset{\sim}{S}_\alpha.$$

根据无偏性要求,将 λ_3 中的 n_α 用 $n_\alpha-1$ 代替,n 用 $n-k$代替后,得 λ_3^*. 若 $k<5, p<5, n_\alpha-1\geqslant 20$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$,则$-2\ln\lambda_3^*/c$ 的渐近分布为

$$\chi^2\left[\frac{1}{2}p(p+1)(k-1)\right],$$

其中

$$c_{-1} = 1-\frac{2p^2+3p-1}{6(p+1)(k-1)}\left(\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{1}{n_\alpha-1} - \frac{1}{n-k}\right).$$

若 k, p, n_α 不满足上述条件,当 $n_\alpha\geqslant 9$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$时,$-2\ln\lambda_3^*/b$ 的渐近分布为 $F_{(f_1,f_2)}$,其中

$$b = \frac{f_1}{1-a_1-\dfrac{f_1}{f_2}},$$

$$f_1 = \frac{1}{2}p(p+1)(k-1), \qquad f_2 = \frac{f_1+2}{a_2-a_1^2},$$

$$a_1 = \frac{2p^2+3p-1}{6(k-1)(p+1)}\left(\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{1}{n_\alpha-1} - \frac{1}{n-k}\right),$$

$$a_2 = \frac{(p-1)(p+2)}{6(k-1)}\left(\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{1}{(n_\alpha-1)^2} - \frac{1}{(n-k)^2}\right).$$

若 $f_2<0$ (即 $a_2-a_1^2<0$),可令

$$b_1 = \frac{|f_2|}{1-a_1-2/|f_2|},$$

这时

$$\frac{-2|f_2|\ln\lambda_3^*}{f_1(b_1+2\ln\lambda_3^*)} \sim F(f_1,f_2).$$

几个多元正态总体的均值向量和协差阵相等的同时检验(simultaneous test on mean vectors and covariance matrices in the case of multivariate normal populations) 一种多元统计检验. 它是检验多个正态总体是否相等的问题. 设 $X_t^{(\alpha)}(t=1,2,\cdots,n_\alpha)$为来自第 α 个总体$N_p(\mu_\alpha,\underset{\sim}{\Sigma}_\alpha)$的样本 $(\alpha=1,2,\cdots,k)$,它们相互独立,$n_\alpha>p$,记

$$n = \sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha.$$

检验 k 个正态总体是否相等就等价于检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k, \underset{\sim}{\Sigma}_1 = \cdots = \underset{\sim}{\Sigma}_k,$$

$$H_A: \{\mu_\alpha, \alpha = 1,2,\cdots,k\}\text{不全相等,或} \{\underset{\sim}{\Sigma}_\alpha, \alpha = 1,2,\cdots,k\}\text{不全相等}.$$

其似然比统计量为

$$\lambda_4 = n^{\frac{np}{2}} \prod_{i=1}^{k} |\underset{\sim}{S}_i|^{\frac{n_i}{2}} \Big/ |\underset{\sim}{T}| \prod_{i=1}^{k} n_i^{\frac{pn_i}{2}},$$

其中

$$\underset{\sim}{T} = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_\alpha} (X_t^{(\alpha)} - \overline{X})(X_t^{(\alpha)} - \overline{X})^T;$$

$\overline{X}$ 及 $\underset{\sim}{S}_i(i=1,2,\cdots,k)$的意义参见“几个多元正态总体协差阵相等的检验”. 将 λ_4 中的 n_i 用 n_i-1 代替,n 用 $n-k$ 代替后,得统计量为 λ_4^*. 在假设 H_0 成立时,$-2\xi\ln\lambda_4^*$ 有如下近似分布:

$$\begin{aligned} &P\{-2\xi\ln\lambda_4^* \leqslant t\} \\ &= P\{\chi^2(f)\leqslant t\} \\ &\quad + W_2[P\{\chi^2(f+4)\leqslant t\} - P\{\chi^2(f)\leqslant t\}] \\ &\quad + O(n^{-3}), \end{aligned}$$

其中

$$f = \frac{1}{2}(k-1)p(p+1),$$

$$\xi = 1-\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k}\right)\left(\frac{2p^2+3p-1}{6(k-1)(p+3)}\right) + \frac{p-k+2}{n(p+3)},$$

$$\begin{aligned} W_2 = \frac{p}{288\xi^2}\Bigg(6&\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n_i-1)^2} - \frac{1}{(n-k)^2}\right) \\ &\cdot (p+1)(p+2)(p-1) \\ &- \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k}\right)^2 \frac{(2p^2+3p-1)^2}{(k-1)(p+3)} \\ &- 12\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k}\right) \\ &\cdot \frac{(2p^2+3p-1)(p-k+2)}{(n-k)(p+3)} \\ &- 36 \times \frac{(k-1)(p-k+2)^2}{(n-k)^2(p+3)} - \frac{12(k-1)}{(n-k)^2} \\ &\cdot (-2k^2+7k+3pk-2p^2-6p-4)\Bigg). \end{aligned}$$

在大样本情况下,$-2\xi\ln\lambda_4^*$ 的渐近分布为 $\chi^2(f)$.

多元线性模型(multiple linear model) 数理统计的一个重要分支. 它是多个因变量与多个自变量的线性模型. 它的理论和应用包含的内容很广泛,一般地,多元线性模型包含:多元线性回归模型;多

元方差分析模型;多元协方差分析模型等.如果自变量都为连续(离散)变量,则称为回归分析模型.如果变量没有明显的量的概念,例如,把"民族"作为一个变量时,"汉族"、"满族"等就不是量的概念,人们称之为名义(尺度或属性)变量,这种情形都属方差分析模型.如果在全部自变量中,有一部分是连续(离散)变量,另一部分自变量是名义(尺度)变量,通常称为协方差分析模型.

多元回归分析(multivariate regression analysis) 讨论多个自变量与多个因变量的线性依赖关系的理论和方法.它是多元分析的各种方法中应用最广的一种.设自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与因变量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_p$ 有线性相关关系,它们的 n 组独立观测值记为 $\{Y_{i1},Y_{i2},\cdots,Y_{ip};\ X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{im}\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.记

$$\underset{\sim}{Y}=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{np} \end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{X}_1=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{\beta}=\begin{pmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots & \beta_{0p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mp} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} b_0 \\ \underset{\sim}{B} \end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1p} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{np} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{1}_n=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则称模型

$$\begin{cases} \underset{\sim}{Y}=\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta}+\underset{\sim}{\varepsilon}, \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_i \sim N_p(0,\underset{\sim}{\Sigma})\ (i=1,2,\cdots,n)\ \text{且独立} \end{cases}$$

为多个自变量(m)与多个因变量(p)的线性回归分析模型.亦称多元多重回归分析模型(或简称多对多回归),其中 $\underset{\sim}{X}=(\mathbf{1}_n\ \vdots\ \underset{\sim}{X}_1)$ 为已知数据阵,且其秩 $\operatorname{rank}(\underset{\sim}{X})=m+1$;$\underset{\sim}{Y}$ 为可观测的随机阵;$\underset{\sim}{\varepsilon}$ 为不可观测的随机误差阵;$\underset{\sim}{\beta},\underset{\sim}{\Sigma}$ 为未知参数阵.

多元多重回归分析,主要讨论多对多回归模型中参数的估计及有关参数的假设检验问题,或直接利用模型进行预测及控制.

多元多重线性回归分析模型(linear regression model of many dimension-multiple) 见"多元回归分析".

线性回归模型参数阵的估计(estimate of parameter matrix of linear regression model) 一种多对多回归模型的参数估计.是对多元多重线性回归模型的回归系数阵 $\underset{\sim}{\beta}$ 和误差的协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的估计.参数阵 $\underset{\sim}{\beta}$ 的最小二乘估计为 $\hat{\underset{\sim}{\beta}}=(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y}$.其中 $\underset{\sim}{X}=(\mathbf{1}_n\ \vdots\ \underset{\sim}{X}_1)$.若记

$$\underset{\sim}{L}_{XX}=\underset{\sim}{X}_1^T\left(\underset{\sim}{I}-\frac{1}{n}\underset{\sim}{J}\right)\underset{\sim}{X}_1,$$

$$\underset{\sim}{J}=\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T,$$

$$\underset{\sim}{L}_{XY}=\underset{\sim}{X}_1^T\left(\underset{\sim}{I}-\frac{1}{n}\underset{\sim}{J}\right)\underset{\sim}{Y}$$

$$\overline{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{n}\underset{\sim}{X}_1^T\mathbf{1},\ \overline{\boldsymbol{Y}}=\frac{1}{n}\underset{\sim}{Y}^T\mathbf{1}_n,$$

于是 $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ 还可记为

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}=\begin{pmatrix} \hat{\underset{\sim}{b}}_0 \\ \hat{\underset{\sim}{B}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{Y}}^T-\overline{\boldsymbol{X}}_1^T\hat{\underset{\sim}{B}} \\ \underset{\sim}{L}_{XX}^{-1}\underset{\sim}{L}_{XY} \end{pmatrix},$$

记 $\hat{\underset{\sim}{Y}}=\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}$,则残差阵

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{Q} &= (\underset{\sim}{Y}-\hat{\underset{\sim}{Y}})^T(\underset{\sim}{Y}-\hat{\underset{\sim}{Y}}) \\ &= \underset{\sim}{Y}^T(\underset{\sim}{I}_n-\underset{\sim}{X}\,(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})_{-1}\underset{\sim}{X}^T)\underset{\sim}{Y} \\ &= \underset{\sim}{L}_{YY}-\underset{\sim}{L}_{YX}\underset{\sim}{L}_{XX}^{-1}\underset{\sim}{L}_{XY}, \end{aligned}$$

其中

$$\underset{\sim}{L}_{YY}=\underset{\sim}{Y}^T\left(\underset{\sim}{I}_n-\frac{1}{n}\underset{\sim}{J}\right)\underset{\sim}{Y},\ \underset{\sim}{L}_{YX}=\underset{\sim}{L}_{XY}^T.$$

误差量的协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的估计为

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}=\frac{1}{n-m-1}\underset{\sim}{Q},$$

其中 $\hat{\underset{\sim}{\beta}},\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 分别是 $\underset{\sim}{\beta}$ 及 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的无偏估计量.

回归系数阵的显著性检验(test of regression coefficient matrix) 考察某几个自变量对 p 个因变量的作用是否显著的问题.不妨假设检验后面 r 个自变量,记

$$\underset{\sim}{C}=(\mathbf{1}_n\ \vdots\ \underset{\sim}{X}_1\ \vdots\ \underset{\sim}{X}_2)\triangleq(\underset{\sim}{C}_1\ \vdots\ \underset{\sim}{X}_2),$$

$\underset{\sim}{X}_2$ 为 $n\times r$ 阶数据阵.

$$\underset{\sim}{B}=\begin{pmatrix} \underset{\sim}{B}_1 \\ \underset{\sim}{B}_2 \end{pmatrix},\ \underset{\sim}{B}_2\ \text{为}\ r\times p\ \text{阶参数阵}.$$

问题化为检验参数阵 H_0: $\underset{\sim}{B}_2=0$.利用似然比检验法得统计量

$$\Lambda=\frac{|\underset{\sim}{Q}|}{|\underset{\sim}{Q}+(\underset{\sim}{Q}_H-\underset{\sim}{Q})|},$$

其中 $\underset{\sim}{Q}$ 为原回归模型的残差阵,且

$$\underset{\sim}{Q}\sim W_p\left(n-m-1,\underset{\sim}{\Sigma}\right),$$

而 $\underset{\sim}{Q}_H=\underset{\sim}{Y}^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{C}_1(\underset{\sim}{C}_1^T\underset{\sim}{C}_1)^{-1}\underset{\sim}{C}_1)\underset{\sim}{Y}$.当 H_0 成立时,回

归模型的残差阵

$$Q_H - Q \overset{(H_0下)}{\sim} W_p\left(r, \underset{\sim}{\sum}\right),$$

且 $Q_H - Q$ 与 Q 独立，故

$$\Lambda \overset{(H_0下)}{\sim} \Lambda(p, n-m-1, r),$$

给定显著水平 α，否定域为 $P\{\Lambda < \lambda_\alpha\} = \alpha$.

回归变量的选择(selection of regression variables) 回归变量的选择问题. 在回归分析中，变量的选择是实际应用中的一个重要问题. 如果将某个重要变量遗漏，回归效果一定不好；如果回归方程中包含一些对因变量影响不显著的变量，不仅增加计算量，而且将使回归方程不稳定. 在应用回归方法解决实际问题时，对进入回归方程的自变量，一般参考专业知识并结合数学方法从中精心选择.

数学上常用的筛选回归变量方法有：

1. 前进法(逐步引入法). 首先从自变量中选出与因变量线性相关系数最大的一个，经统计检验，若其回归系数显著不为零，则把该变量引入回归方程. 其后根据同样的原理，在余下的自变量中选出最相关的变量，并经检验后引入回归方程. 如此重复，每步引入一个自变量，直到再没有显著的自变量可供引入为止.

2. 后退法(逐步剔除法). 与前进法相反，首先将全部自变量引入回归方程，然后从回归方程中找出其系数与零差异最小的变量，若经检验其回归系数与零的差异不显著，则剔除该变量. 如此一个个地剔除变量，直至再没有不显著变量可被剔除为止.

3. 逐步回归法. 与前进法相似. 但考虑到前面各步引入回归方程中的变量的重要性会随着新自变量的引入发生变化，如果已变得不再重要了，就应及时把它从回归方程中剔除. 所以，在每步引入新变量之后，若经统计检验，其系数与零的差异已不显著，则删除该变量. 如此逐步进行，直至既不能引入新变量，又不能剔除前面已引入的变量为止.

4. 最优回归子集法. 设有 m 个自变量，其任意子集都可和因变量建立回归方程，这样，一切可能的回归方程共有 $2_m - 1$ 个. 该方法是根据某一准则从中选出一个最优子集. 常用的选择变量的最优准则有均方误差最小准则、修正 R_2 准则、C_p 统计量准则、AIC 准则、BIC 准则、信息统计量准则等.

前进法(forward selection procedure) 见“回归变量的选择”.

后退法(backward elimination procedure) 见“回归变量的选择”.

逐步回归法(stepwise regression procedure) 见“回归变量的选择”.

最优回归子集法(best subset for regression) 见“回归变量的选择”.

方差分析(analysis of variance) 与回归分析不同的一种线性模型. 它与回归分析所研究的共同内容是模型参数的估计、检验一些因素(自变量)对某个(或多个)指标(因变量)之间的关系. 二者的差别在于：

1. 回归分析所涉及的自变量一般是连续的，方差分析中取的是属性因素(如医学上的阴性、阳性等). 有时虽然因素本身是数量型的，但也只是选定几个值. 可以说因素本身也就离散化了.

2. 回归分析在于建立自变量与因变量的回归函数关系，方差分析的重点在于判定各因素对指标有无影响和影响的大小、因素间的交互作用是否存在等.

3. 回归分析的设计矩阵，一般要求是满秩的，在方差分析中设计阵的元素，一般只取 0，1 两个值，因而设计矩阵多为降秩的，需要加上约束条件.

4. 方差分析比回归分析处理的问题要复杂些. 回归分析的主要内容在于回归函数，方差分析要涉及诸多的效应估计和检验，方差分解等.

如果设计矩阵满足正交化条件，在计算上就有一种简便格式：

$$\boldsymbol{Y} = \underset{\sim}{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{e},\ E\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},\ D(\boldsymbol{e}) = \sigma^2 I_N,$$

式中 $\underset{\sim}{X}$ 是 $N \times k$ 阶设计矩阵.

满足一定约束条件所考虑的统计问题大致有：

1. 检验各种效应是否存在，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0 (r \leqslant k)$.

2. 若经检验某种效应存在，进一步提出 $\alpha_1 = \alpha_2$ 的检验问题，或 $\alpha_1 - \alpha_2$ 的估计问题.

3. 在分析的基础上，定出各个因素的一个(或多个)最好的组合，称为最优化条件，以便对指标(变量)发挥好的效果.

协方差分析(analysis of covariance) 研究方差分析模型与回归模型的一种线性模型：

$$\boldsymbol{Y} = \underset{\sim}{X}_1\boldsymbol{\alpha} + \underset{\sim}{X}_2\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e},\ E\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},\ D(\boldsymbol{e}) = \sigma^2 I_N,$$

式中 $\underset{\sim}{X}_1\boldsymbol{\alpha}$ 是模型的方差分析部分，设计矩阵 $\underset{\sim}{X}_1$ 中的元素一般取值 0 或 1，参数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 有一定的约束条件；$\underset{\sim}{X}_2\boldsymbol{\beta}$ 是模型的回归部分，设计矩阵 $\underset{\sim}{X}_2$ 中变量是连续型的. 因为含有两种类型因素(连续型，属性型)的混合，故称之为协方差分析模型. 但是这两部分不能同等对待，主要的还是方差分析部分，而回归部分只是因某些变量不能完全人为地控制而不得已引入的. 为此，需要介绍协方差分析应用的技巧.

第一步，由

$$\boldsymbol{Y} - \underset{\sim}{X}_2\boldsymbol{\beta} = \underset{\sim}{X}_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{e} \tag{1}$$

求出 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最小二乘估计

$$\boldsymbol{\alpha} = (\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T(\boldsymbol{Y} - \underset{\sim}{X}_2\boldsymbol{\beta}). \tag{2}$$

第二步，由 $Y-\underset{\sim}{X}_1\alpha=\underset{\sim}{X}_2\beta+e$，求出 β 的最小二乘估计

$$\beta=(\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_2)^{-1}\underset{\sim}{X}_2^T(Y-\underset{\sim}{X}_1\alpha) \qquad (3)$$

由

$$\begin{cases}\alpha=(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T(Y-\underset{\sim}{X}_2\beta)\\ \beta=(\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_2)^{-1}\underset{\sim}{X}_2^T(Y-\underset{\sim}{X}_1\alpha)\end{cases} \qquad (4)$$

在某些约束条件下解出的 α,β，便是协方差分析模型中参数向量 α,β 的最小二乘估计.

协方差分析模型（model of analysis of covariance） 见"协方差分析".

多维列联表（multidimensional contingency table） 一种统计模型. 一个总体中的个体 X 可有多种属性. 例如，就某一种属性 A 而言，它属于 r 个类 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 当中之一；就另一个属性 B 而言，它属于 s 个类 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 当中之一；就属性 C 而言，它属于 t 个类 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ 当中之一. 其目的是要考察个体 X 在 $r\times s\times t$ 个类中的频率分布和属性 A,B,C 是否相互独立. 以上的情况就是三维列联表（或称 $k=r\times s\times t$ 重列联表）. 一般可以设计 m 维列联表（$m\geqslant 2$）. 二维列联表可以在平面上表示如下：

样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 在 A_iB_j 类中出现的次数为 n_{ij}，其频率为 $n_{ij}/n(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s)$.

二维列联表

	B_1	B_2	$\cdots$	B_s	行和
A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1s}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2s}	$n_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rs}	$n_{r\cdot}$
列和	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot s}$	n

表中

$$n_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{s}n_{ij}，表示第\ i\ 行元素的和\quad(i=1,2,\cdots,r)；$$

$$n_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{r}n_{ij}，表示第\ j\ 列元素的和\quad(j=1,2,\cdots,s)；$$

$$n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}，表示总和.$$

列联表的用处：

1. 可以用每个类（A_iB_j）的频率 n_{ij}/n 去估计类（A_iB_j）的概率.

2. 可以用来检验两个属性 A,B 是否独立. 检验统计量为

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n\hat{P}_{ij})^2}{n\hat{P}_{ij}},$$

式中 P_{ij} 表示事件 $\{A=A_i,B=B_j\}$ 的概率，

$$\hat{P}_{ij}=\frac{n_{i\cdot}\times n_{\cdot j}}{n^2}$$

是 P_{ij} 的估计量. 可以证明：当 A 与 B 独立时，统计量 χ^2 的极限分布是 χ^2 分布，自由度为

$$(r-1)(s-1).$$

主成分分析（principal component analysis） 亦称主分量分析. 多元数据处理的重要方法之一. 是将多个指标综合为少数几个综合性指标的一种统计分析方法. 在多指标（变量）问题的研究中，变量间经常存在一定的相关性. 当变量很多时，在高维空间中研究样本的分布规律常常比较困难，而主成分分析的一个目的是简化数据结构，找出 m $(m<p)$ 个不相关的主成分分量来代替原来众多的 p 个变量. 在这过程中，既要达到降维目的，又要尽量多地反映原来的信息量. 主成分分析的另一个作用是揭示变量之间的一些关系. 例如，主成分应用在回归分析中，可以揭示回归变量间的近似共线关系. 这对于数据分析，将带来一些重要信息.

1. 当总体协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 已知时，根据协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 提供的信息，获得的主成分，称为总体主成分. 具体作法是：设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_p)^T$ 是 p 维随机向量，$D(X)=\underset{\sim}{\Sigma}$ 已知，$\underset{\sim}{\Sigma}$ 的特征根按大小排列为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p\geqslant 0$，相应的特征向量是单位正交向量 $L_1,L_2,\cdots,L_p$，则 X 的第 k 个主成分为

$$Z_k=L_k^TX\quad(k=1,2,\cdots,p).$$

这 p 个主成分不相关，且有 $D(Z_k)=\lambda_k$，Z_k 与原变量 x_i 的相关系数为

$$\rho_{ik}=l_{ik}\sqrt{\lambda_k}\Big/\sqrt{\sigma_{ii}}\quad(i,k=1,2,\cdots,p),$$

式中 l_{ik} 是特征向量 L_k 的第 i 个分量，亦称为原变量 x_i 在主成分 Z_k 中的载荷. 而 σ_{ii} 是 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 阵的对角线上的第 i 个元素. 第 k 个主成分 Z_k 的方差 $D(Z_k)=\lambda_k$，它所提供的方差信息可用比率

$$\lambda_k\Big/\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$$

来度量，称为主成分 Z_k 的方差贡献率. 而称

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big/\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\quad(m\leqslant p)$$

为主成分 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_m$ 的累积方差贡献率. 一般令 m 所取的最小正整数能使累积贡献率 $\geqslant 0.85$. 有时也用相关矩阵 $\underset{\sim}{R}$ 代替协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 作主成分分析.

2. 当总体协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 未知时，根据其估计量 $\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 确定的主成分，称为样本主成分. 令 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 是来自总体容量为 N 的随机样本. 样本协方差阵为

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}=\frac{1}{N-1}\underset{\sim}{S},$$

式中

$$\underset{\sim}{S}=\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{\alpha}-\overline{X})(X_{\alpha}-\overline{X})^{T}.$$

记$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$的特征根为 $\hat{\lambda}_1\geqslant\hat{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_p\geqslant0$，相应的特征向量是单位正交化向量 $l_1,l_2,\cdots,l_p$. 令 $z_k=l_k^TX$，$\vec{X}$ 为任一次观测，称 z_k 为第 k 个样本主成分($k=1,2,\cdots,p$). 将样本 $X_\alpha=(x_{\alpha1},x_{\alpha2},\cdots,x_{\alpha p})^T$ 代入上式得第 α 个样本的第 k 个主成分

$$z_{\alpha k}=l_k^TX_\alpha\quad(k=1,2,\cdots,p,\alpha=1,2,\cdots,N).$$

记 $z_\alpha=(z_{\alpha1},z_{\alpha2},\cdots,z_{\alpha p})^T$ 则称 z_α 是第 α 个样本 X_α 的主成分($\alpha=1,2,\cdots,N$).

在实际应用中，不同的变量往往有不同的量纲，为了消除由于量纲不同可能带来的不合理结果，对原数据常采用标准化变换

$$x_{\alpha i}^{*}=\frac{x_{\alpha i}-\overline{x}_i}{\sqrt{S_{ii}/(N-1)}}$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,N;\quad i=1,2,\cdots,p).$$

变换后的数据阵仍记为 $\underset{\sim}{X}$($N\times p$ 阶)，这时，样本协方差阵就是样本相关系数阵，即

$$\hat{\underset{\sim}{R}}=\frac{1}{N-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}.$$

从 $\hat{\underset{\sim}{R}}$阵出发确定的样本主成分，在实际应用中可能更加合理. 把 p 个指标综合为少数几个主成分后，还可以再利用主成分数据进行聚类分析、判别分析和回归分析等. 由此可知，主成分分析也可以被看做是多元数据处理中的一个重要步骤.

主分量分析(principal component analysis) 即“主成分分析”.

总体主成分(principal component for population) 见“主成分分析”.

方差贡献率(contribution rate of variance) 见“主成分分析”.

积累方差贡献率(contribution rate of accumulated variance) 见“主成分分析”.

样本主成分(principal component for sample) 见“主成分分析”.

因子分析(factor analysis) 多元统计分析中的降维方法之一. 即把原来的可观测向量，综合成少数几个不可观测的所谓公因子的线性组合与特殊因子之和. 这种共同因子是对原变量的一种高度概括. 所以在每个具体的因子分析实例中，对这些公因子含义的解释往往是它的难点之一. 因子分析的形成和早期发展，一般认为是从斯皮尔曼(Spearman, C.)在 1904 年发表的文章开始，他用这种方法解决智力测验得分的统计分析问题. 后来在心理学、教育学、社会科学、经济学等领域都取得了成功的应用.

设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_p)^T$ 是可观测的随机向量，其均值向量为 μ，协方差阵为$\sum$. 因子分析模型是

$$X=\mu+\underset{\sim}{A}F+\varepsilon,$$

式中 F 为 m 维随机向量($m<p$)，且 $E(F)=\mathbf{0}$，$D(F)=\underset{\sim}{I}_m$. ε 为 p 维随机向量，且 $E(\varepsilon)=\mathbf{0}$，

$$D(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & 0\\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_p^2\end{pmatrix}\triangleq\underset{\sim}{M},\quad \mathrm{cov}(F,\varepsilon)=\underset{\sim}{0},$$

式中 $\underset{\sim}{A}$为 $p\times m$ 阶参数矩阵；F 称为 X 的公共因子；ε 称为 X 的特殊因子(或惟一因子)；$\underset{\sim}{A}$称为公因子 F 的载荷矩阵. $\underset{\sim}{A}$中元素 $a_{ij}=\mathrm{cov}(x_i,F_j)$ ($i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,m$)，表示第 i 个变量在第 j 个公共因子上的载荷. $\underset{\sim}{A}$中各行元素的平方和记为

$$h_{2i}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2\ (i=1,2,\cdots,p).$$

称 h_{2i} 为变量 x_i 的公因子方差，它反映变量 x_i 对 m 个公因子的依赖程度. $\underset{\sim}{A}$中各列元素的平方和记为

$$q_{2j}=\sum_{i=1}^{p}a_{ij}^2\ (j=1,2,\cdots,m).$$

称 q_{2j} 为公因子 F_j 对 X 的贡献，它是衡量公共因子相对重要性的指标.

在以上因子分析模型中，要求公因子 F 正交(或不相关)，即 $D(F)=\underset{\sim}{I}_m$，这样的因子分析模型称为正交因子模型. 更一般地，若 m 个公共因子相关(斜交)，即 $D(F)=\underset{\sim}{V}$ ($\underset{\sim}{V}\geqslant0$)，这时，相应的因子分析模型称为斜交因子模型.

在实际应用中，要估计参数矩阵 $\underset{\sim}{A}$，通常是用总体协方差阵$\underset{\sim}{\Sigma}$(或样本协方差阵$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}=\underset{\sim}{S}/(N-1)$的特征根及特征向量，经过适当运算，可得到 $\underset{\sim}{A}$的估计量$\hat{\underset{\sim}{A}}$($\underset{\sim}{S}$含义(参见“样本协方差矩阵”).

公共因子(common factor) 见“因子分析”.

特殊因子(special factor) 见“因子分析”.

因子载荷阵(factor loading matrix) 见“因子分析”.

公因子方差(variance of common factor) 见“因子分析”.

正交因子模型(orthogonal factor model) 见“因子分析”.

斜交因子模型(oblique factor model) 见“因子分析”.

因子旋转(factor rotation) 一种变换. 就是旋转因子的坐标轴. 在因子分析中，当求得公共因子及其因子载荷阵 $\underset{\sim}{A}$后，对公因子要给出具有实际意义的合理解释. 如果公共因子难以和实际问题相对应，可对公因子进行旋转，使得旋转后的公因子具有实际意义. 常用的旋转方法有两种：

1. 方差极大的正交旋转. 记因子载荷阵为

$$\underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix}.$$

变量 x_i 的公因子方差为

$$h_i^2=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \quad (i=1,2,\cdots,p).$$

称

$$V(\underset{\sim}{A})=\sum_{j=1}^{m} V_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}(d_{ij}^2-\bar{d}_j)^2$$

为因子载荷阵 $\underset{\sim}{A}$的总方差,其中

$$d_{ij}=\frac{a_{ij}}{h_i},\quad \bar{d}_j=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d_{ij}^2 \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

当每个因子的载荷(即 $\underset{\sim}{A}$中每一列)的绝对值趋于 0 或 1 时,$V(\underset{\sim}{A})$值就大,这时相应的公共因子具有简单的结构. 所谓方差极大的正交旋转,即选择正交阵 $\underset{\sim}{\Gamma}$,使 $V(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Gamma})$达最大. 当 $m=2$ 时,正交阵可表为

$$\underset{\sim}{\Gamma}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

适当地选择旋转角度 φ,可使 $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\Gamma}$的总方差达最大; 当 $m>2$ 时,可逐次对每两个因子进行旋转,m 个公因子全部配对旋转,共需旋转 C_m^2 次. 全部旋转完结称为一轮(或一个循环,一圈). 一轮完成后再继续做下一轮. 每轮后,总方差单调不减且有界,因此,该算法一定收敛. 在实际计算时,当 V 值变化不大时,可停止旋转.

2. 方差极大的斜交旋转. 若正交旋转后的公因子仍然没有明显的实际意义,亦可作方差极大的斜交旋转. 选择适当的非退化矩阵 $\underset{\sim}{P}$($\underset{\sim}{P}$非正交阵),使 $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}$的总方差达最大的变换称为方差极大的斜交旋转. 变换矩阵 $\underset{\sim}{P}$是一般的非奇异矩阵,故具有更大的选择性. 具体旋转方法与方差极大的正交旋转相同.

方差极大的正交旋转(varimax orthogonal rotation) 见"因子旋转".

方差极大的斜交旋转(oblique rotation of varimax) 见"因子旋转".

因子得分(factor score) 一种估计值. 是在因子分析中,对不可观测的公因子做出的估计值. 因子分析是将变量分解为公因子和特殊因子的线性组合. 由于 m 个公因子能反映原 p 个变量的相关关系($m<p$),故反过来考察,将公因子表成变量的线性组合 $F_j=b_{j1}x_1+b_{j2}x_2+\cdots+b_{jp}x_p(j=1,2,\cdots,m)$,如能估出 b_{ji},就可以估计 F_j 的值,称之为公因子 F_j 的得分. 这样,就把 p 维空间的问题化为 m ($m<p$) 维空间的问题. 在低维空间 R_m 中,进一步考察样本分类或把样本的公因子得分作为进一步分析的原始数据. 设 $F_j=b_{j1}x_1+b_{j2}x_2+\cdots+b_{jp}x_p(j=1,2,\cdots,m)$,估计$\{b_{ji},i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,m\}$常用的方法有两种:

1. 回归法. 假设原变量均为标准化变量. 在最小二乘意义下,用回归分析方法可建立 $F_1,F_2,\cdots,F_m$ 对 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 的回归方程

$$\hat{\boldsymbol{F}}=(\hat{F}_1,\hat{F}_2,\cdots\hat{F}_m)^T=\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{R}^{-1}\boldsymbol{X},$$

其中 $\underset{\sim}{A}$为因子载荷阵;$\underset{\sim}{R}$为 $\boldsymbol{X}$ 的相关阵. 此方法是汤普森(Thompson,K.)提出来的,所得因子得分 $\hat{\boldsymbol{F}}$,文献上常称为巴特利特因子得分.

2. 加权最小二乘法. 在因子分析模型中,特殊因子的方差 $\mathrm{var}(\varepsilon_i)=\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,p)$一般不相等. 以 $1/\sigma_i$ 为权,在加权最小二乘意义下,得

$$\hat{\boldsymbol{F}}=(\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{A})^{-1}\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{D}^{-1}\boldsymbol{X},$$

其中 $\underset{\sim}{D}=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_p^2)$. 若假定 $\boldsymbol{X}\sim N_p(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{F},\underset{\sim}{D})$,则 $\boldsymbol{F}$ 的最大似然估计与加权最小二乘估计一致. 这个估计也称为巴特利特因子得分. 在实际应用中,利用样本可得到样本相关阵 $\hat{\underset{\sim}{R}}$,进而求得 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{D}$ 的估计为 $\hat{\underset{\sim}{A}},\hat{\underset{\sim}{D}}$,代入上式,对每个样本

$$\boldsymbol{X}_t=(x_{t1},x_{t2},\cdots,x_{tp})^T \quad (t=1,2,\cdots,n)$$

可计算相应的因子得分

$$\hat{\boldsymbol{F}}_t=(f_{t1},f_{t2},\cdots,f_{tm})^T \quad (t=1,2,\cdots,n).$$

典型相关分析(canonical correlation analysis) 研究两组变量之间相关关系的一种统计方法. 例如,在经济学中,研究两组(价格与消费)变量之间的一些变量关系;在生物学中,研究生物群体与生活环境诸变量的关系;在地质学中,岩石群与形成原因诸变量之间的关系等. 假设要研究的是两组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_q$ 的相关关系,可对每组变量各自找出变量的线性组合,使这两个线性组合形成的新变量具有最大的相关,称这种相关为典型相关,这两个新变量称为典型变量. 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_p)^T$, $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_q)^T$,随机向量

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}$$

的均值为 $\mathbf{0}$ 向量,协方差矩阵$\underset{\sim}{\Sigma}$正定,其阶数为$(p+q)\times(p+q)$. 不妨设 $p\leqslant q$. 如果存在 $\boldsymbol{a}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{p1})^T$ 和 $\boldsymbol{b}_1=(b_{11},b_{21},\cdots,b_{q1})^T$,使得

$$\rho(\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{X},\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{Y})=\max_{\substack{\mathrm{var}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{X})=1\\ \mathrm{var}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{Y})=1}}\rho(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{Y}),$$

则称 $\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{X},\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 的第一对(组)典型相关变量,它们之间的相关系数称为第一个典型相关系数. 如果存在 $\boldsymbol{a}_r=(a_{1r},a_{2r},\cdots,a_{pr})^T$ 和 $\boldsymbol{b}_r=(b_{1r},b_{2r},\cdots,b_{qr})^T(r=2,3,\cdots,p)$使得:

1. $\boldsymbol{a}_r^T\boldsymbol{X},\boldsymbol{b}_r^T\boldsymbol{Y}$ 和前 $r-1$ 对典型变量不相关.

2. $\mathrm{var}(\boldsymbol{a}_r^T\boldsymbol{X})=1,\quad \mathrm{var}(\boldsymbol{b}_r^T\boldsymbol{Y})=1.$

3. $a_r^T X$ 与 $b_r^T Y$ 为 X, Y 的线性组合中相关系数最大者,则称 $a_r^T X, b_r^T Y$ 为 X, Y 的第 r 对典型相关变量. 它们之间的相关系数,称为第 r 个典型相关系数.

在典型相关分析中,当总体协方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 未知时,根据其估计量 $\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 确定的典型变量,称为样本典型相关变量. 设

$$Z_\alpha = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, N)$$

为来自总体

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

的样本 $(N > p + q)$,总体协方差阵

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

的估计量为

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}} = \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_{11} & \underset{\sim}{S}_{12} \\ \underset{\sim}{S}_{21} & \underset{\sim}{S}_{22} \end{pmatrix},$$

式中 $\underset{\sim}{\Sigma}_{11}, \underset{\sim}{S}_{11}$ 为 $p \times p$ 阶矩阵,且

$$\underset{\sim}{S}_{11} = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})^T,$$

$$\underset{\sim}{S}_{12} = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \bar{X})(Y_\alpha - \bar{Y})^T,$$

$$\underset{\sim}{S}_{22} = \sum_{\alpha=1}^{N} (Y_\alpha - \bar{Y})(Y_\alpha - \bar{Y})^T.$$

特征方程 $|\underset{\sim}{S}_{12}\underset{\sim}{S}_{22}^{-1}\underset{\sim}{S}_{21} - \lambda^2 \underset{\sim}{S}_{11}| = 0$ 及 $|\underset{\sim}{S}_{21}\underset{\sim}{S}_{11}^{-1}\underset{\sim}{S}_{12} - \lambda^2 \underset{\sim}{S}_{22}| = 0$ 具有相同的非零特征根

$$\lambda_1^2 \geqslant \lambda_2^2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p^2 \geqslant 0.$$

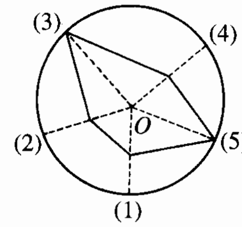
而从 $(\underset{\sim}{S}_{12}\underset{\sim}{S}_{22}^{-1}\underset{\sim}{S}_{21} - \lambda_r^2 \underset{\sim}{S}_{11})\alpha_r = \mathbf{0}$ $(r = 1, 2, \cdots, p)$ 可得特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$;又从 $(\underset{\sim}{S}_{21}\underset{\sim}{S}_{11}^{-1}\underset{\sim}{S}_{12} - \lambda_r^2 \underset{\sim}{S}_{22})\beta_r = \mathbf{0}$ $(r = 1, 2, \cdots, p)$ 可得特征向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$. 则 $(\alpha_r^T X, \beta_r^T Y)$ 为 X, Y 的第 r 对样本典型变量. $\rho(\alpha_r^T X, \beta_r^T Y) = \lambda_r$ 为第 r 个样本典型相关系数 $(r = 1, 2, \cdots, p)$.

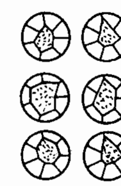
典型变量(canonical variables) 见"典型相关分析".

典型变量的相关系数(correlation coefficient of canonical variables) 见"典型相关分析".

多维数据的图示法(graphical representation of multidimensional data) 用平面图形表示多维数据的一类方法. 图形直观、形象,容易给人留下深刻印象. 最常用的图示法有雷达图法和星座图法等:

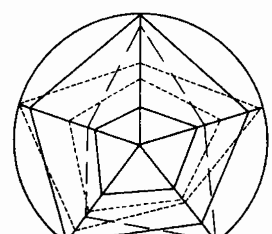
1. 雷达图法:雷达图的具体作法是:以 O 点为圆心,以适当的长度为半径画一个圆,然后将圆分成相等的 m 个弧,分别连结圆心与各个分点,得到 m 个辐射半径;将这 m 个半径所在的直线分别作为 m 个变量的坐标轴;以圆心 O 为各坐标轴的公共原点,并分别以各坐标轴指向圆周的方向为它们各自的正方向,再分别根据数据波动的大小将每条坐标轴标上刻度. 这样,就可将每一个 m 维样本点表示

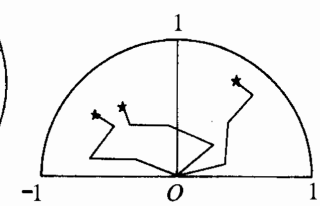




在一个平面图上. 若按照顺序连结相应的坐标,便形成一个 m 边形. 换句话说,用一个 m 边形表示一个 m 维样本点的特征.

2. 星座图法:星座图就是将样本点标在一个半





圆内,很像天文学上表示星座的图象. 在作星座图之前,先要将每个高维样本数据 $\{x_{\alpha j}: \alpha = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m\}$ 变换成 π 弧度 $y_{\alpha j}$,并使其值落在 $[0, \pi]$ 范围内. 可取如下变换

$$y_{\alpha j} = \frac{x_{\alpha j} - \min\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} x_{\alpha j}}{\max\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} x_{\alpha j} - \min\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} x_{\alpha j}} \pi$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m).$$

此时 $0 \leqslant y_{\alpha j} \leqslant \pi$. 相应于每个变量 x_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$,取一个权数 $w_j > 0$,使得

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1.$$

星座图的具体作法:以 O 为圆心,以 1 为半径作一个上半圆. 并作相应于这半圆的直径. 将 O 看成原点,平面看成复平面,则 X_α(m 维向量)的星座为

$$Z_\alpha = \sum_{j=1}^{m} w_j e^{i y_{\alpha j}} = \sum_{j=1}^{m} w_j \cos y_{\alpha j} + i \sum_{j=1}^{m} w_j \sin y_{\alpha j}.$$

Z_α 的路径由下列 $m+1$ 个半圆内的点顺序连结而成,它的坐标为:

$$\left\{(0,0), \left(\sum_{y=1}^{l} w_j \cos y_{\alpha j}, \sum_{j=1}^{l} w_j \sin y_{\alpha j}\right), \quad l = 1, 2, \cdots, m, \right\}$$

通过星 Z_α 的位置和它的路径可全面刻画每个样本

点的特征.

3. 当样本容量较大时,可先算出样本的主成分(参见"主成分分析"),然后取出前二(或三)个主成分,画出常规的二(或三)维点的散布图作为多维数据的一种近似表示. 这种图有助于发现多维数据中的异常点.

雷达图法(radar chart) 见"多维数据的图示法".

星座图法(constellation graphical method) 见"多维数据的图示法".

判别分析(discriminate analysis) 多维数据的统计分类方法. 在现实世界中,分类判断问题是经常遇到的. 例如,医生根据某人的一些化验结果,要判断是属于健康人还是病人;考古学家从古墓中挖掘出一具骨骼,要判断它的性别;在天气预报中,根据已有的资料(气温、气压、湿度、风向等),判断明天是晴天、阴天还是雨天等. 这些问题的共性是,人们需要依据从个体上测得的一些指标来判断个体属于哪个类型(即总体). 一般地,设有 k 个总体,希望建立一个准则,对给定的任意一个样本 $\boldsymbol{X}$,依据这个准则,能够判定它属于哪一个总体. 当然,这种准则在某种意义下必须是最优的. 例如,错判概率最小或错判损失最小等. 这就是判别问题的一般要求.

在实际应用中,作判别之前,需要有一批来自各类且类别已清楚的样本(有的书上称为训练样本),并首先利用这些样本的信息,具体建立判别准则(或判别函数). 因此判别分析亦称为"有师可学"的分类. 由于对假设的前提、判别的依据及处理的方法之不同,可得出不同的判别方法. 常用的判别方法有:距离判别法、费希尔判别法、贝叶斯判别法、逐步判别法、序贯判别法、似然比判别法、概率判别法等.

距离判别(discrimination by distance) 一种常用的多维数据分类判别方法. 它是根据样本与哪一个总体的距离最近,就确定该样本属于哪一个总体的一种判别方法. 设有 k 个 p 维总体 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k (k \geqslant 2)$,它们的均值向量和协方差矩阵分别为

$$\mu_i,\ \underset{\sim}{\Sigma}_i\ (i = 1, 2, \cdots, k).$$

用

$$D(\boldsymbol{X}, Q_i) = (\boldsymbol{X} - \mu_i)^T \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \mu_i)$$

表示样本 $\boldsymbol{X}$ 到总体 Q_i 的马氏距离(参见"样本间的距离". 其实根据需要,可采用任何一种距离). 判别的准则为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} \in Q_t & (\text{若 } D(\boldsymbol{X}, Q_t) < D(\boldsymbol{X}, Q_i), \\ & \quad \text{且 } i \neq t; i, t = 1, 2, \cdots, k), \\ \text{待 判} & (\text{若有两个或两个以上最小距离}). \end{cases}$$

若 μ_i, $\underset{\sim}{\Sigma}_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 未知,可利用抽取的样本来估计. 设从 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 中分别抽取如下随机样本

$$Q_1:\quad \boldsymbol{X}_1^{(1)}, \boldsymbol{X}_2^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{X}_{n_1}^{(1)},$$
$$Q_2:\quad \boldsymbol{X}_1^{(2)}, \boldsymbol{X}_2^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{X}_{n_2}^{(2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_k:\quad \boldsymbol{X}_1^{(k)}, \boldsymbol{X}_2^{(k)}, \cdots, \boldsymbol{X}_{n_k}^{(k)}.$$

记

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

此处 $\boldsymbol{X}_\alpha^{(i)} (i = 1, 2, \cdots, k, \alpha = 1, 2, \cdots, n_i)$ 均为 p 维向量. 令

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{t=1}^{n_i} \boldsymbol{X}_t^{(i)} \triangleq \overline{\boldsymbol{X}}^{(i)},$$

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{t=1}^{n_i} (\boldsymbol{X}_t^{(i)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(i)})(\boldsymbol{X}_t^{(i)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(i)})^T$$
$$= \frac{1}{n_i - 1} \underset{\sim}{S}_i.$$

当已知 $\underset{\sim}{\Sigma}_1 = \underset{\sim}{\Sigma}_2 = \cdots = \underset{\sim}{\Sigma}_k = \underset{\sim}{\Sigma}$ 时,$\underset{\sim}{\Sigma}$ 的估计量为

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}} = \frac{1}{n - k} \sum_{i=1}^{k} \underset{\sim}{S}_i.$$

然后,用估计量代替总体参数,便可得到相应的判别准则. 特别地,当 $k = 2$ 时,称为二总体(或二级)距离判别. 设 $\underset{\sim}{\Sigma}_1 = \underset{\sim}{\Sigma}_2 = \underset{\sim}{\Sigma}$,并记

$$W(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}[D(\boldsymbol{X}, Q_2) - D(\boldsymbol{X}, Q_1)]$$
$$= (\boldsymbol{X} - \bar{\mu})^T \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\mu_1 - \mu_2)$$
$$= (\boldsymbol{X} - \bar{\mu})^T \boldsymbol{a},$$

其中

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2};\ \boldsymbol{a} = \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\mu_1 - \mu_2).$$

这时,$W(\boldsymbol{X})$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的线性判别函数,$\boldsymbol{a}$ 称为判别系数. 判别准则为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} \in Q_1 & (W(\boldsymbol{X}) > 0), \\ \boldsymbol{X} \in Q_2 & (W(\boldsymbol{X}) < 0), \\ \text{待 判} & (W(\boldsymbol{X}) = 0). \end{cases}$$

特别地,当 $k = 2, p = 1$ 时,有 $\underset{\sim}{\Sigma} = \sigma^2$,于是

$$W(\boldsymbol{X}) = W(x) = \frac{(x - \bar{\mu})(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma^2}.$$

此处 $\bar{\mu} = (\mu_1 + \mu_2)/2$. 不妨设 $\mu_1 < \mu_2$,这时的判别准则为

$$\begin{cases} x \in Q_1 & (x < \bar{\mu}), \\ x \in Q_2 & (x > \bar{\mu}), \\ \text{待 判} & (x = \bar{\mu}). \end{cases}$$

线性判别函数(linear discriminate function) 一种判别准则. 在判别分析中,利用样本的线性函数进行判别,则称此函数为线性判别函数. 判别函数中的系数,称为判别系数.

判别系数(discriminate coefficient)　见"线性判别函数".

二总体判别(discrimination of two populations)　判别分析的一种情形.判别分析中,需判别的总体个数 $k=2$ 的情形,称为二总体判别.

贝叶斯判别(Bayes discrimination)　一种常用的多维数据分类判别方法.它是把贝叶斯决策思想用于判别分析而得到的判别方法.用贝叶斯判别法进行判别归类时,所带来的平均损失为最小.设有 k 个总体:$Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$,分别具有 p 维密度函数 $P_1(\boldsymbol{X}),P_2(\boldsymbol{X}),\cdots,P_k(\boldsymbol{X})$,假设 k 个总体出现的先验概率分别为

$$q_1,q_2,\cdots,q_k\left(q_i>0,\sum_{i=1}^{k}q_i=1\right).$$

判别法 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_k\}$ 是空间 R^p 的一个划分.$P(j|i;D)$ 和 $L(j|i;D)$ 分别表示,样本来自 Q_i 而用判别法 D 作判别时,误判为 Q_j 的概率及其损失,简记为 $P(j|i)$ 和 $L(j|i)$.则有

$$L(j|j)=0\qquad (j=1,2,\cdots,k),$$

$$P(j|i;D)=\int_{D_j}P_i(x)\mathrm{d}x\quad (j\neq i).$$

判别法 D 带来的平均损失为

$$g(D)=\sum_{i=1}^{k}q_i\sum_{j=1}^{k}P(j|i)L(j|i).$$

个体 $\boldsymbol{X}$ 实属 $Q_i(i=1,2,\cdots,k,i\neq j)$ 被错误地归入 Q_j 的平均损失为

$$h_j(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{k}q_iL(j|i)P_i(\boldsymbol{X}).$$

贝叶斯判别的解 $D_*=(D_1^*,D_2^*,\cdots,D_k^*)$ 满足

$$g(D^*)=\min_{D}g(D),$$

其中 $D_{*t}=\{\boldsymbol{X}\mid h_t(\boldsymbol{X})<h_j(\boldsymbol{X}),j\neq t,j=1,2,\cdots,k\}$ $(t=1,2,\cdots,k)$.D^* 称为是按照贝叶斯决策思想制定的判别法,它具有平均损失最小的优良性质.但应用此判别法时,必须知道 k 个总体的分布密度函数、先验概率和损失函数等信息.当 k 个总体服从多元正态分布,有公共的协差阵,且各总体先验概率相等,各错判损失相同时,贝叶斯判别与使用马氏距离的距离判别等价.

费希尔判别(Fisher discrimination)　通过投影变换的一种分类方法.它的基本思想是选择投影方向,使得来自不同总体的 p 维样本点的投影尽可能地分开,而来自同一总体的样本点的投影尽可能地集中.设有 k 个总体 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$,从总体 Q_i 中抽取样本

$$\boldsymbol{X}_1^{(i)},\boldsymbol{X}_2^{(i)},\cdots,\boldsymbol{X}_{n_i}^{(i)}\quad (i=1,2,\cdots,k),$$

记

$$\underset{\sim}{B}=\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}-\overline{\boldsymbol{X}})(\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}-\overline{\boldsymbol{X}})^T,$$

称为组间离差阵;

$$\underset{\sim}{E}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha=1}^{n_i}(\boldsymbol{X}_\alpha^{(i)}-\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)})(\boldsymbol{X}_\alpha^{(i)}-\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)})^T$$

称为组内离差阵,其中 $\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)},\overline{\boldsymbol{X}}$ 分别为总体 Q_i 的样本均值及总均值.投影方向 $\boldsymbol{a}$ 应使得判别率

$$\Delta(\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{a}^T\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^T\underset{\sim}{E}\,\boldsymbol{a}}$$

达到最大值.它等价于使 $\Delta(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}^T\underset{\sim}{B}\boldsymbol{a}$ 在条件 $\boldsymbol{a}^T\underset{\sim}{E}\boldsymbol{a}=1$ 下达最大值.利用拉格朗日乘数法求条件极值,这时投影方向 $\boldsymbol{a}$ 正好是矩阵 $\underset{\sim}{E}^{-1}\underset{\sim}{B}$ 的最大特征根对应的特征向量.

在二总体判别场合,由于只有一个非零特征根对应的特征量可用,这时费希尔准则下的线性判别函数为 $u(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$.对于待判的新样本 $\boldsymbol{X}$,记 $\bar{u}(i)=\boldsymbol{a}^T\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)}(i=1,2,\cdots,k)$,$u(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$,判别准则为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}\in Q_t\left(\dfrac{|u(\boldsymbol{X})-\bar{u}(t)|}{\hat{\sigma}_t}<\dfrac{|u(\boldsymbol{X})-\bar{u}(i)|}{\hat{\sigma}_i}\right),\\ \qquad (i\neq t;\ i=1,2,\cdots,k)\\ \text{待 判}\quad \text{当存在 } i\neq t,\text{使}\\ \qquad \dfrac{|u(\boldsymbol{X})-\bar{u}(t)|}{\hat{\sigma}_t}=\dfrac{|u(\boldsymbol{X})-\bar{u}(i)|}{\hat{\sigma}_i},\end{cases}$$

其中

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{1}{n_i-1}\boldsymbol{a}^T\underset{\sim}{S}_i\boldsymbol{a}$$

为 Q_i 的样本投影后的样本方差.而且

$$\underset{\sim}{S}_i=\sum_{\alpha=1}^{n_i}(\boldsymbol{X}_\alpha^{(i)}-\overline{\boldsymbol{X}}^{(i)})(\boldsymbol{X}_\alpha^{(i)}-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})^T.$$

在多个总体的场合,因为非零特征根可以有多个,依次记为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m>0,m\leqslant\min(k,p)$,所以对应的 m 个特征向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 都应该用于分类.这时作投影变换:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1^{(i)T}\\ \boldsymbol{Y}_2^{(i)T}\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_{n_i}^{(i)T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1^{(i)T}\\ \boldsymbol{X}_2^{(i)T}\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_{n_i}^{(i)T}\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\ (i=1,2,\cdots,k)$$

其中 $\boldsymbol{Y}_1^{(i)T},\boldsymbol{Y}_2^{(i)T},\cdots,\boldsymbol{Y}_{n_i}^{(i)T}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 是来自总体 Q_i 的经过变换后的样本(维数已变为 m).其后就可以使用距离判别或贝叶斯判别等其他方法对变换后的样本作判别分析.由于变换后的 m 个变量具有无关性等优点,使其后的判别分析工作更为方便.

组间离差阵(between groups dispersion matrix)　见"费希尔判别".

组内离差阵(within groups dispersion matrix)　见"费希尔判别".

聚类分析(clustering analysis)　多维数据的统计分类方法.它与判别分析的最大差别是事先并不知道所需聚类的各个样本各属何类,甚至分类数也

可能未知.因此聚类分析也称为"无师可学"的分类.聚类分析中,首先需要解决分类依据,即什么样的对象比较亲近,从而应该聚成一类;然后是研究把对象分配到各类中的方法.在实践中,由于聚类目的要求不同,分类的准则和方法也可以有差别.设有 N 个 m 维样本的数据矩阵

$$\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nm} \end{pmatrix}$$

例如,$\underset{\sim}{X}$ 是 N 个学生的 m 门功课的成绩.这时可提出如下的分类要求:

1.N 个学生如何按成绩分类.

2.学生的哪些门功课的成绩比较相似.

前者的聚类对象为样本(矩阵中的行);后者是变量(列).为区分二者,依次称为 Q 型聚类和 R 型聚类.然而,脱离应用背景,从纯数学考虑,一个矩阵的行、列可由应用者自行定义.所以两型的区分就不是本质的了.为方便,把要聚类的样本或变量统称为聚类对象.

分类的依据是分类对象之间的亲近度.亲近度可以用距离度量,这时,两个分类对象被看成是两个点,距离最近的两个点最亲近.亲近度也可以用相似性(或相关性)来度量,这时,两个分类对象被看做是两个向量,其夹角最小(或相关系数最大)的两个向量最亲近.

最常用的聚类方法是谱系聚类法.开始时,每个对象各成一类,然后把最亲近的两个对象合并为一类.以后的每一步都是从现存的类中,合并最亲近的两类为一类,即每步减少一个类,直至得到所需的类数(或最终只有一个大类)为止.合并过程,包括合并时的亲近程度可绘制成一个谱系聚类图.需要注意的是,一旦有一类内含有多于一个对象,类与类之间的亲近度也有多种意义,从而对应着不同的聚类结果.谱系聚类方法也可以是反向进行的.即先把所有对象都放在一个大类中,然后按一定的准则逐步分割,每步总是把现存类中的某一个分割成两个,直至得到所需类数或每个类都只含一个对象为止.此外,还有动态聚类法和有序样本聚类法等,它们分别适用于分类对象很多和样本的顺序不能变更的聚类场合.

样本间距离(distance between two samples) 样本间亲近程度的一类度量.聚类分析中,当聚类对象为样本时,样本点间的距离是刻画样本之间亲近程度的一类度量.因为表示距离的度量方法有许多种,因此也就形成了多种多样的聚类方法.下边介绍几种在聚类中常用的距离.设 $\boldsymbol{X}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})$ $(i=1,2,\cdots,N)$是样本容量为 N 的 m 维样本.两个样本 $\boldsymbol{X}_i$ 与 $\boldsymbol{X}_j$ 之间的距离用 d_{ij} 表示.则:

1.闵科夫斯基距离

$$d_{ij}(q)=\left(\sum_{t=1}^{m}|x_{it}-x_{jt}|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

有几个特例:

当 $q=1$ 时,$d_{ij}(1)=\sum_{t=1}^{m}|x_{it}-x_{jt}|$ 称绝对距离;

当 $q=2$ 时,$d_{ij}(2)=\left(\sum_{t=1}^{m}|x_{it}-x_{jt}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为欧氏距离(即欧几里得距离);

当 $q=2k$,且 $k\to\infty$ 时,$d_{ij}(\infty)=\max\limits_{1\leqslant t\leqslant m}|x_{it}-x_{jt}|$ 称为切比雪夫距离.

2.兰斯距离(要求 $x_{it}>0,x_{jt}>0$)

$$d_{ij}(L)=\sum_{t=1}^{m}\frac{|x_{it}-x_{jt}|}{x_{it}+x_{jt}}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,N).$$

3.马氏距离(即马哈拉诺比斯距离)

$$d_{2ij}(M)=(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j)^T\underset{\sim}{\hat{\Sigma}}^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j)$$

$$(i,j=1,2,\cdots,N),$$

其中

$$\underset{\sim}{\hat{\Sigma}}=\frac{1}{N-1}\underset{\sim}{S},$$

$$\underset{\sim}{S}=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})^T;$$

$$\overline{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i.$$

马哈拉诺比斯距离(Mahalanobis distance) 见"样本间距离"和"距离判别".

相似系数(similar coefficient) 聚类分析中聚类对象亲近程度的一类度量.在聚类对象为变量时,有如下定义:

1.变量间的相似系数.两个变量向量的夹角余弦

$$C_{tl}(1)=\cos\varphi=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_{it}x_{il}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_{it}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_{il}^2}}$$

$$(t,l=1,2,\cdots,m),$$

式中 $x_{it},x_{il}(i=1,2,\cdots,N)$ 表示样本 $\boldsymbol{X}$ 的观测值 $\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 中的第 t 个和第 l 个样本观测值,两向量夹角余弦称为相似系数.当 $t=l$ 时,夹角 $\varphi=0$,这时 $C_{tl}(1)=1$,说明两个向量完全一样.当两个向量正交时,夹角 $\varphi=90°$,这时 $C_{tl}(1)=0$,说明两向量不相关(垂直).

2.变量间的相关系数.是观测数据作标准化处理后的夹角余弦,即

$$C_{tl}(2)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{it}-\bar{x}_t)(x_{il}-\bar{x}_l)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{it}-\bar{x}_t)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{il}-\bar{x}_l)^2}}$$

$$(t,l=1,2,\cdots,m),$$

式中

$$\bar{x}_t=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{it}\ (t=1,2,\cdots,m).$$

类与类之间的距离(distance between two clusters) 类与类间亲近程度的度量.聚类分析中经常要计算类与类之间的距离,用 D_{pq} 表示类 Q_p 与类 Q_q 之间的距离.设 Q_p 的样本为 $X_1^{(p)},X_2^{(p)},\cdots,X_{n_p}^{(p)}$,$Q_q$ 中的样本为 $X_1^{(q)},X_2^{(q)},\cdots,X_{n_q}^{(q)}$,它们的均值(重心)分别为 $\bar{X}^{(p)}$ 和 $\bar{X}^{(q)}$,d_{ij} 表示两样本 $X_i^{(p)}$ 和 $X_j^{(q)}$ 之间的距离.类与类之间的距离有以下几种定义方法:

1. 最短距离法:

$$D_{pq}(1)=\min_{\substack{i\in Q_p\\ j\in Q_q}}d_{ij}.$$

即类与类之间的距离用两类中最近的样本距离表示.设某一步将 Q_p 与 Q_q 合并成一个新类,记为 Q_r,则 Q_r 与 $Q_k(k\neq p,q)$ 距离的计算用

$$D_{rk}(1)=\min_{\substack{i\in Q_r\\ j\in Q_k}}\{d_{ij}\}$$

$$=\min\{\min_{\substack{i\in Q_p\\ j\in Q_k}}d_{ij},\min_{\substack{i\in Q_q\\ j\in Q_k}}d_{ij}\}$$

$$=\min\{D_{pk},D_{qk}\}.$$

即类间距离为两类中最近的样本距离.

2. 最长距离法:并类的准则是按照类与类之间的最长距离

$$D_{pq}(2)=\max_{\substack{i\in Q_p\\ j\in Q_q}}\{d_{ij}\}.$$

设某一步将 Q_p 与 Q_q 合并成一个新类,记为 Q_r,则 Q_r 与其他 $Q_k(k\neq p,q)$ 类的距离用

$$D_{rk}(2)=\max_{\substack{i\in Q_r\\ j\in Q_k}}\{d_{ij}\}$$

$$=\max\{\max_{\substack{i\in Q_p\\ j\in Q_k}}d_{ij},\max_{\substack{i\in Q_q\\ j\in Q_k}}d_{ij}\}$$

$$=\max\{D_{pk},D_{qk}\}\ (k\neq p,q).$$

找到距离最大的并类,直至所有样本并成一类.

3. 重心法:设 Q_p 和 Q_q 的重心分别是 $\bar{X}^{(p)},\bar{X}^{(q)}$,则 Q_p 与 Q_q 之间的距离定义为

$$D_{pq}^2=(\bar{X}^{(p)}-\bar{X}^{(q)})^T(\bar{X}^{(p)}-\bar{X}^{(q)}).$$

设某一步,将 Q_p 与 Q_q 合并成一个新类,记为 Q_r,则 Q_r 的重心为

$$\bar{X}^{(r)}=\frac{1}{N_r}(N_p\bar{X}^{(p)}+N_q\bar{X}^{(q)}),$$

其中 N_p,N_q 分别表示类 Q_p 与 Q_q 中样本个数($N_p+N_q=N_r$).此时,Q_r 与 $Q_k(k\neq p,q)$ 距离的递推计算公式为

$$D_{kr}^2=\frac{N_p}{N_r}D_{kp}^2+\frac{N_q}{N_r}D_{kq}^2-\frac{N_pN_q}{N_r^2}D_{pq}^2.$$

重心法的聚类步骤与最短距离法相同.

4. 类平均法:计算类 Q_p 与 Q_q 的距离,是利用两类元素中两两之间距离平方的平均值

$$D_{pq}^2=\frac{1}{N_pN_q}\sum_{i\in Q_p}\sum_{j\in Q_q}d_{ij}^2.$$

类平均法的聚类递推公式为(Q_r 为 Q_p 与 Q_q 合并的新类)

$$D_{kr}^2=\frac{N_p}{N_r}D_{kp}^2+\frac{N_q}{N_r}D_{kq}^2.$$

5. 离差平方和法:这种方法来源于方差分析.如果类分得正确,同类样本的离差平方和应当较小,而类与类之间的离差平方和应当较大.于是产生了离差平方和法.两类 Q_p 与 Q_q 之间的距离为

$$D_{pq}^2=\frac{N_pN_q}{N_p+N_q}(\bar{X}^{(p)}-\bar{X}^{(q)})^T(\bar{X}^{(p)}-\bar{X}^{(q)}).$$

设某一步将 Q_p 与 Q_q 合并成一个新类,记为 Q_r,则 Q_r 与其他 $Q_k(k\neq p,q)$ 类的距离为

$$D_{kr}^2=\frac{N_k+N_p}{N_r+N_k}D_{kp}^2+\frac{N_k+N_q}{N_r+N_k}D_{kq}^2-\frac{N_k}{N_r+N_k}D_{pq}^2.$$

式中的符号意义同前.离差平方和法是把两类合并后,增加的离差平方和作为平方距离.下边列出谱系聚类法中的五种类间距离的统一计算递推公式.设 Q_p(类)与 Q_q(类)合并成 Q_r(类),$Q_r=\{Q_p,Q_q\}$,N_p 及 N_q 分别表示 Q_p 与 Q_q 中的样本个数,则新类 Q_r 与其他类 $Q_k(k\neq p,q)$ 的距离平方的统一公式为

$$D_{rk}^2=\alpha_pD_{pk}^2+\alpha_qD_{qk}^2+\beta D_{pq}^2+\gamma|D_{pk}^2-D_{qk}^2|,$$

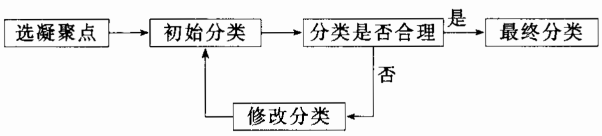
式中 $\alpha_p,\beta,\alpha_q,\gamma$ 是参数.不同的聚类方法,分别取不同的参数值(见下表),其中 $N_r=N_p+N_q$,N_k 是 Q_k 中样本的个数.

方 法	$\alpha_i(i=p,q)$	β	γ	附 注
最短距离法	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	
最长距离法	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
重 心 法	$\frac{N_i}{N_r}$	$-\alpha_p\alpha_q$	0	用欧氏距离
类 平 均 法	$\frac{N_i}{N_r}$	0	0	
离差平方和法(Ward 法)	$\frac{N_i+N_k}{N_r+N_k}$	$\frac{-N_k}{N_r+N_k}$	0	用欧氏距离

谱系聚类法(hierarchical clustering methods) 见"聚类分析".

动态聚类法(dynamical clustering methods) 亦称逐步聚类法.一类聚类法.属于大样本聚类法.

具体作法是：先粗略地进行预分类，然后再逐步调整，直到把类分得比较合理为止. 这种分类方法较之系统聚类法，具有计算量较小、占用计算机存贮单元少、方法简单等优点，所以更适用于大样本的聚类分析.



动态聚类法的聚类过程，可用以框图来描述. 框图的每一部分，均有很多种方法可采用. 将这些方法按框图进行组合，就会得到各种动态聚类法.

有序样本聚类法（clustering methods of ordered sample） 对样本保持顺序的一种聚类方法. N 个有序样本分为 $k(k\leqslant N)$ 个类的所有可能的分法有

$$\binom{N-1}{k-1}$$

种. 在某种损失函数意义下，可以保证求得最优解. 故此法亦称最优分割法. 设有 N 个有序样本分成 k 个类，用 $b(N,k)$ 表示某一种分法. 即

$$\{i_1,i_1+1,\cdots,i_2-1\},\{i_2,i_2+1,\cdots,i_3-1\},\cdots,\{i_k,i_k+1,\cdots,N\},$$

其中 $i_1=1<i_2<\cdots<i_k<N$.

定义这种分法的损失函数为

$$L[b(N,k)]=\sum_{t=1}^{k}D(i_t,i_{t+1}-1),$$

式中 $i_{k+1}=N+1$，

$$D(i_t,i_{t+1}-1)=\sum_{\alpha=i_t}^{i_{t+1}-1}(\boldsymbol{X}_\alpha-\overline{\boldsymbol{X}}^{(t)})^T(\boldsymbol{X}_\alpha-\overline{\boldsymbol{X}}^{(t)})$$

表示第 t 类样本的距离平方和. 如果分法 $b^*(N,k)$ 使得

$$L[b_*(N,k)]=\min_{\text{一切}b(N,k)}L[b(N,k)],$$

则分法 $b_*(N,k)$ 就是 N 个有序样本分为 k 类的最优解. 英国数学家、生物学家费希尔（Fisher, R. A.）给出了一种算法，可以获得最优分割法 $b^*(N,k)$.

最优分割法（optimal breaking method） 见“有序样本聚类法”.

时间序列分析

时间序列分析（time series analysis） 动态数据处理的统计方法. 在工业、经济、国防和科学技术等许多领域，被考查的对象在其发展过程中，由于受到各种偶然因素的影响，往往表现出某种随机性，它们常以一串随时间而变化的数据序列形式被人们记录到. 这种序列通常称为随机序列或时间序列. 其严格定义为随机过程的一个现实. 分析研究这些序列的数学方法称为时间序列分析方法，有时也称为时序分析. 时序分析的目的是为了进行预报、滤波和控制等. 时间序列分析包括时间序列的频域分析和时域分析两个基本方面. 德国学者舒斯特尔（Schuster, A.）于 1898 年首先使用周期图观察时序的周期性；此后英国数学家、生物学家费希尔（Fisher, R. A.）于 1929 年研究有关周期图的分布；傅里叶分析方法是时序研究的最早最重要的方法；然而，英国学者尤尔（Yule, G. U.）于 1920 年引人滑动平均、自回归过程后，使人们离开了频域方法，使用时域方法长达 30 余年（1920～1950）；直到美国数学家丹尼尔（Daniell, P. J.）于 1946 年提出平滑周期图概念，才又唤起人们对频域方法研究的兴趣；其后，英国统计学家巴特利特（Bartlett, A. C.）于 1948 年，美国统计学家图基（Tukey, J. W.）等人于 1949 年对窗估计性质的研究，开创了频域分析的近代理论. 当前，时域分析与频域分析都得到长足的进步.

时间序列（time series） 见“时间序列分析”.

白噪声（white noise） 亦称纯过程或最简随机过程. 一类时间序列. 它是期望为零的不相关随机变量的平稳序列 $\{a_t\}(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 其协方差

$$\operatorname{cov}(a_t,a_s)=\begin{cases}0 & (s\neq t),\\ \sigma^2 & (s=t),\end{cases}$$

或

$$\operatorname{cov}(a_t,a_s)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(s-t)\lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

其中 $0<\sigma^2<\infty$. 从而白噪声具有常数谱密度

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\quad(-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi).$$

白噪声的术语来自工程文献，类似于白光对所有的颜色频率都有相同的能量，即功率谱对所有的频率都有相同值. 有时，定义白噪声 a_t 是独立同分布序列，可称之为独立白噪声，以示区别.

纯过程（purely random process） 即“白噪声”.

平稳时间序列（stationary time sequence） 一类重要的时间序列. 设时间序列 x_t $(t=0,\pm1,\cdots)$ 具有性质：

$$Ex_t=\mu;$$

$$\operatorname{cov}(x_t,x_s)=Ex_tx_s-\mu^2=r_{t-s};$$

则称其为平稳时间序列. 由此可见，所谓平稳性即期望为常数，与时间 t 无关，协方差是只与时间差 $t-s$ 有关的函数.

平稳线性序列（stationary linear sequence） 一类重要的时间序列. 线性序列可以看成是以白噪声为输入的线性滤波器的输出. 序列 x_t 表示为白噪声 a_t 的无穷级数

$$x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j a_{t-j}.$$

如果满足条件

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j^2 < \infty,$$

则称$\{x_t\}$为一般线性序列，亦称无穷阶滑动平均过程. 如果满足条件

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |g_j| < \infty,$$

则称$\{x_t\}$为线性序列. 由于在此两种条件下，序列$\{x_t\}$都具有平稳性，即$Ex_t=0$与t无关，$E(x_t,x_s)=r(t-s)$只与时间差$(t-s)$有关，故称此种序列$\{x_t\}$为平稳线性序列. 通常使用最多的是形如单边滑动和

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} g_j a_{t-j}$$

的线性序列，称此为物理可实现的. 对此线性序列，如果函数

$$G(u) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} g_j u^j \neq 0 \quad (|u| \leqslant 1),$$

则$G^{-1}(u)$可表为

$$G^{-1}(u) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j u^j,$$

且

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty,$$

以及白噪声a_t可以表为如下几乎必然的收敛级数

$$a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j}.$$

称此a_t的表达式为无穷阶自回归过程，亦称线性序列的逆转形式.

线性序列(linear sequence)　见“平稳线性序列”.

一般线性序列(general linear sequence)　见“平稳线性序列”.

无穷阶滑动平均过程(moving average process of infinite order)　见“平稳线性序列”.

物理可实现性(physical realizability)　见“平稳线性序列”.

无穷阶自回归过程(autoregressive processes of infinite order)　见“平稳线性序列”.

线性序列的逆转形式(inverse form of linear sequence)　见“平稳线性序列”.

平稳时间序列的预报(prediction of time series)　一种估计. 是根据现在和以前时刻的序列值，对未来时刻的序列值做出估计. 设$x_t(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是平稳时间序列，对$l>0$，用$x_t,x_{t-1},\cdots$对未来时刻$t+l$的随机变量$x_{t+l}$进行估计，记为$\hat{x}_t(l)$，称为对$x_{t+l}$的预报. 最常用的预报方法是最小均方误差线性预报方法. 具体叙述如下：设Y属于$x_s(s\leqslant t)$所张成的线性空间$\mathscr{H}_t$，定义预报值$\hat{x}_t(l)$是使$E|x_{t+l}-Y|^2$达到极小的解$Y=\hat{x}_t(l)$. 称$e_t(l)=x_{t+l}-\hat{x}_t(l)$为预报误差，而$\sigma_l^2=E|x_{t+l}-\hat{x}_t(l)|^2$称为预报误差方差，$l$称为预报步长，预报误差方差$\sigma_l^2$必随步长$l$而增加：$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2\leqslant\cdots\leqslant\sigma_l^2\cdots$根据一步线性最小方差预报的误差方差，可以对平稳序列提出如下分类：若$\sigma_1^2>0$，则序列$\{x_t\}$称为正则的，或非决定性的；若$\sigma_1^2=0$，则称序列$\{x_t\}$为奇异的，或决定性的.

最小均方误差线性预报(linear least squares prediction)　见“平稳时间序列的预报”.

预报误差方差(mean squares errors of prediction)　见“平稳时间序列的预报”.

正则序列(regular sequence)　见“平稳时间序列的预报”.

非决定性序列(non-deterministic sequence)　见“平稳时间序列的预报”.

决定性序列(deterministic sequence)　见“平稳时间序列的预报”.

奇异序列(singular sequence)　见“平稳时间序列的预报”.

完全非决定性序列(purely non-deterministic sequence)　时间序列分析的重要概念之一. 对任意平稳序列$x_t(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，记$\mathscr{H}_t=\mathscr{L}(x_s,s\leqslant t)$表示$\{x_s,s\leqslant t\}$所张成的线性空间，必有$\mathscr{H}_t\subseteq\mathscr{H}_{t'}(t<t')$. 当$\mathscr{H}_t=\mathscr{H}$，对一切$t$成立，于是一步线性均方预报误差$\sigma_1^2=0$，即$\{x_t\}$是决定型的，可以完全无误地做预报. 而对一切$t$，$\mathscr{H}_t$若没有非零的公共子空间，

$$\bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \mathscr{H}_t = \{0\},$$

则称序列$\{x_t\}$为完全非决定性序列，它必是非决定性序列. 使$\{x_t\}$为完全非决定性序列的充要条件是其谱测度(参见“自协方差函数”)绝对连续，且谱密度$f(\lambda)$满足

$$\int \log f(\lambda)\mathrm{d}\lambda > -\infty.$$

此外，完全非决定性序列$\{x_t\}$可表为白噪声a_t的滑动平均

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} g_j a_{t-j},$$

其中$g_0\neq0$，

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j^2 < \infty,$$

且$Ea_t\bar{a}_{t'}=\delta_{t,t'}$. 反之，有此种表示的序列，必为完全非决定性的.

沃尔德分解(Wold decomposition)　平稳过程

的分解. 它是沃尔德(Wold, H. O. A.)在讨论预测问题中获得的. 设 $x_t(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为平稳过程,则 $x_t=U_t+V_t$,其中 U_t 为完全非决定性序列,V_t 为决定性序列,且 U_t 与 V_t 不相关,称此等式为沃尔德分解. 即平稳过程可以分解为两部分:一部分 V_t 是可以无误地作预报,即预报误差为零;另一部分 U_t 预报误差方差为正,并且不含无误预报的成分.

自协方差函数(autocovariance function of stationary sequence) 平稳序列的重要数字特征之一. 它反映了平稳序列在不同时刻之间的线性关系结构. 设时间序列 $x_t(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是平稳序列,称函数 $\gamma_k=\mathrm{cov}(x_t,x_{t+k})(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为平稳序列 x_t 的自协方差函数. 平稳性保证了自协方差函数 γ_k 仅与 k 有关,而与 t 无关.

自协方差函数 γ_k 具有性质:

1. $\gamma_0=\mathrm{var}(x_t)$.
2. $|\gamma_k|\leqslant\gamma_0\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.
3. $\gamma_{-k}=\gamma_k$.
4. $\gamma_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是非负定序列,即对任意正整数 n 和时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 及复数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 有

$$\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{t_i-t_j}\xi_i\bar{\xi}_j\geqslant 0.$$

γ_k 的非负定性的充分必要条件可表为

$$\gamma_k=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda k}\mathrm{d}F(\lambda).$$

这里 $F(\lambda)$ 是单调非降函数. 规定 $F(\lambda)$ 右连续,则表达式是惟一的,称 $F(\lambda)$ 为谱分布函数,对应的测度称为谱测度,如果 $F(\lambda)$ 是绝对连续的,则可表为

$$F(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}f(\lambda')\mathrm{d}\lambda'.$$

称 $f(\lambda)$ 为谱密度.

谱分布(spectral distribution) 见"自协方差函数".

谱密度(spectral density) 见"自协方差函数".

自相关函数(autocorrelation function) 平稳序列的重要数字特征之一. 用它度量平稳时间序列现实 x_t 与延迟 k 的现实 x_{t+k} 的相关程度. 设时间序列 $x_t(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是平稳序列,称函数

$$\rho_k=\frac{\mathrm{cov}(x_t,x_{t+k})}{\sqrt{\mathrm{var}(x_t)\cdot\mathrm{var}(x_{t+k})}}$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

为平稳序列 x_t 的自相关函数. 平稳性保证了自相关函数 ρ_k 仅与 k 有关,而与时间 t 无关.

自相关函数具有性质:

1. $\rho_0=1$.
2. $|\rho_k|\leqslant1\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.
3. $\rho_{-k}=\rho_k$.
4. 非负定性(参见"自协方差函数").

如果 $x_t=a_t-\theta_1a_{t-1}-\cdots-\theta_qa_{t-q}$,$a_t$ 为白噪声,即为 MA(q)序列 (q 为阶数,参见"自回归滑动平均模型"),则其自相关函数有性质:$\rho_k=0$. 当 $k>q$ 时. 称之为自相关函数的截尾性.

平稳序列的偏相关函数(partial autocorrelation function of stationary sequence) 平稳序列的重要数字特征之一. 它可用于模型识别与统计分析. 设 $x_t(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是零均值实值平稳序列,其偏相关函数就是在给定 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k+1}$ 的条件下,x_t 与 x_{t-k} 的条件相关函数,即

$$\varphi_{kk}=\frac{E(x_t-\hat{x}_t)(x_{t-k}-\hat{x}_{t-k})}{[E(x_t-\hat{x}_t)^2E(x_{t-k}-\hat{x}_{t-k})^2]^{\frac{1}{2}}}\quad(k\geqslant2),$$

其中 $\hat{x}_s=\hat{E}(x_s|x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k+1})$ ($s=t$ 或 $t-k$),表示 x_s 用 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k+1}$ 作线性最小方差估计,即 x_s 在由 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k+1}$ 张成的线性空间的投影. 若 x_t 又是正态序列(参见"自回归滑动平均模型"),则 $\hat{x}_s$ 与条件期望 $E(x_s|x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1})$ 相重合. 对于 $k=1,2,\cdots$,分别用 $x_{t-k},x_{t-k+1},\cdots,x_{t-1}$ 对 x_t 作最小方差估计,即选择系数 $\varphi_{k1},\varphi_{k2},\cdots,\varphi_{kk}$,使得

$$\delta=E\Big(x_t-\sum_{j=1}^{k}\varphi_{kj}x_{t-j}\Big)^2$$

达到最小值. 由此可知 φ_{kj} 满足方程

$$\begin{pmatrix}1&\rho_1&\cdots&\rho_{k-1}\\\rho_1&1&\cdots&\rho_{k-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\rho_{k-1}&\rho_{k-2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{k1}\\\varphi_{k2}\\\vdots\\\varphi_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_1\\\rho_2\\\vdots\\\rho_k\end{pmatrix},$$

其中 ρ_k 是序列 x_t 的自相关函数. 由此确定的 $\varphi_{kk}(k\geqslant1)$ 称为平稳序列 x_t 的偏相关函数. 若 x_t 是 AR(p)序列(参见"自回归滑动平均模型"),则 $\varphi_{kk}=0$. 当 $k>p$,称之为 AR(p)序列的偏相关函数的截尾性质. 偏相关函数的递推公式为

$$\varphi_{k+1,j}=\varphi_{kj}-\varphi_{k+1,k+1}\cdot\varphi_{k,k-(j-1)}$$
$$(j=1,2,\cdots,k),$$
$$\varphi_{k+1,k+1}=\frac{\rho_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\rho_{k+1-j}\cdot\varphi_{kj}}{1-\sum_{j=1}^{k}\rho_j\cdot\varphi_{kj}},$$
$$\varphi_{11}=\rho_1.$$

在实际计算中往往使用此递推公式求偏相关函数或样本偏相关函数的值.

样本自协方差函数(sample autocovariance function) 一种估计量. 它是自协方差函数根据平稳序列的有穷样本的估计量. 设 x_t 是零均值平稳序

列，$x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是有穷样本观测值，称

$$\hat{\gamma}_{-k}=\hat{\gamma}_k=\begin{cases}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}x_tx_{t+k} & (0\leqslant k\leqslant T-1),\\ 0 & (k\geqslant T),\end{cases}$$

为样本自协方差函数.它具有非负定性，故仍为一个自协方差函数列.如果样本自协方差函数定义为

$$\hat{\gamma}^*_{-k}=\hat{\gamma}^*_k=\begin{cases}\frac{1}{T-|k|}\sum_{t=1}^{T-k}x_tx_{t+k} & (0\leqslant k\leqslant T-1),\\ 0 & (k\geqslant T).\end{cases}$$

由于序列 $\hat{\gamma}^*_k$ 不具有非负定性，故通常不便于使用.如果 x_t 是线性平稳序列，a_t 是独立白噪声，且 $Ea_t^2=\sigma^2<\infty$，则有相合性

$$E|\hat{\gamma}_k-\gamma_k|\to 0\quad (T\to\infty).$$

如果再有 $\mu_4=Ea_t^4<\infty$，则有巴特利特公式

$$\mathrm{cov}(\hat{\gamma}_{k_1},\hat{\gamma}_{k_2})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\gamma_{k+k_1}\gamma_{k+k_2}+\gamma_{k+k_1}\gamma_{k-k_2})+\frac{1}{T}\frac{\mu_4-3\sigma^4}{\sigma^4}\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}+o\left(\frac{1}{T}\right).$$

若右端简记为 $T^{-1}R(k_1,k_2)+o(1/T)$，$\hat{\gamma}_k$ 有渐近正态性：对任意 $p>0$ 有

$$[\sqrt{T}(\hat{\gamma}_0-\gamma_0),\cdots,\sqrt{T}(\hat{\gamma}_{p-1}-\gamma_{p-1})]^T\xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}}N_p(0,R),$$

其中 $\mathscr{D}$ 表示依分布收敛；$R=[R(k_1,k_2)]$是 $p\times p$ 阶矩阵.如果线性过程系数 g_i 再增加条件$|g_i|\leqslant ce^{-\beta j}$ $(j\geqslant 1)$，其中 c,β 是正常数，令 $p(T)=O\{(\log T)^a\}$，其中 $0<a<\infty$，则有强相合性及收敛速度

$$\max_{0\leqslant t\leqslant p(T)}|\hat{\gamma}_t-\gamma_t|=O(\sqrt{(\log\log T_T)}$$

概率为 1 成立.

样本自相关函数(sample autocorrelation function)　一种估计量.它是自相关函数根据平稳序列的有穷样本的估计量.设$\{x_t\}$是平稳零均值序列，$x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是有限样本观测值.样本自协方差函数记为 $\hat{\gamma}_k$，样本自相关函数定义为 $\hat{\rho}_k=\hat{\gamma}_k/\hat{\gamma}_0(k=0,\pm1,\cdots)(\hat{\gamma}_0>0)$.它与样本自协方差函数同时具有相合性及相同的收敛速度.如果$\{x_t\}$是线性过程(参见“平稳线性序列”)，a_t 是独立白噪声，且 $Ea_t^8<\infty$，则对 $k_1>0,k_2>0$ 有

$$\mathrm{cov}(\hat{\rho}_{k_1},\hat{\rho}_{k_2})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\rho_{k+k_1}\rho_{k+k_2}+\rho_{k+k_1}\rho_{k-k_2}+2\rho_k^2\rho_{k_1}\rho_{k_2}-2[\rho_{k_1}\rho_k\rho_{k-k_2}+\rho_{k_2}\rho_k\rho_{k-k_1}]\}+o(T^{-1}),$$

亦称巴特利特公式.此外，对线性过程，只要有条件 $Ea_t^4<\infty$，则 $\hat{\rho}_k$ 有渐近正态的联合分布.

巴特利特公式(Bartlett's formula)　见“样本自相关函数”.

样本偏相关函数(sample partial autocorrelation function)　偏相关函数的估计.由方程

$$\begin{pmatrix}1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-1}\\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_{k1}\\ \hat{\varphi}_{k2}\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_2\\ \vdots\\ \hat{\rho}_k\end{pmatrix}\quad (k\geqslant 1)$$

确定的 $\hat{\varphi}_{kk}(k\geqslant1)$，称为平稳过程 x_t 的样本偏相关函数.其中 $\hat{\rho}_k(k=0,\pm1,\cdots)$是平稳过程 x_t 的样本自相关函数.样本偏相关函数作为偏相关函数的估计具有强相合性、渐近无偏性和渐近正态性.其计算方法可采用“平稳序列的偏相关函数”中的迭代公式.

自回归滑动平均模型(autoregressive-moving average model)　一类特殊的平稳序列所满足的重要的有限参数模型.其定义如下：设平稳序列$\{x_t\}$满足以下模型，$x_t-\varphi_1x_{t-1}-\varphi_2x_{t-2}-\cdots-\varphi_px_{t-p}=a_t-\theta_1a_{t-1}-\theta_2a_{t-2}-\cdots-\theta_qa_{t-q}(t=0,\pm1,\cdots)$，式中$\{a_t\}$为白噪声，对一切 $t>s$ 有 $Ea_t=0,Ea_t^2=\sigma^2,Ea_tx_s=0$.实系数多项式 $\varphi(u)=1-\varphi_1u-\varphi_2u^2-\cdots-\varphi_pu^p$ 和 $\theta(u)=1-\theta_1u-\theta_2u^2-\cdots-\theta_qu^q$ 无公共根，且它们的根都在单位圆外.称以上差分方程为自回归滑动平均模型，简称 ARMA(p,q)模型.满足此模型的平稳序列称为自回归滑动平均序列，简称 ARMA(p,q)序列.实系数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q$ 和 σ^2 被称为模型的参数，非负整数 p 和 q 为模型的阶数.当 $q=0$ 时，以上的 ARMA$(p,0)$模型被称为自回归模型，简称 AR(p)模型.相应的 ARMA$(p,0)$序列称为自回归序列或AR(p)序列.当 $p=0$ 时，以上的 ARMA$(0,q)$模型被称为滑动平均模型，简称MA(q)模型，相应的序列称为滑动平均序列或MA(q)序列.

由于自回归滑动平均模型满足条件：$\varphi(u)$与$\theta(u)$的根都在单位圆外.故存在传递形式和逆转形式：

$$x_t=\sum_{j=0}^{\infty}g_ja_{t-j},\quad a_t=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_jx_{t-j},$$

其中 g_j 满足

$$\varphi(u)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}g_ju^j,$$

π_j 满足

$$\theta(u)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_ju^j,$$

而且$|g_j|$与$|\pi_j|$都有以负指数速度趋于零的性质，即存在 $c_1>0,c_2>0$ 及 $c'_1>0,c'_2>0$，使$|g_j|\leqslant c_1e^{-c_2j}(j\geqslant0)$与 $|\pi_j|\leqslant c'_1e^{-c'_2j}$ $(j\geqslant0)$.从而使传递形式和逆转形式的级数都是均方意义下和几乎必然意义下收敛的.

ARMA(p,q)**模型(序列)**(autoressive-moving average model (sequence) of order (p,q))　见“自

回归滑动平均模型”.

AR(p)模型(序列)(autoregressive model (sequence) of order p) 见“自回归滑动平均模型”.

MA(q)模型(序列)(moving average model (sequence) of order q) 见“自回归滑动平均模型”.

尤尔-沃克方程(Yule-Walker equation) 描述自回归序列参数与其协方差函数之间关系的方程. 设 $x_t(t=0,\pm1,\cdots)$是 p 阶平稳自回归序列,其自协方差函数为 $\gamma_k(k=0,\pm1,\cdots)$. 称方程组

$$\gamma_k=\varphi_1\gamma_{k-1}+\varphi_2\gamma_{k-2}+\cdots+\varphi_p\gamma_{k-p}\quad(k>0)$$

为尤尔-沃克方程,其中 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$ 为自回归系数. 取其前 p 个方程联立,则给出自回归模型参数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$与自协方差 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$ 之间的依赖关系. 以样本自协方差函数 $\hat\gamma_1,\hat\gamma_2,\cdots,\hat\gamma_p$ 代替自协方差函数 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$,于是,联立解尤尔-沃克方程的前 p 个方程,得参数的解 $\hat\varphi_1,\hat\varphi_2,\cdots,\hat\varphi_p$,称之为自回归模型参数的尤尔-沃克方程估计,亦称矩估计.

自回归模型参数估计(estimation of parameters of autoregressive model) 一种参数估计. 它是根据自回归序列的有限样本,对自回归模型的参数进行的估计. 估计方法较多,常见的有矩估计、最小二乘估计和极大似然估计. 设$\{x_t\}$是自回归序列,它满足以下自回归模型:$x_t=\varphi_1x_{t-1}+\varphi_2x_{t-2}+\cdots+\varphi_px_{t-p}+a_t$,其中 a_t 为白噪声,均值为零,方差为 σ_2,模型中的未知参数矢量为

$$\alpha=(\beta^T,\sigma^2)^T=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\sigma^2)^T.$$

1. 矩估计. 设 $\hat\rho_k$ 是样本自相关函数,称

$$\begin{pmatrix}\hat\varphi_1\\\hat\varphi_2\\\vdots\\\hat\varphi_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\hat\rho_1&\cdots&\hat\rho_{p-1}\\\hat\rho_1&1&\cdots&\hat\rho_{p-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\hat\rho_{p-1}&\hat\rho_{p-2}&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\hat\rho_1\\\hat\rho_2\\\vdots\\\hat\rho_p\end{pmatrix},$$

$$\hat\sigma^2=\hat r_0\left(1-\sum_{j=1}^{p}\hat\varphi_j\hat\rho_j\right)=\hat r_0\left(1-\sum_{i,j=1}^{p}\hat\varphi_i\hat\varphi_j\hat\rho_{j-i}\right)$$

为自回归参数的矩估计,其中

$$\hat r_0=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t-\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}x_j\right)^2$$

是样本方差. 矩估计又称为尤尔-沃克估计(参见“尤尔-沃克方程”).

2. 最小二乘估计(LS 估计). 设

$$S(\beta)=\sum_{t=1}^{T-p}(x_{p+t}-\varphi_1x_{p+t-1}-\cdots-\varphi_px_t)^2,$$

使其达到最小的 β^L 称为自回归系数的最小二乘估计. β^L 可由如下方程组求解得到:

$$\frac{\varphi_1^L}{T}\sum_{t=1}^{T-p}x_{p+t-1}x_{p+t-j}+\frac{\varphi_2^L}{T}\sum_{t=1}^{T-p}x_{p+t-2}x_{p+t-j}+\cdots+\frac{\varphi_1^L}{T}\sum_{t=1}^{T-p}x_tx_{p+t-j}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-p}x_{p+t}x_{p+t-j}\quad(j=1,2,\cdots,p).$$

令

$$\gamma_{j-i}^L=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-p}x_{p+t-i}x_{p+t-j},$$

则最小二乘估计的近似解为

$$\begin{pmatrix}\varphi_1^L\\\varphi_2^L\\\vdots\\\varphi_p^L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_0^L&\gamma_1^L&\cdots&\gamma_{p-1}^L\\\gamma_1^L&\gamma_0^L&\cdots&\gamma_{p-2}^L\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\gamma_{p-1}^L&\gamma_{p-2}^L&\cdots&\gamma_0^L\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\gamma_1^L\\\gamma_2^L\\\vdots\\\gamma_p^L\end{pmatrix},$$

$$\hat\sigma^2=\frac{1}{T-p}S(\beta^L)=\frac{1}{T-p}\sum_{t=1}^{T-p}(x_{p+t}-\varphi_1^Lx_{p+t-1}-\cdots-\varphi_p^Lx_t)^2.$$

当 T 充分大时,$\gamma_k^L\approx\hat\gamma_k$($\hat\gamma_k$ 为样本自协方差函数),因此最小二乘估计与矩估计十分接近.

3. 最小平方和估计. 设

$$\tilde S(\beta)=\sum_{k=-\infty}^{T}\{\hat E_\beta(a_k|x_1,x_2,\cdots,x_T)\}^2,$$

其中 $\hat E_\beta(a_k|x_1,x_2,\cdots,x_T)$表示 a_k 在$\{x_1,x_2,\cdots,x_T\}$张成的线性空间 $\mathscr{L}(x_1,x_2,\cdots,x_T)$的投影. 它是参数 β 的函数. 使 $\tilde S(\beta)$达到最小的 $\tilde\beta$ 称为自回归参数 β 的最小平方和估计. 假定 $T>2p$,设

$$d_{ij}=\sum_{k=1+j}^{T-i}x_{k+i-j}x_k=d_{ji}\quad(i,j=0,1,\cdots,p),$$

则最小平方和估计的近似解为

$$\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\\tilde\varphi_2\\\vdots\\\tilde\varphi_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}&\cdots&d_{1p}\\d_{21}&d_{22}&\cdots&d_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\d_{p1}&d_{p2}&\cdots&d_{pp}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}d_{01}\\d_{02}\\\vdots\\d_{0p}\end{pmatrix},$$

$$\tilde\sigma^2=\frac{1}{T}(d_{00}-d_{01}\tilde\varphi_1-d_{02}\tilde\varphi_2-\cdots-d_{0p}\tilde\varphi_p\ ).$$

它是一种近似的极大似然估计.

4. 极大似然估计(参见“自回归滑动平均模型参数的极大似然估计”).

以上四种估计中,矩估计最为简单,且与最小二乘估计相近,较为常用.

自回归参数矩估计(moment estimation of parameters of autoregressive model) 见“自回归模型参数估计”.

最小平方和估计(least sum of squares estimates) 见“自回归模型参数估计”.

滑动平均模型参数估计(estimation of parameters of moving average model) 一种参数估计. 它是根据滑动平均序列的有限样本对其模型参数做出的估计. 估计方法较多,但大都比较复杂而且涉及非线性运算. 矩估计方法虽然较为简单,然而精度不高. 设 x_t 是滑动平均序列,$x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是样本观察

值，假定滑动平均模型为

$$x_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q},$$

其中 a_t 是白噪声，具有零均值和方差 σ^2，$\alpha=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q,\sigma^2)^T$ 是未知参数.

矩估计：设 $\hat{\gamma}_k$ 是样本自协方差函数，则由

$$\hat{\gamma}_k = \begin{cases} \hat{\sigma}^2(1+\hat{\theta}_1^2+\cdots+\hat{\theta}_q^2) & (k=0), \\ \hat{\sigma}^2(-\hat{\theta}_k+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_{k+1}+\cdots+\hat{\theta}_{q-k}\hat{\theta}_q) & (1\leqslant k\leqslant q) \end{cases}$$

确定的 $\hat{\alpha}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_q,\hat{\sigma}^2)^T$ 称为滑动平均模型参数 α 的矩估计. 这里求解 $\hat{\alpha}$ 可用迭代方法. 改方程为

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2 = \dfrac{\hat{\gamma}_0}{1+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2\cdots+\hat{\theta}_q^2} & (k=0), \\ \hat{\theta}_k = \dfrac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\sigma}^2} - \theta_1\theta_{k+1} - \cdots - \theta_{q-k}\theta_q & (1\leqslant k\leqslant q), \end{cases}$$

给定 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_q$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 一组初值，比如 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_2=\cdots=\hat{\theta}_q=0$，$\hat{\sigma}^2=\hat{\gamma}_0$，则可进行迭代，达到给定精度后停止迭代.

自回归滑动平均模型参数矩估计(parametric estimation of autoregressive-moving average model)　一种参数估计. 它是根据序列的有限样本对 ARMA 模型参数用矩法进行的估计. 设 x_t 是自回归滑动平均序列，$x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是样本观察值. 假定自回归滑动平均模型为 $x_t-\varphi_1x_{t-1}-\varphi_2x_{t-2}-\cdots-\varphi_px_{t-p}=a_t-\theta_1a_{t-1}-\theta_2a_{t-2}-\cdots-\theta_qa_{t-q}$，其中 a_t 是白噪声，均值为零，方差为 σ^2，其未知参数为

$$\alpha=(\beta^T,\sigma^2)^T=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q,\sigma_2)^T.$$

矩估计分三步：设 $\hat{\rho}_k$ 是样本自相关函数，首先由

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_q & \hat{\rho}_{q-1} & \cdots & \hat{\rho}_{q-p+1} \\ \hat{\rho}_{q+1} & \hat{\rho}_q & \cdots & \hat{\rho}_{q-p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\rho}_{q+p-1} & \hat{\rho}_{q+p-2} & \cdots & \hat{\rho}_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{q+1} \\ \hat{\rho}_{q+2} \\ \vdots \\ \hat{\rho}_{q+p} \end{pmatrix}$$

确定自回归参数$(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p)^T$ 的估计，然后令

$$\omega_t \equiv x_t - \hat{\varphi}_1x_{t-1} - \cdots - \hat{\varphi}_px_{t-p}$$
$$(t=p+1,p+2,\cdots,T),$$

计算 ω_t 的样本自协方差函数 $\hat{\gamma}_k(\omega)$，最后将 ω_t 近似看成滑动平均序列，即

$$\omega_t \approx a_t - \theta_1a_{t-1} - \theta_2a_{t-2} - \cdots - \theta_qa_{t-q}.$$

由方程组

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_0(\omega) = \hat{\sigma}^2(1+\hat{\theta}_1^2+\cdots+\hat{\theta}_q^2), \\ \hat{\gamma}_k(\omega) = \hat{\sigma}^2(-\hat{\theta}_k+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_{k+1}+\cdots+\hat{\theta}_{q-k}\hat{\theta}_q) & (1\leqslant k\leqslant q), \end{cases}$$

确定滑动平均参数的估计$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_q)^T$ 和 $\hat{\sigma}^2$，称

$$\hat{\alpha} = (\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\cdots,\hat{\varphi}_p,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_q,\hat{\sigma}^2)^T$$

为参数 α 的矩估计.

自回归滑动平均模型参数的最小二乘估计(least squares estimates of parameters of ARMA model)　一种参数估计. 它是根据序列的有限样本对 ARMA 序列(参见"自回归滑动平均模型")的模型参数用最小二乘法进行的估计. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是样本观察值. 为估计模型参数 $\alpha=(\beta^T,\sigma^2)^T=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q,\sigma^2)^T$，给定初值 $\hat{a}_k\equiv0$，$x_k\equiv0(k\leqslant0)$，由下面递推公式得到白噪声 $a_k(1\leqslant k\leqslant T)$ 的估计 $\hat{a}_k$，且

$$\hat{a}_k = x_k - \sum_{i=1}^{p}\varphi_ix_{k-i} + \sum_{i=1}^{q}\theta_i\hat{a}_{k-i}$$
$$(k=1,2,\cdots,T).$$

定义残差平方和

$$S(\beta) = \sum_{k=p+1}^{T}\hat{a}_k^2.$$

使残差平方和 $S(\beta)$达到最小的 β^L 称为参数

$$\beta = (\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q)^T$$

的最小二乘估计. 再取

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-p}S(\beta)$$

作为 σ^2 的估计.

自回归滑动平均模型参数的最小平方和估计(least sum of squares estimates of parameters of ARMA model)　一种参数估计. 它是根据序列的有限样本对 ARMA 模型参数进行最小平方和估计. 设 x_t 是 ARMA 序列，$x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是样本观察值，模型参数为 $\alpha=(\beta^T,\sigma^2)^T=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q,\sigma^2)^T$. 设 $\hat{a}_k=\hat{E}_\beta(a_k|x_1,x_2,\cdots,x_T)$表示白噪声 a_k 对$\{x_1,x_2,\cdots,x_T\}$所张成的线性空间的投影，即 a_k 的线性最小方差估计. 使平方和

$$\widetilde{S}(\beta) = \sum_{k=-\infty}^{T}\{\hat{E}_p(a_k|x_1,x_2,\cdots,x_T)\}^2$$

达到最小的 $\widetilde{\beta}$ 称为参数 $\beta=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q)^T$ 的最小平方和估计. 而 σ^2 的相应估计取做

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\widetilde{S}(\beta).$$

若序列 x_t 为 MA(q)的序列，$x_t=a_t-\theta_1a_{t-1}-\theta_2a_{t-2}-\cdots-\theta_qa_{t-q}$，于是 $a_{-q-j}(j\geqslant0)$与 $x_1,x_2,\cdots,x_T$ 不相关，即有 $\hat{E}_\beta(a_k|x_1,x_2,\cdots,x_T)=0$ $(k\leqslant-q)$. 故此时有

$$\widetilde{S}(\beta) = \sum_{k=-q+1}^{T}\{\hat{E}_\beta(a_k|x_1,x_2,\cdots,x_T)\}^2.$$

若序列 x_t 为 ARMA，可近似表为

$$x_t = a_t - \Theta_1a_{t-1} - \cdots - \Theta_Qa_{t-Q}\ (Q\text{ 充分大}).$$

故此时

$$\widetilde{S}(\beta) = \sum_{k=-Q+1}^{T}\{\hat{E}_\beta(a_k|x_1,x_2,\cdots,x_T)\}^2.$$

不论哪种情况，$\widetilde{S}(\beta)$极小值的求法都需数值解法.

自回归滑动平均模型参数的极大似然估计(maximum likelihood estimates of parameters of ARMA model)　一种参数估计. 它是根据序列的有限样本对 ARMA 模型参数进行最大似然估计.

假定 x_t 是零均值正态 ARMA 序列，模型参数为 $\alpha=(\beta^T,\sigma^2)^T=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q,\sigma^2)^T$，$x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是样本观察值. 则 x_t 的对数似然函数为

$$L(\alpha|x_1,x_2,\cdots,x_T)=-\frac{T}{2}\log 2\pi+\frac{1}{2}\log|M_T|-\frac{T}{2}\log\sigma^2-\frac{\bar{S}(\alpha)}{2\sigma^2},$$

使之达到最大的 $\bar{\alpha}$ 称为参数 α 的极大似然估计. 式中记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_T)^T$，$M_T=\sigma^2\{Exx^T\}^{-1}$，$\bar{S}(\alpha)=x^TM_T^{x}$，$M_T$ 的行列式记为 $|M_T|$，T 表示转置.

自回归模型的偏相关定阶法(determining the order of AR model by partial autocorrelation function)　AR 模型阶数的估计方法之一. 它是根据 AR 序列的有限样本，使用偏相关函数截尾性，对 AR 模型的未知阶数进行判定. 设 $x_t(t=0,\pm1,\cdots)$ 为AR(p_0)平稳序列，p_0 为模型中 p 的真数，它的偏相关系数 φ_{kk}有截尾性(参见“平稳序列的偏相关函数”)，即当 $k>p_0$ 时，$\varphi_{kk}=0$. 给定样本 $x_1,x_2,\cdots,x_T$，其样本偏相关函数 $\hat{\varphi}_{kk}$(参见“样本偏相关函数”)具有相合性及渐近正态性，故统计量

$$Q_k^{(p)}=T\sum_{j=p+1}^{p+k}\hat{\varphi}_{jj}^2$$

当 $p\geqslant p_0$ 时，渐近服从 $\chi^2(k)$分布. 由此可检验某个 p 是否可作为 p_0 的估计. 如果经检验判断 $p<p_0$，则提高 p 值再进行检验，直到出现不显著为止. 则认为此最后的 p 值是序列的阶的估计.

滑动平均模型的自相关函数定阶法(determining the order of MA model by autocorrelation function)　MA 模型的一种初步定阶法. 它是根据 MA 序列的有限样本，使用自相关函数截尾性质，对 MA 模型的未知阶数进行判定. 设 $x_t(t=0,\pm1,\cdots)$为 MA(q)序列，q 为模型阶数. 其自相关函数 ρ_k(参见“自相关函数”)有截尾性：当 $k>q$ 时，$\rho_k=0$. 对已给样本 $x_1,x_2,\cdots,x_T$，相应的样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$(参见“样本自相关函数”)有相合性、渐近正态性. 由自相关函数的巴特利特公式有

$$\mathrm{var}(\sqrt{T}\hat{\rho}_k)=1+2\sum_{t=1}^{q}\rho_t^2+o(1).$$

将右端 ρ_t 代以 $\hat{\rho}_t$，记

$$\nabla_2=1+2\sum_{t=1}^{q}\hat{\rho}_t^2,$$

则当 $\sqrt{T}\hat{\rho}_k$ $(k=q+1,\cdots,q+K$；K 为充分大的数)以大概率落入区间$[-2\nabla,2\nabla]$，认为 ρ_k 在 q 截尾. 但由于 $\sqrt{T}\hat{\rho}_k$ $(k=q+1,\cdots,q+K)$不渐近独立，故这种方法只能作为初步定阶法.

信息准则(information criteria)　AR 模型的一种定阶法. 为了根据样本数据确定 AR 模型的阶数，1971 年，日本学者赤池弘次，引入了所谓 AIC (Akaike Information Criteria)方法，通常人们认为它是定阶的可靠方法. 设 $x_t(t=1,2,\cdots)$是 AR(p)序列，p 为模型的真正阶数. 若 $x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是其样本，以 AR(k)模型对此样本进行拟合，其残差方差的估计记为 $\hat{\sigma}_k^2$. AIC 的一般形式为

$$\mathrm{AIC}(k)=\log\hat{\sigma}_k^2+2\frac{k}{T},$$

使 AIC(k)达最小的 k，作为真阶 p 的估计 $\hat{p}$. 这里需预先选定 p 的某个上界 P，使 k 在$[0,P]$中选择. 而柴田证明了，当 T 趋于无穷大时，用 AIC 对 AR 序列定阶，大多数情况可以把阶数定准，有时也会偏高，但不会偏低，即有所谓过拟合现象，故表明 $\hat{p}$ 不具有相合性. 虽然如此，AIC 方法仍不失为可以接受的方法. 后来赤池弘次于 1978 年又从贝叶斯观点引入了新准则 BIC，形如：

$$\mathrm{BIC}(k)=\log\hat{\sigma}_k^2+\frac{k\log T}{T}.$$

而汉恩-奎因引入准则

$$H(k)=\log\hat{\sigma}_k^2+\frac{kc\log\log T}{T}\quad(c>2,\text{常数}).$$

在适当条件下，用后两种准则得到的估计阶 $\hat{p}$ 有相合性.

如前所述，使用以上准则都需人为地选定 $P(>p_0)$，但选定方法没有理论原则可寻. 为解决这个问题，安鸿志、陈兆国、汉恩(Hannan,E. J.)证明了定理：设 x_t 为AR(p)序列，白噪声$\varepsilon(t)$有独立性且 $E\varepsilon^4(t)<\infty$，令$P(T)=O(\log T)^d$，$0<d<\infty$，在 $0\leqslant k\leqslant P(T)$中使 BIC$(k)$达极小的点记为 $\hat{p}$，则 $\hat{p}\to p$ (几乎处处成立)，从而给出求 $P(T)$的方法. 若 x_t 为 ARMA 序列，则准则相应改为

$$\mathrm{BIC}(k,l)=\log\hat{\sigma}_{kl}+\frac{(k+l)\log T}{T},$$

$$H(k,l)=\log\hat{\sigma}_{kl}^2+\frac{(k+l)c\log\log T}{T}\quad(c>2),$$

其中 $\hat{\sigma}_{kl}^2$为白噪声方差的估计，例如用最小二乘或极大似然估计.

AIC 方法(Akaike information criterion)　见“信息准则”.

BIC 准则(Bayesian modification of the AIC)见“信息准则”.

最终预报误差准则(final prediction error criteria)　对 AR 模型的一种定阶法. 设 x_t 是平稳 AR(p)序列，$x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是样本，$\hat{\gamma}_k$ 是样本自协方差函数，$\hat{\varphi}_j(j=1,2,\cdots,n)$是拟合 AR$(n)$参数的最小二乘估计. 称

$$\mathrm{FPE}(n)=\left(1+\frac{n}{T}\right)\left(1-\frac{n}{T}\right)^{-1}\left(\hat{\gamma}_0-\sum_{j=1}^{n}\hat{\varphi}_j\hat{\gamma}_j\right)$$

为最终预报误差. 使 FPE(n)达到最小的 n 称为

AR(p)模型阶数 p 的估计. 此方法是赤池弘次于1969年提出的所谓改进的残差方差图方法. 最终预报误差准则名称的来源是对AR(p)序列观测值拟合 k 阶 AR 模型,使得一步预报均方误差达到最小,只有 k 取真阶 p 才能达到. 所以定阶依据这种准则是合乎实际目的的.

自回归序列的预报(prediction of AR sequence)　AR 序列的预报. 平稳 AR 序列的最小均方误差线性预报,可以使用有限样本给出明确的表达式. 若时间序列 x_t 是 AR(p)序列,即满足

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \varphi_2 x_{t-2} - \cdots - \varphi_p x_{t-p} = a_t,$$

其中 a_t 为白噪声,则其 l 步预报为

$$\hat{x}_t(l) = \varphi_1 \hat{x}_t(l-1) + \cdots + \varphi_p \hat{x}_t(l-p) \quad (l > 0).$$

当 $l \leqslant 0$ 时,$\hat{x}_t(l) = x_{t-l}$. 详细写出递推形式为

$$\hat{x}_t(1) = \varphi_1 x_t + \varphi_2 x_{t-1} + \cdots + \varphi_p x_{t-p+1},$$
$$\hat{x}_t(2) = \varphi_1 \hat{x}_t(1) + \varphi_2 x_t + \cdots + \varphi_p x_{t-p+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\hat{x}_t(p) = \varphi_1 \hat{x}_t(p-1) + \varphi_2 \hat{x}_{t-1}(p-2), + \cdots + \varphi_{p-1}\hat{x}_t(1) + \varphi_p x_t,$$
$$\hat{x}_t(l) = \varphi_1 \hat{x}_t(l-1) + \cdots + \varphi_p \hat{x}_t(l-p) \quad (l>p).$$

由此可见,$\hat{x}_t(l)$ $(l>0)$仅依赖于 t 及 t 以前 $p-1$ 个时刻 x_t 的值:$x_t, x_{t-1}, \cdots, x_{t-p+1}$. 这正是 AR 序列预报的特点.

求和自回归滑动平均序列的预报(prediction of ARIMA sequence)　一种非平稳线性序列的预报. 由于 ARIMA 序列经适当步差分后,化为平稳 ARMA 序列,故 ARIMA 序列的预报可以利用 ARMA 序列预报的方法给出算法. 若时间序列 x_t 是 ARIMA(p,d,q)序列. 当 $d=1$ 时,令 $w_t = x_t - x_{t-1}$,则 w_t 为 ARMA(p,q)序列. 由样本 $x_1, x_2, \cdots, x_T$ 得,$w_2, w_3, \cdots, w_T$. 设预报步长 l,由于

$$x_{t+l} = x_t + \sum_{j=1}^{l} \hat{w}_{t+j},$$

得预报公式为

$$\hat{x}_t(l) = x_t + \sum_{j=1}^{l} \hat{w}_t(j),$$

而 $\hat{w}_t(j)$可按 ARMA 序列预报值进行计算. 当 $d=2$ 时,$w_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$为 ARMA($p,q$)序列,

$$\hat{x}_t(l) = x_t + l(x_t - x_{t-1}) + \sum_{j=1}^{l} (l+1-j)\hat{w}_t(j).$$

对于更高阶 d 的情况,可逐步导出预报公式.

自回归滑动平均序列的预报(prediction of ARMA sequence)　ARMA 序列的预报. 平稳 ARMA 序列的最小均方误差线性预报,可以利用平稳线性序列的预报方法,只需将 ARMA 序列化为传递形式或逆转形式. 但是,使用如下递推公式更便于求预报值. 设 x_t 为 ARMA(p,q)序列,

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

是平稳可逆的,a_t 为白噪声. 当预报步长 $l>q$ 时,预报值为

$$\hat{x}_t(l) = \varphi_1 \hat{x}_t(l-1) + \cdots + \varphi_p \hat{x}_t(l-p),$$

其中,当 $l-j \leqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,p)$时,

$$\hat{x}_t(l-j) = x_{t+l-j}.$$

如果 $0<l\leqslant q$,则使用递推公式以求预报值

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{t+1}(1) \\ \hat{x}_{t+1}(2) \\ \vdots \\ \hat{x}_{t+1}(q) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:cccc} -g_1 & 1 & & & \bigcirc \\ -g_2 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -g_{q-1} & \bigcirc & & & 1 \\ -(g_q + \varphi'_q) & -\varphi'_{q-1} & & \cdots & -\varphi'_1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_t(1) \\ \hat{x}_t(2) \\ \vdots \\ \hat{x}_t(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_q \end{pmatrix} x_{t+1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sum_{j=q+1}^{p} \varphi'_j x_{t+q-j+1} \end{pmatrix},$$

其中 g_j 为 x_t 的传递形式(参见"自回归滑动平均模型")的系数. 当 $0<j\leqslant p$,$\varphi' = \varphi_j$;当 $j>p$,$\varphi'_j = 0$. 当 $p \leqslant q$ 时上式第三项为 0. 迭代初始时刻 t_0 可取 $\hat{x}_{t_0}(j) = 0$. 当 $p=0$,则 x_t 为 MA(q):

$$x_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q},$$

可在以上递推公式中,以 θ_j 代 g_j,而 φ_j 为零.

滑动平均序列的预报(prediction of MA sequence)　见"自回归滑动平均序列的预报".

平稳线性序列的预报(prediction of stationary linear sequence)　一种特殊类型时间序列的预报. 对平稳线性序列,若已知某时刻及其以前一切时刻的值,对将来进行预报(参见"平稳时间序列的预报"). 此处可以有明确的表达式. 设 x_t $(t=0,\pm1,\cdots)$为零均值线性序列,已知 $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots$,若序列表为无穷滑动阶平均形式

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} g_j a_{t-j} \quad (g_0 = 1),$$

a_t 为零均值方差 σ^2 的白噪声,则步长为 $l>0$ 的预报值为

$$\hat{x}_t(l) = \sum_{j=l}^{\infty} g_j a_{t+l-j}.$$

预报误差及预报方差分别为

$$e_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} g_j a_{t+l-j},$$

$$\mathrm{var}(e_t(l)) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} g_j^2.$$

若$\{x_t\}$存在逆转形式(参见"平稳线性序列")

$$a_t = x_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j x_{t-j} \ (\pi_0 = 1),$$

则 l 步预报值又可表为

$$\hat{x}_t(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} x_{t+1-j},$$

其中

$$\pi_j^{(l)} = \pi_{j+l-1} + \sum_{i=1}^{l-1} \pi_i \pi_j^{(l-i)} \ (l > 1),$$

而 $\pi_j^{(1)} = \pi_j$. 故由逆转形式给出的预报公式,直接可以利用已知的 $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots$

求和自回归滑动平均模型(integrated autoregressive moving average model) 简称 ARIMA 模型. 一种非平稳时间序列模型. 如果时间序列 $x_t(t=0,\pm1,\cdots)$是有一定增长趋势的非平稳序列,经过差分运算 $\nabla x_t = x_t - x_{t-1} \equiv w_t$,变为平稳 ARMA$(p,q)$序列,则称 x_t 满足一阶求和自回归滑动平均模型. 若序列 w_t 仍不平稳,可取二次差分 $\nabla^2 x_t = w_t - w_{t-1}$,乃至 d 阶差分 $\nabla^d x_t = z_t - z_{t-1}$,其中 $z_t = \nabla^{d-1} x_t$,才得到 ARMA(p,q)序列,则称 x_t 满足 d 阶求和自回归滑动平均模型,记为 ARMA(p,d,q),其中 p,d,q 为阶数.

ARIMA 模型(integrated autoregressive moving model) 求和自回归滑动平均模型的简称.

季节模型(seasonal model) 一类疏系数的 ARIMA 模型. 在许多实际问题中,随机序列的变化包含很明显的周期性规律. 例如固定海域的海水温度的变化有一定的随机性,但是每年间又有很强的相似之处,即类似于周期性的规律. 这种规律是由于季节变化的原因所引起的. 描述这种现象可以用季节性模型. 设 s 是一个正整数,x_t 是随机序列,定义季节差分为

$$\nabla s x_t = x_t - x_{t-s} \equiv w_t,$$

二阶季节差分为

$$\nabla_s^2 x_t = w_t - w_{t-s},$$

一般 d 阶季节差分

$$\nabla_s^d x_t = z_t - z_{t-s},$$

其中 $z_t = \nabla_s^{d-1} x_t$. 如果序列 x_t 经 d 阶季节差分运算 $\nabla_s^d x_t$ 后变为 ARMA(p,q)序列,则称 x_t 为(p,d,q)阶季节序列. 通常,经一阶季节差分往往就可以平稳了,高阶季节差分一般不用.

非线性时间序列模型(nonlinear time series model) 时间序列的一类重要模型. 设$\{x_t\}$是平稳序列,

$$E(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots)$$

表示给定 $x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots$ 的条件下,x_t 的条件期望,$\hat{x}_{t-1}(1)$表示给定 $x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots$ 时,x_t 的条件期望预报,即

$$\hat{x}_{t-1}(1) = E(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) = \varphi(x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots).$$

记 $e_t = x_t - \hat{x}_{t-1}(1)$,则有 $x_t = \varphi(x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) + e_t$. 当预报函数 φ 仅依赖于 $x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-p}$ 等有限个历史值时,称$\{x_t\}$服从有限阶自回归模型

$$x_t = \varphi(x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-p}) + e_t,$$

否则称为无穷阶自回归模型.

当 φ 仅被有限个参数所决定时,称之为参数模型. 若参数模型不能表为 $x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-p}$ 的线性组合时,则称之为参数型非线性模型. 例如双线性模型、门限自回归模型、指数自回归模型、自回归条件异方差模型(参见相应各词条). 当 φ 是非参数型的任意函数时,称为非参数模型. 它也是非线性模型.

参数型非线性模型(parametric form nonlinear model) 见"非线性时间序列模型".

双线性模型(bilinear model) 一种非线性模型. 设 $x_t(t=0,\pm1,\cdots)$是一个时间序列,满足

$$x_t + \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} = \sum_{j=0}^{r} c_j e_{t-j} + \sum_{l=1}^{m} \sum_{l'=1}^{k} b_{ll'} e_{t-l} x_{t-l'},$$

其中 $c_0 = 1$,e_t 是独立随机变量序列,$a_j, c_j, b_{ll'}$ 是实参数. 称此模型为双线性时间序列模型,简记为 BL(p,r,m,k). 当 $b_{ll'} = 0$ (对一切 l, l'),则以上模型为线性的. 当 $b_{ll'}$ 不全为 0 时,由于乘积项 $e_t x_{t'}$ 的存在,使得模型为非线性的.

双线性时间序列模型(bilinear time series model) 见"双线性模型".

门限自回归模型(threshold autoregressive model) 一种非线性模型. 它是汤家豪(Tong,H.)于 1977 年提出的. 作为 AR 模型的一种推广,其非线性表现在 x_{t+1} 与 x_t 之间的函数关系上. 实际上,门限自回归模型就是按段线性逼近非线性自回归模型

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-l}) + \varepsilon_t.$$

最简单的门限自回归模型是

$$x_t = \begin{cases} a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x_{t-1} + e_t^{(1)}, \text{当 } x_{t-1} \leqslant r, \\ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} x_{t-1} + e_t^{(2)}, \text{当 } x_{t-1} > r, \end{cases}$$

其中$\{e_t^{(i)}\}$ $(i=1,2)$是两个均值为零的独立同分布随机变量序列,二者相互独立,但方差可以不同;r 是一个实数;$a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(1)}$ 和 $a_1^{(2)}$ 是实参数,称为门限参数. 此模型称为自激门限自回归模型,简记为 SETAR (2;1,1). 括号中第一个参数表示子模型数,后两个参数分别表示线性子模型的阶. 此模型所以称之为自激的,是因为所考虑的变量是一维的,表示与多维变量情况的区别. 类似地,可以定义

$$\text{SETAR}(l;\ k_1, k_2, \cdots, k_l).$$

自激门限自回归模型(self-exciting threshold AR model) 见"门限自回归模型".

门限参数(threshold parameter)　见"门限自回归模型".

指数自回归模型(exponential autoregressive models)　一种非线性模型. 它是奥萨克(Ozaki, T.)和哈根(Haggan, V.)在 1978 年为研究非线性随机振动理论而提出的. 最简单的就是二阶指数自回归模型

$$x_t - a_{1t}x_{t-1} - a_{2t}x_{t-2} = e_t,$$

其中

$$a_{it}=\varphi_i+\pi_i\exp\{-\gamma x_{t-1}^2\}\quad (i=1,2),$$

而 $\gamma,\varphi_1,\varphi_2,\pi_1$ 和 π_2 是实参数, $\{e_t\}$是白噪声. 简记为 EAR(2). 类似可以定义 k 阶指数自回归模型 EAR(k).

自回归条件异方差模型(autoregressive conditional heteroscedasticity model)　一种非线性模型. 在经济现象中, 对诸如通货膨胀率、兑换率、股票价值等数据拟合较好的一类模型. 设随机序列$\{x_t\}$服从如下自回归模型

$$x_t = \varphi(x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-p}) + e_t, \tag{1}$$

且

$$e_t|\mathscr{F}_{t-1} \sim N(0,h_t), \tag{2}$$

其中

$$\mathscr{F}_{t-1}=\sigma(x_{t-1},x_{t-2},\cdots)$$

为由$\{x_{t-1},x_{t-2},\cdots\}$生成的 σ 代数. (2)式表示在给定 $\mathscr{F}_{t-1}$时, e_t 的条件分布为正态 $N(0,h_t)$. 如果 h_t 满足如下模型

$$h_t = h(e_{t-1},e_{t-2},\cdots,e_{t-q}), \tag{3}$$

其中 $h(\cdot)$是 q 元非负可测函数. 称(1), (2)和(3)为自回归条件异方差模型. 实际使用中, 常取 h 为如下的线性参数模型

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{q}\alpha_k e_{t-k}^2, \tag{4}$$

其中系数满足 $\alpha_0>0,\alpha_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,q)$.

此外, 关于 e_t 具有条件正态分布的假定可以被如下模型代替

$$e_t = \varepsilon_t h_t^{\frac{1}{2}},$$

其中$\{\varepsilon_t\}$为独立同分布序列, $E\varepsilon_t=0, E\varepsilon_t^2=1$, ε_t 与 $\{e_s,s<t\}$独立. 联合以下三式

$$x_t= \varphi(x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-p}) + e_t,$$
$$e_t= \varepsilon_t h_t^{\frac{1}{2}},$$
$$h_t= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2,$$

称为 AR(p)-ARCH(q)模型, 即 p 阶 AR, q 阶条件异方差模型.

时间序列回归模型(regression model of time series)　动态数据处理中常用的模型. 在形式上与经典回归模型完全相似. 其一般形式为

$$y(t)=\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)+\cdots+\alpha_px_p(t)+\varepsilon(t),$$

其中 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_p(t)$为自变元序列(回归函数). 此模型包括了几种常见的模型. 就回归函数而言分为:

1. 纯回归型. 即$x_i(t)$均非随机的.

2. 随机回归型. 即 $x_i(t)$为随机的, 且关于

$$\mathscr{F}_{t-1} = \sigma\{\varepsilon(s),\ s\leqslant t-1\}$$

可测, 其中 $\sigma\{\cdot\}$表示生成的 σ 域.

3. 纯自回归型. 即 $x_i(t)=y(t-i)\ (i=1,2,\cdots,p)$. 若其中系数特征多项式

$$\alpha(u) = 1 - \sum_{j=1}^{p}\alpha_ju^j$$

的根都在单位圆外, 称为平稳线性自回归模型. 如果 $\alpha(u)$的根都在单位圆内, 称为纯爆发式的 AR 模型. 若有根在单位圆上出现, 单位圆内不出现, 称为非稳定的 AR 模型.

对残差 $\varepsilon(t)$的假定有如:

1. $\varepsilon(t)$是独立同分布的, 即 i. i. d. 假定.

2. $\varepsilon(t)$为收敛系, 即对任何平方可和实数列$\{a_j\}$(即$\sum a_j^2<\infty$), 均有

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j\varepsilon(j)$$

几乎处处收敛.

3. $\varepsilon(t)$为线性序列(参见"平稳线性序列").

4. $\varepsilon(t)$为鞅差序列, 即 $\varepsilon(t)$关于 $\mathscr{F}_t$ 可测, 且

$$E(\varepsilon(t)|\mathscr{F}_{t-1})=0,\text{a. s.}$$

其中 $\mathscr{F}_t$ 为某单调非降 σ 域序列. 20 世纪末期, 在以上各种假定下进行广泛的、特别是渐近理论研究, 中国学者也有诸多深刻的结果.

平稳线性自回归模型(stationary linear autoregression model)　见"时间序列回归模型".

纯爆发式的AR 模型(purely outbreak form's AR model)　见"时间序列回归模型".

非稳定的AR 模型(unstable AR model)　见"时间序列回归模型".

周期图(periodogram)　一种统计量. 它是平稳过程隐含周期检测和谱密度估计的一种重要工具. 19 世纪末(1898), 德国学者舒斯特尔(Schuster, A.)在研究地球物理与经济数据隐含周期问题中首先提出来的. 使用平均周期图进行谱估计, 则是 20 世纪 40 年代以后的事, 这方面做出重要贡献的学者有美国数学家丹尼尔(Daniell, P. J.)(1946), 英国统计学家巴特利特(Bartlett, A. C.)(1948), 美国统计学家图基(Tukey, J. W.)(1940).

给定零均值平稳序列$\{x_t\}$的 T 个观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_T$, 称定义在$[-\pi,\pi]$上的函数

$$I_{T,X}(w) = \frac{2}{T}\left|\sum_{t=1}^{T}x_t\cdot e^{-iwt}\right|^2$$

为此平稳序列的周期图,简称周期图.称

$$I_{T,X}^{*}(w)=\frac{1}{4\pi}I_{T,X}(w)$$

为修正周期图,一般仍称为周期图.如果 x_t 是高斯白噪声,零均值,方差为 σ^2,则

$$I_p \triangleq I_{T,X}(w_p), \quad w_p=\frac{2\pi p}{T},$$

$$\left(p=0,1,\cdots,\left[\frac{T}{2}\right]\right)$$

($[T/2]$代表 $T/2$ 的最大整数部分)是独立的,且

$$I_p=\begin{cases}\sigma^2\chi_2^2 & \left(p\neq 0,\frac{T}{2}\right),\\ 2\sigma^2\chi_1^2 & \left(p=0,\frac{T}{2};T\text{ 为偶数}\right),\end{cases}$$

其中 χ_ν^2 服从自由度为 ν 的 χ^2 分布.

潜周期检测(search hidden periodicities) 亦称隐含周期检测.检测在白噪声掩盖下周期信号的周期.设离散谱过程

$$\begin{aligned}x_t&=\sum_{i=1}^{k}A_i\cos(\omega_i t+\varphi_i)+a_t\\&=\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i\cos\omega_i t+\beta_i\sin\omega_i t)+a_t\\&\triangleq f(t)+a_t,\end{aligned}$$

其中 a_t 是白噪声;A_i,ω_i,φ_i,k 是未知参数(φ_i 亦可以是随机变量);$f(t)$是周期函数,它隐含在噪声 a_t 之中,所以称$\{\omega_i\}$是隐含周期或潜周期(实际上,周期是 $2\pi/\omega_i$).使用周期图来搜索隐含周期$\{\omega_i\}$的过程,称为潜周期检测.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_T$ 是给定的 T 个样本观察值.计算周期图

$$I_{T,X}(\omega)=\frac{2}{T}\left|\sum_{t=1}^{T}x_t e^{i\omega t}\right|^2,$$

其中 ω 任意给定.由于周期图有性质:当 T 趋于无穷大时,对于 $\omega\neq\omega_i(i=1,2,\cdots,k)$,$I_{T,X}(\omega)$与 $\log T$ 同阶;对于 $\omega=\omega_i(i=1,2,\cdots,k)$,$I_{T,X}(\omega_i)$与 T 同阶.这样,两个数量级差别是很大的,通常 T 取数百时,可将两者区分开来,亦即能检测给定的 ω 是否为隐含周期.

英国数学家、生物学家费希尔(Fisher,R. A.)于 1929 年在其著名论文中,对 $\max(I_p)$给出小样检验,以检测 x_t 的最大峰的隐含频率.所使用的统计量是

$$g=\max(I_p)\Big/\sum_{p=1}^{T/2}I_p,$$

其中

$$I_p=I_{T,X}(\omega_p), \quad \omega_p=\frac{2\pi p}{T},$$

$$\left(p=0,1,2,\cdots,\left[\frac{T}{2}\right]\right).$$

零假设为

$$H_0:\ \alpha_i=\beta_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

并且假设 x_t 服从正态分布.这种检验方法是用周期图坐标分布进行检验.

隐含周期检测(search hidden periodicities) 即"潜周期检测".

谱分布估计(spectral distribution estimation) 平稳时间序列谱分布函数的估计.给定平稳过程 $x_t(t=0,\pm1,\cdots)$的 T 个观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_T$,计算其修正周期图

$$I_{T,X}^{*}(\omega)=\frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T}x_t e^{-i\omega t}\right|^2 \quad (|\omega|\leqslant\pi),$$

称

$$\hat{H}(\omega)=\int_{-\pi}^{\omega}I_{T,X}^{*}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

为此平稳时间序列谱分布函数 $H(\omega)$的估计.若对每个 ν,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}x_{j+\nu}x_j=\gamma_\nu$$

以概率 1 成立,则对 $H(\omega)$的任意连续点 μ_1 与 μ_2,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^{n}x_j e^{-2\pi}\right|^2\mathrm{d}\lambda=H(\omega_2)-H(\omega_1)$$

以概率 1 成立.即 $H(\omega)$的估计 $\hat{H}(\omega)$具有相合性.值得注意的是,$I_{T,X}^{*}(\omega)$却不是谱密度的相合估计.

谱密度估计(spectral density estimation) 亦称谱估计.平稳序列谱密度的估计方法.设 x_t 是具有连续谱的平稳时间序列,其自协方差函数和自相关函数分别为

$$\gamma_k=\mathrm{cov}(x_t,x_{t+k}), \quad \rho_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

其谱密度函数和非正规化谱密度函数分别为:

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k e^{-ik\omega},$$

$$h(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-ik\omega}.$$

所谓谱估计就是利用样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_T$ 来估计谱密度函数 $f(\omega)$或 $h(\omega)$.谱估计方法很多,从参数性质上分有非参数谱估计和参数谱估计.参数谱估计又分为极大熵谱估计和自回归谱估计,非参数谱估计有窗谱估计、极大似然谱估计、G 谱估计.

谱估计(spectral estimation) 即"谱密度估计".

数据窗(data window) 时间序列分析的基本概念之一.即为了减小谱估计的偏度,对数据采用加权的处理方法.给定平稳序列的 T 个观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_T$,由此构造一列新的观察

$$y_t=h_t\cdot x_t \quad (t=1,2,\cdots,T),$$

其中 h_t 是一个适当的常数列,称为数据窗.例如

$$h_t^{(1)}=\begin{cases}0 & (t\overline{\in}(0,T]),\\ 1 & (t\in(0,T]),\end{cases}$$

$$h_t^{(2)}=\begin{cases}\dfrac{t}{Tb} & (0\leqslant t\leqslant Tb),\\ 1 & (Tb\leqslant t\leqslant(1-b)T),\\ \left(1-\dfrac{t}{T}\right)\Big/b & ((1-b)T\leqslant t\leqslant T),\end{cases}$$

$$h_t^{(3)}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi t}{T}\right)\quad(0<t<1).$$

为了估计平稳序列的谱密度函数，利用 $|d_T(\omega)|^2$ 代替修正周期图 $I^*_{T,X-\overline{X}}(\omega)$，有

$$\hat{h}^*(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}|d_T(\theta)|^2W_T(\omega-\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$d_T(\omega)=\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{t=1}^{T}(y_t-h_t\cdot\widetilde{X})e^{-i\omega t},$$

$$\overline{X}=\sum_{t=1}^{T}x_t\Big/T,$$

$$\widetilde{X}=\sum_{t=1}^{T}y_t\Big/\sum_{t=1}^{T}h_t,$$

$$H=2\pi\sum_{t=1}^{T}h_t^2.$$

若 $h_t\equiv1$，则

$$|d_T(\omega)|^2=I^*_{T,X-\overline{X}}(\omega).$$

在谱估计中，如果谱窗有不连续点，加数据窗可以显著地减小谱估计的偏度.

窗谱估计(window spectral estimator)　重要的谱估计之一.给定零均值平稳时间序列 x_t 的 T 个观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_T$，修正周期图为

$$I^*_{T,X}(\omega)=\frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T}x_te^{-i\omega t}\right|^2\omega\in[-\pi,\pi].$$

称定义在$[-\pi,\pi]$上的函数

$$\hat{h}(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}I^*_{T,X}(\theta)W(\omega-\theta)\mathrm{d}\theta$$

为此平稳序列非正规化谱

$$h(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_ke^{i\omega t}$$

(此处 γ_k 为自协方差函数)的窗谱估计，其中

$$W(\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=-T+1}^{T-1}\lambda(s)e^{-is\theta}$$

称为谱窗，并且称

$$\lambda(s)\ (s=-(N-1),\cdots,N-1)$$

为延迟窗.加窗谱估计的目的就是使其具有相合性.通常评定估计量优劣的标准是均方误差

$$E[\hat{f}(\omega)-f(\omega)]^2,$$

但它可分解为

$$E[\hat{h}(\omega)-h(\omega)]^2=E[\hat{h}(\omega)-E\hat{h}(\omega)]^2+[E\hat{h}(\omega)-h(\omega)]^2,$$

前一项为方差，第二项为偏度.故对 $\hat{h}(\omega)$，需选择窗 $W(\theta)$，使两者都变小才是理想的选择.

几种常见的延迟窗为：

1. 截断周期图窗：

$$\lambda(s)=\begin{cases}1 & (|s|\leqslant M),\\ 0 & (|s|>M),\end{cases}$$

其中 M ($<T-1$)为窗参数(以下同).

2. 巴特利特窗：

$$\lambda(s)=\begin{cases}1-\dfrac{|s|}{M} & (|s|\leqslant M),\\ 0 & (|s|>M).\end{cases}$$

3. 矩形窗(或称丹尼尔窗)：

$$\lambda(s)=\sin\left(\frac{\pi s}{M}\right)\Big/\frac{\pi s}{M}.$$

4. 一般窗(或称图基窗)：

$$\lambda(s)=\begin{cases}1-2a+2a\cos\dfrac{\pi s}{M} & (|s|\leqslant M),\\ 0 & (|s|>M),\end{cases}$$

其中 $a\in[0,1/4]$为常数.

5. 图基-汉明窗：取 $a=0.23$ 的一般图基窗.

6. 图基-汉宁窗：取 $a=0.25$ 的一般图基窗.

7. 帕宗窗：

$$\lambda_1(s)=\begin{cases}1-6\left(\dfrac{s}{M}\right)^2+6\dfrac{|s|^3}{M^3} & \left(|s|\leqslant\dfrac{M}{2}\right),\\ 2\left(1-\dfrac{|s|}{M}\right)^3 & \left(\dfrac{M}{2}<|s|\leqslant M\right),\\ 0 & (|s|>M),\end{cases}$$

$$\lambda_2(s)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{s}{M}\right)^2 & (|s|\leqslant M),\\ 0 & (|s|>M).\end{cases}$$

8. 巴特利特-普里斯特利窗：

$$\lambda(s)=\frac{3M^2}{(\pi s)^2}\left\{\frac{\sin\dfrac{\pi s}{M}}{\dfrac{\pi s}{M}}-\cos\frac{\pi s}{M}\right\}.$$

谱窗(spectral window)　见"窗谱估计".

延迟窗(lag window)　见"窗谱估计".

极大熵谱估计(entropy maximization spectral estimation)　以极大熵为准则的谱估计.设 $f(\omega)$是平稳序列 $x_t(t=0,\pm1,\cdots)$的正规化谱(密度函数)，称

$$I(f)=\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\omega)\mathrm{d}\omega$$

为平稳序列 x_t 的谱熵.假定 x_t 的前 $m+1$ 个自协方差函数值

$$\gamma_k=\mathrm{cov}(x_t,x_{t+k})\ (k=0,1,\cdots,m)$$

已知，在约束

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\omega}f(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{\gamma_k}{\gamma_0}\quad(k=0,\pm1,\cdots,\pm m)$$

下，使得谱熵 $I(f)$达到极大值，以此作为准则，所得到的估计称为极大熵谱估计.给定观察值 $x_1,x_2,$

$\cdots, x_T$，利用样本自协方差函数 $\hat{\gamma}_k$ 代替自协方差函数，求解上述变分问题可得到极大熵谱估计．而此问题实质上归于求解尤尔-沃克方程

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\gamma}_1 & \cdots & \hat{\gamma}_{m-1} \\ \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 & \cdots & \hat{\gamma}_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\gamma}_{m-1} & \hat{\gamma}_{m-2} & \cdots & \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_m \end{pmatrix}.$$

令

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 - \hat{\varphi}_1\hat{\gamma}_1 - \cdots - \hat{\varphi}_m\hat{\gamma}_m,$$

最后得出极大熵谱估计

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\sigma}^2}{\left|1 - \sum_{k=1}^{m} \hat{\varphi}_k e^{-ik\omega}\right|^2} \quad (|\omega| \leqslant \pi).$$

所以又称此 $\hat{f}(\omega)$ 为谱的矩估计．

谱熵(spectral entropy)　见"极大熵谱估计"．

谱矩估计(spectral moment estimator)　见"极大熵谱估计"．

自回归谱估计(autoregressive spectral estimator)　一种重要的谱估计方法．它属于参数估计方法．设 $x_1, x_2, \cdots, x_T$ 是正态平稳时间序列 x_t 的样本，选择 P_T 满足：当 $T \to \infty$ 时，$P_T \to \infty$，

$$P_T \sqrt{\frac{\log T}{T}} \to 0.$$

拟合 P_T 阶自回归模型得到参数的矩估计

$$(\hat{\varphi}_1^{(P_T)}, \hat{\varphi}_2^{(P_T)}, \cdots, \hat{\varphi}_{P_T}^{(P_T)}, \hat{\sigma}^{(P_T)2})^T,$$

然后得到

$$\hat{f}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\sigma}_0^{(P_T)2}}{\left|\sum_{k=0}^{P_T} \hat{\varphi}_k^{(P_T)} e^{-ik\omega}\right|^2} \quad (|\omega| \leqslant \pi),$$

其中 $\hat{\varphi}_0^{(P_T)} \equiv 1$．称 $\hat{f}_T(\omega)$ 为 x_t 的谱密度函数 $f(\omega)$ 的自回归谱估计．

极大似然谱估计(maximum likelihood spectral estimate)　一种谱估计方法．是没有固定谱窗的自适应方法．卡彭(Capon, J.)于 1969 年在地球物理研究波数分析时首先使用了这一方法．设 $x_t(t=0, \pm 1, \cdots)$ 为零均值平稳序列，$x_1, x_2, \cdots, x_T$ 是样本，$\hat{R} = (\hat{\rho}_{j-i})_{N\times N}$，其中 $\hat{\rho}_k$ 是样本自相关函数．记

$$E = (1, e^{i\lambda}, \cdots, e^{i\lambda(N-1)}),$$

N 是小于 T 的某正整数，则序列 x_t 的极大似然谱估计为

$$\hat{f}_L = \frac{1}{E\hat{R}^{-1}E^*},$$

其中 * 表示共轭转置．它设想构造一个滤波器，以最优方法允许某一特定频率不变形的通过，而抑制所有其他频率分量．

***G* 谱估计**(*G*-spectral estimator)　一种谱估计方法．它是由格勒(Gray, H. L.)于 1975 年提出的．它特别适用于 ARMA(p,q)序列的情况，属于非参数估计方法．设 $x_t(t=0, \pm 1, \cdots)$为平稳 ARMA(p, q)序列，谱密度为

$$f(\omega), \omega \in [-\pi, \pi],\ x_1, x_2, \cdots, x_T$$

是样本．序列的自相关函数及样本自相关函数分别记为 ρ_k 和 $\hat{\rho}_k$．序列 x_t 的谱密度的 G 谱估计定义为

$$\hat{f}_a(\omega) = 2\mathrm{Re}[e_n(F_m(\omega)) - F_0(\omega)] + 1$$
$$(m \geqslant q, |\omega| \leqslant \pi),$$

其中 Re 表示实部，

$$F_m(\omega) = \sum_{j=-n}^{m} \hat{\rho}_j e^{i\omega j}, n > \max\{0, p-q-2\};$$

且 $e_n(\cdot)$为 e_n 变换，其定义如下：对于

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} a_i, k \geqslant 1,$$

$$e_n(A_k) = \begin{vmatrix} A_k & A_{k+1} & \cdots & A_{k+n} \\ a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{k+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+n-1} & a_{k+n} & \cdots & a_{k+2n-1} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{k+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+n-1} & a_{k+n} & \cdots & a_{k+2n-1} \end{vmatrix}.$$

当以上分数的分母为零时，令

$$e_n(A_k) = e_{n-1}(A_k) \text{ 及 } e_0(A_k) = (A_k).$$

以上定义的谱密度 $f(\omega)$的 G 谱估计具有相合性．

多元时间序列分析(multivariate time series analysis)　对多变量时间序列的研究．实际中，许多问题不仅是观察单个过程 x_t，而且是同时观察多个过程 $x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{rt}$．或者说 x_t 为向量时，需要分析多变量时间序列

$$x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{rt})^T.$$

例如，在工程上要研究电流与电压同时随时间变化的情况；在化学变化中要分析压力、温度和体积的变化关系；在气象预报分析时需要同时考虑该地区的雨量、气温和气压等记录资料．不仅要把他们各分量看做单变量过程来研究，而且要研究各分量之间的关系及变化规律，从而对时间序列做出预报和控制．这就是多元时间序列分析．其最典型的模型就是多元 ARMA 模型．

互谱(cross-spectrum)　多元时间序列分析的一个概念．指互谱密度函数．设 $x_t = (x_{1t}, x_{2t})^T$ 是平稳双变量过程，即满足：

1．$\{x_{1t}\}$和$\{x_{2t}\}$是两个单变量平稳过程．

2．$\mathrm{cov}(x_{1t}, x_{2s})$仅仅是 $s-t$ 的函数．

互协方差函数

$$R_{21}(k) = \mathrm{cov}(x_{1t}, x_{2t+k}),$$

互相关函数

$$\rho_{21}(k)=\frac{R_{21}(k)}{\sqrt{R_{11}(0)\cdot R_{22}(0)}}.$$

对称地，$R_{12}(k)$和$\rho_{12}(k)$仍分别称为互协方差函数和互相关函数，且

$$R_{12}(k)=R_{21}(-k).$$

再假定x_{1t}和x_{2t}均有纯连续谱$h_{11}(\omega)$和$h_{22}(\omega)$（为区别起见称它们为自谱），则称

$$h_{21}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{21}(k)e^{-ik\omega}$$

为x_{1t}和x_{2t}的互谱，类似地仍称$h_{12}(\omega)$为互谱. 称

$$h(\omega)=\begin{pmatrix}h_{11}(\omega) & h_{12}(\omega)\\ h_{21}(\omega) & h_{22}(\omega)\end{pmatrix}$$

为平稳二元时间序列x_t的谱阵. 相应于单变量情形，使用互相关函数代替互协方差函数，得到正规化互谱. 由于$R_{12}(k)$不必是偶函数，因而互谱$h_{12}(\omega)$一般为复值函数，即可表为

$$h_{12}(\omega)=P_{12}(\omega)+iQ_{12}(\omega),$$

其中$P_{12}(\omega)$和$Q_{12}(\omega)$均为实值函数.

谱阵(spectrum matrix)　见“互谱”.

相干函数(coherency function)　亦称相干. 简称相干. 两过程在各频率上分量间的线性相关程度. 设$h_{12}(\omega)$是平稳二元时间序列$x_t=(x_{1t},x_{2t})^T$的互谱，$h_{11}(\omega)$和$h_{22}(\omega)$分别是x_{1t}和x_{2t}的自谱. 称函数

$$W_{12}(\omega)=\frac{h_{12}(\omega)}{\sqrt{h_{11}(\omega)h_{22}(\omega)}}$$

为复相干，其模$|W_{12}(\omega)|$称为相干函数，$|W_{12}(\omega)|$的曲线称为相干谱. 有时称$|W_{12}(\omega)|^2$为相干或平方相干. $W_{12}(\omega)$可以认为是x_{1t}和x_{2t}中频率为$\omega/2\pi$的分量的随机系数之间的相关系数，它没有量纲，且

$$0\leqslant|W_{12}(\omega)|\leqslant 1.$$

所以函数$|W_{12}(\omega)|$反映了x_{1t}和x_{2t}两过程在各频率上分量间的线性相关程度. 因此又说$W_{12}(\omega)$是频率域中的相关系数.

相干谱(coherency spectrum)　见“相干函数”.

互幅谱(cross-amplitude spectrum)　亦称幅值函数. 多元时间序列的频域特征之一. 设

$$h_{12}(\omega)=P_{12}(\omega)-iQ_{12}(\omega)$$

是平稳二元时间序列$x_t=(x_{1t},x_{2t})^T$的互谱，记其极坐标形式为

$$h_{12}(\omega)=M_{12}(\omega)\cdot e^{i\psi_{12}(\omega)},$$

其中

$$M_{12}(\omega)=|h_{12}(\omega)|=(P_{12}^2(\omega)+Q_{12}^2(\omega))^{\frac{1}{2}},$$

$$\psi_{12}(\omega)=-\tan^{-1}\frac{Q_{12}(\omega)}{P_{12}(\omega)}.$$

$M_{12}(\omega)$称为互幅谱，$\psi_{12}(\omega)$称为互相谱.

幅值函数(amplitude value function)　即“互幅谱”.

多元ARMA模型(multivariate ARMA model)　多元时间序列中的重要模型. 多元ARMA(p,q)模型定义为

$$\begin{aligned}&x_t+A_1x_{t-1}+\cdots+A_px_{t-p}\\&=a_t+B_1a_{t-1}+\cdots+B_qa_{t-q},\end{aligned}$$

其中

$$x_t=(x_{1t},x_{2t},\cdots,x_{rt})^T$$

是零均值平稳r元随机过程；$A_1,A_2,\cdots,A_p$都是r阶方阵；

$$a_t=(a_{1t},a_{2t},\cdots,a_{rt})^T$$

是r元白噪声，满足

$$Ea_t=0\text{ 及 }Ea_ta_s^T=Q\ (t=s),$$

而$t\neq s$时为零；Q是r阶正定矩阵；$B_1,B_2,\cdots,B_q$都是r阶矩阵. 定义

$$A(Z)=\sum_{i=0}^{p}A_iZ^i$$

（$A_0=I$是r阶单位矩阵，Z为向后推移算子，$Bx_t=x_{t-1}$）

$$B(Z)=\sum_{i=0}^{q}B_iZ^i(B_0=I),$$

多元ARMA模型平稳和可逆条件分别是$|A(z)|$和$|B(z)|$的零点都在单位圆外. 当$q=0$时，称为多元AR(p)模型；当$p=0$时，称为多元MA(q)模型.

在单变量ARMA情形，只要补充一些简单条件，自协方差函数就可以确定惟一的ARMA模型. 但在多元ARMA模型情形则不然，寻求在什么条件下，可以使给定的互协方差函数可识别惟一的多元ARMA模型，是多元时间序列分析的典型问题.

可靠性统计

可靠性(reliability)　判定系统或元器件性能的指标之一. 指产品在规定的条件下和规定的时间内完成规定功能的能力. 这里三个“规定”和一个“能力”是重要的，其中规定的条件是指使用条件、维护条件、环境条件和操作技术等，它是比较可靠性高低的前提；

“规定的时间”是可靠性的核心，不谈论时间就无可靠性而言. 而“规定的时间”的长短又随着产品不同和使用目的不同而异. 譬如火箭发射系统只要求在几分钟内可靠，海底电缆却要求几十年可靠，一般电视机若有几万小时可靠已能使顾客满意. 可见可靠性是与时间紧密相连，可靠性是关于时间的质量.

“规定的功能”常指产品的各项性能指标. 各项性能指标都已达到，则称该产品完成规定功能，否则

就称为丧失规定功能,或简称失效或故障.最后,“能力”是度量产品可靠性高低的尺度,由于产品失效带有随机性,不能仅看一个产品而定,而需要在观察大量同类产品之后而定,譬如,100 台计算机在$t=0$时其规定功能都达到,而在$t=1000$ 小时后,已有 5 台失效(没有全部完成规定功能),这表明 $t=1000$ 小时后,它完成规定功能的能力只有 95%,若另一牌号计算机在 1000 小时后,完成规定功能的能力为 99%,则后者比前者的可靠性高.

可靠性数学理论(mathematical theory of reliability) 统计学的一门分支学科.它是研究系统或元器件的失效机理及其寿命的统计规律的学科.可靠性数学理论通过对失效现象建立合理的数学模型,对收集到的寿命数据进行统计分析,以及在各种资源约束下对系统可靠性进行优化等方面的研究,为提高系统的可靠性提供定量的依据.

可靠性理论是随着大工业生产的出现而发展起来的.随着信息化社会的到来,可靠性问题越发显得重要.科学技术的进步,特别是从 20 世纪 40 年代起,大型复杂的军事装备、计算机、航天航空设备、核电站等工业的迅速发展,使得可靠性得到了真正的重视.

20 世纪 70 年代以来,计算机的广泛使用,计算机网络、通讯网络、各种信息管理系统的出现,使得网络可靠性、软件可靠性等问题提到了议事日程.在这种强大的实际需要的推动下,可靠性数学理论作为可靠性的基础之一,也获得了空前的发展.

寿命(lifetime) 可靠性统计的基本概念之一.它是产品从开始工作到首次发生失效的时间,或相邻两次维修间的工作时间、或生物体的生存时间;还有一些产品的寿命不以时间长短计算,而以次数多少计算,如蛇形管,不断地去弯曲它,直到发生断裂的弯曲次数作为它的寿命,为了统一处理,国内外文献常把五次弯曲折算成 1 小时计算.

由于产品的失效是随机发生的,故寿命是随机变量.常用 T 表示.

寿命分布(life distribution) 可靠性统计的基本概念之一.它是寿命这个随机变量的分布.常用其分布函数

$$F(t)=P(T\leqslant t)$$

和密度函数

$$f(t)=F'(t)$$

表示.常用的寿命分布有指数分布、威布尔分布、对数正态分布、伽玛分布等.

平均寿命(mean life) 可靠性统计的基本概念之一.它是寿命的数学期望.平均寿命是常用的一种可靠性指标.对不可修复产品,平均寿命就是平均寿终时间,记为 MTTF;对可修复产品,平均寿命是指平均无故障工作时间,记为 MTBF.若以 T 表示寿命,其密度函数记为$f(t)$,分布函数记为 $F(t)$,则平均寿命为:

$$E(T)=\int_0^{\infty}tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}F(t)=\int_0^{\infty}\overline{F}(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\overline{F}(t)=1-F(t)$.对于平均寿命,可通过寿命试验,获得失效时间,用统计方法去估计它.

平均寿终时间(mean time to faiture) 见“平均寿命”.

平均无故障工作时间(mean time between faiture) 见“平均寿命”.

可靠度(reliability) 度量系统性能好坏的指标之一.它是系统在规定的工作条件下和在规定的时间内完成其规定功能的概率.若用 T 表示系统的寿命,则系统在时刻 t 的可靠度 $R(t)$为

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t)\quad(t\geqslant 0),$$

这里 F 为 x 的分布函数.在可靠性或寿命数据统计分析的有关文献中,$1-F(t)$常记为 $\overline{F}(t)$.可靠度依赖于时间 t,因此通常称为可靠度函数.在生物统计等领域中亦称 $R(t)$为生存函数.

可靠度函数(reliability function) 见“可靠度”.

区间可靠度(interval reliability) 度量系统性能好坏的指标之一.它是刻画系统在一段时间内能正常工作的概率.若用 $S(t)=1$ 表示系统在时刻 t 正常,$[t_0,t_0+t]$为一段时间区间,则在$[t_0,t_0+t]$上的区间可靠度为

$$R(t,t_0)=P\{S(t)=1,t_0\leqslant T\leqslant t_0+t\}.$$

若 t_0 趋于无穷时,$R(T,t_0)$的极限存在,则称此极限为稳态区间可靠度.

稳态区间可靠度(stationary interval reliability) 见“区间可靠度”.

分位点寿命(quantile life) 可靠性统计的基本概念之一.使可靠度至少为 p $(0<p<1)$的最大的时间长度 t_p 称为 p 分位点寿命.即

$$t_p=\sup\{x:\overline{F}(x)\geqslant p\},$$

这里 $\overline{F}$ 为可靠度函数.$p=0.5$ 时,$t_{0.5}$称为中位寿命.

中位寿命(median life) 见“分位点寿命”.

可用度(availability) 度量系统性能好坏的指标之一.它是表示任一时刻 t 系统处在正常状态的概率.记为 $A(t)$.可用度依赖于时间 t,有时亦称可用度函数或点可用度.若

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=A$$

存在,则 A 称为稳态可用度.它反映了在长期运行的情况下,系统处在正常状态的概率.

可用度函数(availability function) 见“可用度”.

点可用度(point availability function)　见“可用度”.

稳态可用度(stationary availability)　见“可用度”.

失效率(failure rate)　度量系统性能好坏的指标之一. 已工作到时刻 t 的产品,在时刻 t 以后,单位时间内发生失效的概率,称为该产品在时刻 t 的失效率函数,简称失效率,记为 $r(t)$. 它与寿命分布函数 $F(t)$、密度函数 $f(t)$和可靠度函数之间有如下关系

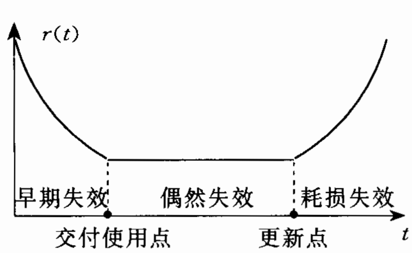
$$r(t)=\frac{F'(t)}{R(t)}=\frac{f(t)}{R(t)}=-\frac{R'(t)}{R(t)}.$$

从上述关系可看出,由失效率函数亦可导出失效分布. 可见,失效率函数与寿命分布一样,都是全面刻画产品寿命统计规律性的一个可靠性特征,也是可靠性特有的概念. 失效率愈小,产品的寿命愈长,可靠性愈高. 失效率在生物医学研究中称为危险率,在人寿保险和人口学中称为死亡率.

失效率的基本单位是菲特(fit),它定义为

$$1\ 菲特 = 10^{-9}/\ 小时.$$

它的含义是:每 1000 个产品工作一百万小时后,只有一个产品发生失效;或者每一万个产品工作十万小时后,只有一个产品发生失效. 产品的失效率越小,产品的可靠性愈高,反之,失效率愈大,产品的可靠性愈低. 中国电子元器件的可靠性等级就是按失效率大小来制定的. 失效率不超过 1×10^{-5}/小时的元器件可定义为五级,失效率不超过 1×10^{-6}/小时的元器件可定为六级产品,类似地,失效率不超过 1×10^{9}/小时的元器件可定为九级产品.



如图所示,失效率曲线,又称为浴盆曲线,它表示一个产品失效的规律. 产品开始工作后失效率在下降,中间有一段相对平坦的阶段,最后迅速上升,直至完且丧失功能. 这条曲线可明显地把产品的寿命分为三个阶段:

1. 早期失效期:大多是由于原材料不均匀、制造工艺中缺陷而引起的. 当这些原因都暴露出来后,产品就可交付使用.

2. 偶然失效期:这是产品稳定工作期,发生失效纯属偶然. 这时尽力做好产品的维护和保养工作,可用足这一时期.

3. 耗损失效期:由于老化、疲劳、腐蚀等原因,使失效率急速增加. 这时要及时替换部件或更新设备,不可存有侥幸心理,以免酿成大祸或措手不及,影响正产生产.

危险率(hazard rate)　见“失效率”.

死亡率(force of mortality)　见“失效率”.

浴盆曲线(bathtub curve)　见“失效率”.

烤机(burn in)　可靠性统计的基本概念之一. 指可靠性研究中提出的新问题. 为了把早期失效产品筛选出来,定出浴盆曲线中的交付使用点,需要做多长时间的寿命试验? 这个问题在可靠性中称为烤机. 烤机是对一批产品作全数检查和寿命试验,在交付使用前都要运行一段时间. 为加速此种试验的进行,还可采用加速寿命试验,以加大应力换取时间,使产品早日交付使用.

剩余寿命(residual life time)　可靠性统计的基本概念之一. 它是系统生存到 t 时刻,其剩余寿命的长度. 若用 x 记寿命,则时刻 t 的剩余寿命的分布函数 $F_t(x)$为

$$F_t(x)=\frac{F(t+x)-F(t)}{\overline{F}(t)}\quad(\overline{F}=1-F),$$

平均剩余寿命为

$$\mu(t)=E(x-t\,|\,x>t)=\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{\infty}\overline{F}(x)\mathrm{d}x.$$

剩余寿命分布(residual life distribution)　见“剩余寿命”.

平均剩余寿命(mean residual time)　见“剩余寿命”.

寿命分布类(classes of life distributions)　可靠性统计的基本概念之一. 它是具有某些共同性质的寿命分布所成的函数族. 在同一个寿命分布类中研究的问题有:类中寿命分布的界,在某些运算下的封闭性问题,与指数寿命分布的差异,以及在寿命分类中的统计问题等.

20 世纪 60 年代起,对寿命分布类开始了系统的研究,研究得较多的有失效率单调的类,失效率平均单调的类,新比旧好(差)的类,新比旧平均好(差)的类,平均剩余寿命单调的类,新比旧调和平均好(差)的类等.

失效率递增类(increasing failure rate class)　简称 IFR 类. 一种寿命分布类. 它是失效率随时间递增的寿命分布类. 设 F 是一个寿命分布,$F(0)=0$. 若对固定的 $x\geqslant0$,

$$\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}$$

对 t 递减($\overline{F}=1-F$),则称 F 是失效率递增的,记为 $F\in$ IFR. 若 F 有密度函数 f,则 $F\in$ IFR 等价于其失效率函数

$$r(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$$

对 t 递增.

失效率递减类(decreasing failure rate class) 简称 DFR 类. 一种寿命分布类. 它是失效率随时间递减的寿命分布类. 若对固定的 $x\geqslant 0$,

$$\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}$$

对 t 递增($\overline{F}=1-F$),则称 F 是失效率递减的,记为 $F\in$ DFR.

失效率平均递增类(increasing failure rate average class) 简称 IFRA 类. 一类寿命分布类. 设 F 是一个寿命分布,若

$$-\frac{1}{t}\log\overline{F}(t)$$

对 t 递增($\overline{F}=1-F$),则称 F 是失效率平均递增的寿命分布,记为 $F\in$IFRA. 若 F 有失效率函数 $r(t)$,则 $F\in$IFRA,当且仅当

$$\frac{1}{t}\int_0^t r(u)\mathrm{d}u$$

递增. 若

$$-\frac{1}{t}\log\overline{F}(t)$$

对 t 递减,则称 F 为失效率平均递减的分布函数. 记为 $F\in$DFRA.

失效率平均递减类(decreasing failure rate average class) 简称 DFRA 类. 见"失效率平均递增类".

新比旧好的类(new better than used class) 简称 NBU 类. 一类寿命分布类. 若寿命分布 F 满足

$$\overline{F}(x+y)\leqslant\overline{F}(x)\overline{F}(y)$$
$$(\forall x,y\geqslant 0,\overline{F}=1-F),$$

则称 F 属于新比旧好的类,记为 $F\in$NBU. 若上述不等式反向,则称 F 属于新比旧差的类,记为 $F\in$ NWU.

新比旧差的类(new worse than used class) 简称 NWU 类. 见"新比旧好的类".

新比旧平均好的类(new better than used in expectation class) 简称 NBUE 类. 一类寿命分布类. 若寿命分布 F 的均值 μ 有限,且

$$\frac{1}{\mu}\int_t^{\infty}\overline{F}(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{F}(t)$$
$$(\forall t\geqslant 0,\overline{F}=1-F),$$

则称 F 属于新比旧平均好的类,记为 $F\in$NBUE. 若上述不等式反向,则称 F 属于新比旧平均差的类,记为 $F\in$NWUE.

新比旧平均差的类(new worse than used in expectation class) 简称 NWUE 类. 见"新比旧平均好的类".

平均剩余寿命递减类(decreasing mean residual life class) 简称 DMRL 类. 一种寿命分布类. 是平均剩余寿命随工作时间增长而递减的寿命分布类. 设 F 为寿命分布,若其平均剩余寿命

$$\mu(t)=\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{\infty}\overline{F}(x)\mathrm{d}x$$

对 t 递减($\overline{F}=1-F$),则称 F 属于平均剩余寿命递减类,记为 $F\in$DMRL. 若

$$\mu(t)=\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{\infty}\overline{F}(x)\mathrm{d}x$$

对 t 递增,则称 F 属于平均剩余寿命递增类,记为 $F\in$IMRL.

平均剩余寿命递增类(increasing mean residual life class) 简称 IMRL 类. 见"平均剩余寿命递减类".

新比旧调和平均好的类(harmonic new better than used in expectation) 简称 HNBUE 类. 一种寿命分布类. 它是用调和平均值刻画的一类寿命分布. 设寿命分布 F 有均值 $\mu<\infty$,平均剩余寿命为

$$\mu(t)=\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{\infty}\overline{F}(x)\mathrm{d}x.$$

若对 $t\geqslant 0$,有

$$\left[\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{\mu(x)}\right]^{-1}\leqslant\mu,$$

则称 F 属于新比旧调和平均好的类,记为 $F\in$HNBUE. 上式等价于

$$\frac{1}{\mu}\int_{\mu}^{\infty}\overline{F}(x)\mathrm{d}x\leqslant e^{-\frac{t}{\mu}}\quad(t\geqslant 0).$$

若上述不等式反向,则称 F 属于新比旧调和平均差的类,记为 $F\in$HNWUE.

新比旧调和平均差的类(harmonic new worse than used in expectation class) 简称 HNWUE 类. 见"新比旧调和平均好的类".

指数分布(exponential distribution) 常用的寿命分布之一,用来描述电子元器件和某些设备等的寿命分布,其分布函数为

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}\quad(t\geqslant 0),$$

$\lambda>0$ 为参数. 指数分布的失效率为常数,它就是指数分布中的参数 λ. 指数分布的平均寿命是失效率的倒数.

指数分布有一个重要性质——无记忆性,即对一个没有失效的元件来说,在下一个时间段里发生失效的概率与已使用过的时间是无关的. 餐馆中使用的盘子寿命就是一个例子,盘子寿命的终结是打碎时间,它用过一段时间后,若没有打碎,再使用一段时间内被打碎的效率与已使过一段时间无关. 这也是常数失效率的直观含义. 若分布函数有形式

$$F(t)=1-e^{-\lambda(t-\mu)}$$
$$(t\geqslant\mu\geqslant 0,\lambda>0;\lambda,\mu\text{ 为参数}),$$

则称 F 为双参数指数分布. μ 是门限参数,称为保证寿命.

双参数指数分布(two-parameter exponential distribution) 见"指数分布".

保证寿命(guarantee life) 见"指数分布".

威布尔分布(Weibull distribution) 常用的寿命分布之一. 指由瑞典科学家威布尔(Weibull, W.)于 1939 年提出的. 两参数威布尔分布的分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t^{\alpha}\} \quad (t > 0),$$

$\lambda,\alpha>0$, λ 为尺度参数, α 为形状参数. $\alpha=1$ 时,则为指数分布. 三参数威布尔分布的分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(t-\mu)^{\alpha}} \quad (t \geqslant \mu \geqslant 0),$$

$\lambda,\alpha>0$, $\mu\geqslant 0$ 为参数, μ 称保证寿命.

伽玛分布(Gamma distribution) 常用的寿命分布之一. 其密度函数为

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

$\alpha,\lambda>0$ 为参数, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数. 当 $\alpha=1$ 时,伽玛分布即为指数分布.

对数正态分布(lognormal distribution) 常用的寿命分布之一. 它是寿命的对数服从正态分布的寿命分布. 若

$$\log z \sim N(\mu,\sigma^2),$$

随机变量 z 称为有对数正态分布,即 z 有密度函数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log z - \mu)^2\right\} \quad (z > 0),$$

$\sigma>0$, $-\infty<\mu<\infty$ 为参数. 对数正态分布的失效率先递增,然后递减.

截尾正态分布(truncated normal distribution) 正态分布的一类变换. 指取正值条件下,正态分布的条件分布. 密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} \quad (t > 0),$$

$\sigma>0$, $-\infty<\mu<\infty$ 为参数,而

$$a = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right),$$

其中 Φ 为 $N(0,1)$ 的分布函数. 截尾正态分布的失效率是递增的.

系统可靠性模型(system reliability model) 系统的一些典型的可靠性模型. 在进行可靠性的定量研究中,提出了许多系统的模型. 设系统由 n 个独立部件组成,部件 i 的寿命为 x_i,相应的分布函数为

$$F_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

记系统的寿命为 x,相应的寿命分布为 $F(t)$. 其可靠性模型系统分别为:

1. 串联系统. 若任一部件失效即引起系统失效,则系统为串联的. 此时系统的寿命和可靠度为

$$x = \min_{i=\overline{1,n}} x_i,$$

$$\overline{F}(t) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}_i(t) \quad (t \geqslant 0) \quad (\overline{F} = 1 - F).$$

2. 并联系统. 若所有部件失效才引起系统失效,则系统为并联的. 此时系统的寿命和寿命分布为

$$x = \max_{i=\overline{1,n}} x_i,$$

$$F(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \quad (t \geqslant 0).$$

3. $(k/n)(F)$系统. 若有 k 或 k 个以上部件失效时系统才失效,则称为$(k/n)(F)$系统. 此时 $x=x_{(k)}$. 这里 $x=x_{(k)}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中第 k 个最小的顺序量. 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 独立同分布 $G(t)$时,系统寿命分布为

$$F(t) = \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} G(t)^{l} \overline{G}(t)^{n-l} \quad (t \geqslant 0).$$

4. $(k/n)(G)$系统. 若有 k 或 k 个以上部件正常时系统就正常,则称为$(k/n)(G)$系统. $(k/n)(G)$系统即串联系统; $(1/n)(G)$即并联系统; $(k/n)(G)$即$[(n-k+1)/n](F)$系统.

5. 冷备系统. 时刻 $t=0$ 时部件 1 开始工作,其余 $n-1$ 个贮备起来. 假定在贮备过程中部件既不失效,也不劣化(即其寿命不变),一旦部件 1 失效,部件 2 瞬时接替工作,一直到所有备件用完并失效时,系统才失效,此时

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$F(t) = F_1 * \quad F_2 * \cdots * F_n(t),$$

这里 $*$ 表示卷积,即 $H(t)=U*V(t)$为

$$H(t) = \int_0^t V(t-x)\mathrm{d}U(x).$$

积分是在闭区间$[0,t]$上进行的.

6. 热备系统. 系统由工作部件及一些贮备部件组成. 但是部件在贮备过程中性能可能会劣化或发生失效.

7. (k/n)(相连 F)系统. 系统有串联结构,系统失效,当且仅当有 k 或 k 个相邻的部件失效.

串(并)联系统(series (parallel) system) 见"系统可靠性模型".

冷(热)备系统(cold (warm) standby system) 见"系统可靠性模型".

结构函数(structure function) 描述二状态系统性状的函数. n 元结构函数 φ 是 $\mathscr{X}\to\{0,1\}$上的一个映象,其中 $\mathscr{X}$ 是由分量只取 0,1 值的 n 维向量组成. 设系统由 n 个部件组成,部件与系统只有正常(用 1 表示)和失效(用 0 表示)两个状态,部件 i

的状态用 x_i 表示，记

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

为部件的状态向量. 假定系统的状态完全由部件的状态所确定，此时，结构函数的值表示系统的状态. $\varphi(\boldsymbol{x})=0$ 表示系统在 $\boldsymbol{x}$ 下处于失效状态；$\varphi(\boldsymbol{x})=1$ 表示在 $\boldsymbol{x}$ 下系统正常.

关联系统(coherent system)　结构函数有单调性的一类系统. 设系统由 n 个部件组成，相应的结构函数为 φ. 此系统为关联系统. 如果它的结构函数 φ 满足：

1. 单调性. 即 $\forall \boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$，有 $\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$. 这里 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$ 表示分量间有 $x_i\leqslant y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

2. 部件与系统的可靠性有关系. 即对任意 i $(1\leqslant i\leqslant n)$，存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$0=\varphi(0_i,\boldsymbol{x})<\varphi(1_i,\boldsymbol{x})=1,$$

这里 $(0_i,\boldsymbol{x})$，$(1_i,\boldsymbol{x})$ 分别表示 $\boldsymbol{x}$ 中第 i 个分量取 0 或 1 时的状态向量.

直观上讲，结构函数的单调性反映了用性能好的部件组成的系统，比用差的部件组成的系统的性能要好；第二个条件说明，每个部件对系统的可靠性都是有贡献的，因而在可靠性意义下是不可少的. 许多典型系统，如 $(k/n)(F)$ 系统、网络系统等都是关联系统的特例.

关联系统的可靠度(reliability of a coherent system)　衡量关联系统性能好坏的指标之一. 它是关联系统在规定条件下、规定时间内完成预定功能的概率. 记关联系统的结构函数为 $\varphi(\boldsymbol{x})$，若用只取 0,1 值的随机变量 x_i 表示部件 i 的状态，记 p_i 为部件 i 的可靠度，即 $p_i=Ex_i$. 记

$$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则系统的可靠度表为

$$h(\boldsymbol{p})=E\varphi(\boldsymbol{x})=P\{\varphi(\boldsymbol{x})=1\}.$$

若部件 i 的寿命为 x_i，相应的分布函数为 $F_i(t)$，则系统的可靠度函数为

$$\overline{F}(t)=h(\overline{F}_1(t),\overline{F}_2(t),\cdots,\overline{F}_n(t))$$
$$(t\geqslant 0,\overline{F}=1-F).$$

最小路集(minimal path set)　可靠性统计的基本概念之一. 设关联系统由 $1,2,\cdots,n$ 个部件组成，$\boldsymbol{x}$ 为其状态向量，φ 为结构函数，$\varphi(\boldsymbol{x})=1$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为路向量. 进一步，若对任意 $\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x}$，都有 $\varphi(\boldsymbol{y})=0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为最小路向量. $\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x}$ 表示 $y_i\leqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 且至少有一个下标 j，使 $y_j<x_j$. 若 $\boldsymbol{x}$ 是一最小路向量，记

$$c_1(\boldsymbol{x})=\{j:\ x_j=1\},$$

称为相应于 $\boldsymbol{x}$ 的最小路集. 从工程上讲，任一最小路集中的部件都正常，即可保证系统正常.

路向量(path vector)　见“最小路集”.

最小路向量(minimum path vector)　见“最小路集”.

最小割集(minimal cut set)　可靠性统计的基本概念之一. 设关联系统由 $1,2,\cdots,n$ 个部件组成，$\boldsymbol{x}$ 为其状态向量，φ 为其结构函数. 若 $\varphi(\boldsymbol{x})=0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为割向量. 进一步，若对任意 $\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x}$，都有 $\varphi(\boldsymbol{y})=1$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为最小割向量. $\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x}$ 表示 $y_i\geqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 且至少有一个下标 j，使 $y_j>x_j$. 若 $\boldsymbol{x}$ 是一最小割向量，记

$$c_0(\boldsymbol{x})=\{j:\ x_j=0\},$$

称为相应于 $\boldsymbol{x}$ 的最小割集. 从工程上讲，任一最小割集中的部件都失效，即使系统失效.

割向量(cut vector)　见“最小割集”.

最小割向量(minimum cut vector)　见“最小割集”.

部件重要度(importance of components)　度量部件重要性的指标. 它用来度量关联系统中的每一部件在可靠性意义下的重要性. 记 $h(\boldsymbol{p})$ 为关联系统的可靠度函数. 部件 i 的重要度定义为

$$I(i)=\frac{\partial}{\partial p_i}h(\boldsymbol{p}).$$

特别地，当

$$p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{2}$$

时，此时部件 i 的重要度亦称为 i 的结构重要度.

网络可靠度(network reliability)　度量网络性能好坏的指标. 网络是关联系统的一种特殊情形，网络可靠度主要研究网络可靠度的算法，以及算法的复杂性. 由于计算机网络、通讯网络等的出现，网络可靠性成了 20 世纪 80 年代以来活跃的研究课题. 网络可靠度计算的方法主要有：

1. 分解法. 设网络相应的可靠度函数为 $h(\boldsymbol{p})$，利用分解公式

$$h(\boldsymbol{p})=p_ih(1_i,\boldsymbol{p})+q_ih(0_i,\boldsymbol{p}),$$

其中 p_i 为弧 i 的可靠度，$p_i+q_i=1$，$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$(0_i,\boldsymbol{p})$，$(1_i,\boldsymbol{p})$ 为 $\boldsymbol{p}$ 中第 i 个分量分别为 0,1 的向量. 由上式，$h(\boldsymbol{p})$ 的计算化为 $n-1$ 个变量的 $h(0_i,\boldsymbol{p})$，$h(1_i,\boldsymbol{p})$ 的计算.

2. 先求出所有最小路集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，再利用网络系统正常 $=A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中至少有一最小路集正常. 于是系统可靠度

$$R=P\{\bigcup_{i=1}^{m}A_i\},$$

这里，A_i 表示第 i 个最小路集正常. 式中 R 通常由容斥公式或不交化方法求得.

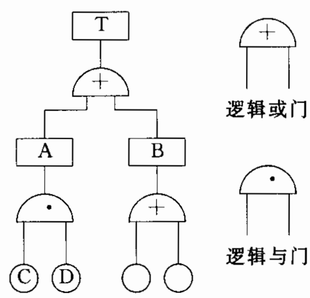
3. 大型复杂网络的计算机算法.

故障树分析(fault tree analysis)　简称 FTA. 可靠性统计中的一种定性定量分析方法. 故障树分

析是定量评定不希望的事件(称为顶事件 T)发生的概率,并找出导致 T 发生的各种基本事件的所有可能组合的一种分析方法.是由 20 世纪 60 年代波音公司的科学家们发展起来的.由于它所使用的图示像一棵从顶事件 T 倒长的树,故障树由此得名.进行 FTA 的步骤是:

1. 选择顶事件 T.

2. 建立故障树.由演绎的方法,从顶事件 T 按逻辑关系逐级分解.若 T 的发生由次级事件 A,B(或更多)中任一发生而引起,则由逻辑或门把 T 与 A,B 相联系;若 A,B 同时发生 T 才发生,则由逻辑与门相联系.依此逐级分解下去,到不能分解的基本事件为止.上述过程用图示表出即得顶事件 T 的一个故障树.建树过程需要熟练的工程专业人员与可靠性工作者相结合.



3. 定性定量评定.定性评定用来找出造成 T 发生的所有可能的基本事件的组合.定量评定是根据基本事件发生的概率计算顶事件 T 发生的概率.

FTA 直观形象,便于工程技术人员掌握,但是对大型复杂系统建立故障树需要大量的工时,有时还会遗漏重要的失效模式.尽管如此,由于计算机的普遍使用,使大型故障树的定性定量评定变得现实和快速了.

目前 FTA 已从航天、核能等部门的应用扩展到了机械、电子等产业.

可修系统模型(models of repairable system)　一种可靠性模型.它是允许对失效部件进行修理,使其恢复功能的可靠性模型.由于引入了修理,使系统可靠性得到了提高,但是模型的分析更复杂了.

可修系统研究的内容有:系统首次失效时间的分布;可用度;$(0,t]$中失效数的分布以及与修理有关的指标——在时刻 t 修理工忙的概率.

常见的可修系统模型有:

1. 马尔可夫过程模型.若部件的寿命及修理时间都是指数分布时,系统的状态可用时间连续状态离散的马尔可夫过程来描述.

2. 交替更新过程模型.系统的工作及修理的周期性变化由一个交替更新过程来描述.

3. 其他随机过程模型.用更复杂的随机过程,如马尔可夫更新过程等来描述系统的状态.

马尔可夫过程模型(Markov process model)　见"可修系统模型".

交替更新过程模型(alternating renewal process model)　见"可修系统模型".

更换策略(replacement policy)　一种减小失效的预防性措施.系统的突然失效会造成重大损失,有时甚至是灾难性的.为了尽量减少失效带来的损失,往往采取失效前更换的预防性措施.但是,过分频繁地进行预防性更换也会引起费用的增加.因此,更换策略需要研究在某种费用准则下何时进行更换的问题.常用的更换策略有:

1. 年龄更换策略.系统在失效时或当其年龄为 T 时进行更换.T 的确定是使长期运行下的单位时间费用最小.

2. 成批更换策略.系统在失效时或 $kT(k=1,2,\cdots)$ 时刻进行更换.T 的选取使$(0,T]$中的平均费用最小.

3. 带小修的更换策略.系统在 kT 时刻进行更换$(k=1,2,\cdots)$,在相邻更换之间失效时只进行小修,使系统恢复到失效前的状态,T 的选取是使$(0,T]$中的平均费用最小.

还有更换依赖于系统状态的策略,不完全小修的更换策略及费用依赖于修理次数的策略.

年龄更换策略(age replacement policy)　见"更换策略".

成批更换策略(block replacement policy)　见"更换策略".

带小修的更换策略(replacement policy with minimal repair)　见"更换策略".

检测策略(inspection policy)　一种减小失效的预防性措施.很多情况下系统的失效只能通过检测才能发现,过多的检测或系统长时间处于失效状态都会引起费用上的损失.因此,检测策略需要合理地确定一串检测时间点 $0<x_1<x_2<\cdots$,使某个目标函数达最小(或最大).

寿命数据统计分析(statistical analysis of lifetime data)　可靠性统计的一种定量分析方法.通过寿命试验或现场收集的参试个体的寿命记录,称为寿命数据.通过对寿命数据的分析得到有关寿命分布的信息,称为寿命数据统计分析.

寿命数据统计分析是可靠性工作的基础,这种分析有其自身的特点:

1. 数据的不完全性.原因可能是长寿命产品的寿命试验不能进行到所有产品都失效时终止,以及现场数据的不完全性等.

2. 可修系统相邻故障间隔数据及加速寿命试验数据的分析,需要不同的处理方法.

3. 由部件寿命试验数据如何综合成系统可靠度的估计等.

寿命试验(life testing) 可靠性统计的一种实践活动. 它是获得寿命数据的手段. 进行寿命试验，一般先从一批产品中随机抽取一个样本，然后把此样本放在相同的正常应力水平(工作温度或工作电压)下进行试验，观察其工作状态，对照事先确定的失效判据，当发现有样品失效时，立即记录其失效时间.

进行寿命试验的目的有三个：

1. 弄清产品的寿命分布.

2. 估计产品的各种可靠性指标.

3. 解剖失效产品，研究其失效机理.

常用的寿命试验有现场寿命试验、实验室寿命试验、截尾寿命试验以及加速寿命试验等.

现场寿命试验(life test on the spot) 一种寿命试验. 它是把产品放在实际使用场所并让其正常工作，从中获得失效数据的试验. 如飞机的操纵杆、汽车的行驶里程、大型发电设备等都是在现场寿命试验中获得失效数据的.

如此得到的寿命数据是珍贵的、有说服力的. 但由于组织管理工作繁重，投资大，时间长，只能在少数场合使用.

实验室寿命试验(life test in laboratory) 一种寿命试验. 它是在实验室内使产品在模拟现场的主要使用条件下进行的寿命试验. 如电子元器件在恒温箱内作寿命试验，电缆在一定电压下作寿命试验等，此种试验管理简便，投资少，有重复性，便于产品间的比较，常被实际采用.

截尾寿命试验(censoring life test) 一种寿命试验. 它是投试产品中，有部分产品失效就停止的寿命试验. 这时获得的失效数据称为截尾样本.

常用的截尾寿命试验有如下三种：

1. 定时截尾寿命试验. 又称 I 型截尾寿命试验. 是试验在事先规定的时间停止，此时获得的失效数据个数为随机变量. 如对 50 个样品进行寿命试验，事先指定 2000 小时时停止试验. 这时失效数可能是 20 个，也可能是 30 个. 为了不使失效数过少或过多，恰当地规定试验停止时间是实施定时截尾寿命试验的关键.

2. 定数截尾寿命试验. 又称 II 型截尾寿命试验. 是试验在事先规定的失效个数(如 60%失效)达到时停止试验. 此时试验停止时间是随机变量. 如对 50 个产品进行寿命试验，事先规定试验到有 60%的样品失效时停止试验. 这时停止试验的时间是第 30 个产品发生失效的时间. 由于试验停止时间不易控制，恰当规定失效比例是成功进行定数截尾寿命试验的关键.

3. 随机截尾寿命试验. 若有 n 个 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 样品的寿命试验，另从一个已知分布产生 n 个随机数 n，其中 τ_i 是第 i 个样品的截尾时间. 当第 i 个产品寿命到达 τ_i 时，就停止试验，这时就得截尾时间 τ_i. 当第 i 个产品在 τ_i 之前就失效，这时就得第 i 个产品的失效时间 τ_i. 综合上述，在随机截尾寿命试验中可以得到的数据是

$$(y_i,\delta_i)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

其中 $y_i=\min(t_i,\tau_i)$，δ_i 是只取 0 与 1 的函数，$\delta=0$ 表示寿命超过截尾时间，$\delta=1$ 表示寿命低于截尾时，即

$$\delta_i=\begin{cases}0 & (t_i>\tau_i),\\ 1 & (t_i\leqslant\tau_i).\end{cases}$$

这时 $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n$ 是失效数据个数.

加速寿命试验(accelerated life testing) 一种寿命试验. 为了在较短的时间中获得产品的失效数据，在加大的应力条件(如压力、电流、温度)下进行的寿命试验称为加速寿命试验. 对加速寿命试验数据的统计处理，要求推断正常使用条件下产品的可靠性指标，如可靠度、平均寿命等. 常用的加速寿命试验方式有：

1. 恒定应力加速试验. 选定若干组样品在高于正常水平的不同应力 $s_1,s_2,\cdots,s_k$ 下进行，每组试验到有若干个样品失效时终止.

2. 步进应力加速试验. 选定一组高于正常水平的应力 $s_1,s_2,\cdots,s_k$. 一组样品在 s_1 试验 t_1 时间后把应力提高到 s_2，未失效的样品持续试验 t_2 时间，试验依此进行下去，到一定数量的样品发生失效时终止.

3. 序进应力加速试验. 试验时所施加的应力水平随时间等速上升.

柯克斯失效率成比例模型(Cox's proportional hazards model) 一种寿命统计模型. 它是利用附加信息的统计模型. 该模型是柯克斯(Cox, D. R.)于 1972 年提出的.

在通常的寿命数据分析中，除了寿命数据(可能是不完全的)外，还可以同时收集到个体的其他信息，如不同的试验条件(在生物医学的例子中，如性别、年龄)等. 把这些附属的信息考虑到模型中去可以得到更好的统计推断.

最简单的参数型失效率成比例模型有如下形式：相应于附加变量 z(可以是向量)的失效率为

$$h(t,z)=e^{\beta^T z}h_0(t),$$

这里 $h_0(t)$ 为 $z=0$ 时的失效率(已知)，β 是未知参数向量，T 表示转置. 相应的统计问题为，观察到一

组$(t_i, z^{(i)})$的条件下，对β进行推断.

卡普兰-梅尔估计量(Kaplan-Meier estimator)　一种估计量.当寿命数据为不完全样本时，一种估计未知总体生存函数的非参数估计量.是卡普兰(Kaplan, E. L.)和梅尔(Meier, P.)于1958年提出的.其后这个估计量被称为卡普兰-梅尔估计量或乘积限估计.设在随机截尾方案下有一组观察数据

$$(y_i, \delta_i, i=1,2,\cdots,n).$$

记$y_{(1)} \leqslant y_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant y_{(n)}$为$y_1, y_2, \cdots, y_n$的顺序量，$\delta_{(1)}, \delta_{(2)}, \cdots, \delta_{(n)}$为相应于$y_{(1)}, y_{(2)}, \cdots, y_{(n)}$的$\delta$值，则在

$$y_{(1)} \leqslant y_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant y_{(n)}$$

这种简单情形下，总体生存函数$F(t)$的卡普兰-梅尔估计量为

$$\hat{R}(t) = \prod_{\{j:\, y_{(j)} \leqslant t\}} \left(1 - \frac{\delta_{(j)}}{n-j+1}\right).$$

乘积限估计(product limit estimator)　即"卡普兰-梅尔估计量".

软件可靠性(software reliability)　可靠性理论的内容之一.它专门研究计算机软件的可靠性问题.在特定的环境中和在一定的时间间隔中，软件正常运行的概率，称为软件可靠度.而软件在时刻t正常的概率，称为软件可用度.

自20世纪70年代起，计算机已渗透到现代社会生活中的各个方面.宇航、空中交通控制、通讯、防务等系统都要求计算机特别是相应的软件有极高的可靠性.因此，软件可靠性问题就越来越受到重视.目前，对软件可靠性的概率模型、软件失效数据的统计分析以及与费用有关的软件运行时间的优化模型等方面都有研究.

软件可用度(software useful degree)　见"软件可靠性".

软件可靠度(degree of software reliability)　见"软件可靠性".

捷林斯基-莫兰达模型(Jelinski-Moranda model)　一个软件可靠性模型.它是捷林斯基(Jelinski)及莫兰达(Moranda)于1972年提出的最早的一个软件可靠性模型，也是以后许多模型的出发点.模型的假定为：

1. 一个软件系统原始的错误个数N是一个未知参数.

2. 软件相邻故障之间的时间有独立的指数分布，其参数与系统中残存的错误数目成正比，比例因子λ是常数.

3. 当查出一个错误时，它被完全排除.

若记$N(t)$为$(0,t]$中发现的软件错误数，$N(0)=0$.

$$R(t)=N-N(t)$$

为到时刻t为止软件中残存的错误数，则有

$$P\{R(t)=k\} = \binom{N}{k} e^{-\lambda kt}(1-e^{-\lambda t})^{N-k}$$

$$(k=0,1,\cdots,N).$$

可靠性优化模型(optimal models in reliability)　一类可靠性模型.在可靠性问题中，涉及有限资源的合理利用的模型称为可靠性优化模型.

典型的模型有：

1. 可靠度最优分配模型.设系统由n个子系统组成，R_j为第j个子系统的可靠度，$h(R_1, R_2, \cdots, R_n)$表示系统的可靠度，记$g_{ij}(R_j)$为第j个子系统的可靠度为R_j时所需第i种资源的数量，b_i为第i种资源的总量，$i=1,2,\cdots,k$.问题为求$R_1, R_2, \cdots, R_n$，使可靠度最大：$\max h(R_1, R_2, \cdots, R_n)$满足约束条件：

$$0 \leqslant R_j \leqslant 1 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(R_j) \leqslant b_i \quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{2}$$

或者求$R_1, R_2, \cdots, R_n$，使总费用最小：

$$\min \sum_{j=1}^{n} f_j(R_j),$$

约束条件为(1)(2)以及

$$h(R_1, R_2, \cdots, R_n) \geqslant R_0,$$

这里R_0是预定的可靠度，$f_j(R_j)$为第j个子系统可靠度为R_j时的所需费用.

2. 备件最优分配模型.设系统由n个部件串联组成，每个子系统使用同型部件.记c_j, k_j分别为第j种部件的单价及使用的个数，$R_j(k_j)$为第j个子系统使用k_j个部件时的可靠度，系统的可靠度可表为

$$R(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \prod_{j=1}^{n} R_j(k_j).$$

问题归结为求$k_1, k_2, \cdots, k_n$，使费用最小：

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j k_j,$$

约束条件$k_1, k_2, \cdots, k_n$为正整数，及

$$\prod_{j=1}^{n} R_j(k_j) \geqslant R_0;$$

或者求$k_1, k_2, \cdots, k_n$，使可靠度最大：

$$\max \prod_{j=1}^{n} R_j(k_j),$$

约束条件为$k_1, k_2, \cdots, k_n$为正整数，及

$$\sum_{j=1}^{n} c_j k_j \leqslant c,$$

R_0为系统可靠度要求，c为总的费用.

上述问题一般都是复杂的非线性约束的最优化问题.

计量教育心理学

计量教育心理学(statistical educational psychology) 数理统计学在教育心理测量学中应用的一门学科.它是以数学形式表现教育心理现象,并进行统计推断的一门学科.所用到的概率分布有二项分布和正态分布,数字特征有平均值、方差、标准差、相关系数,还用到参数估计、假设检验、回归分析、典型相关分析、因子分析等多元统计方法.

英国人类学家高尔顿(Galton,F.)在1869年的《遗传与天才》一书中指出,人类智力的分布为正态分布.对某人进行测试,则被试者的测验得分 x 为一随机变量,根据统计推断,可假定 x 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中

$$E(x)=\mu,\quad D(x)=\sigma^2$$

分别为 x 的平均值和方差.称 σ 为标准差,而 $z=(x-\mu)/\sigma$ 服从标准正态分布$N(0,1)$.被试者参加两次测验(或一次测验中两个项目)的得分(x,y)为二元(二维)随机向量,记

$$\rho=\frac{E[x-E(x)][y-E(y)]}{\sqrt{D(x)}\ \sqrt{D(y)}},$$

称 ρ 为相关系数,并知$-1\leqslant\rho\leqslant 1$ 成立.设某次测验中有 N 个同类被试者参加,得分依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_N$,记

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i,\quad s^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2,$$

称 $\bar{x},s^2,s$ 分别为样本均值、样本方差、样本标准差. N 个同类被试者参加两次测验(或一次测验的两个项目),得分依次为

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_N,y_N),$$

记 $\bar{x},s_x^2;\bar{y},s_y^2$ 分别为相应于 x,y 的样本均值和样本方差,并记

$$\gamma=\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{s_x\cdot s_y},$$

称 γ 为样本相关系数.统计学上证明:当(x,y)的总体遵从以$(\sigma_x^2,\sigma_Y^2,\rho,\mu_x,\mu_y)$为参数的二元正态分布时,$(S_x^2,S_y^2,\gamma,\bar{x},\bar{y})$分别为相应参数的极大似然估计.

心理测量(psychological measurement) 实验心理学的专用术语.它是指用统计学方法对心理测验的结果定量化.实验心理学的创始人冯特(Wundt,W.)于1879年在德国莱比锡大学设立世界第一所心理实验室,发现被试者的观察力、词的联想力和反应能力都很不相同,从而提出了“个别差异”的问题.英国人类学家高尔顿(Galton,F.)在1883年出版了《人类才能及其发展的研究》一书,提出了心理测量、测验等术语.美国卡特尔(Gattell,J. Mok)对“个别差异”的研究贡献最大,他得出结论:学生成绩的优劣与智力的高低有密切的关系.艾宾浩斯(Ebbinghaus,H.)认为,智力的高低在于综合能力的差异,并于1896年用首创填充法来测量学生的智力.厄润(Oehrn)编制一套测验,将智能分成四种:知觉、记忆、联想和运动机能.法国比内(Binet,A.)于1894年至1898年间提议,测验应包括测量记忆、表象、想象、理解、暗示、美的欣赏、道德情感、意志力和运动技能,发明了智力测验常模量表,推动了教育心理学的发展.随之而来的有智力测验、能力倾向测验、教育测验、人格测验等.比内的贡献在于提出智龄和实龄这两个实际可行的测量单位,找到了正确的测量智力的途径.1904年,斯皮尔曼(Spearman,C.)提出智力的因子分析.德国心理学家施太伦(Stern,L. W.)于1912年提出了智商的概念,指出智力的相对稳定性.美国心理学家韦克斯勒(Wechsier,D.)提出了离差智商,为智商的稳定性研究提供了一个良好的指标.

教育测量学(educational measurement) 计量教育心理学研究的基本内容之一.它是研究心理状态与教育情况的测量和评价的科学.

教育测量学在20世纪30年代就已概括了心理与教育的测量与评价的经验.美国桑戴克(Thorndike,E. L.)等23人合著的《教育测量学》中指出,就其测验类型的发展来说有两个特点:一是由幼儿园、小学测验,发展到中学、大学的各种重要测验.如课程重点的单科测验、文化推理智力测验、能力倾向的分类测验、教育技能与教育程度测验等;二是从局部分散的单科测验,发展到综合性成套(系列)的测验.就其发展来说有三个方面:一是根据教学系统进行配套测验,借以做出教学决策;二是按照测验(考试)的几项质量指标(信度、区分度、难度等)建立相应的题库;三是提高测验(考试)的社会地位与作用.教育测量能从心理和教育两个方面测得集体和个人身心发展的现状和特征,为教育决策提供信息与依据.如根据学生的智力和学习能力做出安排他们进入最适当的层次学习的决策;根据教学效果做出改革课程、教材和教法的决策;根据在校学生成绩及职业教育成绩做出职工使用的决策.

上述教育测量只是在从智育方面作了综述.在中国,教育测量常从德育、智育、体育三方面来衡量.

对于德育的测量，应从定性、定量两方面建立相应的测量指标，如有道德、有觉悟、爱人民、爱劳动、爱祖国，遵纪守法等方面. 体育同智育一样，可以通过测验进行测量，但是体育除了成就测验之外，还要求身体素质达到规定的标准.

测量(measurement) 计量教育心理学的基本概念之一. 史蒂文斯(Stevens, S. S.)称："就其广义来讲，测量是按照法则给事物指派数字".

测量有四种水平：类别、等级、等距、比率，有直接测量和间接测量之分. 心理测量是间接测量. 因为可以运用许多有效的统计方法，心理学家喜欢用等距量表. 布朗(Brown, F. G.)称："所谓测验是对一个行为样组(即样本)进行测量的系统程序". 系统的程序是指测验在编制、实施、评分等方面都依据确定的规则. 测验与考试是同义词.

中国早在春秋战国时，考和试两个字就分别用于表达考察的意思. 东汉时，考试一词就正式使用了，而测验一词直到20世纪初才出现于汉文中. 但在某些特定场合有特定的用法：如"升学"是用考试而不用测验，对心理学用心理测验而不用心理考试.

测验(test) 见"测量".

考试(examination) 见"测量".

智能(intelligence and ability) 计量教育心理学的基本概念之一. 它是智力和能力的总称. 20世纪20年代，美国《教育心理学》特辟专栏，要求心理学家各抒己见，探讨智力的涵义与性质、功能，但至今仍无确定的定义. 现将有代表性的论点概述如下：

1. 智力是抽象思维的能力，如判断、理解、推理、记忆、创造等能力.

2. 智力是适应环境的能力，适应是智力的本质.

3. 智力是学习的能力，获得知识的能力.

上述论点阐明了智力的必要条件. 桑戴克(Thorndike, E. L.)把智力活动分为三类：

1. 社会的智力. 即了解他人和与他人相处的能力.

2. 实践的智力. 即了解事物及应用理论与科技的能力.

3. 抽象的能力.

对智力的衡量可分为三个方面：

1. 层次或高度.

2. 距离或广度.

3. 速度或敏捷.

智力又可分语言和操作两个方面.

智力(intelligence) 见"智能".

智力结构理论(theory of intelligent structure) 计量教育心理学研究的基本内容之一. 该理论用数学方法去分析智力构成的因素(智能).

智力结构理论在智力没有确切定义的情况下是各抒己见的，较为一致的提法是，人类的智力是由一般因素与特殊因素两类因素构成的. 1904年，英国心理学家斯皮尔曼(Spearman, C.)开始用因子分析统计方法提出智力二因素论；桑戴克(Thorndike, E. L.)于20世纪20年代末期提出多因素论；后来出现的群因素论认为有7种基本智能，即运算、言语、空间、词汇流畅、推理、记忆、知觉速度，而且这些因素之间都有正相关关系，并承认既有一般的智力，又有相当数量不同的心理能力群的某些智力结构，这为智力结构理论的发展奠定了一定的理论基础.

智力测验(intelligence test) 计量教育心理学研究的重要课题之一. 它是评价学习知识和技能能力的重要手段. 智力测验的目的在于测量智力的高低. 德国施太伦(Stern, L. W.)提出用智商系数解释儿童智力的高低：智商＝智龄/实足年龄.

智力测量的创始人是法国的比内(Binet, A.)，他用年龄做测量智力的准则，编制斯坦福-比内量表，在几十年间几经修订. 智力量表是用于测量儿童的智力相当于哪一个年龄的水平，称之为该儿童的智龄.

中国吴天敏等于1979年对斯坦福-比内智力量表作了第三次修订. 其特点是：测题按难易程度顺序排列，不以年龄分组；放弃比率智商，采用标准化智商；测题有所变动，测试对象扩大为2至18岁. 标准化智商在美国韦克斯勒(Wechsier, D.)儿童智力量表(1939)中开始采用，它是将同年龄组的原始分数转为标准分数，用标准正态分布函数值作为智商的大小.

智商(intelligence quotient (IQ)) 见"智力测验".

智龄(mental age) 见"智力测验".

标准化智商(standardized IQ) 见"智力测验".

数学能力测验(aptitude test of mathematics) 一种特殊才能测验. 心理测验包括智力和能力测验. 能力测验又分一般能力和特殊能力测验. 1904年，英国心理学家斯皮尔曼(Spearman, C.)阐明人类智力可分为一般因素和特殊因素两类以后，对于特殊才能的研究引起广泛注意. 1915年，美国西肖尔(Seashore, C. E.)编制了一套音乐能力测验，罗杰斯(Rogers, C. R.)编制了数学能力测验等，这类测验又称为能力倾向测验，在职业指导上也有其作用. 数学能力有多种表现，如记忆能力、理解能力、逻辑

推理能力、抽象思维能力、创造性思考能力、运算能力、应用数学能力、逻辑表达能力、空间想象能力等.对于数学能力测验，所用试题格式除了选择题、是非题、填充题外，还应有图解题、计算题、推理题等配合编制测验.

能力倾向测验(aptitude test)　见“数学能力测验”.

教育测验(educational test)　教育测量学研究的重要课题.指教育评价和人才选拔的重要手段，它同智力测验有所不同，后者是测量学习知识和技能的能力，偏重于一般心智能力的测量.前者着重考查学科所培养的特殊能力.

教育测验可按大、中、小学所设置的课程，编制各学科的测验或综合学科测验.

根据教育测验的不同目的和要求，通常分为两大类：

1.判别参考性测验.亦称标准参考性测验.通常用来测量学生对某一学科或某一组学科知识和技能的学习成就，又称成就测验.即测验学生对所学内容的熟练程度、是否达到到教学目的和教学内容所规定的标准要求.

2.常模参考性测验.通常用来比较每个被试者在全体被试者中的相对位置，因而常模参考性测验没有一个固定的数量标准.升学考试就是一种常模参考性测验.

最早的综合成就测验是斯坦福成就测验，编制于1923年，新版本于1973年完成.

判别参考性测验(criterion-referenced tests)　见“教育测验”.

成就测验(achievement test)　见“教育测验”.

常模参考性测验(norm-referenced tests)　见“教育测验”.

斯坦福成就测验(Stanford achievement test)　见“教育测验”.

学术能力倾向测验(scholastic aptitude test)　简称SAT.一种特殊才能的测验.它是美国三种大学入学考试中的一种.该测验从1926年开始使用，主要是测量学生是否具备在大学进行学习和研究的能力，而不是学生在中学阶段学到多少知识.

测验内容分为语言和数学两部分，目的是检查学生的词汇量、阅读理解能力、逻辑推理能力、运算能力、概念运用能力、思考能力及解决实际问题的能力等.

测题格式为选择法，所列选项有4或5个，选对得1分，不选零分，选错得$-1/3$或$-1/4$分.测题(试题)总数为220—235个，平均成绩在400—500分之间.

标准化测验(standardized test)　教育测量学研究的重要内容之一.它对测验大纲(考试大纲)、试题类型、试卷布局、试题覆盖面、测试(测验、考试)方式、评分方法等都要给定标准要求，是一项系统工程.对于试卷、试题标准要求的质量指标主要有信度、效度、区分度、难度.

信度是指测验试卷能测量被试者真实水平的可信程度；效度是指测验试卷能达到测验目的的有效程度.前两项是对考试评价的指标.区分度是指试题能鉴别被试者真实水平高低的程度；难度是指试题对于被试者而言的难易程度.后两项是对考试题目分析的指标.通过试卷评分得到被试者的原始分数，计算平均分数与标准偏差，利用正态分布原理建立常模，从而得到被试者的标准化分数.

信度(reliability)　见“标准化测验”.

效度(validity)　见“标准化测验”.

常模(norms)　心理与教育测量学的基本概念之一.它是解释同类集体(被试者全体)的测试结果(分数)的参照指标(标准或样板).其中有参照点(基准)及位置单位.测试结果得到的是原始分数，称为绝对值.为了使得同类集体在不同时期的测试结果具有可比性，要将原始分数绝对值转换成相对值，即被试者的成绩在同类集体中所处的相对位置.参照点及单位的选择不同，对应着不同的常模.

在心理与教育测量中常用的常模有四种：年龄常模、年级常模、百分位数常模、标准分数常模.其中，年龄常模的参照点是出生日，单位是岁或月，年龄常模最先用于智力测验，评定被试者的智力年龄，然后同实足年龄相比得到智商系数，用以判定人的智愚程度.年龄常模在中小学中有广泛的应用.

年龄常模(age-norm)　见“常模”.

标准分数常模(standard score norm)　教育测量中常用的模型之一.它是用标准分数制定的常模.如“计量教育心理学”条目所示，某次测验中，被试者的得分X服从正态分布.设有N个同类被试者参加测验，得分依次为$x_1, x_2, \cdots, x_N$，则平均值$\bar{x}$为参照点，标准差s为单位，标准化变量

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

渐近地服从标准正态分布$N(0,1)$.由统计学理论知，基本上可以肯定$|z| < 5$，于是，令

$$T = 50 + 10z$$

在0到100间取值.称x为被试者的原始分数，T为该被试者的标准化分数.例如某次测验结果如下表.

学科	参照点	标准差	某被试者得分		
	$\bar{x}$	s	x	z	T
数学	85	5	80	−1	40
英语	68	8	80	1.5	65

从上表看到，该被试者的数学、英语两科的原始分数都是 80 分，但是其标准化分数不一定相同，数学的 $T=40$，表示在平均成绩之下，英语的 $T=65$，表示在平均成绩之上. z 值反映了原始分数在该科同类被试者中成绩的相对位置.

原始分数(raw score)　见“标准分数常模”.

标准化分数(standardized score)　见“标准分数常模”.

信度原理(reliability principle)　测验的质量准则之一. 它要求考虑测验(考试、测试)施行的可靠性. 其值用 α 表示，称为信度系数，是心理测量学中使用的术语，它不同于统计学中置信度的概念. 信度原理是指标准化测验的试卷，要求能反映出被试者的真实水平，即真实成绩：优者得高分，差者得低分，受随机性影响(例如，学生临考精神状态)最小. 记被试者的实得分数为 x_i，真实分数为 y_i，随机误差为 e_i，则有基本公式

$x_i=y_i+e_i$ ($i=1,2,\cdots,N$，N 为被试者个数).

其基本假定是：真实分数 y 与随机误差 e 相互独立，误差 e 的平均值为 0. 在上述基本假定下，x,y,e 的方差 s_x^2,s_y^2,s_e^2 满足等式

$$s_x^2=s_y^2+s_e^2.$$

信度系数定义为

$$\alpha=\frac{s_y^2}{s_x^2}=1-\frac{s_e^2}{s_x^2},$$

且必有 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，信度系数的平方根称为信度指数：

$$\sqrt{\alpha}=\frac{s_y}{s_x}.$$

信度系数(coefficient of reliability)　见“信度原理”.

信度指数(index of reliability)　见“信度原理”.

信度系数估计(estimator of coefficient of reliability)　对信度系数进行的估计. 它是利用相关系数对信度系数进行估计. 在信度系数的定义中使用了真实分数的方差，但是真实分数是不能直接测量的，于是人们从信度原理出发，利用实得分数提出了信度系数 α 的三种估计方法：

1. 稳定系数法. 用同一份试卷在两个不同的时间、地点分别对 N 个被试者施行测验，用其相关系数 r 作为 α 的估计量.

2. 等价系数法(又称复本信度法). 即用等价性的两份试卷对同类被试者集体施行测验，用其相关系数 r 作为 α 的估计量.

3. 对半系数法. 在不可重复测验或无等价性试卷的情况下，将同一份试卷依试题的区分度、难度组合成两份等价性试卷，用其相关系数 r 的修正值

$$r_0=\frac{2r}{1+r}$$

作为 α 的估计量.

以上几种估计中，当 $-1\leqslant r\leqslant0$ 时，规定 $\alpha=0$.

稳定系数法(stability coefficient)　见“信度系数估计”.

等价系数法(method of alternate form reliability)　见“信度系数估计”.

对半系数法(method of split halves reliability)　见“信度系数估计”.

效度原理(validity principle)　测验的质量准则. 效度是测验的主要指标，效度原理是指一个测验必须测出它所要测定的功能或达到其测量的目的. 这种测验的有效程度称为效度，用 β 表示其度量，称为效度系数. 一个测验所测得的结果符合该测验的目的，测验才能成为正确而有效的测量工具. 效度是相对目的而定的. 1974 年，美国心理学会发行的《教育和心理测验的标准》一书中将效度概念分为三类：

1. 内容效度. 是研究试题同教学大纲相符合的程度.

2. 结构效度. 是心理测验中提出来的概念，指测验能测量心理特性或心理学的理论观点的程度.

3. 标准关联效度. 是用来衡量一个测验与其目的相同的标准测验的相关程度. 美国已编好许多标准测验，其效度长期获得教育界的公认.

内容效度(content validity)　见“效度原理”.

结构效度(construct validity)　见“效度原理”.

标准关联效度(criterion related validity)　见“效度原理”.

效度系数(coefficient of validity)　心理和教育测量学的基本概念之一. 效度系数 β 是效度的度量，可用测验结果与测验目的之间的相关系数来衡量. 例如“高考”，其效度是以选拔人才为目的而言的，所以，应以被录取者的高考成绩与大学入学后的成绩之间的相关系数 r 作为效度的衡量，但实际中需作些修正.

设 S^2 为高考全体被试者的得分的总方差，$\mathscr{S}$ 为被录取者的得分的方差，定义其效度系数当 $-1\leqslant r<0$ 时，$\beta=0$；当 $0\leqslant r\leqslant1$ 时，

$$\beta = r\frac{S}{\mathscr{S}}\left[1 + r^2\left(\frac{S^2}{\mathscr{S}^2} - 1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

因为大学录取新生通常是从高分开始挑选，所以$\mathscr{S}^2 \leqslant S^2$，从而$r \leqslant \beta \leqslant 1$. 如果直接用$r$作为效度系数，其效度必然偏低.

试题分析(item analysis)　心理和教育测量的基本程序之一. 指对试题的质量分析. 测验(试卷)是由试题(项目)组合而成的，试题的类型有选择题、填充题、是非题(判断题)、描述题、推理题等.

试题分析是指测验试卷的试题的质量分析，其主要的质量指标有区分度、难度等. 而信度和效度是对测验(试卷的整体或全面)作综合的质量分析而言的. 试题的质量分析能对测验的信度及效度提供改进的信息. 测验(试卷)的信度与效度同项目(试题)的区分度与难度之间的数学关系，还有待进一步探讨.

试题的区分度高、难度适中，会提高测验信度，这一点是可以理解的. 效度是衡量测验(试卷)符合测验目的而言的，试题的区分度不高、难度不适中肯定会降低效度.

试题难度(item difficulty)　衡量试题质量高低的指标之一. 测验(试卷)中试题(项目)的难度是衡量该试题对被试者全体的适合程度. 用d表示难度水平，$0 \leqslant d \leqslant 1$. $d=1$表示难度水平最高，该试题没有一个被试者做对；$d=0$表示该试题全体被试者都做对，即难度水平最低.

试题的难度水平d值的大小必然会影响到区分度、信度、效度的大小. 计算d值的主要方法是平均数法：用a表示试题的满分，$\bar{x}$表示全体被试者得分的平均值，则

$$d = 1 - \frac{\bar{x}}{a}.$$

若对某试题，答对得a分，答错得0分(无中间分数，例如，对选择题或是非题等)，则$\bar{x}/a$为全体被试者在该试题的答对率，记$p \triangleq \bar{x}/a$，则$d = 1 - p$. 若被试者人数为N，该试题答对的被试者人数为R，则

$$p = \frac{R}{N}.$$

难度(difficulty)　即“试题难度”.

答对率(rate of right answer)　见“试题难度”.

难度水平(level of difficulty)　试题难度的数量指标. 每个项目(试题)的难度水平可用

$$d = 1 - \frac{\bar{x}}{a} \text{ 或 } d = 1 - p$$

进行计算. 而对于不同类型的试题，难度水平怎样比较呢？美国教育测验服务中心(EST)采用等距量难度指标：

$$\Delta = 13 + 4z,$$

其中z由标准正态分布函数

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} = d$$

确定，若$d = 0.0013$，则$z = -3$，$\Delta = 1$；若$d = 0.9987$，则$z = 3$，$\Delta = 25$. 基本上可以认为，$|z| < 3$时，则用Δ可将难度系数d转换为由1至25的整数值，它反映了难度系数的相对位置. 通常要求难度水平为$0.5 \leqslant d \leqslant 0.65$，即稍许偏难为宜. 为什么呢？例如，对选择题或是非题等，答对率为p，得分为a，则方差为

$$s^2 = p(1-p)a^2.$$

当$p=0$或$p=1$时，$s^2=0$，因为方差反映了被试者在该题得分之间的离散程度，故该题没有鉴别能力. 当$p=0.5$(即$d=1-p=0.5$)时，s^2达到最大值，这是区分度高的必要条件. 当然，s^2大，区分度不一定高.

试题区分度(distinguishing of item)　衡量试题质量高低的指标之一. 它是衡量一个试题对被试者成绩(水平)的鉴别能力. 一个试题的区分度高，是指对此试题成绩优者可得高分，差者得低分；区分度低的试题，鉴别不出被试者真实成绩的优劣程度. 当试题的分数与试卷分数之间的相关系数$r>0$时，用r估计试题的区分度h；当$r \leqslant 0$时，规定$h=0$.

特别地，对于要么零分要么满分的试题区分度，有简化的计算公式. 用变量X表示被评估试题的分数，取值0或1；用变量Y表示被评试卷的分数. N为样本总数(被评估试卷的份数)，k为X取1的样本数，记

$$p = \frac{k}{N}, \quad q = 1 - p,$$

则变量X的标准差$S_x = \sqrt{pq}$. 用S_y表示变量Y的标准差，$\bar{Y}_1$与$\bar{Y}_0$分别表示相应于变量X分别取值1与0的样本Y的均值. 则变量X与变量Y的相关系数为

$$r = \frac{q\bar{Y}_1 - p\bar{Y}_0}{S_y\sqrt{pq}}.$$

此r即为该类型被评估试题的区分度h的计算公式.

区分度(distinguishing)　即“试题区分度”.

试题综合分析(comprehensive of item)　心理和教育测验的基本程序之一. 它是用区分度与难度这两个指标对项目(试题)作综合分析. 将某次测验的全体被试者的得分由大至小排列，通常规定前

27%的被试者列为高分组，后面27%的被试者列为低分组，然后分别求出这两组对其中某一试题的答对率(通过率)，分别记为 p_H，p_L，定义该试题的区分度为 $h=p_H-p_L$. 例如，某次测验被试者人数 $N=100$，列出4个试题的分析结果如下：

题号	做对人数		通过率		区分度
	高分组	低分组	高分组	低分组	h
1	27	25	1.00	0.925	0.075
2	13	1	0.482	0.038	0.444
3	7	9	0.259	0.333	−0.074
4	22	12	0.815	0.444	0.371

第一题区分度不高，题目太容易；第二题区分度高，但难度大，因为高分组也只有48.2%的人做对；第三题不能采用，因为 h 为负值，无鉴别能力；第四题有鉴别能力，难度也适中.

试题格式(item format)　教育测量学术语. 指试题的类型或形式. 试题格式在测验中占有很重要的地位. 倘若格式(形式、类型)不适当，测验就要费时间，错误多、评分困难. 试题(项目)格式有13种：

1. 是非题. 又称正误式.
2. 选择题. 一为题干，二为选项.
3. 配合题. 一为问句题，二为反应题.
4. 排列题. 把试题中每一个问题按正确顺序重新排列.
5. 最优选择题. 是指所有答案都对，但要选出最优答案.
6. 联想式. 是指把所列若干问题的有关事实都写出来.
7. 图解题.
8. 改错题.
9. 计算题.
10. 类推题. 是指已知甲和乙的关系，要推出丙和丁的关系.
11. 填充题.
12. 简单问题答题.
13. 划消式. 是指有许多项目属于同一类，把不属这一类的那一项划去.

命题原则(principle writing out examination)　教育测量学术语. 它是指将试题组合成试卷所遵循的原则，或说是编制试卷所遵循的原则. 编制试卷犹如建筑房屋，必须有事先设计周详的蓝图，作为命题的依据：确立目的、选择材料、制定试题、试题分析、试题选择、测验的信度与效度的确定等. 一般原则有7条：

1. 试题的取样有代表性.
2. 试题的难度有一定的分布范围.
3. 试题的文字力求浅显、简短、无误、一义(只能一种解释).
4. 题目之间彼此独立.
5. 题目的正确答案应是没有争论的.
6. 题目宜注重原理的应用.
7. 题目的格式(类型)要多样化.

编制试卷的方法依测验的性质而异. 如智力测验和教育测验的编制方法不尽相同. 其中，教育测验即教育成果的测验，就其功能而言，分为综合成就测验与学科成就测验.

以学科成就测验为例，其功能有：评定被试者对某一学科的学习成就的高低和诊断性测验，以及发现被试者的优缺点和学习上的困难. 所以在命题之前应先分析课程的教学目标及教材内容，使命题符合测验目的.

题库原理(principle of establishing item banks)　一种命题方法. 一个学科某类考试的题库，就是能提供这个学科该类考试所用试题的总体. 试题的区分度 h、难度 d 及试卷的信度 α 的测定依赖于参加测验的被试者的成绩(得分). 如果被试者人数少，则 h，d 及 α 的测定值稳定性不高，不利于建立题库(项目库).

试题(项目)反应理论是20世纪60年代才得到发展的一种测验理论，它提出了试题特性函数的经验公式，如逻辑斯谛克模型：

$$g(\theta)=p+\frac{1-p}{1+e^{-1.7h(\theta-d)}}.$$

又如正态模型：

$$g(\theta)=p+(1-p)\Phi[h(\theta-d)],$$

其中 Φ 为标准正态函数；θ 为被试者的能力水平；g 为被试者对该试题的答对概率(反应成绩)；p 为低水平的被试者对该试题的答对概率. 设制定 M 个试题，N 个被试者参加测验，利用最小二乘法或最大似然法求参数估计，从而求出各试题的 p，h 及 d，从中挑选试题建立题库，并考察被试者的自适应测验的能力.

试题反应理论(item response theory)　见“题库原理”.

教育质量评价(evaluation of educational quality)　教育测量学的基本内容之一. 教育评价系指对教育质量和教育职能(管理)两方面的评价. 它为确定教育方针和教育计划提供依据，是学校管理的重要手段. 教育质量评价试图判断一个预定的教育目标在教育过程中的效果如何.

教育测验是教育质量评价的一个重要依据.要发挥测验在评价中的优良作用,就要做到测量目标同教育目标一致.布鲁姆(Bloom,B.S.)于1956年提出了"认知教学目标",这是目前已被教育评价和教育测验学家所普遍接受的.它将学生所获得的知识分为:认识、理解、应用、分析、综合、评价6个水平.

认知教学目标(cognitive instructive target) 见"教育质量评价".

教学质量评价(evaluation of teaching quality) 教育测量学的基本内容之一.如何评价教学质量,至今还没有统一的标准.一门课程的教学质量,与诸多因素密切相关,如前期各课程的教学质量、本门课程各个教学环节的互相配合、教师的教学效果、学生的素质及学习态度等.

教师的教学效果是直接影响教学质量的重要因素.而教学效果又应该从各个教学环节(如课堂讲授、习题课、实验课、课堂讨论、辅导答疑、教书育人等)作全面衡量.

教师的教学效果,可以从三个方面选择合理的考核指标:

1.教师的学术业务水平.如对教材内容的熟悉程度,对重点、难点掌握的准确程度,组织课堂讨论、选用编写教材、选习题及试题的水平等方面.

2.教师的教学方法.如突出重点、分散难点的讲授方法是否恰当,是否结合学生实际,是否达到教学大纲要求及能否妥善组织各个教学环节,承前启后及启发式教学方式运用得如何,表达与板书是否清楚与有条理等.

3.教师的教学态度.如是否认真备课,是否执行教学计划,能否不断改进教学、更新教学内容,能否既教书又育人等.

对于评价教学效果的各项考核指标,可采用加权记分法.学术业务水平、教学方法、教学态度三方面,如对基础课可用权重4∶3∶3;对专业课可用权重5∶3∶2.对于各项具体指标,也可用加权记分,由教师及学生组成评审组,得出一门课程教学的总得分.

课程设置评价(evaluation of curriculum) 教育测量学的基本内容之一.它评价课程设置是否符合教育目标.各类各级学校要根据教育目标和专业要求设置课程.课程设置的目的有两个:

1.获得知识.

2.培养能力.

设置课程是一项系统工程.既要注重各科课程的独立性,又要注意课程之间的相关性.例如,在高等学校,通常将课程分为公共基础课程、专业基础课程、专业课程三类.这三类课程中所设的科目门数及教学时数,要依教学目标进行配置.

对课程设置的科学性、合理性的评价,可从定性、定量两方面提出几项指标,从教学实践出发,利用教育测验的结果(得分),运用典型相关分析、主成分分析、因子分析等统计方法,对课程设置的效果做出评价.设有 n 个科目,N 个学生,则有得分矩阵

$$X=(x_{ij})_{n\times N}.$$

由 X 阵求得相关系数矩阵 R,R 是 n 阶对称矩阵,可描述任何两科之间的相关程度;运用典型相关分析,计算基础课程同专业课程之间的典型相关变量及相关系数,分析基础课程中哪些科目对专业课程的影响较大;运用因子分析方法分析所设科目对学生培养哪几种主要能力,这些能力主要由哪几科培养得到的;运用主成分分析法,建立 n 个科目的一两个线性组合,求出学生的综合得分,对学生的成绩做出综合评价.

撰　稿　于义良　王明生　刘兰亭　刘卓雄　刘维奇　李仲廉　李济洪　杨振海　杨自强　杨维权　宋毅君　茆诗松　柴根象　梁小筠　梁冯珍　高惠璇　程　侃　常学将　戴伯新

审　阅　王寿仁　方开泰　成　平　安鸿志　陈家鼎　张尧庭　杨自强　郑忠国　茆诗松　梁之舜　陈希孺　常学将

经 济 数 学

经济数学(mathematics of economics) 通常理解为经济学中所用到的数学,或经济学中的数学问题研究.许多冠以经济数学的教科书常常就是一本偏重于经济应用的高等数学课本.在欧美,经济数学这个名称并不多见.类似的教科书常常冠以数理经济学基础之类的标题.至于偏重于用数学概念和方法来研究经济学的学科,一个运用也不很广泛的名称是数量经济学,它通常理解为数理经济学、经济计量学(或计量经济学)、投入产出分析以及相当部分的运筹学(例如,线性规划的经济学应用)等.20世纪80年代起,中国也流行数量经济学作为学科名称,但其原意却是为了区别于作为西方经济学一部分的数理经济学和计量经济学来提出的.在苏联,由于同样的原因,他们提出的学科名称是经济数学方法、经济控制论等.此外,在中国还有人把经济预测、经济决策、经济统计、技术经济等中间学科的内容认为是经济数学的一部分.作为《数学辞海》的一部分,这里将只包括数理经济学、经济计量学、投入产出分析、经济预测以及新兴学科金融数学等五个方面的基本词条.

数量经济学(quantitative economics) 见"经济数学".

经济数学方法(mathematical method of economics) 苏联学者所建议的学科名称.它的组成部分有计划计量学、经济控制论和数学规划.苏联学者认为:西方的数理经济学和经济计量学是以边际效用学派的理论为基础的资产阶级政治经济学的一个特定学派.为了划清界线,他们建议这个名称,并认为经济数学方法是用必要的计算规则、相应的经济模型和有科学根据的使具体经济措施可能获得经济效果的资料来保证计划工作的.但是在具体的数学方法方面,苏联学者的许多工作与西方的相应研究并无本质区别.1975年,俄国数学家康托洛维奇(Kantorovich,L. V.)与美籍荷裔经济学家库普曼斯(Koopmans,T. C.)同获诺贝尔经济学奖,人们发现,他们的许多成就极为相似.随着苏联的解体和计划经济体制在国际上逐步消失,这个学科名称正在成为历史名词.

经济控制论(control theory of economics) 通常理解为运用控制论方法来研究经济学问题的学科.但是作为学科名称,它只流行于苏联和东欧国家,因为它体现了一种试图全面控制国民经济的计划经济思想.早期的代表著作是波兰经济学家兰格(Lange,O.)于1970年去世后出版的《经济控制论导论》,其中有许多用经典控制论的语言来描述的经济学问题.在欧美,用控制论方法的经济学研究很多.英国经济学家艾伦(Allen,R. G. D.)于1956年初版的《数理经济学》一书中就有许多经济控制论的内容.早年,英国经济学家拉姆齐(Ramsey,F. P.)在最优经济增长、最优征税问题的研究实际上提出了一个现代最优控制问题.后人对此的进一步研究更是用了许多现代控制论方法.1975年,诺贝尔经济奖获得者美籍荷裔经济学家库普曼斯(Koopmans,T. C.)在研究最优经济增长等问题时也应用了最优控制方法.此外,美籍华裔经济学家邹至庄于1975年出版的专著《动态经济系统的分析与控制》更是系统地应用了最优控制理论.然而,经济控制论在欧美从未被看做一门独立的学科.

数理经济学

数理经济学(mathematical economics) 顾名思义,数理经济学应该是指用数学概念和方法来研究的经济学.但是实际上,人们对数理经济学的习惯理解比这要狭窄得多.通常它只是指对一种经济学理论提出数学机理模型的研究.与经济计量学的不同在于后者研究的常常是从经济统计数据出发的数理统计模型,它不一定有完整的机理解释.与投入产出分析之类的经济数学方法研究的区别则在于前者更具有系统性和理论性.当然,这样的区别并非是十分严格的.英国经济学家艾伦(Allen,R. G. D.)于1956年初版、1959年再版的《数理经济学》一书不但有相当于经济数学教科书的内容,也包括了许多经济计量学、投入产出分析的内容,甚至还有所谓经济控制论的内容.由美国学者阿罗(Arrow,K. J.)(1972年诺贝尔经济奖获得者)、美国学者英屈利加托尔(Intriligator,M. D.)等人主编的于1981年开始出版的四卷《数理经济学手册》,则把数理经济学定位于"包括数学概念和技巧对经济学,特别是对经济理论的各种应用",但实际上排除了艾伦书中的经济计量学、投入产出分析以及许多宏观经济学的内容.这样,如果把数理经济学理解为用现代数学概念和方法来构造和研究微观经济的机理模型,那么这与它的实际状况相差是不远的.

《数理经济学手册》把数理经济学的历史划分为三个阶段:

1. 基于微分学的边际主义阶段(1838—1947).

2. 集合论/线性模型阶段(1948—1960).

3. 当前的合流阶段(1961—).

第一阶段的1838年是指法国数学家和经济学家法国应用数学家库尔诺(Cournot,A. A.)的著作《财富理论的数学原理研究》出版的年份.该书中,库尔诺不但把需求、供给等经济学概念用数学上的函数概念来表达,更是提出利润最大化的企业行为准则、竞争均衡等观念.因此,人们普遍认为库尔诺是数理经济学的创始人.但是这一阶段中对后来更有影响的是19世纪70年代出现的边际分析学派,它们以英国逻辑学家、经济学家杰文斯(Jevons,W. S.)、法国经济学家瓦尔拉(Walras,L.)和奥地利的门杰(Menger,C.)为代表.其基本出发点是经济行为都可以用消费效用最大化、生产利润最大化来刻画,从而许多经济学问题都可归结为用微分法来求解的约束极值问题.数理经济学这个名称也是杰文斯首先使用的.边际是门杰首创的名词,其实它就是数学上的导数.所谓边际分析主要就是用导数求解极值问题的方法.这一阶段中最有影响的是瓦尔拉提出的一般经济均衡体系,它是指由消费效用最大化和生产利润最大化可以解出需求与供给作为价格的函数,而利用需求与供给的均衡就可解出一般经济均衡价格体系.这就提出了一种理想状态的经济框架.因此,也有人认为,瓦尔拉才是数理经济学的创始人.第一阶段的1947年是指美国经济学家萨缪尔森(Samuelson,P. A.)的著作《经济分析基础》出版的年份.该书相当全面地总结了这一阶段的数理经济学.

第二阶段的1960年是以美籍法裔经济学家德布罗(Debreu,G.)(1983年诺贝尔经济奖获得者)于1959年出版《价值理论》一书为标志的.该书用数学公理化方法系统叙述了阿罗-德布罗一般经济均衡的存在证明,从而被认为是现代数理经济学的奠基著作.由于此书的出现,数理经济学中所应用的数学被扩大到微分学以外的几乎所有数学领域,尤其是凸性、不动点理论等几乎成了数理经济学中必备的工具.线性模型是指在这一时期出现的投入产出分析和线性规划的经济学应用.但是这些内容目前已不被看做数理经济学的主要部分,《数理经济学手册》中都没有专门的篇幅来叙述线性模型.此外,在这一阶段中,1944年出版的美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann,J.)和莫根施特恩(Morgenstern,O.)的巨著《对策论与经济行为》也被认为是数理经济学最重要的著作.无论从经济思想上还是从数学上来看,该书都为后来的研究者提供了许多新观念.

第三阶段是数理经济学的大发展阶段,其中对一般经济均衡的整体研究导致微分拓扑对经济学的应用;对大量经济活动者的竞争均衡的研究导致测度论与非标准分析的应用;不完全市场的一般经济均衡研究使经济学家提出了格拉斯曼流形上的类不动点存在问题;一般经济均衡的计算事实上开创了计算数学的一个新分支;社会选择理论不但在经济学与社会学上有深远意义,也是数学公理化方法的一种不可替代的深刻应用;带不确定性的经济学研究中引进了随机分析、随机控制,它们的进一步发展演变为影响巨大的金融数学;如此等等的内容就形成《数理经济学手册》的厚厚四大卷,并且还在准备出版以后的新卷.

数理经济学手册(handbook of mathematical economics) 见“数理经济学”.

边际分析(marginal analysis) 见“数理经济学”.

边际(margin) 经济学家专用的数学名词.它相当于数学中的导数.例如,边际效用就是效用函数关于商品变量的导数或偏导数,边际成本就是成本对投入商品变量的导数或偏导数.但是,经济学家也常对离散函数(数列)运用边际运算,这时,边际就变成了差分,或者说,当自变量变动一个单位时的因变量变化.对有些经济变量,导数在习惯上又称为边际倾向.例如,消费对收入的导数就称为消费的边际倾向,储蓄对收入的导数就称为储蓄的边际倾向.边际这个术语是19世纪的奥地利经济学家门杰(Menger,C.)首先使用的,他与另一些经济学家所创立的用相当于导数为零是函数达到极值的必要条件来分析经济学问题的学派,历史上称为边际主义、边际分析学派或边际效用学派.但是随着数理经济学的发展,边际正在逐渐变为一个历史名词.从经济思想来看,边际主义主要主张经济活动者都是追求其利益的最大化的.因而许多经济问题都可归结为极值问题来求解,以至可以利用所谓边际分析方法.这一思想的进一步发展,在今天通常称为新古典主义经济学.

边际倾向(marginal propensity) 见“边际”.

边际主义(marginalism) 见“边际”.

边际分析学派(school of marginal analysis) 见“边际”.

边际效用学派(school of marginal utility) 数理经济学专用名词.边际效用这个名称来自该学派对消费效用最大化问题的求解,问题归结为

$$\max\{u(x) - p \cdot x\},$$

式中 x 为消费商品向量,p 为价格,u 为效用函数.如果 u 是光滑函数,这个极值问题有解的必要条件为 $u'(x)=p$,这里当 x,p 是 n 维向量时,它是个向量等式,并且左端是 u 关于 x 的梯度.$u'(x)$称为边

际效用，而这个等式断言 p 应该与它相等. 批判者认为这样的断言与马克思主义的劳动价值论不符.

边际效用(marginal analysis)　见"边际"和"边际效用学派".

新古典主义经济学(neo-classical economics)　相对于英国古典主义经济学(代表人物是英国经济学家史密斯(Smith, A.)、李嘉图(Ricardo, D.)、英国学者密尔(Mill, J. S.)等)而言的新经济学(参见"边际").

乘数(multiplier)　经济学家专用的数学名词. 相当于数学中函数对自变量的导数. 例如，投资乘数就是产出对投资的导数；从而近似地有产出增量等于投资增量乘上投资乘数. 许多有关宏观经济的乘数一加速模型，无非是一些线性二阶微分方程，这里乘数指其中有一阶导数关系，加速数指其中有二阶导数关系. multiplier 在数学上常译成乘子，例如，拉格朗日乘子、循环差集乘子等. 但从来不像经济学家那样把它当导数来用.

弹性(elasticity)　经济学家专用的数学名词. 指因变量变化的百分比与自变量变化的百分比之比. 例如，设某商品消费的价格弹性为 σ，那么当价格变化百分之一时，该商品的消费量就变动百分之 σ. 当 $y=f(x)$ 是离散函数时，弹性 σ 就是

$$\sigma=\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x};$$

当 $y=f(x)$ 是光滑连续函数时，弹性 σ 就是

$$\sigma=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\log|y|}{\mathrm{d}\log|x|}.$$

这样在柯勃-道格拉斯生产函数 $Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$ 中，α 就是产出的资本弹性，β 就是产出的劳动弹性. 不过经济学中有时用的弹性含义与上述情形不同.

商品空间(commodity space)　数理经济学中用来描述各种商品量和经济活动的有限维或无限维向量空间. 最常用的商品空间是有限维实向量空间 R^n，它假定在所处理的经济问题中，所涉及的商品种类一共只有 n 种，且商品空间中的每个向量

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的各个分量代表各种商品的用实数来衡量的量. 当然，现实世界上从未有过用一般的实数来衡量的商品量. 无论哪一种商品总是有一个最小单位，以至只需要用整数来衡量. 用实数来衡量商品量是对现实的一种近似，并且使得许多经济学问题有可能用微分学来处理，这是数理经济学得以发展的基本原因. 商品空间 R^n 中的向量的分量可以全部都是非负的，它能用来描述消费者对各种商品的需求量；也可以有正有负，其中把对应负分量的商品理解为生产中的投入，对应正分量的商品理解为生产中的产出，那么这个向量就可用来描述一种生产活动. 在金融市场中，商品空间中的向量是用来刻画证券交易的，这时分量为正可理解为买入该证券，分量为负可理解为卖出该证券. 商品空间也可能是无限维的. 它可能用来刻画有无限种商品的经济活动. 例如，如果认为提货时间不同的商品是不同的商品，那么现实世界中的商品空间就应该是无限维的. 在有些经济数学模型中，商品量是随机变量. 这时相应的商品空间也应用无限维空间来刻画. 对无限维商品空间要赋以一定的拓扑结构和序结构，例如，假定空间是某种巴拿赫空间、黎斯空间等.

商品向量(commodity vector)　亦称商品丛. 商品空间中的元素. 它的每个分量代表所对应的商品的量.

商品丛(commodity bundle)　即"商品向量".

价格空间(price space)　商品空间的对偶空间. 它用来刻画所研究的经济问题中的价格. 所谓价格或价格体系就是对每种商品指定一个价格. 当商品空间为 R^n 时，价格体系也可以用一个 n 维非负向量来表示，其中每个分量代表相应的商品的价格. 而对于代表一定量的一组商品的商品向量，价格向量与它的内积就是该组商品的总价值. 这时价格向量也可看做商品空间上的线性形式(函数)，它对每个商品向量的作用就得到该商品向量的总价值. 而向量空间上的所有线性形式全体就是它的对偶空间. 由于 R^n 的对偶空间与 R^n 同构，当商品空间为有限维空间时，价值空间有时没有必要专门引入. 但是当商品空间为无限维时，价格空间必须作为商品空间的某种意义下的对偶空间明确引入. 经济学中经常会遇到对某类商品的定价问题. 它在数学上就意味着把一个小商品空间上的价格线性形式延拓到大商品空间上去，因而泛函分析中的哈恩-巴拿赫定理就会在这类问题中起很大作用.

价格(price)　商品空间上的线性形式(参见"价格空间").

消费集(consumption set)　商品空间的子集. 它代表消费者所有可能的消费全体，这里消费是一个商品向量. 通常要求消费集是有下界的闭凸集.

生产集(production set)　商品空间的子集. 它代表生产者所有可能的生产活动全体，这里生产活动是一个商品向量. 生产集是对生产者的生产能力的刻画. 通常要求生产集是闭凸集，且包含闭负卦限(所有分量非正的商品向量全体)，但不与正卦限(所有分量为正的商品向量全体)相交. 后两个假设意味着生产者可以随意处置它的资源，而不生产任何商品，以及他不能无中生有地进行生产.

利润函数(profit function)　生产问题中的价格的函数. 对于指定的价格，它等于该价格在生产集上的最大值. 这是因为生产集中的商品向量的负分

量部分代表生产的投入，它与价格的内积是生产中的成本；正分量部分代表生产的产出，它与价格的纯量积是生产中的收入. 这样，利润就是收入与成本之差. 而利润函数则是按照边际主义的经济观点来定义的.

生产函数(production function) 投入商品空间上的非负函数. 其自变量是投入商品向量，因变量代表在这样的投入下可能的最大产出值. 生产函数只能用来刻画只有一种产出的生产者的生产能力. 如果生产者有多种产出，那么其生产能力应该用生产集来刻画.

柯勃-道格拉斯函数(Cobb-Douglas function) 生产函数的一种. 其投入自变量为资本 K 和劳动 L，函数形式为

$$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

对于具体的经济问题，A,α,β 可通过对等式两端取对数后，用线性回归方法来求得. 当 $\alpha+\beta=1$ 时，该生产函数被称为规模报酬不变，它意味着如果投入增加一定的倍数，那么产出也增加同样的倍数. 当 $\alpha+\beta>1$ 或 <1 时，则分别称为规模报酬递增或递减. 投入变量超过两个的以幂函数乘积形式出现的生产函数有时也称为柯勃-道格拉斯函数.

规模报酬(return to scale) 生产函数的一种性质. 如果生产函数 $y=f(x)$ 是一次齐次函数，即对于任何 $\lambda>0$ 有 $\lambda f(x)=f(\lambda x)$，那么该生产函数就称为规模报酬不变，即当投入增加一定的倍数时，产出也增加同样的倍数. 如果 $\lambda f(x)$ 大于或小于 $f(\lambda x)$，那么它们分别称为规模报酬递增或递减. $\alpha+\beta=1$ 的柯勃-道格拉斯函数是规模报酬不变的.

边际产出递减(decreasing marginal product) 生产函数关于投入商品的导数递减. 这是在生产理论中经常作的假定. 在数学上它意味着假定生产函数是凹函数. 在经济学上，它意味着没有技术进步.

生产理论(production theory) 数理经济学的基本概念. 通常的数理经济学中的生产理论是以利润或产出最大化作为出发点来建立的理论. 其最简单的模型如下：假定投入商品为投入商品空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其价格为 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$；生产者只有一种产出，其生产函数为 $f(x)$. 那么利润最大化问题为

$$\max\{f(x)-p\cdot x\}.$$

其中 $p\cdot x$ 是投入的总价格，即生产成本. 在假定 f 是光滑的、对每个变量递增的(拟)凹函数的条件下，由极值的一阶必要条件可得问题的解 x 满足：

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i}=p_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

在经济学中，左端常称为边际产出，即产出对投入的(偏)导数. 由此可得，最优的生产计划应该使每种投入的边际产出与投入的价格相等. 如果再考虑生产者的投入成本为 c，那么产出最大化问题可叙述如下：

$$\begin{cases}\max f(x)\\ p\cdot x\leqslant c\end{cases}$$

由拉格朗日乘子法则，可以得到其解 x 应满足：

$$\frac{\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}}=\frac{p_i}{p_j}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

即对两种不同的投入来说，边际产出之比应该等于相应的投入价格之比. 解 $x=x(c,p)$ 可看做成本 c 与价格 p 的函数. 它称为生产者的供给函数. 在一般情况下，供给函数应该是集值函数，即最优的生产计划可能有许多种.

边际产出(marginal product) 见“生产理论”.

供给函数(supply function) 亦称供给映射. 它是价格的函数，代表在一定的价格体系下，生产者根据产出或利润最大化原则而决定的产出. 通常它应该是集值映射，即对于一定的价格体系，生产者可能提供的产出商品向量不是惟一的. 在阿罗-德布罗一般经济均衡模型中，可以证明，每个生产者的供给函数都是价格的上半连续映射. 在单产出的情形，经常还考虑作为价格与成本函数的供给函数(参见“生产理论”).

供给映射(supply mapping) 即“供给函数”.

效用函数(utility function) 简称效用. 商品空间或消费集上的实值函数. 用以衡量商品向量对消费者的满足程度. 边际分析学派的理论认为，对每一消费者都存在一个这样的效用函数，使得消费者的消费行为取决于如何使他的效用函数最大化. 对效用函数通常有光滑、递增、严格(拟)凹之类的假定. 效用函数是否存在长期以来都是一个人们争论的问题，因为很难想象对每个消费者都有一个具体的可测量的效用函数. 后来，有人提出用消费集上的全序关系偏好来代替效用函数. 从此就有主张用效用函数的基数效用论和主张用偏好的序数效用论的提法. 但是后来又发现，对于数理经济学研究来说，效用函数与偏好实质上是等价的. 尽管效用函数的存在问题始终使人费解，但是至今不存在不引进效用函数的更好的消费理论. 因此，学术界对效用函数目前已采取认可的态度.

效用(utility) 效用函数的简称.

基数效用论(theory of cardinal utility) 见“效用函数”.

序数效用论(theory of ordinal utility) 见“效用函数”.

无差别曲线(indifference curve) 效用函数取

常值的集合. 当消费商品向量为二维向量以及效用函数光滑时,这一集合恰好就是一条曲线. 微观经济学中经常利用不同的无差别曲线代表不同的效用函数值来图解一些消费应用问题.

边际效用递减(decreasing marginal utility) 效用函数关于消费商品的导数递减. 这是在消费理论中经常作的假定. 在数学上它意味着假定效用函数是凹函数. 在经济学上它意味着随着消费商品的增加,消费者的满意程度的增加越来越慢.

偏好(preference) 消费集上的全序关系. 设 X 为消费集. X 上的关系 $\geq$ 称为偏好是指它满足:

1. (自反性) $\forall x\in X, x\geq x$.

2. (传递性) $\forall x,y,z\in X$, 若 $x\geq y, y\geq z$, 则 $x\geq z$.

3. (完全性) $\forall x,y\in X$, 或者 $x\geq y$, 或者 $y\geq x$.

显然,若 u 是 X 上的效用函数,定义 $\geq$ 为

$$u(x)\geqslant u(y)\Leftrightarrow x\geq y,$$

则 $\geq$ 满足上述三条件,即效用函数可以用来定义偏好. 反之,如果假定 X 是拓扑空间,且偏好 $\geq$ 还满足.

4. (连续性) $\forall x\in X, \{y\in X\mid y\geq x\}$ 和 $\{z\in X\mid x\geq z\}$ 都是闭集. 那么有下列定理成立:德布罗-艾伦贝格-拉达尔定理,设 X 为具有可数开集基或可分连通的拓扑空间. 那么对于 X 上的任何连续偏好关系,都存在相应的连续效用函数. 因此,对于数理经济学来说,效用函数与偏好实质上是等价的,即基数效用论与序数效用论没有本质区别.

光滑偏好(smooth preference) 其对应的效用函数是光滑函数的偏好. 在正则经济学的研究中,为了应用微分拓扑中结果,必须在经济模型中假定消费者的偏好是光滑偏好. 在阿罗-德布罗一般经济均衡模型中,偏好不要求光滑.

消费理论(consumption theory) 数理经济学的基本概念. 通常的数理经济学中的消费理论是以效用最大化作为出发点来建立的理论. 其最简单的模型如下:假定消费商品为消费商品空间 R^n 中的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其价格为 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$; 消费者的效用函数为 $u(x)$, 其可支配支出为 y, 那么效用最大化问题可叙述如下:

$$\begin{cases}\max u(x)\\ p\cdot x\leqslant y\end{cases}$$

由拉格朗日乘子法则,可以得到其解 $\bar{x}$ 应满足:

$$\frac{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j}}=\frac{p_i}{p_j}\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

它的解 $\bar{x}=x(y,p)$ 可看做价格 p 与收入 y 的函数. 称它为消费者的马歇尔需求函数. 在一般情况下,需求函数应该是集值函数,即效用最大的最优消费可能有许多种. $v(y,p)=u(x(y,p))$ 称为消费者的间接效用函数.

马歇尔需求函数(Marshallian demand function) 见"消费理论".

间接效用函数(indirect utility function) 见"消费理论".

未定商品(contingent commodity) 亦称彩票、展望. 数理经济学专用名词. 指以一定概率出现的商品向量. 记未定商品的全体为 L. 对于 $x,y\in L$, 以 (x,y,p) 表示以概率 p 获得 x, 以概率 $1-p$ 获得 y. 那么 L 可以通过普通商品向量,利用运算关系 (x,y,p) 来生成. 引进未定商品,可以讨论在不确定环境下的经济问题.

彩票(lottery) 即"未定商品".

展望(prospect) 即"未定商品".

冯·诺伊曼-莫根施特恩效用函数(von Neumann-Morgensten utility function) 未定商品集上的效用函数. 设未定商品集为 L. 对于 $x,y\in L$, 以 (x,y,p) 表示以概率 p 获得 x, 以概率 $1-p$ 获得 y, 那么这种效用函数要求满足

$$u((x,y,p))=pu(x)+(1-p)u(y).$$

美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)和莫根施特恩(Morgensten, O.)指出,如果一种偏好满足下列(经后人简化的)公理:

1. (a) $x=(x,y,1)$, (b) $(x,y,p)=(y,x,1-p)$, (c) $((x,y,p),y,q)=(x,y,pq)$.

2. (连续性公理) $\forall x,y,z\in L$, $\{p\in[0,1]\mid(x,y,p)\geq z\}$ 和 $\{p\in[0,1]\mid z\geq(x,y,p)\}$ 都是闭集.

3. (独立性公理)如果 $x\sim y$, 那么 $\forall p\in[0,1]$, $\forall z\in L$, $(x,y,p)\sim(y,z,p)$, 这里 $x\sim y$ 表示 $x\geq y$ 与 $y\geq x$ 同时成立.

那么在至多相差一个仿射变换的意义下,存在惟一的效用函数满足上述条件.

阿莱悖论(Allais paradox) 一种经济学悖论. 它是由法国经济学家阿莱(Allais, M.)针对 1988 年度诺贝尔经济学奖获得者命名的冯·诺伊曼-莫根施特恩效用函数的悖论. 阿莱在 1952 年指出,独立性公理与人们的实际行为不符. 他假设有以下两组事件需要做出判断:

$$\begin{cases}\mathrm{A}_1=\text{肯定得到 100 万法郎}\\ \mathrm{A}_2=\begin{cases}\text{以 10\% 的概率得到 500 万法郎}\\ \text{以 89\% 的概率得到 100 万法郎}\\ \text{以 1\% 的概率不得利}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{A}_3=\begin{cases}\text{以 10\% 的概率得到 500 万法郎}\\ \text{以 90\% 的概率得到 100 万法郎}\end{cases}\\ \mathrm{A}_4=\begin{cases}\text{以 11\% 的概率得到 100 万法郎}\\ \text{以 89\% 的概率不得利}\end{cases}\end{cases}$$

一般人在 A_1 和 A_2 之间总选择 A_1，在 A_3 和 A_4 之间总选择 A_3. 而这样的选择恰好与独立性公理矛盾. 阿莱悖论引起许多关于独立性公理的研究.

期望效用(expected utility)　冯·诺伊曼-莫根施特恩效用函数的数学期望. 在含有不确定性的消费理论中，原来的追求效用函数最大化，被代替为追求期望效用最大.

阿罗-普拉特风险厌恶度量(Arrow-Pratt risk aversion measure)　冯·诺伊曼-莫根施特恩效用函数的弯曲程度的一种度量. 设该效用函数为单变量光滑函数 u，其自变量 x 可理解为收入. 那么阿罗-普拉特风险厌恶度量定义为

$$r_u(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

在数学上来说，它是函数 u 的凹性程度的一种度量，即在下列凹性不等式中：

$$\begin{aligned}&u(px+(1-p)y)\\&>u((x,y,p))=pu(x)+(1-p)u(y),\end{aligned}$$

大于程度的度量. 从经济学上来说，如果 x 和 y 意味着两种确定的收入，那么 (x,y,p) 是以概率 p 获得 x，以概率 $1-p$ 获得 y. 其收入的数学期望是

$$px+(1-p)y.$$

上述不等式意味着消费者的行为是：与数学期望为 $px+(1-p)y$ 的不确定收入相比，宁可要确定收入 $px+(1-p)y$. 而阿罗-普拉特度量是这种宁可程度的度量.

需求函数(demand function)　亦称需求映射. 它是价格的函数，代表在一定的价格体系下，消费者根据效用最大化原则而决定的产出. 通常它应该是集值映射，即对于一定的价格体系，消费者可能需求的消费商品向量不是惟一的. 在阿罗-德布罗一般经济均衡模型中，可以证明，每个消费者的需求函数都是价格的上半连续映射. 在微观经济学消费理论中，经常还考虑作为收入与价格的函数以及价格与效用水平的函数的需求函数.

需求映射(demand mapping)　即"需求函数".

超需映射(excess demand mapping, excess demand correspondence)　需求超过供给的部分，即需求函数与供给函数的差. 一般经济均衡的存在问题常被归结为超需映射的零点存在问题.

希克斯需求函数(Hicksian demand function)　由支出最小化而得出的消费需求. 考虑下列最小化消费问题：

$$\begin{cases}\min p\cdot x\\u(x)\geqslant v\end{cases}$$

其中，u 为消费者的效用函数，v 是指定的效用水平. 那么其解 $\hat{x}=h(v,p)$ 作为效用水平 v 与价格 p 的函数就称为希克斯需求函数. $e(v,p)=p\cdot h(v,p)$ 则称为消费者的支出函数.

支出函数(expenditure function)　见"希克斯需求函数".

斯鲁茨基方程(Slutsky equation)　消费理论的基本方程. 其形式如下：

$$\frac{\partial x_j(y,p)}{\partial p_i}=\frac{\partial h_j(v(y,p),p)}{\partial p_i}-\frac{\partial x_j(y,p)}{\partial y}x_i(y,p)$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n).$$

其中 y 是消费者的收入，p 是消费商品的价格，$x(y,p)$ 是马歇尔需求函数，$h(v,p)$ 是希克斯需求函数，$v(y,p)$ 是间接效用函数. 这一方程的含义是当消费商品的价格变动时，它对消费者的需求的影响由两方面的效应所组成：替代效应与收入效应. 替代效应是指消费者为维持原有的消费效用而用其他消费商品来替代所引起的需求，这里指上述方程右端的第一项；收入效应是指价格变动实际上也对消费者的收入有影响，由此也引起对需求的变化，这里指上述方程右端的第二项.

一般经济均衡(general equilibrium)　亦称瓦尔拉均衡. 它是使经济中所有市场都达到供需均衡的理想状态. 一般经济均衡思想最早是由法国经济学家瓦尔拉(Walras, L.)于 1874 年前后提出. 这一思想可看做英国经济学家史密斯(Smith, A.)提出的看不见的手的具体化，并且长期以来被当做微观经济学的基本框架. 一般经济均衡是在 19 世纪的边际分析学派形成时所提出的. 结合边际分析学派的其他观点，他们的经济思想可概括为：消费者追求其消费的最大效用，生产者追求其生产的最大利润，从而在市场上形成对商品的需求与供给；经过完全的市场供需价格竞争，达到一般经济均衡的价格体系，使供需得到均衡. 瓦尔拉特别是对这样的思想构造了数学模型，把供给与需求都表达为价格的函数，令供给等于需求，于是就得到关于价格向量的方程组. 对这个方程组求解，得到的价格就是一般经济均衡价格. 但是这一数学模型在数学上有待后人进一步论证. 供需均衡的非线性方程组的解的存在性、惟一性和稳定性都需要严格论证. 经过数学家和经济学家们的长期研究，第一个严格的一般经济均衡的存在证明于 1954 年，由美国学者阿罗(Arrow, K. J.)和美籍法裔数学家德布罗(Debreu, G.)所给出. 他们构造的严格的一般经济均衡模型称为阿罗-德布罗或阿罗-德布罗模型一般经济均衡.

瓦尔拉均衡(Walras equilibrium)　即"一般经济均衡".

看不见的手(invisible hand)　英国古典经济学家史密斯(Smith, A.)所提出的一种经济思想. 起源于他在 1776 年出版的名著《国富论》中的如下一段话："每人都在力图应用他的资本，来使其生产品得

到最大的价值.一般地说,他并不企图增进公共福利,也不知道他所增进的福利为多少.他所追求的仅仅是他个人的安乐,仅仅是他个人的利益.在这样做时,有一只看不见的手引导他去促进一种目标,而这种目标绝不是他所追求的东西.由于追逐自己的利益,他经常促进了社会利益,其效果要比他真正想促进利益时所得到的效果为大."这段话经常被主张自由放任的经济学家们引为经典.边际效用学派的经济思想也以此为出发点.尤其是法国经济学家瓦尔拉(Walras,L.)的一般经济均衡常被认为是这一思想的具体化,即社会福利具体化为供需均衡,看不见的手具体化为价格体系.

价格单纯形(price simplex) 价格向量的一种规范表达形式.对于经济问题来说,重要的是商品价格之间的相互比例,而不是商品价格的绝对值.因此,价格向量可以用一定方式来规范化.例如,规定第一种商品的价格始终为1.这意味着第一种商品是货币.价格单纯形是另一种规范方式.它要求所有商品的价格都是非负数,且其和为1.如果商品空间为 R^l,以 S 表示价格单纯形,那么

$$S=\left\{p\in R^l\,\middle|\,p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots,l;\sum_{k=1}^{l}=1.\right\},$$

它在数学上是个 $l-1$ 维单纯形.常用的另一种价格规范方式是要求

$$\sum_{k=1}^{l}p_k^2=1.$$

这时,价格的全体 S_1 是 $l-1$ 维球面的正部分,即

$$S_1=\left\{p\in R^l\,\middle|\,p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots,l;\sum_{l=1}^{l}p_k^2=1\right\}.$$

价格的规范表示使一般经济均衡的数学讨论大为简化.

瓦尔拉法则(Walras law) 一般经济均衡的一个必要条件.指财务必须均衡,即支出与收入必须均衡.该法则是由法国经济学家瓦尔拉(Walras,L.)提出的.在瓦尔拉的模型中,一般经济均衡价格体系的求解被归结为由供需均衡导得的价格的方程组.如果商品空间是 l 维的,那么由此导得的价格的方程组共有 l 个方程.瓦尔拉认为,方程组的未知量的个数应该与方程的个数一样,才能使方程组有解(对于非线性方程组来说,这个结论是错误的).但是瓦尔拉又把货币作为商品,而货币的价格始终是1.这样,未知量的个数少了一个.为使方程组有解,l 个方程间应该有一个关系式,用来消去一个方程.瓦尔拉法则就是这样的关系.在数学上,如果 p 是价格向量,P 是价格向量全体,例如,P 是价格单纯形 S 或正单位球面 S_1,$Z=Z(p)$ 是超需映射,即需求与供给之差,那么由于价格与需求的乘积是支出,价格与供给的乘积是收入,瓦尔拉法则可表达为 $\forall p\in P$,$p\cdot Z(p)=0$.当 $P=S_1$,Z 为单值映射时,瓦尔拉法则意味着 Z 是 S_1 上的向量场.如果 $p\cdot Z(p)=0$ 代替为 $p\cdot Z(p)\leqslant 0$,那么它将称为广义瓦尔拉法则.

广义瓦尔拉法则(generalized Walras law) 见"瓦尔拉法则".

德布罗-盖尔-二阶堂定理(Debreu-Gale-Nikaido theorem) 一条用来证明阿罗-德布罗一般经济均衡存在的定理.其表述如下:设 $Z:S\to R^l$ 为连续映射,其中 S 为价格单纯形,且满足下列瓦尔拉法则:$\forall p\in P$,$p\cdot Z(p)=0$,那么存在 $\bar p\in S$,使得 $Z(\bar p)\geqslant 0$,即 $Z_k(\bar p)\geqslant 0,k=1,2,\cdots,l)$.这里把瓦尔拉法则代替为广义瓦尔拉法则,定理仍成立.把 Z 理释为超需映射,这就指出了在一定条件下,使供给超过需求的价格体系是存在的.可以证明,这条定理与布劳威尔不动点定理是等价的.同时,它还能推广到集值映射情形.这时要求 Z 是取紧凸值的上半连续映射.

初始持有(endowment) 在阿罗-德布罗一般经济均衡模型中指消费者开始时所持有的商品.endowment 的原意是"天赋".

预算约束(budget constraint) 对消费者所提出的支出不能超过收入的约束.设 x 是某消费者的消费商品向量,p 是商品价格,c 是他的收入.那么预算约束就是 $p\cdot x\leqslant c$.在阿罗-德布罗一般经济均衡模型中,第 i 个消费者的收入来自其初始持有 e_i 和从各生产者的利润中所分得的份额 θ_{ij}.那么预算约束可进一步表达为

$$p\cdot x\leqslant p\cdot e_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p),$$

这里假定共有 n 个生产者,π_j 是第 j 名生产者的利润函数.

预算映射(budget mapping,budget correspondence) 取值为预算约束集的价格的(集值)映射.在阿罗-德布罗一般经济均衡模型中,第 i 个消费者的预算映射 β_i 为

$$\beta_i(p)=\left\{x\in X_i\,\middle|\,p\cdot x\leqslant p\cdot e_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)\right\},$$

其中,X_i 是第 i 个消费者的消费集.

阿罗-德布罗一般经济均衡(Arrow-Debreu general equilibrium) 一种经济数学模型.它是美国学者阿罗(Arrow,K.J.)与美籍法裔数学家德布罗(Debreu,G.)于1954年给出的第一个严格的一般经济均衡模型.这一模型假定有 l 种商品,即商品空间为 R^l;m 个消费者,其各自的消费集为 X_i 偏好为 $\succeq_i$,其相应的效用函数为 u_i,初始持有为 e_i $(i=1,2,\cdots,m)$;n 个生产者,其各自的生产集为 Y_j $(j=1,2,\cdots,n)$.第 i 个消费者从第 j 个生产者中所分得的利润份额为 θ_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m)$.于

是所讨论的经济可表达为

$$\mathscr{E}=((x_i,\succeq_i,e_i),(\theta_{ij}),(Y_j)),$$

对于任何 $x_i\in X_i, y_j\in Y_j$ 和价格 $p\in R^l$，$((x_i),(y_j),p)$ 称为经济的一个状态. 状态 $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ 称为是经济的均衡是指：

1. $\forall i, x_i^*$ 满足

$$u_i(x_i^*)=\max_{x_i\in\beta_i(p^*)} u_i(x_i),$$

其中 β_i 是第 i 个消费者的预算映射，

$$\beta_i(p)=\left\{x\in X_i\,\middle|\,p\cdot x\leqslant p\cdot e_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)\right\},$$

π_j 是第 j 个生产者的利润函数，

$$\pi_j(p)=\max_{y_j\in Y_j} p\cdot y_j.$$

2. $\forall j, p^*\cdot y_j^*=\max_{y_j\in Y_j} p^*\cdot y_j.$

3. $\sum_{i=1}^{m}x_i^*-\sum_{j=1}^{n}y_j^*-\sum_{i=1}^{m}e_i=0.$

阿罗与德布罗证明，如果对每个 i，X_i 是下有界的闭凸集，在 X_i 的可达子集 $\hat{X}_i$(即在资源配置所允许的条件下可能有的消费全体)上无满足消费(即效用函数 u_i 在 $\hat{X}_i$ 的点上无最大值)，效用函数 u_i 为连续拟凹函数(它可以通过偏好来提出等价条件)，X_i 中存在 x_i^0，使得 $x_i^0\ll e_i$(即 x_i^0 的每一分量小于 e_i 的相应分量)；对于每个 j，$0\in Y_j$，

$$\sum_{j=1}^{m}Y_j=Y$$

是闭凸集，$Y\cap(-Y)=\{0\}$，$Y\supset(-R_+^l)$；那么 $\mathscr{E}$ 均衡存在. 阿罗-德布罗的存在定理是历史上第一个严格的、有具体经济意义的、用数学公理化表述的一般经济均衡存在定理. 它在现代数理经济学发展上是一个里程碑. 在阿罗-德布罗模型以后，一般经济均衡理论研究又有很多发展.

一般经济均衡计算(computation of general equilibrium)　亦称均衡价格计算. 指阿罗-德布罗一般经济均衡的价格的具体计算. 由于阿罗-德布罗的均衡存在定理本质上等价于布劳威尔不动点定理，一般经济均衡的计算就紧密联系着布劳威尔不动点的计算. 布劳威尔不动点的计算程序最早出现在1964 年莱姆克(Lemke, C. E.)和豪森(Howson, J. T.)关于矩阵对策的研究中，其思路起源于布劳威尔不动点定理的初等证明，即利用单纯形的单纯剖分和施佩纳引理. 随后库恩(Kuhn, H. W.)，梅里尔(Merrill, O. H.)，埃夫斯(Eaves, B. C.)等人又提出了各种改进算法. 1967 年，美国学者斯卡夫(Scarf, H. E.)又在此基础上，提出了一般经济均衡的算法. 从此，一般经济均衡就不但是一种理论框架，也可以进行实际计算. 这样的计算可看做投入产出分析的一种发展.

均衡价格计算(computation of equilibrium prices)　即“一般经济均衡计算”.

寡头垄断(oligopoly)　经济学家专用名词. 指市场上有几个旗鼓相当的垄断集团. 寡头垄断的市场模型最早是法国应用数学家库尔诺(Cournot, A. A.)对两个垄断集团的双头垄断情形进行研究的. 几个垄断集团的互相竞争在一定条件下会达到某种平衡. 其更一般的模型就是后来发展起来的 n 人非合作对策理论.

库尔诺-纳什平衡(Cournot-Nash equilibrium)　数理经济学的基本概念. 指 n 人非合作对策的一种解. 设正规型的 n 人非合作对策中每一局中人的策略集为 A_i，利益函数(或效用函数)为

$$f_i: A=\prod_{k=1}^{n}A_i\to R,\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

$x=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\in A$ 称为对策的库尔诺-纳什平衡是指：

$$\forall x_i\in A_i,\ f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,\bar{x}_n)\leqslant f(\bar{x})\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

换句话说，每个局中人在别人不改变策略的情况下，他不可能单独改变策略来增加他的利益. 1994 年，诺贝尔经济奖获得者纳什(Nash, J. F.)于 1950 年指出，当所有 A_i 为紧凸集，所有 f_i 连续时，平衡存在. 因此，这一平衡就被后人称为纳什平衡. 但是后来人们又发现，纳什平衡的概念在 19 世纪已被法国应用数学家库尔诺(Cournot, A. A)对于 $n=2$ 的情形提出过. 这样，就又演变为现在的名称. 阿罗-德布罗一般经济均衡最初的存在证明就是利用库尔诺-纳什平衡存在定理来证明的. 需要注意的是库尔诺-纳什平衡一般不是帕雷托最优的，即如果几个局中人同时改变策略，还有可能在不损害其他人利益的条件下，继续增加他们的利益. 因此，阿罗-德布罗一般经济均衡是否达到帕雷托最优还需要进一步证明. 其肯定结果称为福利经济学基本定理.

纳什平衡(Nash equilibrium)　见“库尔诺-纳什平衡”.

帕雷托最优(Pareto optimality)　亦称帕雷托有效. 数理经济学的基本概念. 指是 n 人对策问题的一种解. 所谓 n 人对策问题是指有 n 个局中人，每人有一个策略集 A_i 和定义在 A_i 的乘积空间

$$A=\prod_{k=1}^{n}A_i$$

上的利益函数 f_i $(j=1,2,\cdots,n)$. $\hat{x}\in A$ 称为帕雷托最优是指不存在 $\hat{x}\in A$，使得

$$f_i(\hat{x})\leqslant f_i(\hat{x})\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

且其中至少有一个不等式是严格的. 帕雷托(Pareto, V.)是意大利经济学家，也是法国经济学家瓦尔拉(Walras, L.)的学术继承人. 他对一般经济均衡

理论的发展起着重要作用.帕雷托最优的概念是他首先针对一般经济均衡问题而提出的.这一概念也可用多目标规划的语言来陈述,实际上帕雷托最优也是多目标规划理论中的最基础的概念.与库尔诺-纳什平衡不同在于:后者是在不允许局中人之间合作的条件下的平衡状态,而前者是在允许局中人之间合作的条件下的平衡状态.

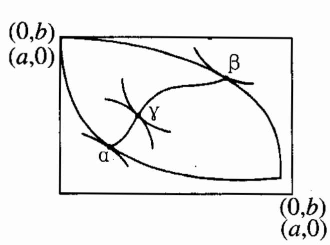
帕雷托有效(Pareto efficiency) 即"帕雷托最优".

资源最优配置(optimal resource allocation) 一般经济均衡框架中的帕雷托最优状态.状态是指每个消费者和每个生产者都有一个资源条件允许的确定的消费或生产,它也称为经济的资源配置.最优配置是指把消费者的效用函数和生产者的利润函数作为这些经济活动者的利益函数,状态是帕雷托最优的.新古典主义经济学的主要目标就是要论证:在每个经济活动者都追求自身的利益、市场完全竞争的条件下,将会达到资源最优配置的一般经济均衡.

经济资源配置(resource allocation of economy) 见"资源最优配置".

纯交换经济(pure exchange economy) 一种经济模型.即没有生产者的经济.在这种经济模型中,每个消费者都在市场上相互交换他们的初始持有的一部分或全部,以增加他们的效用.

埃奇沃思盒(Edgeworth box) 一种经济模型.即一个两人两商品的纯交换经济模型.英国经济学家埃奇沃思(Edgeworth,F.Y.)提出下列描述这种经济的模型.假定有两个消费者 A 与 B,A 有第一种商品 x 的量 a,B 有第二种商品 y 的量 b.他们各自又有他们的效用函数 $u_A(x,y)$ 和 $u_B(x,y)$.在二维商品空间的平面上,可以对 A 画出他的出发点 $(a,0)$ 和通过 $(a,0)$ 的 u_A 的无差别曲线;也可以对 B 画出他的出发点 $(0,b)$ 和通过 $(0,b)$ 的 u_B 的无差别曲线.假定两个效用函数都是光滑的单调拟凹函数,并且把第一张图颠倒过来,使 $(a,0)$ 与 $(0,b)$ 重合,那么四条坐标轴围成一个边长分别为 a 与 b 的矩形,而两条无差别曲线围成一个梭形.这就是埃奇沃思盒(如图).埃奇沃思盒中的每一点都可用来表示 A 与 B 的商品交换状态,即它的两个坐标系中的坐标分别代表 A 或 B 所占有的商品.两条无差别曲线所围成的梭形中的点对 A 和 B 而言都是效用增加的点.因此,这是双方都能接受的交换状态.任何一个由此出发还能画出无差别曲线围成的梭形的点,总能在梭形中找到对两者都更有利的点.只有到了如图中 α,β,γ 那样其上两条无差别曲线是相切的点,进一步交换将停止,因为不再有对两者都有利的点.这类点是帕雷托最优的,它们的全体称为合同曲线.合同曲线上的点是交换结束的点,但是其上的每个点对两者的效用增加程度是不一样的.α 是对 A 最有利的点,但对 B 来说,他的效用并无增加;β 的情况相反;γ 是使两者效用都有所增加的点.埃奇沃思盒可推广到一般情形.



合同曲线(contract curve) 埃奇沃思盒中所描述的两人两商品交换经济的帕雷托最优点的集合(不一定是全体).其一般情形的推广称为经济的核心(参见"埃奇沃思盒").

埃奇沃思猜想(Edgeworth conjecture) 关于瓦尔拉均衡与合同曲线在一定条件下重合的猜想.可以证明,对于纯交换经济的瓦尔拉均衡一定是帕雷托最优点.因而,瓦尔拉均衡一定在合同曲线上.但是合同曲线上的点不一定是瓦尔拉均衡,即它不一定能通过适当的价格体系来实现商品交换.埃奇沃思猜想,如果不断复制原有的经济,增加商品交换和竞争的机会,那么合同曲线就会不断缩小,最后与瓦尔拉均衡集重合.一般的埃奇沃思猜想于 1963 年被美籍法裔数学家德布罗(Debreu,G.)与美国学者斯卡夫(Scarf,H.E.)所证明.

复制经济(replica economies) 数理经济学的基本概念.指把原有的经济中的经济活动者都增加相同倍数所形成的经济.复制经济的思想是埃奇沃思(Edgeworth,F.Y.)首先提出的.这样做使得经济活动者的交易能力提高,以致会拒绝原先可以接受的交易活动.从而使合同曲线或经济的核心缩小,最终趋向于瓦尔拉均衡集.

经济的核心(core of economy) 合同曲线的推广.其最简单的模型可以是有 l 种商品、n 个消费者的纯交换经济.经济的核心定义为使每一消费者的效用都不减少帕雷托最优的资源配置(即消费者之间的一种商品交换)全体.用 n 人合作对策理论来讨论这一问题时,经济的核心恰好对应相应的对策的核心.

德布罗-斯卡夫定理(Debreu-Scarf's theorem) 埃奇沃思猜想推广的肯定回答.它指出,对于一个有任意种商品和任意种消费者的纯交换经济,其瓦尔拉均衡集包含在所有复制经济的核心中;并且当复制经济中的同样的经济的个数趋向于无限时,它的核心趋向于瓦尔拉均衡集.

经济的测度论模型(model of economy by means of measure theory) 一种经济模型.即用无原子测度空间来刻画具有大量经济活动者的经济的模型.这是 1964 年奥曼(Auncann,R.J.)首先这样做的.在这个模型中,奥曼证明,瓦尔拉均衡集与经

济的核心重合，从而不需要德布罗-斯卡夫定理中的极限过程.

经济的非标准分析模型(model of economy by means of nonstandard analysis)　一种经济模型. 即用非标准自然数来刻画具有大量经济活动者的经济的模型. 这是非标准分析的创始人美籍德国数学家鲁宾孙(Robinson,A.)与布朗(Brown,D.J.)为研究埃奇沃思猜想而提出的模型. 在非标准分析模型中，同样可以证明，瓦尔拉均衡集与经济的核心重合，而不需要德布罗-斯卡夫定理中的极限过程.

福利经济学基本定理(fundamental theorems of welfare economics)　论证一般经济均衡与帕雷托最优之间关系的定理. 福利经济学第一基本定理断言：对于纯交换经济的阿罗-德布罗一般经济均衡一定是帕雷托最优的. 福利经济学第二基本定理断言：对于纯交换经济的阿罗-德布罗模型的任何帕雷托最优资源配置，一定可适当改变初始持有，使它变为阿罗-德布罗一般经济均衡.

不完全市场(incomplete market)　一种带不确定性的一般经济均衡模型. 在阿罗-德布罗一般经济均衡模型中，美国学者阿罗(Arrow,K.J.)也曾引进过不确定性. 他把未来的可能有的不同状态下的商品看做不同的商品，从而通过扩大商品空间的维数把问题归结为经典情形. 但是这样的做法并没有考虑到不确定性的本质. 1972 年，美国学者拉德纳(Radner,R.)通过在阿罗-德布罗模型中引进金融资产，提出了不完全市场的模型. 从此开创了一个新的研究方向. 在拉德纳的纯交换经济模型中，对商品和消费者的定义仍与原来一样，但是有当前和未来两个时期，未来可能出现 S 种状态，从而把不同的状态的商品看做不同的商品，商品空间的维数变为 $l(S+1)$ 维，效用函数也变成 $l(S+1)$ 维空间上的函数. 同时，还引进 J 种资产，它在当前被消费者们交易，而在未来兑现为商品. 在这个模型中需要确定的一般均衡，不但有商品的配置和商品的价格，还有资产的交易价格. 这样的模型可以用来刻画许多宏观经济学和金融经济学的问题. 在一般经济均衡理论常用的条件下，如果 $J\geq S$，那么问题通常可以归结为阿罗-德布罗的经典情形来解决. 这时，市场称为是完全的. 如果 $J<S$，那么问题不可能归结为经典情形. 这时市场称为是不完全的. 1975 年，英国学者哈特(Hart,O.)指出，不完全市场不一定存在一般经济均衡. 1985 年，达菲(Duffie,D.)和夏佛(Shafer,W.)证明，“几乎所有”的不完全市场存在一般经济均衡，但是“几乎所有”的不完全市场的一般经济均衡不是帕雷托有效的，即福利经济学基本定理不成立. 这些研究成果打破了新古典主义经济学的传统. 不完全市场的一般经济均衡存在定理不再能归结为布劳威尔不动点定理，而需要一个格拉斯曼流形上的类不动点的存在定理. 达菲和夏佛为此应用了模 2 拓扑度理论. 以后的研究者又利用了代数拓扑、微分几何等工具.

完全市场(complete market)　见“不完全市场”.

正则经济(regular economy)　一种经济数学模型. 它是以微分拓扑作为工具，讨论阿罗-德布罗一般经济均衡模型的存在惟一性问题时引进的经济模型. 这方面的研究开始于 1970 年美籍法裔数学家德布罗(Debreu,G.)的论文《具有有限均衡集的经济》. 德布罗对纯交换经济情形的偏好附加一定条件后，使得超需映射变为光滑映射，再加上瓦尔拉法则，它就成为正单位球面 S_1(参见“价格单纯形”)上的光滑向量场. 一般经济均衡的存在因此可利用光滑向量场的零点存在定理庞加莱-霍夫定理来证明. 但是庞加莱-霍夫定理需要向量场的零点是非退化的，从而要求所讨论的经济有一定的正则性. 这种经济就称为正则经济. 利用萨特定理，德布罗指出几乎所有的经济是正则的，从而几乎所有的经济具有局部惟一的一般经济均衡.

社会福利函数(social welfare function)　福利经济学的基本概念. 它是由社会成员的效用函数或偏好来确定的社会的效用函数或偏好. 并认为所谓社会福利的增加就体现在社会福利函数的增值. 在以基数效用论为基础的旧福利经济学研究中，社会福利函数被定义为社会成员的效用函数的复合函数；但是在以序数效用论为基础的新福利经济学研究中，社会福利函数被定义为由社会成员的偏好来决定的社会的偏好，从而是一种决策规则. 例如，少数服从多数就是一种决策规则. 但是并非任何一种决策规则就能定义一个偏好(参见“投票悖论”). 社会福利函数也是社会选择理论研究的出发点.

投票悖论(voting paradox)　一种经济学悖论. 指出“少数服从多数”不能用来定义社会福利函数的著名论据. 其模型可叙述如下：假定在某一选区有三名候选人 A,B,C 让人们来选举，要求每一选民对这三名候选人排出自己心目中的顺序，然后，以决定这三名候选人的当选顺序. 结果三分之一的选民的顺序为 A,B,C；三分之一的选民的顺序为 B,C,A；三分之一的选民的顺序为 C,A,B. 这样就无法根据少数服从多数来决定这三名候选人之间的顺序. 投票悖论早在 18 世纪就有人研究. 它意味着研究由个体的决策来确定群体的决策的社会选择理论并非很简单.

阿罗不可能性定理(Arrow impossibility theorem)　社会选择理论的一条基本定理. 它指出一些

看来都很合理的决策原则其实是相互冲突的.设社会 S 上有 m 个成员.社会上出现的事件构成集合 X.每个成员都有自己的定义在 X 上的偏好 $\geq_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$.定义社会的偏好(参见"社会福利函数")为 $\geq_S=P(\geq_1,\geq_2,\cdots,\geq_m)$,其中 P 是某种规则.美国学者阿罗(Arrow,K.J.)指出,对于 P 来说,如果 $m>1$,X 的事件数大于2,那么下列四条原则不可能同时成立:

1.(无限制原则)对每一社会成员的偏好无任何限制.

2.(一致性原则)对于任何 $x,y\in X$,如果所有人都认为 x 优于 y,那么社会也认为 x 优于 y.

3.(独立性原则)对于任何 $x,y\in X$,P 所做出的偏好判断与 X 中的其他事件无关.

4.(非独裁原则)不存在任何社会成员,使得他的偏好就等于社会的偏好.尤其是符合前三条原则的社会福利函数一定就是"独裁规则"(一个人说了算);符合前两条原则的非独裁社会福利函数一定不满足独立性原则(两个事件间的顺序要依赖于第三者).

社会选择理论(theory of social choice) 研究由个体的决策来确定群体的决策的数学公理化理论.社会选择理论研究一方面起源于18世纪英国哲学家边沁(Bentham,J.)关于个人福利的规范研究以及后来的效用函数研究,它们的发展形成后来的所谓福利经济学;另一方面起源于18世纪的关于选举和委员会决策的数学理论.它所面临的问题有:委员会决策程序的选择;选举规则的确定;新独立国家宪法的起草;判断一个国家的政府是否已不代表人民利益;税收政策的选择;基于社区利益的规划;做出系统的社会福利判断;构造伦理上有意义的繁荣、贫穷或不平等的指标体系等.1950年,阿罗(Arrow,K.J.)证明的阿罗不可能性定理是对社会选择理论的划时代的贡献.

经济计量学

经济计量学(econometrics) 亦称计量经济学.经济学的一个分支.其主旨在于对经济理论加以实证研究,并对经济变量与经济变量之间的关系加以测量,进而利用统计学方法配合统计资料,对经济进行验证和测量.所以在经济计量学领域中,经济学、统计学和数学三方面是互相配合,不可偏废的.经济计量学形成于20世纪初."经济计量学"这一术语是挪威学者弗利希(Frisch,R.A.K.)于1926年仿照"生物计量学"(Biometrics)的名词结构创造出来的.1930年12月29日,弗利希与荷兰学者丁伯根(Tinbergen,J.)等人创立了经济计量学会(Econometric Society).1933年1月,该学会又创立了《Econometrica》杂志.丁伯根于1936年建立了荷兰经济的计量模型.初期的研究工作最具特色的就是把理论、统计与应用融合在一起而互相参证.1941年,挪威学者哈维尔莫(Haavelmo,T.)的论文《经济计量学中的概率方法》将概率方法引入了对经济行为的预测和对经济理论的验证.因此,该学科在第二次世界大战之后有很大发展.20世纪50年代以后,以美国学者克莱因(Klein,L.R.)为首的经济计量学家们使经济计量学从学院式的研究走向社会实践,研制了大量的经济模型,对国计民生的研究做出了贡献.近20年来,特别是1970年石油价格暴涨等原因,对过去在经济稳定情况下研制的宏观经济模型产生了质疑.这一切又促使在理论上进行更深的研究,这些内容包括:因果关系(causality)、外生性(exogeneity)的不同概念方面的贡献、非线性模型、非均衡模型、非正态扰动、非平稳时间序列、时变系数模型、小样本精确分布与经济计量学中的控制论方法等.经济计量学又可分为理论经济计量学和应用经济计量学.消费函数、投资函数、生产函数和各种宏观或微观经济计量模型的研制均属应用经济计量学范畴.

计量经济学(econometrics) 即"经济计量学".

宏观计量经济模型(macro-econometric model) 表达宏观经济行为的数学模型.模型中的经济变量包括国民生产总值、国民收入、总消费、总投资、政府支出、就业、物价水平、利率、国际收入差额及汇率等.方程中的参数则通过计量经济学的方法来确定.宏观计量经济模型的建立可追溯至1939年荷兰学者丁伯根(Tinbergen,J.)的美国景气循环模型,而研制最广泛的首推美国学者克莱因(Klein,L.R.).通过他们的努力与贡献,宏观计量经济模型早就成功地在计量经济学中占有重要的地位,成为目前风行国际的一种研究方法.大凡有关经济前景的预测、经济周期的分析、经济成长的模型以及经济政策的评定等,都可由这种分析方法来给出一定的解答.

克莱因模型(Klein model) 一种经济数学模型.是美国学者克莱因(Klein,L.R.)用来分析两次世界大战(1921—1941)期间美国经济的数学模型.该模型包括六个内生变量:国民生产总值(Y)、消费(C)、净投资(I)、私人部门的投资(W_P)、利润(π),以及年资本存量(K)和四个外生变量:政府非工资性支出(G)、公务员工资(W_G)、商品税(T)以及时间变量(t)等.变量间因果关系可以用流程图表示如下:由此可相应建立由下述六个方程表示的宏观模型:

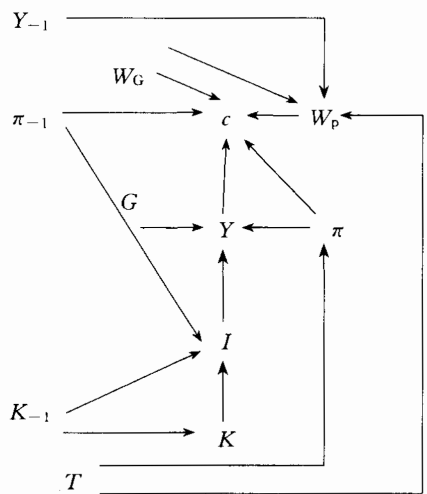
1. $C=16.29+0.8(W_P+W_G)+0.02\Pi$
   $+0.235\pi_{-1}$.
2. $I=17.78+0.23\Pi+0.546\Pi_{-1}-0.146K_{-1}$.

3. $W_P = 1.60 + 0.42(Y + T - W_G) + 0.164(Y + T - W_G)_{-1} + 0.135t.$

4. $Y = G + C + I.$

5. $\Pi = Y - W_P - T.$

6. $K = K_{-1} + I.$



此模型除可作分析之外，还可作政策评估及预测之用. 然而其预测能力较差，甚至逊于时间序列预测. 此模型最大缺陷为太简单，因而除了理论上的探讨外，其实证部分相反不太受重视. 经过修改后的克莱因-戈尔德贝格模型加大为 20 个内生变量. 这个中等模型的建立奠定了以后各种大模型的基石.

非均衡计量经济模型(econometric disequilibrium models)　一种经济数学模型. 指刻画非瓦尔拉均衡的经济系统中各经济变量之间关系的模型. 最简单的非均衡计量经济模型是：

$$D_t = x_{dt}\beta_d + \varepsilon_{dt},$$
$$S_t = x_{st}\beta_s + \varepsilon_{st},$$
$$Q_t = \min(D_t, S_t),$$

其中 D_t 是需求量，x_{dt}是需求变量的解释向量，β_d 是相应参数向量，ε_{dt}为需求扰动项；S_t, x_{st}, β_s 及 ε_{st}为供给量及其解释变量、参数及扰动项；并假设目前市场只能观测到需求量 D_t 和供给量 S_t 两者中的较小者 Q_t. D_t 和 S_t 本身是不可观测的(在均衡模型中设定 $Q_t = D_t = S_t$). 如果给定 ε_{dt}和 ε_{st}的联合概率密度，那么可导出 D_t 和 S_t 的联合密度 $g(D_t, S_t)$. 因此，Q_t 的概率密度为

$$h(Q_t) = \int_{Q_t}^{\infty} g(Q_t, S_t)\mathrm{d}S_t + \int_{Q_t}^{\infty} g(D_t, Q_t)\mathrm{d}D_t.$$

此时相应的似然函数为

$$L = \sum_{t=1}^{T} h(Q_t).$$

到目前为止，这个最简单的非均衡计量经济模型的参数 β_{dt}和 β_{st}的极大似然估计没有形式解，所以非均衡计量经济模型的研究与计量经济学中的计算方法有着密切的关系. 更复杂的非均衡计量经济模型还要考虑以下情形：

1. 假定价格是弹性的，则价格方程必与供求关系相联系.

2. 因为在宏观经济市场中，上述第三个方程未必满足，所以要考虑各个子市场情况.

3. 要考虑在宏观经济水平下多个非均衡市场的模型.

非线性计量经济模型(nonlinear econometric model)　一种经济数学模型. 指包含非线性函数的计量经济模型. 其通常的形式为

$$y_t = g(x_t, \theta) + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \cdots, T),$$

或更一般的

$$\phi(y_t, x_t, \theta) = \varepsilon_t \ (t = 1, 2, \cdots, T),$$

其中 x_t 是解释变量向量，y_t 是被解释变量向量，θ 是参数向量，g, ϕ 是非线性函数，扰动项 ε_t 是独立、同分布、均值为零的正态随机向量.

时变系数模型(models of time-varying coefficients)　一种经济数学模型. 系数随时间变化的计量经济模型. 时变系数模型的一般形式如下：

$$y_t B_t + x_t \Gamma_t = -\varepsilon_t^T \quad (t = 1, 2, \cdots, T),$$

其中 $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \cdots, y_{Gt})$是 G 个内生变量组成的行向量；x_t 是 k 个外生变量组成的行向量；随机扰动项 ε_t 与一般计量经济模型一样，被假定是服从正态分布的均值为零的随机向量，而且对于不同的 t 相互独立. 当 B_t 的对角元素 β_{jj}被规范化为 $\beta_{jjt} = -1$ 时，那么第 j 个结构方程可写为：

$$y_{jt} = y_{jt}^* \beta_{jt} + x_{jt}^* \gamma_{jt} + \varepsilon_{jt}, \qquad (1)$$

其中 y_{jt}^*是除 y_{it}之外出现在第 j 个方程中的内生变量的行向量；β_{jt}是第 j 个方程中未知系数的行向量，它由 B_t 的第 j 列中的元素构成；x_{jt}^* 与 γ_{jt}的定义完全类似. 令

$$z_{jt}^* = (y_{jt}^*, x_{jt}^*),$$
$$\delta_{jt} = (\beta_{jt}^T, \gamma_{jt}^T)^T.$$

则(1)式可改写为

$$y_{jt} = z_{jt}^* \delta_{jt} + \varepsilon_{jt} \ (t = 1, 2, \cdots, T)$$

又设

$$\begin{pmatrix} \delta_{1t} \\ \delta_{2t} \\ \vdots \\ \delta_{Gt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1,t-1} \\ \delta_{2,t-2} \\ \vdots \\ \delta_{G,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \vdots \\ \eta_{Gt} \end{pmatrix}$$

其中 $M_1, M_2, \cdots, M_G$ 是未知的参数矩阵，η_{jt}是 k_j 维的相互独立的、均值为零的正态随机误差. 这种时变系数模型也可推广到非线性联立方程情形.

理性预期模型(rational expectation model)　一种经济数学模型. 指根据当事人的理想预期来构造的计量经济模型. 经济当事人的行为取决于他们

设想的那些决定性经济变量的值,即当事人的预期.在经济学中,假设:当事人根据当前所能掌握的全部信息所做出的预期与由计量经济模型导出的相应经济变量的数学期望相同,就称为理性预期假设.在理性预期假设下,引入了变量的预期值的计量经济模型就是理性预期模型.许多理性预期模型可归结为

$$y_t^* - (\rho_1 + \rho_2) + \rho_1\rho_2 y_{t-1} = x_t,$$

其中 t 取整数,x_t 与 y_t 为纯量随机过程,ρ_1 与 ρ_2 是实数,y_t^* 是当事人以直至时间 t 末所获得的全部信息为依据做出的 y 的预测.

线性回归模型(linear regression model) 常用的一维计量经济模型.被解释变量 y 和解释变量 X 的线性回归模型是

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

其中 y 是 n 维的,X 是 $n\times k$ 已知矩阵,β 是 k 维未知参数,ε 为 n 维随机扰动.一般的线性回归模型有如下基本假设:

1. 扰动项均值为零,亦即 $\mathbf{E}\varepsilon=0$.

2. 扰动项 ε 的分量 ε_i 的方差与 i 无关,即 $\mathbf{E}\varepsilon_i^2=\sigma^2$,这里 $\sigma>0$ 为常数.

3. 扰动项 ε 的各分量彼此无关,即

$$\mathbf{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad (i\neq j).$$

4. ε 的概率分布与自变量 X 及参数 β 无关.

有时还进一步假设扰动项服从正态分布,即 $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I)$.在经济计量学中,将进一步研究:

1. 异方差性:$\mathbf{E}\varepsilon_i^2=\sigma_i^2$ 不全相等.

2. 自相关性:扰动项是相关的,即

$$\mathbf{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j)\neq 0 \quad (i\neq j).$$

3. 观测误差:矩阵 X 是带有误差的.

线性联立方程模型(linear simultaneous equation models) 常用的高维计量经济模型.一般线性回归模型

$$y_t = \sum_{i=1}^{k}\beta_j x_{tj} + \varepsilon \quad (t=1,2,\cdots,T)$$

中 x 对 y 是单向因果关系,而有的模型中变量之间存在着相互依存的双向因果关系,系统只有用一组相依方程形成的联立方程组才能刻画出这些量之间的关系,这样的方程组称为线性联立方程模型.线性联立方程一般写为

$$\begin{cases} y_{t1}\beta_{11}+\cdots+y_{tGx}\beta_{G1}+x_{t1}\Gamma_{11}+\cdots+x_{tk}\Gamma_{k1}=\varepsilon_{t1} \\ y_{t1}\beta_{12}+\cdots+y_{tGx}\beta_{G2}+x_{t1}\Gamma_{12}+\cdots+x_{tk}\Gamma_{k2}=\varepsilon_{t2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{t1}\beta_{1G}+\cdots+y_{tGx}\beta_{GG}+x_{t1}\Gamma_{1G}+\cdots+x_{tk}\Gamma_{kG}=\varepsilon_{tG} \end{cases}$$

用矩阵形式可记为

$$Y_tB + X_t\Gamma = \varepsilon_t, \tag{1}$$

其中 $Y_t=(y_{t1},y_{t2},\cdots,y_{tG})$,$X_t=(x_{t1},x_{t2},\cdots,x_{tk})$,$\varepsilon_t=(\varepsilon_{t1},\varepsilon_{t2},\cdots,\varepsilon_{tG})$ 为扰动向量,$B=(\beta_{ij})_{G\times G}$,$\Gamma=(\Gamma_{ij})_{k\times G}$,$Var(\varepsilon_t^T)=\sum$.人们称(1)为结构式,而把参数矩阵$(B,\Gamma,\sigma)$称为结构式参数矩阵.

结构式参数矩阵(structural parametric matrix) 见"线性联立方程模型".

简约式(reduced form) 线性联立方程的一种表示式.在联立方程模型

$$Y_tB + X_t\Gamma = \varepsilon_t \tag{1}$$

中设系数矩阵 B 可逆,扰动项的协方差阵为$\sum$,则模型(1)可化为

$$Y_t = -X_t\Gamma B^{-1} \equiv X_t\Pi + V_t, \tag{2}$$

其中 $\Pi=-\Gamma B^{-1}$,$V_t=\varepsilon_t B^{-1}$ 为扰动项,其协方差阵为 $B^{-1T}\sum B^{-1}$.称(2)为联立方程(1)的简约式,相应的模型(1)称为结构式,矩阵(Π,Ω)称为简约式参数矩阵,$(B,\Gamma,\sum)$称为结构式参数矩阵.

简约式参数矩阵(reduced parametric matrix) 见"简约式".

单一方程技术(single equation methods) 亦称有限信息方法.解联立方程模型的一种方法.单一方程技术是指对联立方程某一方程系数的估计方法.它不同于单个回归方程的估计.在联立方程 $YB+XT=\varepsilon$ 中设其第 i 个方程可识别,并已规范化为

$$y_i = Y_i\beta_i + X_i\gamma_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

其中 y_i 是 Y 的第 i 列,由第 i 个内生变量的 T 个观测值组成;Y_i 由包含在第 i 个方程中的其余内生变量的观测值所组成;X_i 由包含在第 i 个方程中的前定变量的观测值所组成;β_i 和 γ_i 表示相应的结构系数列向量.人们可用某些方法对(1)中的 β_i 和 γ_i 做出估计,对每一个方程逐一估计出系数,最终估计出模型的所有参数.常见的单一方程技术有间接最小二乘法(ILS)、工具变量法(IV)、二阶段最小二乘法(2LS)、有限信息极大似然估计(LIML)及 k 类估计.

有限信息方法(limited-information methods) 即"单一方程技术".

联立方程技术(simultaneous equation methods) 亦称系统估计方法、完全信息估计方法.解联立方程模型的一种方法.它是指对整个联立方程模型中所有结构参数同时进行估计的方法.常见的系统估计方法有三阶段最小二乘法(3LS)、完全信息极大似然法(FIML)等.

系统估计方法(system estimation methods) 即"联立方程技术".

完全信息估计方法(perfect information estimation methods) 即"联立方程技术".

内生变量(endogenous variables) 计量经济学术语.指计量经济模型中的因变量.在联立方程模型

$$Y_tB+X_t\Gamma=\varepsilon_t \quad (t=1,2,\cdots,T)$$

中，形式上 Y_t 表示内生变量，它与扰动项无关. 当模型中的参数 B,Γ 被估计出来以后，如果给定外生变量的值，则可通过求解联立方程得出内生变量的估计值. 内生变量是由所研究的经济系统所确定的，它不仅影响所研究的经济系统，而且也受系统的影响.

外生变量(exogenous variables) 计量经济学术语. 指计量经济模型中的自变量. 在联立方程模型

$$Y_tB+X_t\Gamma=\varepsilon_t \quad (t=1,2,\cdots,T)$$

中，形式上 X_t 表示外生变量，它与扰动项无关. 外生变量是由经济系统以外的因素所确定的，它的变化影响系统的变化.

前定变量(predetermined variables) 计量经济学术语. 指决定计量经济模型当前状态的变量. 考虑动态模型

$$\sum_{j=0}^{p}B_jY_{t-j}+\sum_{l=0}^{q}\Gamma_lX_{t-l}=\varepsilon_t,$$

其中 Y_t 为内生变量，X_t 为外生变量；Y_{t-j}为滞后内生变量，X_{t-1}为滞后外生变量. 其中有一些变量在系统内部时刻影响着内生变量的变动，而其值已在系统外部确定或由系统在过去确定，这些变量就是前定变量. 前定变量包括外生变量 X_t、滞后外生变量 X_{t-l}、滞后内生变量 Y_{t-j}.

模型识别(identification of model) 根据数据确定模型参数的问题. 在联立方程模型

$$Y_tB+X_t\Gamma=\varepsilon_t \tag{1}$$

中，$(B,\Gamma,\sum)$为其结构参数矩阵，扰动项 ε_t 的协方差阵为$\sum$. 设 B 可逆，(1)的简化型方程为

$$Y_t=X_t\Pi+V_t, \tag{2}$$

其中 $\Pi=-\Gamma B^{-1},V_t=\varepsilon_tB^{-1}$，记 $\Omega=B^{-1T}\sum B^{-1}$. 如果已知方程(2)中 Π 和 Ω 的值，那么在对 B,Γ 给出一定约束的情况下，能否从(Π,Ω)惟一地推断出模型(1)中的结构参数$(B,\Gamma,\sum)$的值就是模型识别问题. 如果能惟一确定，则称模型可识别. 如果不能惟一确定，则称模型不可识别. 在结构方程中如果第 i 个方程的系数：β_{ji}及 $\gamma_{li}(j=1,2,\cdots,G,i=1,2,\cdots,k)$能被惟一确定，则称第 i 个方程可识别；否则称第 i 个方程不可识别. 由于 $\Omega=B^{-1T}\sum B^{-1}$，所以一般情况下只考虑 B,Γ 能否惟一确定.

识别条件(identification condition) 模型可确定参数的条件. 在联立方程模型

$$Y_tB+X_t\Gamma=\varepsilon_t \ (t=1,2,\cdots,T) \tag{1}$$

中，考虑某一方程的识别问题(不妨考虑第一个方程). 规范化第一个方程后，记 G_1 为第一个结构方程中内生变量个数，K_1 为第一个结构方程中外生变量个数，$p_1=(G-G_1)+(k-k_1)$，则第一个方程可识别的阶条件是：$p_1\geqslant G-1$. 把联立方程模型简化型 $Y_t=X_t\Pi+V_t$ 中的系数阵 Π，划去前面 k_1 行和最后 $G-G_1$ 列，得到的子矩阵记为 Π_{21}，则第一个方程可识别的秩条件(充分必要条件)为：秩$(\Pi_{21})=G_1-1$.

当 $p_1<G-1$ 时，则第一个方程不足识别；

当 $p_1=G-1$ 且秩条件满足时，称第一个方程恰好识别；

当 $p_1>G-1$ 且秩条件满足时，称第一个方程过度识别；第一个方程可识别共有过度识别和恰好识别两种情形. 如果联立方程中每一个方程可识别，则称模型可识别.

不足识别(underidentified) 见“识别条件”.

恰好识别(exactly identified) 见“识别条件”.

过度识别(overidentified) 见“识别条件”.

允许矩阵(allowable matrix) 计算经济学术语. 指可简化联立方程模型的一种矩阵. 考虑联立方程

$$Y_tB+X_t\Gamma=\varepsilon_t \ (t=1,2,\cdots,T), \tag{1}$$

其结构参数$(B,\Gamma,\sum)$中系数矩阵 $A=(B,\Gamma)$是受约束的(参见“模型识别”与“识别条件”). 如果存在可逆矩阵 F 使得

$$\Gamma^*=\Gamma F,\ B^*=BF,\ \varepsilon_t^*=\varepsilon_tF,\ \sum{}^*=F^T\sum F,$$

且使模型

$$Y_tB^*+X_t\Gamma^*=\varepsilon^*$$

的系数矩阵 $A^*=(B^*,\Gamma^*)$与 $A=(B,\Gamma)$所受的约束条件相同，则称 F 为允许矩阵. 模型(1)在给定的约束下是可识别的，当且仅当其允许矩阵 F 为单位阵；模型的第 j 个方程是可识别的，当且仅当其允许矩阵 F 的第 j 列除第 j 个元素为 1 外，其余元素均为零.

观测等价(observational equivalence) 计量经济学术语. 指不同模型间的一种等价关系. 考虑模型

$$Y_tB+X_t\Gamma=\varepsilon_t, \tag{1}$$

$$Y_tB^*+X_t\Gamma^*=\varepsilon_t^*. \tag{2}$$

如果存在一个可逆矩阵 F，使得

$$B^*=BF,\ \Gamma^*=\Gamma F\sum{}^*=F^T\sum F,$$

则称模型(1)和(2)是观测等价的. 观测等价的统计意义是上述两个模型中的 Y_t 有相同的概率分布. 一般说来，模型(1)中的 B 和$\sum$是受约束的. 在此约束下，如果模型只是自身观测等价，则该模型是可识别的.

工具变量(instrumental variable) 计量经济学术语. 指为处理模型中的相关性而引入的辅助变量. 给定模型

$$Y=X\beta+\varepsilon,$$

其中扰动项与解释变量相关，即 $\mathrm{plim}(n^{-1}X^T\varepsilon)\neq0$，但 ε 满足其余的线性模型基本假设. 这时，OLS 估计就失去了其优良特性. 为了得到 β 的无偏相容估

计，需要找一个代理变量 W 代替 X，使之满足：

1. $\text{plim}(n^{-1}W^TX)=P$，$P$ 非奇异.

2. $\text{plim}(n^{-1}W^TW)=Q$，$Q$ 非奇异.

3. $\text{plim}(n^{-1}W^T\varepsilon)=0$，即 W 与 ε 不相关.

这种 W 就称为工具变量.

$$\hat{\beta}_{IV}=(W^TX)^{-1}W^TY$$

是 β 的相容估计.

间接最小二乘法(indirect least-square method) 一种单一方程技术. 考虑模型

$$Y_tB+X_t\Gamma=\varepsilon_t\quad(t=1,2,\cdots,T),\tag{1}$$

不妨假设第一个方程恰好识别，并且已规范化，则用OLS方法可得到模型(1)的简化型

$$Y_t=X_t\Pi+V_t\quad(t=1,2,\cdots,T),$$

参数矩阵 Π 的估计 $\hat{\Pi}$ 是 Π 的最优无偏估计量. 既然第一个方程可识别，则

$$\Pi\begin{pmatrix}\beta_1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\gamma_1\\0\end{pmatrix}.$$

其中 β_1 为出现在第一个方程中的 G_1 个内生变量的系数所组成的 G_1 维向量，γ_1 为出现在第一个方程中的 k_1 个外生变量的系数组成的 k_1 维向量. 如果剖分

$$\Pi=\begin{pmatrix}\pi_{11}&\pi_{12}\\\pi_{21}&\pi_{22}\end{pmatrix},$$

其中 π_{11}是 $k_1\times G_1$ 矩阵，则有

$$\pi_{11}\beta_1=-\gamma_1,\quad\pi_{21}\beta_1=0.$$

由于第一个方程是可识别的，亦即秩$(\pi_{21})=G_1-1$，所以由 $\hat{\pi}_{21}\hat{\beta}_1=0$ 可得 β_1 的估计. 再代入

$$\hat{\pi}_{11}\hat{\beta}_1=-\gamma_1$$

即可得到 γ_1 的估计. 这些估计都是真值的最优无偏估计. 如果整个模型(1)是可识别的，则可用上述方法得到全部参数的估计.

二阶段最小二乘法(two-stage least square methods) 简称 ZLS 法. 一种单一方程技术. 设有联立方程

$$YB+X\Gamma=\varepsilon,$$

不妨考虑它的第一个方程(已规范化且可识别)

$$y_1=w\delta+\varepsilon_1,\tag{1}$$

其中

$$w=(Y_1,X_1),\delta=\begin{pmatrix}\beta_1\\y_1\end{pmatrix},$$

并且假设

$$\text{plim}n^{-1}\begin{bmatrix}Y_1^TX(X^TX)^{-1}X^TY_1 & Y_1^TX_1\\X_1^TY_1 & X^{T1}X_1\end{bmatrix}=P,$$

P 非奇异. 人们用 X 对 Y_1 的 OLS 估计量

$$\hat{Y}_1=X(X^TX)^{-1}X^TY_1$$

来代替 Y_1 得到 $\hat{w}=(\hat{Y}_1,X_1)$，然后用 $\hat{w}$ 代替方程(1)中的 w，再一次用 OLS 方法估计 δ，得

$$\hat{\delta}_{2LS}=(w^Tw)^{-1}\hat{w}^TY_1.$$

这就是 $\delta=(\beta_1^T\gamma_1^T)^T$ 的二阶段最小二乘法. 可证 $\hat{\delta}_{2LS}$ 是 δ 的相容估计. 二阶段最小二乘法可用 IV 估计来解释，也可解释为 GLS 估计，而是 k 类估计的特例.

有限信息极大似然估计量(limited-information maximum likelihood estimators) 简称 LIML 估计量. 一种单一方程技术. 不妨考虑模型 $YB+X\Gamma=\varepsilon$ 的第一个结构方程

$$y_1=Y_1\beta_1+X_1\gamma_1+\varepsilon_1,$$

亦即

$$Y_1^0\beta_1^0=X_1\gamma_1+\varepsilon_1,\tag{1}$$

其中

$$Y_1^0=(y_1,Y_1),\beta_1^0=\begin{pmatrix}1\\-\beta_1\end{pmatrix}.$$

对应于上述结构式的内生变量 Y_1^0 的简约式为

$$Y_1^0=X_1\pi_{11}+X_1^*\pi_{21}+\gamma,\tag{2}$$

其中 $X=(X_1X_1^*)$. 结构式的内生变量 Y_1^0 的简约式为

$$\pi_{11}\beta_1^0=-\gamma_1,\quad\pi_{21}\beta_1^0=0.\tag{3}$$

假设 γ 的各行独立且均服从分布 $N(0,\Omega)$，则 Y_1^0 的似然函数为

$$L(Y_1^0)=-\frac{n}{2}\ln[\det\Omega]-\frac{1}{2}\text{tr}[\Omega^{-1}(Y_1^{0^T}-\pi_{11}^TX_1^T-\pi_{21}^TX_1^{*T})(Y_1^0-X_1\pi_{11}-X_1^*\pi_{21})].$$

在约束(3)下极大化 $L(Y_1^0)$，则求 LIML 估计归结为求下述行列式方程

$$\det(Y_1^{0^T}M_1Y_1^0-\mu Y_1^{0^T}MY_1^0)=0$$

的最小根 μ_0 和据此求解下述方程组

$$(Y_1^{0^T}M_1Y_1^0-\mu_0Y_1^{0^T}MY_1^0)\beta_1^0=0.$$

如此解出的 $\hat{\beta}_1^0$ 就是 β_1^0 的 LIML 估计，然后再用(1)式进行回归就可得到 γ_1 的 LIML 估计

$$\hat{\gamma}_1=(X_1^TX_1)^{-1}X_1^TY_1^T\hat{\beta}_1^0.$$

***k* 类估计方法**(k-class methods of estimation) 一种单一方程估计方法. 它是由塞尔(Theil, H.)提出的. 设联立方程模型 $YB+X\Gamma=\varepsilon$ 的第一个结构方程(可识别且已规范化)为

$$y_1=Y_1\beta_1+X_1\gamma_1+\varepsilon_1.\tag{1}$$

如果要对它进行参数估计，那么需考虑如下方程

$$\begin{bmatrix}Y_1^TY-k\hat{V}_1^T\hat{V}_1 & Y_1^TX_1\\X_1^TY_1 & X_1^TX\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}(Y_1^T-k\hat{V}_1^T)y_1\\X_1^Ty_1\end{bmatrix}$$

其中 k 为常量，$\hat{V}_1=[I-X(X^TX)^{-1}X^T]Y_1$. 求解该方程就得到(1)的 k 类估计. 当 $k=0$ 时，k 类估计就是 OLS 估计；$k=1$ 时为 2LS 估计；当 k 是某矩阵的最小特征值时，它就是 LIML 估计.

充分信息极大似然估计量(full-information maximum likelihood estimators) 简称 FIML 估计

量.用整个模型系统的似然函数达到最大来估计所有系统参数的方法.考虑模型

$$YB+X\Gamma=\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon\sim N(0,I\otimes\sum)$,则 Y 的密度函数为

$$P\left(Y;B,\Gamma,\sum\right)=(2\pi)^{-\frac{nG}{2}}|\det B|^{n}\det$$

$$\cdot\sum{}^{-\frac{n}{2}}e^{\mathrm{tr}[-\frac{1}{2}\sum^{-1}(B^TY^T+\Gamma^TX^T)(YB+X\Gamma)]},$$

其似然函数为

$$L\left(Y;B,\Gamma,\sum\right)$$

$$=c+n\log|\det B|-\frac{n}{2}\log\det\sum$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sum{}^{-1}(B^TY^T+\Gamma^TX^T)(YB+X\Gamma)],$$

其中 c 为常数.为了极大化 L,根据极值原理,则有

$$\frac{n}{2}\sum-\frac{1}{2}(B^TY^T+\Gamma^TX^T)(YB+X\Gamma)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial B}=nB^{-1^T}-Y^T(YB+X\Gamma)\sum{}^{-1}0\doteq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\Gamma}=-X^T(YB+X\Gamma)\sum{}^{-1}\doteq 0,$$

其中≐表示只是令 L 对 B 和 Γ 的未知元素的偏导数为零.求解上述非线性方程组得到的 B 和 Γ 的估计就是 FIML 估计.

三阶段最小二乘法(three-stage least square methods) 简称 3LS 法.把整个模型中所有参数放在一起进行估计的一种方法.设模型

$$YB+X\Gamma=\varepsilon,\ \varepsilon\sim N\left(0,I\otimes\sum\right)$$

的 G 个方程均可识别并且已规范化:

$$y_i=z_i\delta_i+\varepsilon_i\ (i=1,2,\cdots,G),\qquad(1)$$

其中 $\delta_i=(\beta_i^T,\gamma_i^T)$,$z_i=(Y_i,X_i)$.对(1)式两边都左乘 X^T,可以得到

$$y=\begin{pmatrix}X^TY_1\\X^TY_2\\\vdots\\X^T\ y_G\end{pmatrix}=w\delta+u,\qquad(2)$$

其中 $\delta=(\delta_1^T,\delta_2^T,\cdots,\delta_G^T)^T$,$w=\mathrm{diag}(X_{z1}^T,X_{z2}^T,X_{zG}{}^T)$,$u=(\varepsilon_1^TX,\varepsilon_2{}^TX,\cdots,\varepsilon_G{}^TX)^T$.因为

$$V=\mathrm{Var}(u)=\sum\otimes(X^TX),$$

故必须用 GLS 方法来估计 δ;但$\sum$是未知的,为此,3LS 方法的前两步就是用 2LS 方法求出 δ 的 2LS 估计 δ_{2LS},再利用它求出残差 e_j,从而得到$\sum$的估计 $\hat{\Sigma}$,亦即:

$$\hat{\Sigma}=(\hat{\sigma}_{ij}),\quad\hat{\sigma}_{ij}=\frac{1}{T}e_i^Te_j,$$

其中 $e_l=y_l-\hat{z}_l(\hat{z}_l^T\hat{z}_l)^{-1}\hat{z}_l^Ty_l$,$\hat{z}_l=X(X^TX)^{-1}X_{z_l}^T$.记 $\hat{V}=\hat{\Sigma}\otimes(X^TX)$.则 3LS 方法的第三步就是对(2)式运用 GLS 方法求出 3LS 估计:

$$\hat{\delta}_{3LS}=(w^T\hat{V}^{-1}w)^{-1}w^TV^{-1}y.$$

可以证明当模型恰好识别且 $\sigma_{ij}=0(i\neq j)$时,3LS 估计等价于 2LS 估计,但 3LS 估计比 2LS 估计更为渐近有效.

多重共线性(multicollinearity) 联立方程间的一种不独立性.对于模型

$$y=X\beta+\varepsilon,$$

多重共线性就是指解释变量之间存在着如下的线性关系:

1. $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_kX_k=0$,亦即 $\det(X^TX)=0$.或者

2. $\det X^TX$ 接近于零,亦即 X^TX 有一个或几个接近于零的特征值.

其中 X_i 是 X 的第 i 列($i=1,2,\cdots,k$).情况 1 称为严格多重共线性;情况 2 称为近似多重共线性.当出现多重共线性时,参数估计的可信度极低,以致无论在经济结构分析还是在预测时采用这样的模型都很不妥.所以多重共线性的检测和多重共线性情况下的估计将很重要.

严格多重共线性(perfect collinearity) 见“多重共线性”.

近似多重共线性(near collinearity) 见“多重共线性”.

多重共线性的后果(effects of multicollinearity) 由多重共线性引起的问题.考虑模型

$$y=X\beta+\varepsilon,\qquad(1)$$

其中 $\mathbf{E}\varepsilon=\sigma^2I$.当模型(1)存在严格多重共线性时,$X^TX$ 不满秩,正规方程$(X^TX)\hat{\beta}=X^TY$ 无解.

当模型(1)存在近似多重共线性时,有

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)=\frac{\sigma^2}{\mathrm{TSS}_i(1-R_i^2)},$$

其中 TSS_i 是 X 的第 i 列对其余 $k-1$ 列进行回归的总平方和,R_i^2 为 X 的第 i 列与其余 $k-1$ 列的多重相关系数.当 $R_i\approx1$,即 X 的第 i 列与其余列高度相关时,参数估计的方差将变得极大,后果将是:

1. 很小的数据变化可能引起参数估计的巨大变化.

2. 由于标准误差增大使得有关的总体参数的置信区间更大,从而样本数据可能与各种不同的假设相容,所以接受错误假设的可能性增大.

多重共线性的检测(detection of multicollinearity) 借助方差概念确定回归模型中变量具有线性关系的一种检验方法.考虑模型

$$y=X\beta+\varepsilon,\qquad(1)$$

其中 $\mathbf{E}\varepsilon=\sigma^2I$.对(1)式回归得到(参见“多重共线性的后果”)

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)=\frac{\sigma^2}{\mathrm{TSS}_i(1-R_i^2)}.$$

则多重共线性的一种简单的检测方法就是利用 $\hat{\beta}i$ 的方差扩大因子，即通过

$$\mathrm{VIF}(\hat{\beta}_i)=\frac{1}{1-R^2}$$

来检测. 通常当 $\mathrm{VIF}(\hat{\beta}_i)>10$ 时，就认为 X 的第 i 列同其余变量列之间存在多重共线性. 多重共线性还可用别的方法来检测，比如可以利用解释变量之间的简单相关系数，$\det(X^TX)$ 以及不包含某一解释变量时对解释变量进行回归时的可决系数来检验.

多重共线性的校正（remedies in multicol-linearity） 消除回归模型中变量之间的线性关系，确定模型中参数的方法. 重点介绍主分量方法. 考虑模型

$$y = X\beta + \varepsilon. \qquad (1)$$

设正交阵 P 使得 $P^T(X^TX)P=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$，这里 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k\geqslant 0$. 设 m 为其中最小特征值的个数，剖分 $P=(P_1,P_2)$，P_1 为 $k\times(k-m)$ 阵，P_2 为 $k\times m$ 阵. 当模型中的解释变数之间存在多重共线性时，不妨假设 (X^TX) 的最小的 m 个特征值近似为零. 因为 $XP_2=0$，所以模型(1)变为

$$y=(XP_1)(P_1^T\beta)+\varepsilon.$$

令 $\alpha=P_1^T\beta$，则上式变为

$$y=(XP_1)\alpha_1+\varepsilon,$$

其中 XP_1 就称为 X 的主分量. 此时 α_1 的 OLS 估计为 $\hat{\alpha}_1=(P_1^TX^TXP_1)^{-1}P_1^TXY$，然后令 $\hat{\beta}=P_1\hat{\alpha}_1$ 就得到模型(1)的参数估计. 除了上述主分量方法之外，还有岭回归方法、逐步回归方法等.

异方差性（heteroscedasticity） 计量经济学术语. 指回归模型中扰动项的方差不全相等. 假设线性回归模型 $y=X\beta+\varepsilon$ 中，扰动项 ε 的分量 ε_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是均值为零，彼此独立的，但 $\mathrm{Var}(\varepsilon_i)=\sigma_i^2$ 不全相等，在这种情况下，OLS 估计虽然具有无偏性和一致性，却不是最优线性无偏估计. 因此在预测时，$\hat{Y}_{OLS}$ 波动较大. 为此，在应用 OLS 方法之前要对模型的异方差性进行检验，并设法消除异方差性.

格雷索检验（Glejser's test） 线性回归模型中扰动项方差齐性的一种检验方法. 对模型

$$y_t=x_t\beta+\varepsilon_t \quad (t=1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

提出零假设

$$H_0:\mathrm{Var}(\varepsilon_1)=\cdots=\mathrm{Var}(\varepsilon_n)$$

及相应的备择假设：

$$H_1:\mathrm{Var}(\varepsilon_t)\text{不全相等}$$

$(t=1,2,\cdots,n)$. 检测方法是：先对模型(1)用 OLS 方法求得残差 e_t $(t=1,2,\cdots,n)$，然后采用下述的一些函数形式：

$$|e_t|=\beta_1x_t+\gamma_t, \qquad |e_t|=\beta_1\sqrt{x_t}+\gamma_t,$$

$$|e_t|=\beta_1\cdot\frac{1}{x_t}+\gamma_t, \qquad |e_t|=\beta_0+\beta_1x_t+\gamma_t,$$

其中 γ_t 为扰动项. 对 β_1 用 t 统计量进行显著性检验. 如果 β_1 显著不为零，则拒绝零假设；如果 β_1 显著为零，接受零假设.

高尔德费德-匡德检验（Goldfeld-Quandt's test） 线性回归模型中扰动项方差齐性的一种检验方法. 考虑模型

$$y = X\beta + \varepsilon, \qquad (1)$$

其中 $\mathbf{E}\varepsilon=0$，$\mathrm{Var}(\varepsilon)=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)$. 设原假设为

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_n^2;$$

相应备择假设为

$$H_1:\sigma_i^2 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

不全相等. 如果模型(1)中存在异方差性，则其异方差性可能由某一个解释变量引起，不妨设该变量为第一个解释变量 X_1，且方差随 X_1 递增(或递减). 这样高尔德费德-匡德检验步骤应为：首先，把第一个解释变量的观测值按大小顺序排列，并使相应的被解释变量同解释变量的对应关系不变. 然后，去掉中间 $c=[n/4]$ 个观测值，并把剩下的 $n-c$ 个值分成大小相等的两个子样本. 其中一个子样本包含第一个解释变量的较大观测值部分，另一个则包括第一个解释变量的较小观测值部分. 最后，对每个子样本分别进行回归，求出各自的残差平方和：$\sum e_{i_1}^2$ 和 $\sum e_{i_2}^2$，它们的自由度均为 $n-c/2-k$. 于是用服从分布

$$F\left(\frac{n-c}{2}-k,\frac{n-c}{2}-k\right)$$

的统计量

$$F=\frac{\sum e_{i_2}^2}{\frac{n-c}{2}-k}\Bigg/\frac{\sum e_{i_1}^2}{\frac{n-c}{2}-k}=\frac{\sum e_{i_2}^2}{\sum e_{i_1}^2}$$

来检验 H_0 即可.

等级相关检验（test of coefficient of rank correlation） 线性回归模型中扰动项方差齐性的一种检验方法. 它是由斯皮尔曼(Spearman, C.)提出的. 考虑模型

$$y_t = X_t\beta + \varepsilon_t \quad (t = 1,2,\cdots,n), \qquad (1)$$

其中 β 为未知变量，ε_t 为扰动项. 对扰动项提出原假设 $\{H_0:\varepsilon_t$ 同方差$\}$ 和相应备择假设 $\{H:\varepsilon_t$ 异方差$\}$. 则检验 H_0 的斯皮尔曼等级相关检验的步骤如下：首先对模型(1)用 OLS 方法求出残差 e_i $(i=1,2,\cdots,n)$. 然后按递增(或递减)顺序评定 $|e_i|$ 和 x_{ij} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的等级 $r_e(i)$ 和 $r_j(i)$ ($|e_i|$ 和 x_{ij} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的等级 $r_e(i)$ 和 $r_j(i)$ 是指把序列 $|e_1|,|e_2|,\cdots,|e_n|$ 和序列 $x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj}$ 分别依递增(或递减)顺序重新排列后 $|e_i|$ 和 x_{ij} 的序数号. 计算 x_{ij} 和 $|e_i|$ 的等级相关系数

$$r_{ej}=1-\frac{b\sum_{i=1}^{n}d_{ij}^2}{n^3-n} \quad (j=1,2,\cdots,k),$$

其中 $d_{ij}=r_e(i)-r_j(i)$. 最后利用在 H_0 假设下服从分布 t_{n-2} 的统计量

$$t_{ej}=\frac{r_{ej}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{ej}}}$$

来对 H_0 进行检验：给定显著水平 α，有临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}$，若存在 j（j 为 1 与 k 间的整数）使得 $t_{ej}>t_{\frac{\alpha}{2}}$，则拒绝 H_0；若对 1 与 k 之间的一切整数 j 均有 $t_{ej}>t_{\frac{\alpha}{2}}$，则接受 H_0.

异方差性消除（remove heteroscedasticity） 计量经济学术语. 指借助于对 σ_i^2 作一些特定的合理假定将原来的回归模型变成能满足同方差性假设的模型. 例如，假设模型为

$$y_t = X_t\beta + \varepsilon_t \ \ (t=1,2,\cdots,n), \qquad (1)$$

其中 $\mathbf{E}\varepsilon=0$，$\mathrm{Var}(\varepsilon)=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)$，且

$$\sigma_i^2=f(X_t)\sigma^2,$$

其中 σ^2 为未知有限常数，$f(\cdot)$ 为已知，$f(X_t)>0$. 令

$$\widetilde{Y}_t=\frac{Y_t}{\sqrt{X_t}},\widetilde{X}_t=\frac{X_t}{\sqrt{f(X_t)}},\tilde{\varepsilon}_t=\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{f(X_t)}},$$

则模型(1)变为

$$\tilde{y}_t=\widetilde{X}_t\beta+\tilde{\varepsilon}_t \ \ (t=1,2,\cdots,n).$$

因为有 $\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon})=\sigma^2 I$，这就消除了异方差性.

自相关扰动（autocorrelated disturbances） 计量经济学的基本概念. 对扰动项均值为零的回归模型

$$y_t=X_t\beta+\varepsilon_t \ \ (t=1,2,\cdots,n),$$

存在整数 $\tau\neq 0$ 及 1 与 n 之间的整数 t 使

$$\mathbf{E}(\varepsilon_{t+\tau}\varepsilon_t)=\gamma_\tau \ \ (t=1,2,\cdots,n)$$

与 t 取值无关.

在经济计量学中一般仅讨论三种典型的具有自相关扰动的模型，即 AR 模型、MA 模型和 ARMA 模型.

自相关扰动的检验（test for autocorrelated disturbances） 确定回归模中扰动项自相关的方法. 考虑模型

$$y_t=X_t\beta+\varepsilon_t \ \ (t=1,2,\cdots,T),$$

设其扰动项为 ARMA(p,q) 过程，即

$$\varepsilon_t=\phi_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+\phi_p\varepsilon_{t-p}+u_t+\theta_1 u_{t-1}+\cdots+\theta_1 u_{t-q},$$

其中 u_t 是均值为零的独立同分布的扰动. 则对原假设 $H_0:\phi_1=\phi_2=\cdots=\phi_p=\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_q=0$ 及相应的备择假设 $H_1:\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q$ 不全为零. 进行的检验就称为自相关扰动的检验. 常见的自相关扰动的检验有杜宾-沃森（Durbin-Watson）检验、冯·诺伊曼比检验、英国数学家沃利斯（Wallis, J.）四阶自回归检验及勃雷希-戈德夫雷（Breush-Godfrey）检验等.

沃利斯四阶自回归检验（Wallis test for fourth-order autocorrelation） 自相关扰动的一种检验方法. 设模型为

$$y_t=X_t\beta+\varepsilon_t \ \ (t=1,2,\cdots,n), \qquad (1)$$

其中扰动项 $\varepsilon_t=\phi_4\varepsilon_{t-4}+u_t$ 是均值为零、独立同分布的扰动. 对原假设 $H_0:\phi_4\neq 0$，可用统计量

$$d_4=\sum\nolimits_{t=5}^{n}(e_t-e_{t-4})^2\Big/\sum\nolimits_{t=1}^{n}e^2$$

进行检验，其中 e_t 是对模型(1)进行线性回归得到的残差. 在给定显著性水平下，可以得到临界值 $d_{4,L}$ 及 $d_{4,U}$，则：

1. 当 $d<d_{4,L}$ 或 $d>4-d_{4,L}$ 时，拒绝 H_0.
2. 当 $d_{4,L}<d<4-d_{4,L}$ 时，接受 H_0.
3. 当 $d_{4,L}\leqslant d\leqslant d_{4,U}$ 或 $4-d_{4,U}\leqslant d\leqslant 4-d_{4,L}$ 时不确定.

冯·诺伊曼比检验（von Neumann ration test） 自相关扰动的一种检验方法. 考虑具有一阶自相关扰动的模型

$$y_t = X_t\beta + \varepsilon_t \ \ (t=1,2,\cdots,n), \qquad (1)$$

其中 $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$，$u_t$ $(t=1,2,\cdots,n)$，是均值为零、独立同分布的随机变量，且 $u_t\sim\mathbf{N}(0,\sigma^2)$. 检验原假设 $H_0:\rho=0$ 及相应的备择假设 $H_1:\rho\neq 0$. 可用的统计量为冯·诺伊曼比，即

$$\frac{\delta^2}{s^2}=\frac{\sum\nolimits_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{n-1}\Big/\frac{\sum\nolimits_{t=1}^{n}e_t^2}{n}$$

中 e_t 是对模型(1)进行回归的残差. 当 n 很大时（$n\geqslant 30$），δ^2/s^2 近似服从正态分布

$$N\left(\frac{2n}{2n-1},\frac{4n^2(n-2)}{(n+1)(n-1)^3}\right).$$

据此可以对 H_0 进行检验. 需要注意的是：

1. 冯·诺伊曼比与杜宾-沃森 d-统计量的比较：

$$\frac{\delta^2}{s^2}=\frac{n}{n-1}d,$$

但是 δ^2/s^2 统计量是在 $u_t\sim N(0,\sigma^2)$ 的假设下应用的.

2. 在更一般的情况下，用前 l 个观测值估计出 $\hat{\beta}$，算出后 $n-1$ 个 y_t 的估计残差

$$y_t-\hat{y}_t=e_t \ \ (t=l+1,1+2,\cdots,n),$$

利用冯·诺伊曼比

$$\frac{\delta^2}{s^2}=\frac{\dfrac{\sum\nolimits_{t=l+2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{n-l-1}}{\dfrac{\sum\nolimits_{t=l+1}^{n}(e_t-\bar{e})^2}{n-l}}$$

来检验 H_0，这里

$$\bar{e}=\frac{\sum\limits_{t=l+1}^{n}e_t}{n-l},$$

$\hat{\delta}^2/s^2$ 近似服从

$$N\left(\frac{2(n-l)}{n-l-1},\frac{4(n-1)^2(n-l-2)}{(n-l-1)(m-l-1)^3}\right)$$

分布.

杜宾-沃森检验(Durbin-Watson test) 简称DW检验.检测是否存在自相关的一种方法.假定回归模型:

1. 包括一个截距项.
2. 解释变量是非随机的.
3. 解释变量中不包括应变量的滞后值.
4. 扰动项由一阶自回归形式 $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$ 生成,其中 u_t 均值为零且独立同分布.

不妨设对满足上述假设的模型进行回归得到的残差为 $e_t(t=1,2,\cdots,n;n$ 为观测个数),则对原假设 $H_0:\rho=0$ 及相应备择假设 $H_1:\rho\neq0$ 进行显著性检验的统计量为

$$d=\sum_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2\Big/\sum_{t=1}^{n}e_t^2.$$

该统计量称为杜宾-沃森统计量.在给定显著性水平下得到一个上限 d_U 和一个下限 d_L.由此可以进行如下DW检验:

1. 如果 $d>4-d_L$ 或 $d<d_L$,拒绝 H_0.
2. 如果 $d_U<d<4-d_U$,接受 H_0.
3. 如果 $d_L<d<d_U$ 或 $4-d_U<d<4-d_L$,不确定.

杜宾-沃森检验的缺点是如果 d 落在 d_L 与 d_U 之间或 $4-d_U$ 与 $4-d_L$ 之间时,就无法断定是否存在自相关,而且为得到 d_L 和 d_U 而去查有关表格时,至少要有15个观测值.

杜宾-沃森统计量(Durbin-Watson statistic) 见"杜宾-沃森检验".

含有自相关扰动的估计(estimation with auto-correlated disturbances) 具有自相关扰动的回归模型中对模型中参数进行估值.设在模型

$$y_t=X_t\beta+\varepsilon_t\ \ (t=1,2,\cdots,n)$$

中 ε_t 是具有自相关的扰动,则对参数 β 的估计主要分两种情况去考虑:

1. $\varepsilon_t=L(D)\varepsilon_t+u_t$,其中 $L(D)$ 已知,D 为滞后算子,u_t 为具有零均值的独立同分布扰动.

2. $\varepsilon_t=L(D)\varepsilon_t+u_t$,其中 $L(D)$ 未知,如情况1中所假定.在情况1下,模型变为:

$$y_t-L(D)y_t=(X_t-L(D)X_t)\beta+u_t,$$

用OLS方法即可得到 β 的估计量 $\hat{\beta}$.在情况2下,一般先估计出 $L(D)$ 的系数,然后化为情况1求 β 的估计.常见的 ε_t 为ARI过程,即 $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$,$u_t$ 为具有零均值的独立同分布的扰动.对 ρ 的估计常见的有二步杜宾-沃森法、柯奇兰-奥尔克特方法等.

柯奇兰-奥尔克特估计方法(Cochrane-Orcutt's method of estimation) 自相关扰动为ARI过程中参数估值的一种方法.考虑模型

$$y_t=X_t\beta+\varepsilon_t\ \ (t=1,2,\cdots,n),\qquad(1)$$

其中 $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$,$-1<\rho<1$,$u_t$ 为具有零均值的独立同分布扰动,β,ρ 为未知参数.柯奇兰-奥尔克特方法如下:

1. 对模型(1)式用OLS方法求出残差 e_t,对关系式

$$e_t=\rho e_{t-1}+v_t\ \ (v_t\text{ 为扰动项})$$

用OLS方法求得 ρ 的估计量

$$\hat{\rho}=\sum_{t=2}^{n}e_te_{t-1}\Big/\sum_{t=2}^{n}e_{t-1}^2.$$

2. 对差分方程

$$y_t=\hat{\rho}y_{t-1}=(X_t-\hat{\rho}X_{t-1})\beta+w_t$$

进行回归得到残差 e_t^* 再求 ρ 的第二阶段估计,即对关系式

$$e_t^*=\rho e_{t-1}^*+v_t^*,$$

用OLS方法得

$$\hat{\rho}=\sum_{t=2}^{n}e_t^*e_{t-1}^*\Big/\sum_{t=2}^{n}e_{t-1}^{*\,2}.$$

3. 重复方法2的过程,直到 ρ 的诸此估计没有显著差异为止,把最后得出的结果作为 ρ 的估计.

二步杜宾-沃森估计方法(two-step Durbin-Watson's method) 自相关回归模型中参数估值的一种方法.考虑模型

$$y_t=X_t\beta+\varepsilon_t\ \ (t=1,2,\cdots,n),$$

其中 $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$,$u_t$ 为具有零均值的独立同分布扰动,β 与 ρ 为未知参数.对 ρ 和 β 的估计方法如下:

1. 先用OLS方法求得残差 e_t,并求出杜宾-沃森统计量

$$d=\sum_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2\Big/\sum_{t=1}^{n}e_t^2,$$

在大样本情况下,取 ρ 的估计为 $\hat{\rho}=1-d/2$;在小样本情况下,ρ 的估计为

$$\hat{\rho}=\frac{n^2\left(1-\dfrac{d}{2}\right)k^2}{n^2-k^2}.$$

2. 对方差方程

$$y_t-\hat{\rho}y_{t-1}=(X_t-\hat{\rho}X\,t-1)\rho+u_t$$

用OLS方法可得 β 的估计量 $\hat{\beta}$.

滞后变量(lagged variables) 计量经济学术语.指相对于本期值的前期值.在实际经济关系中,经济行为不只受本期因素的影响,而且在很大程度上受前期因素的影响.若 X_t 为 t 本期的值,那么 $X_{t-1},X_{t-2},\cdots$ 均为滞后变量.一般的动态模型有如下形式:

$$\sum_{r=0}^{p}Y_{t-r}B_r+\sum_{l=0}^{q}X_{t-l}\Gamma_l=\varepsilon_t,$$

其中 $Y_{t-r}(r=1,2,\cdots,p)$ 为滞后内生变量,$X_{t-l}(l=$

$1,2,\cdots,q$)为滞后外生变量.滞后内生变量和滞后外生变量统称滞后变量.

滞后外生变量(lagged exogenous variables) 见"滞后变量".

滞后内生变量(lagged endogenous variables) 见"滞后变量".

分布滞后模型(distributed lag model) 含有滞后变量的线性模型.比如模型

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{s} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t \quad (t = s+1,\cdots,n),$$

其中 y 是被解释变量,x 是解释变量,扰动项 ε_t 满足线性模型基本假设.这个模型说明,经济被解释变量不但受经济解释变量本期值的影响,而且还受滞后值的影响.该模型就称为分布滞后模型.在分布滞后模型中,还可以出现被解释变量的滞后值.

柯依克模型(Koyck model) 亦称几何滞后模型.一种分布滞后模型.设原模型只包括滞后解释变量

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s x_{t-s} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

其中 ε_t 满足线性模型基本假设.如果模型(1)的滞后系数满足如下约束条件:

$$\beta_i = \lambda^i \beta_0 \quad (i = 0,1,\cdots,0 < \lambda < 1), \tag{2}$$

则称模型(1)为柯依克模型.约束条件(2)说明解释变量较近期值对 y 的影响大于较远期值对 y 的影响,而且滞后系数按几何级数递减.注意到柯依克模型中只有三个参数 α_0,β_0 及 λ,为了估计它们,把模型变化为

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \beta_0 x_t + (1-\lambda)\alpha_o + (\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}).$$

遗憾的是该模型的扰动项不满足线性模型基本假设,所以柯依克模型的参数估计需专门讨论.

几何滞后模型(geometric lag model) 即"柯依克模型".

阿勒芒模型(Almon's model) 分布滞后模型中估计参数的一种方法.考虑模型

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_s x_{t-s} \quad (t = s+1,\cdots,n). \tag{1}$$

因为滞后常常带来严重多重共线性,针对这个问题,一般的方法就是对模型(1)中的 $\beta_i(i=0,1,\cdots,s)$作一些假设,减少待估参数.根据外尔斯特拉斯定理:闭区间上的连续函数可被适当阶的多项式在整个区间上充分逼近,阿勒芒(Almon,S.)提出如下假设

$$\beta_i = f(i) \quad (i = 0,1,\cdots,s), \tag{2}$$

其中 $f(\cdot)$为 $r(<s)$阶多项式:$f(z)=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_r z^r$.在假设(2)下对模型(1)用 OLS 方法可得 $a=(\alpha,\alpha_0,\cdots,\alpha_r)$的估计 $a=(\hat\alpha,\hat\alpha_0,\cdots,\hat\alpha_r)$,从而根据假设(2)可得 $\beta=(\alpha,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_s)^T$ 的估计 $\hat\beta$.如果令

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{s+1} & \cdots & x_1 \\ 1 & x_{s+2} & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_{n-s} \end{pmatrix},$$

$$Y = (y_{s+1}, y_{s+2}, \cdots, y_n)^T,$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & z & z^2 & \cdots & z^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & s & s^2 & \cdots & s^r \end{pmatrix}.$$

则 $$\hat{a} = (H^T X^T X H)^{-1} H^T X^T Y,$$

$$\hat\beta = H(H^T X^T X H)^{-1} H^T X^T Y.$$

局部调整模型(partial adjustment model) 假设被解释变量的实际变化只有预定变化一部分的模型.假定被解释变量的预期值(最优值)而不是实际值依赖于解释变量

$$y_t^* = \alpha_0 + \beta_0 x_t, \tag{1}$$

其中 y_t^* 为被解释变量的第 t 期预期值,x_t 是解释变量.由于 y_t^* 是不可观测的,因此对解释变量(1)假设

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{2}$$

亦即被解释变量的实际变化只是预定变化的一部分.由解释变量(1)及假设(2)经过适当变化可得:

$$y_t = (1-\lambda)y_{t-1} + \alpha_0\lambda + \beta_0\lambda_{x_t} + \varepsilon_t.$$

这个模型的优点是可以假设 ε_t 满足线性模型基本假设.

自适应性预期模型(adaptive expectation model) 其中被解释变量不是依赖于解释变量的实际值,而是它的预期值的模型.设 y 是被解释变量,x 为解释变量,x_t 为本期观测值,x_t^* 为 t 期末形成的 x 的预期值(以当事人直到 t 期末获得的信息为依据),自适应性预期模型写为

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t^* + \varepsilon_t. \tag{1}$$

因为 x_t^* 是不可观测的,一般对(1)提出的自适应性期望假设

$$x_t^* - x_{t-1}^* = \lambda(x_t - x_{t-1}^*) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

亦即假设预期值逐期调整,每期的调整都是本期观测值与预期值之差的一部分.经过适当变化,自适应性预期模型变为

$$y_t = \lambda\alpha_0 + \beta_0\lambda x_t + (1-\lambda)y_{t-1} + [\varepsilon_t - (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}],$$

形式上与柯依克模型相同.

观测误差(errors in observations) 观察值与实际值的差.设线性模型

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{1}$$

中 y 及 X 的真值是不可观测的,也就是说,只能用其可观测值 y^* 及 X^* 分别作为 y 及 X 的近似,于是

$$y^* = y + \delta, \ X^* = X + \phi.$$

一般假定 $\mathbf{E}\delta = 0$, $\mathbf{E}\phi = 0$, $\text{plim}n^{-1}\phi^T\phi = Q\phi$, $\text{plim}n^{-1}\phi^T X = 0$, $\text{plim}n^{-1}\phi^T Y = 0$, $\text{plim}n^{-1}\phi^T \varepsilon = 0$, $\text{plim}n^{-1}\phi^T\delta = 0$, $\text{plim}n^{-1}X^T\delta = 0$ 及 $\text{plim}n^{-1}X^TX = Q$. 由于模型(1)中变量带有观测误差,则其 OLS 估计 $\hat{\beta}_{OLS}$ 不是一致估计;实际上

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{OLS} &= (X^{*T}X^*)^{-1}X^*y^* \\ &= (n^{-1}X^{*T}X^*)^{-1}(n^{-1}X^{*T}X)\beta \\ &\quad + (n^{-1}X^{*T}X^*)^{-1}n^{-1}X^*(\varepsilon+\delta).\end{aligned}$$

在上述假设下

$$\text{plim}\hat{\beta}_{OLS} = \beta - (Q + Q\phi)^{-1}Q\phi\beta.$$

邹至庄检验(Chow's Test) 两个线性回归方程相应系数之相等性的检验. 设有两个模型,表示为

$$y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon_1, Y_2 = X_2 = \beta_2 + \varepsilon_2.$$

检验零假设 $H_0: \beta_1 = \beta_2$,及相应的备择假设 $H_1: \beta_1 \neq \beta_2$,令

$$y = (y_1^T, y_2^T)^T, \ X = \text{diag}(X_1, X_2),$$
$$\varepsilon = (\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T), \quad \beta = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T.$$

则上述模型为

$$y = X\beta + \varepsilon.$$

所以 H_0 亦即 $H_0': R\beta = 0$,其中 $R = [I, -I]$. 对这个模型用一般线性假设检验的 F 统计量就可导出邹至庄检验中的 F 统计量

$$F = \frac{A - B}{k} \Big/ \frac{B}{n_1 + n_2 - 2k},$$

其中 $A = e^{*T}e^*$, $B = e^Te$,这里 e^* 为在 $R\beta = 0$ 的假设下对模型 $y = X\beta + \varepsilon$ 进行回归的残差;而 e 是无约束情况下对 $y = X\beta + \varepsilon$ 进行回归的残差. 这种检验也可以推广到多个回归方程系数相等性的检验.

因果关系(causality) 两个时间序列间的关系. 这是指动态模型中有两个时间序列 $x = \{x_t\}$ 和 $y = \{y_t\}$:利用 x 和 y 的过去值来预测 y_t 比只用 y 的过去值来预测 y_t 所产生的预测误差小,即

$$\sigma^2(y_t \mid y_{t-k}, k > 0) \geqslant \sigma^2 (y_t \mid y_{t-k}, x_{t-k}, k > 0),$$

就称 x 是 y 的原因. 西蒙斯(Sims, C.)关于不存在因果关系的定理可作为检验因果关系的依据,这个定理指出,x 不是 y 的原因的充分必要条件为:在

$$x_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

中有 $v_i = 0 \ (i < 0)$,其中假定 ε_t 是独立同分布均值为零的扰动项,x 与 y 为平稳序列.

因果关系的检验(test of causality) 动态模型中,发现两序列具有因果关系的一种方法. 一般考虑 x_t 关于 $\{y_t\}$ 的回归式

$$x_t = v + \sum_{i=-M}^{N} v_i y_{t-i} + \varepsilon_t.$$

则检验 x 不是 y 的原因相当于对原假设 $H_0: v_i = 0 (i = -1, -2, \cdots, -M)$ 及相应的备择假设 $H_1: v_i \neq 0 (i = -1, -2, \cdots, -M)$ 进行检验. 在假设 H_0 成立的情况下,根据 T 组观测值 $x_t, y_t (t = 1, 2, \cdots, T)$,可得统计量

$$F = \frac{SSE - SSR}{M} \Big/ \frac{SSE}{T - (N+2)},$$

其中 SSE 是模型

$$x_t = \bar{v} + \sum_{i=0}^{N} v_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

的回归残差平方和,而 SSR 是模型

$$x_t = \bar{v} + \sum_{i=-M}^{N} v_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

的回归残差平方和. 由于上述统计量 F 服从自由度为 $(M, T-(N+2))$ 的 F 分布,所以如果给定显著性水平 α,当 $F > F_\alpha(M, T-(N+2))$ 的拒绝 H_0,即认为 x 是 y 的原因.

截面分析(cross-section analysis) 只借助某一时刻经济变量的观察值对经济现象进行研究的一种方法. 在经济计量学中,实验分析所关切的是建立变量之间的关系. 就短期观点而言,有两种资源被用作实证分析,即截面资料与时间序列资料. 截面资料为某一时刻的变量观测值,而时间序列则为涵盖某些时期的变量观测值. 目前重视两种资料混合使用,以克服一些特殊困难. 截面资料的观测对象一般是基本的个体,例如企业或消费者;时间序列的观测对象则是以总体为主. 实际上,由于资料形态与加总水平的影响,这两种资料所得的结果也因而有差异. 一些已使用截面资料进行分析的经济领域有:恩格尔曲线(Engel's Curve)的估计、消费函数的估计、生产函数的估计以及投资函数的估计等.

虚拟变量(dummy variable) 亦称哑变量. 计量经济学术语. 指取值为 0 或 1 的变量,这种变量可用来刻画事物的性质属性(如性别、婚姻状况、民族、季度及月份等项目). 如果一个模型,除含有 k 个通常的变量外,还含有刻画 m 种属性(项目)的虚拟变量,其中第 j 个项目含有 r_j 个类(即项目处于 r_j 种不同状态),

$$r = \sum_{j=1}^{m} r_j.$$

这样,模型中要有 r 个虚拟变量,所有虚拟变量记为 $\delta_t(k, p), (k = 1, 2, \cdots, m, 1 \leqslant p \leqslant r_k)$,并且

$$\delta_t(k, p) = \begin{cases} 1, & t \text{ 时刻 } k \text{ 项目处于 } p \text{ 状态}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 k 代表第 k 个项目,p 代表第 k 个项目的第 p 个状态. 这样整个模型可用数学表达式写成:

$$\begin{aligned} y_t = {} & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + b_{11}\delta_t(1,1) + \cdots \\ & + b_{1,r_1}\delta_t(1, r_1) + \cdots + b_{m,1}\delta_{m,1} + \cdots \end{aligned}$$

$$+b_{m,r_m}\delta_t(m,r_m)+\varepsilon_t \quad (t=1,2,\cdots,n), \qquad (1)$$

其中 ε_t 为扰动项. 如果记:

$$D=\begin{bmatrix} \delta_1(1,1) & \cdots & \delta_1(1,r_1) & \cdots & \delta_1(m,1) & \cdots & \delta_1(m,r_m) \\ \delta_2(1,1) & \cdots & \delta_2(1,r_1) & \cdots & \delta_2(m,1) & \cdots & \delta_2(m,r_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_n(1,1) & \cdots & \delta_n(1,r_1) & \cdots & \delta_n(m,1) & \cdots & \delta_n(m,r_m) \end{bmatrix}$$

$\chi=(I,X,D)$,

$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,

$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)^T$,

$\beta=(\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k,b_{11},\cdots,b_{1,r_1},\cdots,b_{m,1},\cdots,b_{m,r_m})^T$

其中

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

则模型(1)可写成 $y=\chi\beta+\varepsilon$. 因为其中的虚拟变量存在多重共线性,所以通常划去 D 中每个项目的第1列,然后再对 β 进行估计.

哑变量(dumb variable) 即"虚拟变量".

投入产出分析

投入产出分析(input-output analysis) 亦称投入产出技术、投入产出方法、部门联系平衡法和产业关联法. 通常是指以电子计算机为计算手段,借助数学模型,研究经济系统(大至整个世界,小至某个企业)内部各产品部门(纯部门)之间,在错综复杂、穿梭往来的经济活动中投入和产出间数量依存关系的一种科学的管理方法. 投入是指从事某项经济活动的消耗;产出则是指经济活动的最终成果. 如果经济活动是生产活动,那么投入表现为对一定数量的原材料、燃料和动力等的消耗;产出就是生产活动完结时一定数量的产品. 由于工艺技术、人员素质和管理水平的原因,投入和产出间存在着确定的数量依存关系,也就是消耗掉的物质数量和生产出来的最终产品数量之间具有一定的比例关系. 这种数量依存关系是经济活动的十分重要的因素. 投入产出分析是由美籍俄裔经济学家列昂节夫(Leontief,W.)于20世纪30年代首先提出来的. 列昂节夫吸收了法国数理经济学家瓦尔拉(Walras,L.)用一组数学方程建立经济体系均衡的数学模型的思想,又受到20世纪20年代苏联中央统计局编制国民经济平衡表的结构和已发现产品间存在着间接消耗关系的影响,1936年,他首次在哈佛大学的《经济与统计评论》上发表了有关投入产出方面的论文"美国经济系统中投入产出数量关系",在公开的文献中这是第一次出现"投入产出"一词. 1941年又出版了他的《美国经济结构1919—1929》一书,书中详细地论述了投入产出分析的基本内容. 1953年,列昂节夫等人合写的《美国经济结构研究》进一步完善了投入产出分析的理论基础,被视为投入产出分析的经典著作. 与此同时,列昂节夫还亲自实践,参与编制了美国许多年度的投入产出表. 由于列昂节夫的杰出贡献,他荣获1973年第五届诺贝尔经济学奖.

在第二次世界大战之间,投入产出分析并没有引起美国政府和各国经济学家的重视,但在第二次世界大战时和战后,由于美国和西方国家加强了对经济活动的干预和控制,这就迫切需要有一套计量准确、管理科学的经济的方法,于是投入产出分析,逐渐引起了美国和许多国家的重视. 到目前为止,全世界已有近百个国家编制了投入产出表,1968年,联合国社会经济部正式推荐把投入产出表作为其会员国的"国民经济核算体系"的一个组成部分. 1974—1976年间,中国试编了第一张1973年全国性实物型投入产出表,1980年,山西省编制了中国第一张1979年地区性实物型投入产出表和价值型投入产出表.

投入产出技术(input-output techniques) 即"投入产出分析".

投入产出方法(method of input-output) 即"投入产出分析".

投入(input) 投入产出分析的基本的概念之一. 指某个系统在一定时期内从事某经济活动过程中的消耗. 假如经济活动是生产活动,那么投入就表现为生产过程中消耗掉的一定数量的原材料、燃料、动力和劳力等,也就是消耗掉一定数量的资金.

产出(output) 投入产出分析的基本概念之一. 指某个系统在一定时期内从事某经济活动的最终成果. 如果经济活动是生产劳动,那么产出就体现为在生产完结时,一定数量的具有一定使用价值的产品集合,用价值表示也即这个系统的总产值.

投入产出表(input-output table) 投入产出理论的核心部分. 是指能够简明扼要而且直观形象地展示一个经济系统内各产品部门(纯部门)中所有投入的来源和各种产出去向的棋盘式的矩形表. 投入产出表以计量单位的不同分为两大类:为价值型投入产出表和实物型投入产出表.

价值型投入产出表由四部分组成:

第一部分,称为部门间流量部分,表示系统内产品部门之间中间产品的消耗情况,这一部分横行上的产品部门与纵列上的产品部门一一对应;

第二部分,称为最终产品部分,表示各产品部门在一定时期内向全社会能够提供的最终产品的情况. 最终产品一般又划分为固定资产更新、消费、积累和净出口;

第三部分，称为净产值和折旧部分，是第一部分向下的延伸，表示各产品部门在一定时期内折旧、劳动报酬和社会纯收入的情况；

第四部分，称为再分配和最终使用部分，这一部分情况复杂，还没有形成完整的理论.

实物型投入产出表只有第一、第二两部分，没有第三、第四部分. 由于以实物作为计量单位，因此，实物型投入产出表在列上不能加总. 价值型投入产出表以货币作为统一的计量单位，它可以在列上加总. 但是价值型投入产出表中的各部分内容受价格变动的影响，而实物型投入产出表却不受价格的影响. 投入产出表实质上是从计划经济的国家中国民经济综合平衡的棋盘式表上逐渐演变而来的. 最早提出投入产出表的是美籍俄裔经济学家列昂节夫(Leontief, W.).

静态价值型投入产出表(货币单位)

投入＼产出		中间产品 1	2	…	n	合计	最终产品 消费	积累	合计	总产品
物质消耗	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}				y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}			*II*	y_2	x_2
	⋮	…	…	*I*	…				⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}				y_n	x_n
合计										
折旧										
新创造价值	劳动报酬	v_1	v_2	…	v_n					
			III					*IV*		
	社会纯收入	v_1	v_2	…	v_n					
总产值		x_1	x_2	…	x_n					

静态实物型投入产出表(实物单位)

产品名称	中间产品 1	2	…	n	合计	最终产品 固定资产更新大修理	积累	消费	净出口	合计	总产品
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}						y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}			*II*			y_2	x_2
⋮	…	…	*I*	…						⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}						y_n	x_n

价值型投入产出表(input-output table for value)　见"投入产出表".

实物型投入产出表(input-output table for real products)　见"投入产出表".

中间产品(intermediate products)　总产品的一部分. 指在一定时期内留在生产领域中尚需加工的作为生产过程中间消耗的产品. 中间产品位于投入产出表中的第一部分中，即流动部分.

最终产品(final products)　总产品的一部分. 指在一定时期内退出生产领域不参加本期生产周期而供社会最终使用的产品. 它一般包括四部分：固定资产更新大修理、消费、积累和净出口. 最终产品位于投入产出表中的第二部分.

最终产品列向量(column vector of final products)　投入产出分析术语. 指一定时期经济系统内各部门向全社会提供的最终产品数量组成的列向量. 最终产品列向量记为 $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，其中 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 个产品部门提供的最终产品量.

总产品(total products)　亦称总产出. 经济系统的一个总量指标. 指一定时期内经济系统内部各产品部门提供的中间产品量与最终产品量的总和.

总产出(total output)　即"总产品".

总产品列向量(column vector of total products)　亦称总产出向量. 投入产出分析术语. 指由经济系统内各产品部门一定时期提供的总产品数量组成的列向量. 总产品列向量记为 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，其中 x_i 是第 i 个产品部门的总产品数量($i=1,2,\cdots,n$).

总产出向量(vector of total output)　即"总产品列向量".

部门间流量(inter-sectors flow)　投入产出表的第一部分的内容. 指生产过程中产品部门之间生产产品需要消耗的中间产品的数量，用 $x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 记之. 它表示第 j 个产品部门在一定时期内需要消耗第 i 个产品部门产品的数量或者是第 i 个产品部门在一定时期内分配给第 j 个产品部门用作中间产品的数量. 部门间流量从数量上反映了产品部门之间在生产中的相互关系，是生产活动中的一个重要的经济数量. 它由生产技术和管理水平等因素确定. 如果 x_{ij} 比较大，说明 i, j 这两个部门联系紧密；反之则联系松弛. 如果 x_{ij} 等于零，则表明这两个部门在生产上没有关系.

流量矩阵(flow matrix)　投入产出分析术语. 指以部门间流量 $x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 作为元素的矩阵. 记为

$$X=(x_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

其中阶数 n 表示经济系统内部产品部门的总数.

直接消耗系数(direct consumption coefficient)　亦称直接投入系数、技术系数和生产消耗定额. 一个重要的经济投入指标. 是指产品部门生产一个单位的产品对另一个产品部门产品的消耗量. 直接消耗系数记为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，计算公式为 $a_{ij}=x_{ij}/$

x_j，其中 x_{ij}表示第 i,j 两个部门间的流量，x_j 表示第 j 个部门的总产品量．直接消耗系数取决于产品部门的工艺技术水平、管理经营水平、部门的有机构成和产品的结构以及产品相对价格变动等因素．直接消耗系数的大小反映部门间的经济联系的紧密程度．一般而言，直接消耗系数越大，两部门联系越紧；反之则联系松弛．以价值单位（货币单位）计量的直接消耗系数是不名数，而以实物单位计量的直接消耗系数一般带名数同时不受产品价格变动的影响．

直接投入系数（direct input coefficient） 即"直接消耗系数"．

技术系数（technical coefficients） 即"直接消耗系数"．

生产消耗定额（consumption quota of products） 即"直接消耗系数"．

直接消耗系数矩阵（direct consumption coefficient matrix） 投入产出分析术语．指由直接消耗系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$为元素所组成的矩阵．记为

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 n 是经济系统内产品部门的总数．矩阵 A 中的元素非负．对价值型的直接消耗系数，A 每列的和小于 1，第 j 列的和

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

表示第 j 个产品部门一个货币单位的总产品中，消耗掉的中间产品所占的比重．或者是说第 j 个产品部门一个货币单位的总产品中，由中间产品构成的数量．

间接消耗系数（indirect consumption coefficient） 一个重要的经济投入指标．产品部门之间间接经济生产联系的一种数量表征．是指某产品部门生产一个单位的最终产品通过消耗中间产品对另一部门产品的消耗量．比如炼钢需要直接消耗电能，而炼钢还需要其他辅助机械设备和原料，制造这些机械设备、生产这些原料也需要直接消耗电能，对电的此种消耗称为钢对电能的间接消耗．第 j 个产品部门通过 k 种中间产品对第 i 种产品的第 k 次间接消耗系数的计算公式是

$$\sum_{t_1=1}^{n}\sum_{t_2=1}^{n}\cdots\sum_{t_k=1}^{n} a_{it_1}a_{t_1t_2}\cdots a_{t_kj},$$

其中 n 是产品部门的总数，$a_{it_1},a_{t_1t_2},\cdots,a_{t_kj}$是直接消耗系数．

间接消耗系数概念的明确提出，可以说是整个投入产出分析理论最本质的东西，也是投入产出理论有别于在它之前经济管理理论的主要特色．列昂节夫（Leontief，W．）提出间接消耗系数概念之后，不仅使人们对蛛网般关系错综复杂的产品部门的直接经济联系有了深入的了解，特别重要的是对它们之间千丝万缕的间接经济联系第一次有了全面清晰的认识，从而为从全局上、宏观上掌握经济系统提供了坚实可靠的理论基础和行为方法．

完全消耗系数（total consumption coefficient） 一个重要的经济投入指标．指产品部门生产一个单位最终产品，直接和所有间接地对另一部门产品的消耗量，即直接消耗系数与所有间接消耗系数的总和．第 j 个产品部门对第 i 种产品的完全消耗系数用 b_{ij}表示，计算公式是

$$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{s=1}^{n}a_{is}a_{sj}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{is}a_{sk}a_{kj}$$
$$+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{it}a_{ts}a_{sk}a_{kj}+\cdots$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n).$$

式中右边第一项是第 j 个部门对第 i 种产品的直接消耗系数，第二项是通过一次中介产品对第 i 种产品的第一次间接消耗系数，第三项是通过两次中介产品对第 i 种产品的第二次间接消耗系数等．

完全消耗系数矩阵（matrix of total consumption coefficient） 投入产出分析术语．指由完全消耗系数 b_{ij}为元素的矩阵．记为

$$B=(b_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 n 是经济系统中产品部门的总数．完全消耗系数矩阵是非负矩阵．

间接消耗系数矩阵（matrix of indirect consumption coefficient） 投入产出分析术语．指由间接消耗系数为元素的矩阵．记为

$$(b_{ij}-a_{ij})_{n\times n}=\sum_{k=2}^{\infty}A^k,$$

其中 A 是直接消耗系数矩阵，b_{ij}和 a_{ij}分别是 i,j 两个产品部门之间的完全消耗系数与直接消耗系数．也可表示成 $C-I-A$，其中 C 是完全需求系数矩阵，I 是单位阵．

完全需求系数（total demand coefficient） 亦称逆矩阵系数、总产量定额或部门关联系数．投入产出分析术语．指产品部门为提供单位最终产品对所有产品部门产品需求量，以 c_{ij}记之，表示第 j 个产品部门生产一个单位最终产品，对第 i 个产品部门的需求量，包括直接需求和间接需求．

完全需求系数和完全消耗系数的关系是

$$c_{ii}=1+b_{ii},c_{ij}=b_{ij}(i\neq j),$$

其中 b_{ij}是 i,j 两个产品部门之间的完全消耗系数，因此在苏联也把 c_{ij}称为完全消耗系数，即 c_{ij}和 b_{ij}是两种完全消耗系数.

逆矩阵系数(coefficient of inverse matrix) 即"完全需求系数".

总产量定额(total production quota) 即"完全需求系数".

完全需求系数矩阵(matrix of total demand coefficient) 亦称列昂节夫逆阵、矩阵乘子. 投入产出分析术语. 指由完全需求系数为元素的矩阵，用 C 表示. 计算公式是

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k,$$

其中 A 是产品部门间的直接消耗系数矩阵，I 是 n 阶单位阵.

完全消耗系数矩阵与完全需求系数矩阵的关系是 $C=I+B$，其中 B 是完全消耗系数矩阵. 经常利用

$$C=\sum_{k=0}^{\infty}A^k(\text{约定 } A^0=I),$$

在知道 A 以后求 C 或者是 B 的近似值.

列昂节夫逆阵(Leontief inverse matrix) 即"完全需求系数矩阵".

矩阵乘子(matrix multiplier) 即"完全需求系数矩阵".

投入产出基本方程(input-output basic equations) 亦称投入产出基本核算方程、投入产出基本数学模型(行模型). 投入产出分析的理论基础. 指矩阵方程 $AX+Y=X$ 或者$X=(I-A)^{-1}Y$矩阵，I 是 n 阶单位阵.

这个方程式把最终产品和总产品用矩阵乘子联系起来了. 在一般的经济控制和决策过程中总是预先知道 Y 或者 Y 的变动，通过这个方程就可以预测未来时期总产品的数量及其变动情形. 比如已知最终产品变化为 ΔY，那么总产品就变化为

$$\Delta X=(I-A)^{-1}\Delta Y.$$

投入产出基本方程是整个投入产出理论的基础，是由列昂节夫(Leontief,W.)最先建立起来的.

投入产出基本核算方程(basic input-output accounting equations) 即"投入产出基本方程".

投入产出基本数学模型(行模型)(basic input-output mathematical model(row model)) 即"投入产出基本方程".

产出方程组(output equations) 亦称分配方程组. 在投入产出表上从产品的使用价值角度出发得出的一组平衡关系式. 指投入产出表中第一、二部分各行构成的方程：

$$\sum_{j=1}^{n}x_{1j}+y_1=x_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n}x_{2j}+y_2=x_2,\cdots,$$
$$\sum_{j=1}^{n}x_{nj}+y_n=x_n,$$

其中 x_{ij}表示部门间流量，$x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$分别表示第 i 个部门的总产品量和最终产品量. 这个方程组表示各产品部门的总产品数量等于它提供给其他部门(也包括本产品部门)的中间产品总量与提供给全社会最终产品数量的总和.

分配方程组(distribution equations) 即"产出方程组".

投入方程组(input equations) 亦称生产方程组. 和产出方程组相对应，在投入产出表上从产品价值构成的角度出发得出的一组平衡关系式. 指价值型投入产出表中第一、三部分各列组成的方程：

$$\sum_{i=1}^{n}x_{i1}+d_1+v_1+m_1=x_1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_{i2}+d_2+v_2+m_2=x_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_{in}+d_n+v_n+m_n=x_n,$$

其中 x_{ij}是部门间的流量，d_j,v_j 和 $m_j(j=1,2,\cdots,n)$分别表示第 j 个产品部门在一定时期的折旧量、劳动报酬量和社会纯收入量. 这组方程反映了各产品部门总产品的价值构成. 实物型投入产出模型没有投入产出方程组，因为单位不同不能加总.

生产方程组(production equations) 即"投入方程组".

投入产出列模型(column model of input-output) 亦称投入产出数学模型(列模型). 投入产出分析的基本模型. 指通过直接消耗系数表示总产品列向量和产品部门净产值与折旧之和的列向量之间关系的矩阵形式方程：

$$X=(I-\hat{A}_c)^{-1}R \text{ 或者 } R=(I-\hat{A}_c)X,$$

其中 R 是产品部门净产值与折旧之和的 n 维列向量，X 是总产品 n 维列向量，I 是 n 阶单位阵，

$$\hat{A}_c=\mathrm{dig}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1},\sum_{i=1}^{n}a_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^{n}a_{in}\right),$$

表示投入产品消耗系数对角阵，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$是直接消耗系数. 实物型投入产出模型没有列模型.

投入产出数学模型(列模型)(mathematical model of input-output(column model)) 即"投入产出列模型".

价格方程(price equation) 产品部门的折旧、

劳动报酬和社会纯收入通过投入产出的数学模型而确定的各个产品部门理论价格的方程.价格方程的矩阵形式为

$$P=[(I-A)^{-1}]^T(\overline{D}+\overline{M}+\overline{V})$$

或者

$$P=[(I-A)^{-1}]^T\overline{R},$$

其中 P 是产品部门价格的 n 维列向量,$\overline{D}$ 是单位产品折旧(折旧系数)n 维列向量,$\overline{V}$ 是单位产品劳动报酬(劳动报酬系数)n 维列向量,$\overline{M}$ 是单位产品的社会纯收入(社会纯收入系数)n 维列向量,$\overline{R}=\overline{D}+\overline{V}+\overline{M}$ 是单位产品净产值与折旧(净产值与折旧系数)之和的 n 维列向量,A 是直接消耗系数矩阵,I 是单位阵,n 是经济系统内产品部门的总数.根据价格方程可以分析,当折旧、劳动报酬和社会纯收入的一部分或者全部变动时,对各部门产品价格的影响.如果用 $\overline{\Delta D}$,$\overline{\Delta V}$ 和 $\overline{\Delta M}$ 分别表示 $\overline{D}$,$\overline{V}$ 和 $\overline{M}$ 的改变量,那么价格的改变量是

$$\Delta P=[(I-A)^{-1}]^T(\overline{\Delta D}+\overline{\Delta V}+\overline{\Delta M}).$$

这对制定价格改革的有关政策,具有重要的模拟作用.实物型价格方程中计算出的产品价格是绝对数,而价值型价格方程中计算出的产品价格是相对数,即产品价格的指数.

价格影响方程(price effects equation)　经济系统中,某些部门产品价格发生变化时对其余部门产品价格影响的方程.如果经济系统中有 n 个部门,前 $k(1\leqslant k<n)$个部门产品价格变动的列向量为

$$\overline{\Delta P}^*=(\Delta p_1,\Delta p_2,\cdots,\Delta p_k)^T,$$

受它的影响其余部门产品价格也会变化,记为$\overline{\Delta P}=(\Delta p_{k+1},\Delta p_{k+2},\cdots,\Delta p_n)^T$,那么

$$\overline{\Delta P}=(I_{n-k,n-k}-A^T_{k,n-k})^{-1}A^T_{n-k,n-k}\overline{\Delta P}^*,$$

其中 $A_{n-k,n-k}$是直接消耗系数矩阵 A 中后 $n-k$ 行与后 $n-k$ 列组成的子块,$A_{k,n-k}$是矩阵 A 中前 k 行与后 $n-k$ 列组成的子块,$I_{n-k,n-k}$是 $n-k$ 阶单位阵.如果产品价格预先变动的部门不是前 k 个部门,可以重新编排产品部门的顺序,使产品价格预先变化的排在前 k 个位置上,而这不会改变方程的实质.利用价格影响方程,在计算机上可以算出当某些产品价格变动时,其余产品价格的变动幅度以及对各部门生产、就业的影响,从而刻画出整个经济系统变动的宏观态势,为决策者提供出最好的价格变动政策.

投入产出基本假定(basic assumption of input-output)　亦称投入产出分析的假设.是指:

1.同质性假定.各产品部门用单一的投入结构来生产单一的产品.

2.比例性假定.产品部门消耗的各种投入量和该部门的总产出成正比例.

3.价格不变假定.不同时期的投入产出表比较时,必须按照某个时期的产品固定价格进行计量加总.

4.直接消耗系数不变假定.

整个投入产出分析的理论及其投入产出分析的各种数学模型都是在上述四条假定下建立起来的.这同其他科学分支都是在一些前提假设、公理的条件下建立起来的完全一样.

投入产出分析的假设(hypothesis of input-output analysis)　即"投入产出基本假定".

纯部门(pure sectors)　亦称产品部门.投入产出表中填写的部门.纯部门不同于一般的经济部门、企业部门和行政管理部门.纯部门是指在生产活动中,以物质消耗结构、工艺技术特点和产品用途为标准的同类产品生产主体的抽象集合体.一般这三条标准不能同时兼顾时,应以物质消耗结构为划分纯部门的标准.例如火力发电和核能发电,产品用途相同,但生产电的过程中消耗结构却大不一样,因此火电和核电就应分成两个部门而不能放在同一个部门中.采取纯部门这个概念后,直接消耗系数的变化,主要就由部门间的技术工艺水平和经营管理水平所决定.这样,直接消耗系数就具有一定的相对稳定性,这也正是编制投入产出表和使用投入产出表的基本要求.如果不按照纯部门取得编制投入产出表的原始数据,直接消耗系数在很大程度上将依赖不同类型产品的结构,这是投入产出理论所不容许的.纯部门是由企业部门按照特征产品(主要产品)经过剔除和加总两个步骤后得到的,也就是说,把企业部门的非特征产品划除出去,把其他企业部门的特征产品汇集过来,企业部门就纯化为纯部门了.企业部门的纯化工作是一件十分繁杂的过程,纯化到什么程度应视具体情况综合考虑决定.

产品部门(product sectors)　即"纯部门".

联合国国民核算体系投入产出表(input-output tables of united nations SNA)　抽象地概括了产品(商品)部门之间和产品部门以及产业部门(非纯产业部门)之间经济生产活动中相互联系的一张矩阵形式的表.如下表所示:

	产品 $1,2,\cdots,n$	产业部门 $1,2,\cdots,n$	最终需求	总计
产品 $1,2,\cdots,n$	1	U_2	F	Q
产业部门 $1,2,\cdots,n$	V_3	4		G
原始投入		Y'		
总计	Q'	G'		

该表分四大部分:

第一部分是产品(商品)间的流量;

第二部分是产业部门(非纯部分)消耗产品的流量部分,简称 U 表,这个表的每一列表示某产业部门对各种产品的消耗量,这样的数据容易在现行的统计体系下得到;

第三部分是产业部门制造或生产产品的部分,又称产出表、制造表,简称 V 表,这个表的每一行表示某产业部门制造各种产品的数量情形,这样的数据在产业部门的统计制度下也易取得;

第四部分是产业部门对产业部门(不是对产品)生产中相互消耗掉的流量,它的每一列表示某产业部门对其余产业部门(也包含自身)的消耗量(通过产品). F 表示产品最终需求列向量,Q 表示总产品列向量,它是由 U 表中各行与 F 中各行的和所组成,G 表示产业部门总产出列向量,它是由 V 表中各列的和所组成,Y' 表示原始投入(工资、利润、税金等)行向量. 该表也是用数学推导法编制投入产出表的基础.

数学推导法(method of mathematical solution) 亦称产品(商品)产业部门投入产出表法. 联合国统计局主要根据英国编制投入产出表的经验提出的一种编制投入产出表的简化方法. 这种方法以联合国国民核算体系投入产出表为基础,根据表中提供的产品与产业部门间流量表(U 表)和产业部门的产品表(V 表)的原始数据资料,在两个假定下用数学方法推导出产品(纯部门)间的直接消耗系数矩阵(或流量矩阵)和产业部门间的直接消耗系数矩阵. 数学推导法的优点是可以直接利用现有产业部门的核算体系,避免了企业部门的纯化工作,大大减少了编制投入产出表的工作量. 缺点是由于这种方法是在两个很强的假定下推算的,而这些假定又往往与实际情况有较大出入,因此算出的直接消耗系数矩阵(或流量矩阵)不准确,经常还需要辅之于其他方法进行校正.

消耗矩阵(consumption matrix) 数学推导法编制投入产出表的重要依据之一. 指由联合国国民核算体系投入产出表的 U 表中各行元素组成的 n 阶方阵,它的各个元素表示该元素所在列的产业部门在一定时期对该元素所在行的产品的消耗量. 这种数据很容易从产业部门的现存核算统计体系中取得,用 u_{ij} 记之.

制造矩阵(manufacture matrix) 数学推导法编制投入产出表的重要依据之一. 指由联合国国民核算体系投入产出表的 V 表中各行元素组成的 n 阶方阵,它的各个元素表示该元素所在行的产业部门在一定时期制造的该元素所在列的产品数量,这种数据也很容易从产业部门中查取,用 v_{ij} 记之.

产品工艺解法(product technology solution) 计算产品(纯部门)之间流量矩阵或者直接消耗系数矩阵的一种数学解法. 这是数学推导法编制投入产出表的主要内容之一,是指在产品工艺假定下,用产业部门对产品的直接消耗系数矩阵 B 和产业部门的产品比例系数矩阵 C 推算出的产品间的直接消耗系数矩阵的一种解法. 计算公式为

$$A_c = BC^{-1},$$

式中 A_c 表示在产品工艺假定下的产品间的直接消耗耗系数矩阵,所有的矩阵均为 n 阶方阵.

产业部门工艺解法(industry technology solution) 计算产品(纯部门)之间流量矩阵或者直接消耗系数矩阵的一种数学解法. 是数学推导法编制投入产出表的主要内容之一,是指在产品工艺假定下,用产业部门对产品的直接消耗系数矩阵 B 和市场份额系数矩阵 D 推算出的产品间的直接消耗系数矩阵的一种解法. 计算公式为

$$A_I = BD,$$

式中 A_I 表示在产品工艺假定下的产品间的直接消耗系数矩阵,所有的矩阵均为 n 阶方阵.

产品工艺假定(product technology assumption) 数学推导法编制投入产出表的两个假定之一. 同一种产品不管哪一个产业部门生产的,它的消耗系数矩阵都是相同的,即具有相同的消耗结构. 产品工艺假定与实际比较是有出入的,因此凡在这个假定下推出的结论仅仅是实际情形的一种近似,往往还要辅之以其他方法进行校正. 在这个假定下,用数学方法可以推算出纯部门之间的直接消耗系数矩阵或者流量矩阵.

产业部门工艺假定(industry technology assumption) 数学推导法编制投入产出表的两个假定之一. 指同一个产业部门生产的所有种产品,都具有相同的消耗结构,即消耗系数相同. 产业部门工艺假定与实际比较出入较大,因此在这个假定下推出的结论最多也仅仅是实际情形的一种不精确的近似,往往还要辅之以其他方法对结论进行修正. 在这个假定下,无需进行产业部门的纯化,只要用数学方法就可以得到纯部门之间的直接消耗系数矩阵或者流量矩阵.

混合工艺解法(hybrid technology solution) 产品工艺解法和产业部门工艺解法的一种复合解法. 是指数学推导法编制投入产出表的过程中对一部分产品采用产品工艺假定,然后用 U 表和 V 表提供的数据,推算出产品(纯部门)间的直接消耗系数矩阵的方法. 混合工艺解法虽然与实际的产品间直接消耗系数矩阵相比较只是一种近似,但是要比单独的产品工艺解法和产业部门工艺解法精确.

市场份额系数矩阵(market-share coefficient matrix) 亦称供应系数矩阵. 产业部门(行)×产品(列)的 n 阶系数矩阵,用 D 表示且 $D=V\hat{Q}^{-1}$,式中

V 是 n 阶制造矩阵，

$$\hat{Q}=\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_n),q_i(i=1,2,\cdots,n)$$

表示第 i 种产品的总产出. D 的列表示 n 个产业部门制造的某种产品占该种产品总产量的份额（比重）. 市场份额系数矩阵可由 V 表和总产品列向量 Q 得到. 产业部门工艺解法中要用到这个矩阵.

供应系数矩阵(supply coefficient matrix) 即"市场份额系数矩阵".

产品比例系数矩阵(product-mix coefficient matrix) 亦称产出系数矩阵或制造系数矩阵. 各产业部门制造的每种产品占各产业部门总产值比例的矩阵. 用 C 表示，计算公式为

$$C = V^T\hat{G}^{-1},$$

式中 V 是制造矩阵，

$$\hat{G}=\mathrm{diag}(g_1,g_2,\cdots,g_n),g_i(i=1,2,\cdots,n)$$

是第 i 个产业部门的总产值. 产业比例系数矩阵可由 V 表和产业部门总产值列向量 G 的原始数据得到. 产业部门工艺解法中要用到这个矩阵.

产出系数矩阵(output coefficient matrix) 即"产品比例系数矩阵".

制造系数矩阵(make coefficient matrix) 即"产品比例系数矩阵".

直接投入系数矩阵(direct input coefficient matrix) 亦称投入系数矩阵. U 表的一种无量纲系数矩阵. 是指产品（行）×产业部门（列）的系数矩阵，用 B 表示，计算公式为

$$B = U\hat{G}^{-1},$$

式中 U 是产品对产业部门的投入矩阵（或产业部门对产品的消耗矩阵），

$$\hat{G}=\mathrm{diag}(g_1,g_2,\cdots,g_n),g_i(i=1,2,\cdots,n)$$

表示第 i 个产业部门的总产值. B 的每一列表示每一个产品部门单位总产值中所消耗的每一种产品的数量，因此 B 也称为产业部门对产品的直接消耗系数矩阵. 在产品工艺解法和产业部门工艺解法中都要用到这个系数矩阵. 这个矩阵的元素非负且小于1. 直接投入系数矩阵不是纯部门之间的直接消耗系数矩阵.

投入系数矩阵(input coefficient matrix) 即"直接投入系数矩阵".

适时修正法(adapt techniques) 亦称 RAS 法. 一种简单的确定计划期产品部门直接消耗系数矩阵的数学方法. 这个方法的前提是直接消耗系数矩阵的变化来自于两个方面的影响：从行上考察是替代效应的影响，从列上考察是制造效应的影响. 同时还假定这两种效应对各产品部门的影响具有一致性，即影响是均匀一样的. 在这样的前提假定下，使用计划期的有关统计数据对报告期的直接消耗系数矩阵进行修订，修订后的直接消耗系数矩阵就作为计划期的直接消耗系数矩阵. 具体作法如下：用 $A^0=(a_{ij}^0)_{n\times n}$ 表示报告期直接消耗系数矩阵，用 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示对第 i 种产品的替代效应的影响，用 $s_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示对第 j 种产品的制造效应的影响，那么计划期直接消耗系数矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=(r_ia_{ij}^0s_j)_{n\times n}=\hat{R}A^0\hat{S}.$$

式中 $\hat{R}=\mathrm{diag}(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，$\hat{S}=\mathrm{diag}(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 分别表示替代效应的影响和制造效应的影响. 替代效应影响和制造效应影响中的 $2n$ 个影响未知量的确定需要解方程组

$$\begin{cases}\hat{R}A^0\hat{Q}S=U,\\RA^0\hat{Q}\hat{S}=V,\end{cases}$$

式中 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$，

$$\hat{Q}=\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_n),q_i(j=1,2,\cdots,n)$$

表示计划期第 j 种产品总产值，$U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$，$u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是计划期第 i 种产品的中间产品总量，$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，$v_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是计划期第 j 种产品生产中的中间投入（生产消耗）总量. A^0，$\hat{Q}$，U，V 是已知的，求解方程组通常利用迭代法进行. 已经指出这种方法会得出惟一解，收敛速度也相当快. 如果 A^0 中有一元素为零，那么在最后矩阵 A 中它仍然是零；同时不会出现负元素. 这种方法的优点是工作量小，花费较少的人力、物力和财力，利用较少的调查数据，在电子计算机上可以很快得到结果；缺点是两个假定太强，与实际出入较大. 经修改后的结果对某些元素不够理想，但经验指出比不修改直接拿来作为计划期消耗系数为好. 适时修正法是 1960 年前后首先在英国的剑桥大学发展起来. 适时修正法中的两种影响因素是由英国计量经济学家斯通(Stone，J. R. N.)提出的.

RAS 法(RAS method) 即"适时修正法".

RAS 双边比例调整过程(RAS bi-proportional adjustment process) 适时修正法中，求解行乘数、列乘数迭代法的具体过程. 是指从报告期的直接消耗系数矩阵出发，沿着它的各行各列逐次进行按比例调整，即用迭代出来的行、列乘数左乘、右乘报告期直接消耗系数矩阵，经过有限次步骤后、行、列合计数与计划期列、列合计数的误差不超过预先给定的精确度，就认为迭代过程完结.

改进的RAS 法(modified RAS method) 确定计划期直接消耗系数矩阵的一种方法. 指把可用其他方法确定出的计划期的某些直接消耗系数固定，不参加迭代调整；同时把它们在计划期的流量从外生给定的行、列控制数中扣除，并把报告期的直接消耗系数矩阵中的相应元素换为零，形成 RAS 法调整的出发点；然后按适时修正法的步骤进行等到计划

期的直接消耗系数矩阵 A 求出后，再把已确定出的直接消耗系数植入 A 的相应位置上(报告期矩阵中某一元素为零，经过迭代后，它仍然为零). 改进的 RAS 法经许多国家编制投入产出表的经验证明，计算结果较适时修正法好.

替代影响(substitution effects)　亦称替代效应. 英国计量经济学家斯通(Stone, J. R. N.)提出的影响直接消耗系数的两个因素之一. 指生产过程中消耗的某种产品被另一种产品代替，引起被代用产品的消耗系数下降，代用产品的消耗系数上升. 斯通假定这种替代影响对所有产品部门生产中消耗的这种产品是均匀一致的. 替代影响是适时修正法中的前提之一.

替代效应(substitution effects)　即"替代影响".

制造影响(fabric effects)　亦称制造效应. 英国计量经济学家斯通(Stone, J. R. N.)提出的影响直接消耗系数的两个因素之一. 指产品制造过程中由于工艺技术水平、管理水平的变化对直接消耗系数的影响，通常用中间投入在总产值中所占比重的变动来粗略地衡量制造影响的大小. 斯通假定这种制造影响对所有产品都是均匀一致的. 制造影响是适时修正法中的前提之一.

制造效应(fabric effect)　即"制造影响".

行乘数(row multipliers)　亦称替代乘数. 用以度量代替影响大小的非负数. 由于这种影响直接消耗系数大小的原因是从投入产出表行上发生的，故名行乘数. 行乘数是适时修正法中要用迭代法寻找的未知数.

替代乘数(substitution multipliers)　即"行乘数".

列乘数(column multipliers)　亦称制造乘数. 用以度量制造影响大小的非负数. 由于这种影响直接消耗系数大小的原因是从投入产出表列上发生的，故名列乘数. 列乘数是适时修正法中要用迭代法寻找的未知数.

制造乘数(fabric multipliers)　即"列乘数".

行合计数(row totals)　确定计划期直接消耗系数矩阵的适时修正法中用到的一个数. 指适时修正法迭代过程的每一步，得到的流量矩阵每行上元素(流量)的总和. 行合计数有 n 个，这 n 个行合计数组成一个合计数列向量. 比较行合计数与行控制数，可以确定适时修正法中迭代过程应否完结.

列合计数(column totals)　确定计划期直接消耗系数矩阵的适时修正法中用到的一个数. 指适时修正法迭代过程的每一步，得到的流量矩阵每列上元素(流量)的总和. 列合计数有 n 个，这 n 个列合计数组成一个列合计数行向量. 比较列合计数与列控制数，可以确定适时修正法中迭代过程应否完结.

行控制数(row constraints)　适时修正法的迭代过程中用以确定迭代步骤是否终止的一个非负数. 指计划期流量矩阵(未知)每行元素外生给定的和. 行控制数有 n 个，它们组成一个行控制数列向量.

列控制数(column constraints)　适时修正法的迭代过程中用以确定迭代步骤是否终止的一个非负数. 指计划期流量矩阵(未知)每列元素外生给定的和. 列控制数有 n 个，它们组成一个列控制数行向量.

RAS 外推法(RAS extrapolations)　用 RAS 方法对未来时期经济系统内产品之间直接消耗系数的一种预测方法. 即根据报告期的直接消耗系数采用 RAS 方法预测未来时期的直接消耗系数.

投入产出分析的应用(application of input-output analysis)　借助投入产出的理论、思想和方法，解决社会生活领域中的有关问题. 特别重要的是解决经济生产领域中的一系列重大问题. 主要方面有：

1. 编制经济计划，特别是编制中长期经济计划提供信息资料.

2. 利用投入产出表可以进行多项经济预测，如总产值、最终产品、价格、净产值等.

3. 借助投入产出分析的理论和数学模型评估采取经济政策时对各产品部门的影响和承受能力. 比如减少对某一部门的投资，提高某些部门的产品价格对整个经济系统的影响.

4. 计算产品中的完全劳动消耗从而研究和估算产品的理论价格.

5. 分析和确定某些重要的比例关系. 比如两大部类比例、积累和消费比例等. 利用投入产出表通过比较各产品部门的投入和产出，所费与所得可以获得产品部门经济效益的信息.

6. 依据投入产出分析的理论和建立数学模型的方法设置专门的投入产出模型用以研究一些专门的问题，比如环境污染问题、收入分配问题、人口就业问题、能源问题等.

7. 借助投入产出表编制经济指数，比如物量指数、价格指数、增长率等.

投入产出优化模型(optimization model of input-output)　投入产出分析的理论和数学规划理论结合而建立的优化数学模型. 其种类有静态和动态投入产出优化模型、单目标和多目标的投入产出优化模型. 由于投入产出分析中的数学模型主要是线性模型，因此，投入产出优化模型主要是线性规划模型. 目标函数由经济系统的决策者根据中长期经济社会发展的目标确定，比如取计划期国民收入达到最大、社会最终产值达到最大、某些产品部门的总

产值或净产值达到最大等.约束条件往往由计划期内的资金、资源、物力等通过投入产出的基本方程来充当,例如,下面就是一个静态投入产出优化模型的例子:

$$\max \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

约束条件是

$$(I-A)X-Y=0, B^TX \leqslant L, C^TX \leqslant W,$$
$$D^TX \leqslant K, X \geqslant 0, Y \geqslant 0.$$

式中 A 是直接消耗系数矩阵,X 是总产品列向量,Y 是最终产品列向量,$y_i(i=1,2,\cdots,n)$是 Y 的第 i 个分量,B 为产品消耗劳动力的系数列向量,C 为产品消耗某些自然资源的系数向量,D 为产品消耗资金的系数列向量,L 为劳动力资源总量,W 为某种自然资源可用总量,K 为资金总量.

投入产出模型的种类(types of input-output model) 依照不同的标准,对投入产出模型所作的不同分类:

1. 按照分析时期的不同分为静态投入产出模型(只分析某一时期)和动态投入产出模型(分析多个时期).

2. 按照计量单位的不同分为价值型投入产出模型(以货币为单位)和实物型投入产出模型(以实物为单位).

3. 按照模型编制的空间的不同分为世界性投入产出模型、全国性投入产出模型、地区间投入产出模型和企业投入产出模型.

4. 按照研究对象的不同分为产品投入产出模型、固定资产投入产出模型、生产能力投入产出模型、价格投入产出模型等.

5. 按照编制投入产出表的时期不同分为报告期投入产出模型和计划期(预测期)投入产出模型.

静态投入产出模型(static input-output model) 投入产出模型的一种.只研究分析一个时期经济系统内部再生产过程的投入产出模型,该模型中投资预先确定,不考虑投资运动对后续时期生产改变的影响.反映在描述模型的数学方程中所有经济量和直接消耗系数都和时间没有明显的关系,也不含投资变量,更不出现带有时滞的投资系数.静态投入产出模型是投入产出分析的理论中提出最早、研究最彻底、理论最为成熟、应用也最多最广泛的一类投入产出模型.静态投入产出模型的缺点是没有考虑时间因素,因此不能准确地反映连续的若干时期经济系统内部各产品部门再生产活动的整体状况.

动态投入产出模型(dynamic input-output-model) 投入产出模型的一种.直接消耗系数和投资系数与时间有关或者投资产品有一定时滞的投入产出模型.反映在投入产出方程中是直接消耗系数矩阵、投资系数矩阵是时间的函数,投资产品从最终产品中分离出来带有一定的时滞.动态投入产出模型的目标不是限定在一个时间点上,而是要考虑从报告期到计划期相间隔的一个时间序列.动态投入产出模型最早由哈京斯(Hakins,D.)于 1948 年提出,其后罗马尼亚学者乔治斯库—罗根(Geogescu-Roegen,N.)、霍利(Holley,J.)先后于 1951 年和 1953 年对动态投入产出模型进行了研究,但是列昂节夫(Leontief,W.)的研究在国际上具有代表性.例如列昂节夫在《美国经济结构研究》一书的第三章《动态分析》中就提出了两种动态投入产出模型:封闭式模型和开启式模型.动态投入产出模型理论的研究与静态投入产出模型研究相比较还很不成熟,主要是因为受到数据和计算上的限制.但动态模型优于静态模型,更接近于实际情形.

动态逆阵(dynamic inverse) 动态投入产出模型的数学方程中的列昂节夫逆矩阵.这个逆矩阵的元素是时间 t 的函数.

封闭式投入产出模型(closed input-output-model) 一种动态投入产出模型.它是列昂节夫(Leontief,W.)于 1953 年提出的这个模型由一个齐次线性常微分方程组描述,其具体形式为

$$x_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

写成矩阵方程形式为

$$X-AX-B\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=0.$$

式中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是产品部门总产出列向量,A 是 n 阶直接消耗系数矩阵,B 是 n 阶投资系数矩阵,a_{ij}和 b_{ij}分别表示两个产品部门间的直接消耗系数和投资系数.

开启式投入产出模型(open input-output model) 一种动态投入产出模型.它是列昂节夫(Leontief,W.)于 1953 年提出的.这个模型由一个非齐次线性常微分方程组描述,其具体形式为

$$x_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=s_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

写成矩阵方程形式为

$$X-AX-B\frac{dX}{dt}=S,$$

式中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是产品部门总产出列向量,A 是 n 阶直接消耗系数矩阵,B 是 n 阶投资系数矩阵,S 是产品部门最终净产品列向量,a_{ij}和 b_{ij}分别表示两个产品部门间的直接消耗系数和投资系数.和封闭式投入产出模型比较,方程的右端多了一项最终净产品.这是一个改进,但它没有考虑时滞因素的作用,因此不能精确地反映实际经济活动的过程.

差分方程形式的动态投入产出模型(dynamic

input-output model of difference equation)　一类动态投入产出模型. 它是列昂节夫(Leontief, W.)于 1965 年研究过的以差分方程形式描述的. 其具体形式为

$$x_i^t - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^t - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j^{t+1} - x_j^t) = s_i^t,$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n).$$

写成矩阵方程形式为

$$X^t - AX^t - B(X^{t+1} - X^t) = S_i^t,$$

或

$$(I - A + B)X^t - BX^{t+1} = S^t,$$

式中 X^t 表示时间 t(常以年为单位)时的总产出列向量, S^t 表示时间为 t 时的最终净产品列向量, A 表示 n 阶直接消耗系数矩阵, B 表示 n 阶投资系数矩阵, I 表示 n 阶单位阵, a_{ij} 和 b_{ij} 分别表示两个产品部门间的直接消耗系数和投资系数.

时变差分方程形式的动态投入产出模型(dynamic input-output model of difference equation in time)　差分方程形式的动态投入产出模型的一种改进. 是由列昂节夫(Leontief, W.)于 1970 年提出的. 方程形式为

$$X^t - A^t X^t - B^{t+1}(X^{t+1} - X^t) = S^t$$

或

$$G^t X^t - B^{t+1} X^{t+1} = S^t,$$

式中 $G^t = I - A^t + B^{t+1}$. 方程中不仅总产品列向量 X^t(n 维)、最终净产品列向量 S^t 有时间上标, 而且直接消耗系数矩阵 A^t 和投资系数矩阵 B^{t+1} 都有时间上标. 这里投资系数矩阵 B^{t+1} 的时间上标 $t+1$ 表示投资产品使用时间, 产出时间仍为 t, 即假定时滞为 1(年), 这点是该模型的不足之处. 利用这个方程可以研究一段时期的经济活动情形.

投资系数(investment coefficient)　亦称固定资产积累系数. 动态投入产出模型中常用到的一个统计指标. 是指时间 $t+1$ 时第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 个部门(纯部门)增加单位产品需要第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个投资部门(纯部门)在时间 t 供给第 j 个部门产品的数量, 用 d_{ij} 表示.

$$d_{ij} = \frac{k_{ij}^t}{x_j^{t+1} - x_j^t} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

式中 k_{ij}^t 表示 t 时 i 投资部门供给 j 部门产品总产量, x_j^t 表示 j 部门 t 时的产出总量.

固定资产积累系数(fixed asset accumulation coefficient)　即"投资系数".

投资系数矩阵(investment coefficient matrix)　以投资系数作为元素的 n 阶方阵(假定有 n 个投资产品部门), 用 D 表示, $D = (d_{ij})_{n\times n}$, 其中 d_{ij} 是 i, j 两个部门间的投资系数. 投资系数矩阵在动态投入产出模型中经常出现.

时滞(time lag)　时间滞后. 经济活动中指投入与产出的时间间隔. 比如扩大再生产过程中投资的产品转化为新的生产能力需要一定的时间, 这个时间就是投资产品的时滞. 不同的投资产品具有不同的时滞. 项目投资时滞的计算公式:

1. 一个项目投资时滞的计算. 时滞

$$L_{项} = \frac{\alpha_1(n-0.5) + \alpha_2(n-1.5) + \cdots + \alpha_n 0.5}{100},$$

式中 a_i 为第 i 年投资占总投资的比重, n 为建设周期.

2. 对一年全部总投资时滞的计算. 时滞

$$L_{年} = \sum_{i=1}^{n} I_i n_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} I_i,$$

式中 I_i 为分配到 i 部门的投资, n_i 为 i 部门以年为单位的时滞.

经 济 预 测

经济预测(economic forecast, economic prediction)　对经济变量的未来变化、发展趋势所进行的定性的或定量的分析. 经济预测是一个比商情预测更广泛的概念. 凡属社会经济生活中的经济变量, 如从宏观上的国民生产总值, 社会零售总额, 物价水平等, 到微观上企业的销售利润等, 产品的市场占有率以及市场经营方面的消费倾向, 以至股市行情等, 甚至包括能反映自然环境对经济发展影响的诸如植被覆盖率, 降水量等变量的预测均属于经济预测的范畴. 但通常人们也习惯于用经济预测来作为国民经济发展总趋势预测的一个代名词. 相类似的提法如经济走向、经济发展趋势、经济增长等. 若从经济预测的计划性来看, 可分为:

1. 短期预测: 指对今后一年左右时间内的经济情况预测. 对某些行业来说, 可能这个期限还要短一些.

2. 中期预测: 指对今后一年半以后到五年之内时间里的经济情况预测.

3. 长期预测: 指对今后五年乃至十年以上时间内的经济情况预测.

经济预测还可简单地分为定性预测和定量预测两种. 从使用的方法划分, 可分专家预测法、因果模式法、时间序列法、马尔可夫预测分析、类比预测法、投入产出法、动态规划法、周期分析法等. 近年来新出现的预测方法还有灰色预测法、神经网络法、遗传算法等.

短期预测(short-term forecast)　见"经济预测".

中期预测(medium-term forecast)　见"经济预测".

长期预测(long-term forecast) 见"经济预测".

商情预测(business forecast) 经济预测的基本概念.指对未来经济情况的预测.它既包括一般工商业企业对其经营情况,销售情况,成本耗费,财务开支等方面的预测,也包括对物价水平,股市走向,某自然资源蕴藏量的变化等方面的预测,对整个国民经济未来发展总趋势的预测也属于商情预测.商情预测是经济管理的一项重要内容.虽然它所包括的范围与经济预测的内容相比要稍窄一些,但在西方,它是比经济预测更为通用、流行的字眼.关于商情预测所使用的方法参见"经济预测".

定性预测(qualitative forecast) 亦称直接预测法.经济预测的一种类型.指由预测者根据被预测对象内在性质、特点及其过去和现在外在表现形式的变化、发展,对其进行非数量化的逻辑推理,从而得出对被预测对象未来发展趋势及变化程度的直观推测和判断的方法.专家预测法、类比预测法、市场调查法等常用来进行定性预测分析.定性预测与定量预测虽然有本质区别,但在实际应用时,却往往是相互借重,互为参照的.定性预测可以为定量预测提供量化的范围,而定量预测则为定性预测提供可靠依据.

直接预测法(intuitive predicted method) 即"定性预测".

定量预测(quantitative forecast) 经济预测的一种类型.指由预测者根据预测变量与其他相关变量间内在的数量关系,通过建立合适的数学模型,对其展开定量的分析,从而得出预测值的方法.有时由预测者对被预测对象做出的主观判断也可称为定量预测,但经常用作定量预测分析的是回归分析法、计量经济模型、时间序列法、投入产出法、周期分析法、灰色预测法等.

定量预测可为定性预测提供可靠的依据,同时也常借助定性预测来界定预测的范围,因而定量预测与定性预测是互为依赖,相辅相成的.

预测误差(error of forecast, prediction error) 预测值与实际观测值之间的差异.人们可以用不同的方法来描述预测误差.例如,预测的绝对误差,预测的相对误差,以及预测的均方误差等.造成预测误差的原因是多方面的.有来自原始数据的误差;有来自抽样过程中的误差;有来自模型关系的误差;还有一些是随机误差.

预测的绝对误差(absolute error of forecast) 预测误差的一种.指预测值(F_t)与实际观测值(V_t)之差的绝对值:即

$$e_t = |F_t - V_t| \quad (t = 1, 2, \cdots),$$

预测的绝对误差是对预测方法精确性的一种直接度量,但是它并不直观,因而不能用来比较不同预测方法的精确性.在实际工作中,人们往往更乐于使用预测的相对误差,来间接地衡量不同预测方法的精确程度.

预测的相对误差(relative error of forecast) 预测误差的一种.指预测的绝对误差(e_t)与实际观测值(V_t)的绝对值之比.即

$$y_t = \frac{e_t}{|V_t|} = \left|\frac{F_t - V_t}{V_t}\right| = \left|\frac{F_t}{V_t} - 1\right| \quad (t = 1, 2, \cdots),$$

它表示,相对于实际观测值来说,预测值的偏差程度有多大.一般对预测方法精确度的要求有不同的等级.较高的精确度要求 $y \leqslant 1\%$ 或 $y \leqslant 2\%$,一般的精确度只要求 $y \leqslant 5\%$,甚至 $y \leqslant 10\%$ 即可.

预测的误差百分比(erroneous percentage of forecast) 预测误差的一种表示方式.指预测的相对误差(η)的百分比数.即

$$\lambda = \eta \times 100\%.$$

专家预测法(expert predicted method) 亦称主观评估法.专家进行的预测法.一般是由专家(们)利用自己的专业知识和经验,通过对被预测对象的性质、特点及其形式与结构上的过去变化进行直观的综合分析,从而给出被预测对象未来发展趋势及变化程度的主观推测与判断.专家预测法简便易行,但其精确度只能满足一般的要求.之所以使用该方法进行经济预测的原因在于:

1. 原预测模型中的变量在结构和变化形式上出现了一些差异,而一时又无法完成对模型的改进工作.

2. 有许多建立数学模型所必需的可靠的数据和资料无法取得.

3. 缺乏建立合适的数学模型的方法.

4. 时间紧迫,无法利用现有的预测模型进行细致的计算和分析,而同时并不需要精度很高的预测结果,只需要了解某项指标的可能范围和大致的等级.

从方法上来看,专家预测可分为直接评估法和概率判断的方法.而从组织形式上来看,专家预测法包括:

1. 专家个人判断.即由个别的权威专家给出预测判断的方法.其优点是简单明了,缺点是预测结果容易受到专家知识面,逻辑推理能力,分析问题的习惯及个人对被预测事物感兴趣程度的局限.

2. 专家会议法.即组织一定范围内的有关专家,通过开会,商讨,交流看法而给出预测结果的方法.其优点是提取信息量较大,集思广益,互相启发,从而可使预测结果更精确,缺点是容易造成个别权威专家左右会议结果的局面.

3. 特尔斐法.

主观评估法(subjective assessment method) 即“专家预测法”.

专家个人判断(individual assessment using expert) 见“专家预测法”.

专家会议法(expert meeting method) 见“专家预测法”.

直接评估法(direct assessment method) 一种专家预测法.指由专家直接给出对被预测变量的主观预测判断的方法.有时为了更充分地利用专家所掌握的专业知识、经验和信息,除要求专家给出一个最可能值作为预测结果外,还要求专家给出一些其他可能出现的预测值.例如:预测一项工程的完成时间 T,要求专家给出最可能的完工时间(MT),乐观的完工时间(OT)和保守的完工时间(PT)三种直接评估值,预测结果为

$$\hat{T}=\frac{6}{OT+PT+4MT},$$

标准差为

$$\frac{OT-PT}{6}.$$

概率评估法(probability assessment method) 一种专家预测法.即要求专家给出在不同可能性之下的预测结果.例如,专家对某厂家的某种商品的市场占有率情况预测如下:

1. 市场占有率 MP 肯定会超过 25%.
2. MP 超过 28%的可能性是 75%.
3. MP 超过 32%的可能性是 25%.
4. MP 不可能超过 35%.于是有:

$P(MP\leqslant 25\%)=P(35\%\leqslant MP)=0.$

$P(25\%<MP\leqslant 28\%)=P(32\%<MP<35\%)=25\%.$

$P(28\%<MP\leqslant 32\%)=50\%.$

最后,经加权法计算可知:该厂家该种商品的市场占有率 MP 的最可能范围为 $28.25\%<MP\leqslant 31.75\%$,相对误差 $\eta\leqslant 12\%$.有时要求专家给出的是各种可能结果的概率值.这种方法在几个紧密衔接的过程中的连续应用就构成了马尔可夫链法.

特尔斐法(Delphi method) 一种专家预测法.是专家会议法的一种形式.它由美国兰德公司于 1964 年首次推出并用于技术预测.它有以下几个特点:

1. 由许多专家分别独立地给出第一轮的预测值.

2. 由主持人将第一轮的预测值加以统计计算,并将所得的部分信息,如中位数和分位数,反馈给各位专家,征求他们的意见.

3. 重复上面的步骤,直到预测结果的中位数、25%分位数及 75%分位数稳定为止.

在使用特尔斐法进行预测时,有时为了尊重个别权威专家的意见,在对各轮预测结果进行统计计算时,还要加入相应的权数.利用特尔斐法进行定量预测时,一般要进行三至五轮,有时由于时间关系,仅进行二轮预测也能产生很好的结果.

因果模式法(causal model method) 一种统计预测法.它是指由经济变量的大量统计资料出发,根据一定的规则,把经济变量间所体现出的统计关系抽象概括为函数关系,并由此形成一部分变量对另一部分变量的解释,进而获得被解释变量的预测值的方法.因果模式法包括两种:

1. 回归分析法.
2. 更复杂的经济计量模型法.

回归分析法(regressive analysis method) 因果模式法之一.它是经济预测中经常使用的一种方法,即用一定的函数关系 $Y=f(X)$ 去近似模拟经济变量 X,Y 间的统计关系,这里的 X,Y 均可以是多维的变量,但回归分析法一般只考虑 Y 是一维的情况,而经济计量模型法一般考虑 Y 是多维变量.回归分析的模型可用下式表达:

$$\begin{aligned}&(Y\mid X_1,X_2,\cdots,X_n)\\&=f(X_1,\cdots,X_n,\beta_1,\cdots,\beta_k)+\varepsilon.\end{aligned}$$

这里按函数 f 的种类,可分为线性回归与非线性回归两种,其中线性回归是最基本的.有些非线性的函数 f 可以通过变量替换而化为线性的,例如:

1. 双曲函数:$\frac{1}{Y}=\alpha+\frac{\beta}{X}+\varepsilon.$

令 $Y^*=1/Y,X^*=1/X$,可化为线性回归模型

$$Y^*=\alpha+\beta X^*+\varepsilon.$$

2. 幂函数:$Y=AX_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}\varepsilon,$

令 $X_i^*=\ln X_i\ (i=1,2,\cdots,n),Y^*=\ln Y,A^*=\ln A,\varepsilon^*=\ln\varepsilon$,可化为线性回归模型

$$Y^*=A^*+\sum_{i=1}^{n}\alpha_iX_i^*+\varepsilon^*.$$

3. 指数函数:$Y=A\exp(BX+\varepsilon).$

令 $Y^*=\ln Y,A^*=\ln A$.可化为线性回归模型

$$Y^*=A^*+BX+\varepsilon.$$

4. 对数函数:$Y=\alpha+\beta_1\ln X_1+\cdots+\beta_k\ln X_k+\varepsilon.$

令 $X_i^*=\ln X_i\ (i=1,\cdots,k)$,可化为线性回归模型

$$Y=\alpha+\sum_{i=1}^{k}\beta_iX_i^*+\varepsilon.$$

5. S 型函数:$Y=\frac{1}{\alpha+\beta e^{-X}+\varepsilon}.$

令 $Y^*=1/Y,X^*=e^{-X}$,可化为线性回归模型

$$Y^*=\alpha+\beta X^*+\varepsilon.$$

经济计量模型法(econometric model method) 因果模式法之一.即用经济计量学方法建立数学模型来进行经济预测的一种方法.广义地,回归分析法也是经济计量模型法的一种,但是通常把经济计量

模型法理解为建立多变量的回归分析模型，即联立方程组模型. 许多宏观经济预测问题都需要用经济计量模型来研究. 大型的宏观经济模型中的变量甚至会多达成千上万. 建立这样的预测模型的工作量是非常大的.

线性模型法(linear model method)　回归分析的基本模型，其中回归呈线性趋势：

$$Y=\alpha_0+\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_nX_n+\varepsilon.$$

模型为

$$\begin{cases}Y = X\alpha + \varepsilon,\\ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2).\end{cases} \qquad (1)$$

这里 $X=(1,X_1,X_2,\cdots,X_n)$ ($1=(1,\cdots,1)^T$, X_1, $X_2,\cdots,X_n$ 为观测数据组成的列向量)是一个 $p\times q$ 阶矩阵，$p=n+1+d$，d 为自由度，$q=n+1$，$\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T$. 当 $n>1$ 时，模型(1)称为多元线性回归模型；当 $n=1$ 时，模型(1)称为一元线性回归模型. 后一情形中，模型的估计参数只有两个：

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{n\sum X_kY_k - \sum X_k\sum Y_k}{n\sum X_k^2 - (\sum X_k)^2},$$

$$\hat{\alpha}_0 = \overline{Y} - \hat{\alpha}_1\overline{X}.$$

其中 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别表示解释变量和被解释变量关于样本 X_k,Y_k 的均值. 一般情形中，由最小二乘法可以确定

$$\hat{\alpha}=(X^TX)^{-1}X^TY,$$

这里假定 $(\overline{X}TX)^{-1}$ 存在，否则要用桥回归法. 线性模型的预测分为点预测和区间预测：

1. 点预测：对给定样本 $X_0=(1,X_{01},\cdots,X_{0n})$，其点预测值

$$\hat{Y}_0=\hat{E}(Y_0|X_0)=X_0\hat{\alpha}=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1X_{01}+\cdots+\hat{\alpha}_nX_{0n}.$$

2. 对 Y_0 的条件期望值 $E(Y_0|X_0)$ 的区间预测为

$$\hat{Y}_0-t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{X_0(X^TX)^{-1}X_0^T}\leqslant\hat{E}(Y_0|X_0)$$
$$\leqslant\hat{Y}_0+t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{X_0(X^TX)^{-1}X_0^T},$$

其中 τ 为置信度，通常取 0.05，0.03 或 0.01，$t_{\frac{\tau}{2}}$ 为遵从 $t_{(d)}$ 分布的随机变量在 $\tau/2$ 处的取值，$\hat{\sigma}_\varepsilon$ 是随机误差项 ε 的方差的估计值：$\hat{\sigma}_\varepsilon$ 是随机误差项 ε 的方差的估计值：$\hat{\sigma}_\varepsilon=\sum e_k^Te_k/d$，其中 d 为自由度，而 e_k 为离差 $Y_k-\hat{Y}$，$k=1,\cdots,n+1+d$，$\hat{Y}$ 为点预测值.

3. 对指定值的区间预测为

$$\hat{Y}_0-t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{1+X_0(X^TX)^{-1}X_0^T}\leqslant\hat{Y}_0^*$$
$$\leqslant\hat{Y}_0-t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{1+X_0(X^TX)^{-1}X_0^T}.$$

当线性模型存在着多重共线性(即解释变量间存在着一种近似线性关系)时，经常通过改变模型结构，减少解释变量的个数，逐步选择解释变量等办法予以克服. 也常使用首成分法，桥回归法等. 而在线性模型存在异方差性时(即随机误差项 $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2\Omega)$，$\Omega$ 是一对称正定随机误差方差阵)，一般采用广义最小二乘法对其进行参数估计.

一元线性回归预测(univariate linear regression forecast)　见“线性模型法”.

多元线性回归预测(multivariate linear regressive forecast)　见“线性模型法”.

最小二乘法(least squares method)　简称 OLS 法. 对线性模型

$$\begin{cases}Y = X\beta + \varepsilon,\\ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2)\end{cases}$$

进行参数估计时的一种重要方法，它要求被解释变量的离差平方和最小，即：

$$\min\Big(\sum_{i=1}^{n+1+d} e_i^2\Big) = \min(e^Te)$$
$$= \min(Y^TY - 2\hat{\beta}^TX^TY + \hat{\beta}^TX^TX\hat{\beta}),$$

其中 $e_i=Y_i-\hat{Y}$，d 为自由度. 于是由一阶条件：

$$-2X^TY+2X^TX\hat{\beta}=0$$

就可得最小二乘估计. 当线性模型存在异方差性时，需采用广义最小二乘法对其进行参数估计. 为区别起见，常用的最小二乘法也称为简单最小二乘法.

简单最小二乘法(simple least squares method)　即“最小二乘法”.

广义最小二乘法(general least squares method)　简称 GLS 法. 对随机误差项 ε 具有异方差性质的线性模型

$$\begin{cases}Y = X\beta + \varepsilon,\\ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2\Omega)\end{cases}$$

(Ω 对称正定)进行参数估计时的一种方法. 给出如下变换：

$$\begin{cases}X^* = TX,\\ Y^* = TY,\end{cases}$$

其中矩阵 T 满足 $\Omega^{-1}=T^TT$，此时，模型化为

$$\begin{cases}Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*,\\ \varepsilon^* \sim N(0,\sigma^2).\end{cases}$$

直接由最小二乘法得到的参数估计

$$\beta^*=(X^{*T}X^*)^{-1}X^{*T}Y^*=(X^T\Omega^{-1}X)^{-1}\Omega^{-1}Y,$$

仍为 β 的最小方差无偏线性估计.

首成分法(primary component method)　回归分析中一种应用很广的方法. 当解释变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的个数很多时，或随机变量间存在多重共线性时，可采用构造首成分的方法，找到少数几个由 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 生成的，并能大致保持其解释能力的首成分 $X_1,X_2,\cdots,X_m(m<n)$ 来代替 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 作为解释变量. 这样，对化简模型结构，降低模型系统误差，提高模型预测精度，加强模型的解释能力，克服解释变量的多重共线性等，均大有帮助. 记

$X=(1,X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，当 $\sigma=E(\hat{X}^T\hat{X})$ 是实对称、非负定的 n 阶协方差阵时，可构造第 k 个首成分 Z_k，$k=1,2,\cdots,m$，为

$$Z_k=\widetilde{X}a_k \quad (k=1,2,\cdots,m),$$

其中 a_k 是 σ 的第 k 个特征值 λ_k 的特征向量，且满足 $a_k^Ta_k=1$，这里 σ 的 n 个特征值 λ_i 有如下的排列：

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0.$$

容易验证，这样得到的首成分具有如下性质：

1. $D(Z_k)=\max\limits_a\{D(\hat{X}a)\mid a\neq\beta_i\ (i=1,2,\cdots),k-1,a^Ta=1\}$.

2. 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为正态随机变量时，$Z_1,Z_2,\cdots,Z_m$ 是相互独立的. 在实际计算时，往往用 $\hat{X}$ 的相关阵来代替其协方差阵作为 σ. 另外，适当地选取 m，使

$$\sum_{k=0}^{m}\lambda_k\Big/\sum_{k=0}^{n}\lambda_k$$

能够达到一个合理百分比，例如，使其达到 85%或 95%左右等，便可以用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_m$ 作为所得的解释变量. 若以 $\hat{\beta}^*$ 表示回归方程式

$$Y=Z^*\beta^*+\varepsilon$$

中的参数估计值 $Z^*=(1,Z_1,Z_2,\cdots,Z_m)$，那么对应于

$$Y=X\alpha+\varepsilon$$

中的参数估计为 $\hat{\alpha}=A^*\hat{\beta}^*$，$A^*=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$.

桥回归法(bridge regression method)　回归分析法的一种. 即对存在着多重共线性，线性回归模型

$$\begin{cases}Y=X\beta+\varepsilon,\\ \varepsilon\sim N(0,\sigma^2)\end{cases}$$

参数估计的一种方法. 桥回归法是将矩阵 X^TX 的主对角线元素先同时乘以 $1+\delta$($\delta>0$ 是个很小的逐步实验值)，而使参数估计值的方差变小，显著性提高的一种作法. 此时，模型的参数估计为

$$\hat{\beta}=(X^TX+\delta I)^{-1}X^TY,$$

这里 I 是与 X^TX 同阶的单位阵.

非线性回归预测(nonlinear regressive forecast)　回归分析法的一种. 即对那些不是线性型的回归方程

$$E(Y\mid X)=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

进行某些变换而化为线性型后进行回归计算的预测方法. 有些非线性的回归方程可以直接化为线性回归方程(参见“回归分析法”). 但有些则需要特殊处理. 常用的方法是借助于泰勒级数展开而对其进行逐次的线性近似估计的方法. 设

$$Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)+\varepsilon,$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 为待估常数. 给定其一组初始验值 $\beta_{10},\beta_{20},\cdots,\beta_{k0}$，在($\beta_{10},\beta_{20},\cdots\beta_{k0}$)点将 $f(X_1,X_1,\cdots,X_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)$ 展成泰勒级数. 则有

$$Y-f(X_1,X_2,\cdots,X_n,\beta_{10},\beta_{20},\cdots,\beta_{k0})+\sum_{i=0}^{k}\beta_{i0}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_i}\right)_0=\sum_{i=0}^{k}\beta_i\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_i}\right)_0+\varepsilon.$$

将由此式所得的最小二乘估计 $\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_k$ 记为 $\hat{\beta}_{11},\hat{\beta}_{21},\cdots,\hat{\beta}_{k1}$ 作为又一组初始值，继续由 $f(X_1,X_2,\cdots,X_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$ 的泰勒展开

$$Y-f(X_1,X_2,\cdots,X_n,\beta_{11},\beta_{12},\cdots,\beta_{1k})+\sum_{i=0}^{k}\beta_{i1}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_i}\right)_1=\sum\beta_i\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_i}\right)_1+\varepsilon.$$

进行最小二乘估计，可得又一组初始值 $\beta_{12},\beta_{22},\cdots,\beta_{k2}$. 将上述过程继续下去，直到相邻的二次估计值满足一定的误差要求，例如，

$$\left|\frac{\beta_{i,j+1}-\beta_{ij}}{\beta_{ij}}\right|<\delta$$

对 $i(=1,2,\cdots,k)$ 成立. 此时便可将第 $j+1$ 次的估计 $\beta_{1,j+1},\beta_{2,j+2},\cdots,\beta_{k,j+k}$ 作为非线性模型

$$Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)+\varepsilon$$

的参数估计值 $\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_k$. 对非线性回归模型仍有两种预测：

1. 点预测：给定解释变量的一组值 $\hat{X}_1^0,\hat{X}_2^0,\cdots,\hat{X}_n^0$ 时，

$$\hat{Y}=f(\hat{X}_1^0,\hat{X}_2^0,\cdots,X_n^0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_k)$$

便为点预测值.

2. 区间预测：可利用 f 的第 $j+1$ 次的泰勒展开，令

$$Y^*=Y-f(X_1,X_2,\cdots,X_n,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_k)+\sum_{i=1}^{k}\beta_{i,j+1}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_i}\right)_{j+1},$$

$$X_i^*=\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_i}\right)_{j+1}\quad(i=1,2,\cdots,k),$$

则有

$$Y^*=\sum_{i=1}^{k}\beta_iX_i^*+\varepsilon.$$

对于给定的$(X_{10},X_{20},\cdots,X_{n0})$可以得到$(X_{10}^*,X_{20}^*,\cdots,X_{k0}^*)$在置信度 τ 下的预测区间分别为：

$$E(Y_0^*\mid X_0^*)\in\left(Y_0^*-t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{X_0^*(X^{*T}X^*)^{-1}X_0^{*T}},\ Y_0^*+t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{X_0^*(X^{*T}X^*)^{-1}X_0^{*T}}\right),$$

$$\hat{Y}^*\in\left(Y_0^*-t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{1+X_0^*(X^{*T}X^*)^{-1}X_0^{*T}},\ Y_0^*+t_{\frac{\tau}{2}}\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{1+X_0^*(X^{*T}X^*)^{-1}X_0^{*T}}\right),$$

其中 $\hat{Y}_0^*$ 为 X_0^* 的点预测值，$X^*=(1,X_1^*,\cdots,X_k^*)$，其他记号可参见“线性模型法”. 于是由前面的变换可得关于 Y 的区间预测.

时间序列(预测)法(time series (forecast) me-

thod） 一种常用的经济预测法. 即根据对过去按一定的时间间隔(年、季、月、日等)观测所得到的资料来给出对序列未来变化趋势的推测方法. 时间序列法用于经济预测是相当有效的，但由于其本质是一种外推法，故在预测未来很远时期的变化情况时，精度会大大下降.

时间序列法主要包括以下几种：

1. 移动平均法.
2. 加权移动平均法.
3. 指数平滑法.
4. 加权平滑法.
5. 季节系数调整法.
6. 自回归法.
7. 自回归移动平均法.
8. 自回归积分移动平均法.
9. 时间回归法.

移动平均法(moving average method) 简称 MA 模型法. 时间序列法的一种. 即利用最近若干期序列值的平均值来推测未来各期序列值的方法，设观测序列为 y_i $(i=1,2,\cdots,T)$. 一次移动平均值 $M_t^{(1)}$ 为

$$M_t^{(1)}=\frac{1}{N}(y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-N+1})$$

$$=M_{t-1}^{(1)}+\frac{1}{N}(y_t-y_{t-N});$$

二次移动平均值 $M_t^{(2)}$ 为

$$M_t^{(2)}=\frac{1}{N}(M_t^{(1)}+M_{t-1}^{(1)}+\cdots+M_{t-N+1}^{(1)})$$

$$=M_{t-1}^{(2)}+\frac{1}{N}(M_t^{(1)}-M_{t-N}^{(1)}),$$

其中 $N<T$，一般 N 取值范围为 $5\leqslant N\leqslant 200$. 类似地还可建立更高次的移动平均值. 当观测序列的基本趋势波动于一水平线时，可用一次移动平均法建立预测模型：

$$\hat{y}_{T+m}=M_T^{(1)}=\frac{1}{N}(y_T+y_{T-1}+\cdots+y_{T-N+1})$$

$$(m=1,2,\cdots).$$

当观测序列的基本趋势是波动于一非水平直线时，可由二次移动平均法建立线性趋势预测模型：

$$\hat{y}_{T+m}=a_T+b_Tm\quad(m=1,2,\cdots),$$

其中

$$a_T=2M_T^{(1)}-M_T^{(2)},\ b_T=\frac{2}{N-1}(M_T^{(1)}-M_T^{(2)}).$$

在时间序列分析中，移动平均法是最简单、也是最基本的一种方法，经常用作对数据的预处理. 在消除数据的周期波动，减弱随机干扰的影响方面颇具实效. 但在许多方面还具有相当的局限性，特别是对变动趋势较为复杂的观测序列来说，用移动平均法来作预测，精度不高. 另外，m 越大，预测的精度也越低. 一次移动平均法又称为简单平均法.

简单平均法(simple average method) 见“移动平均法”.

加权移动平均法(weighted moving average method) 移动平均法的一种改进. 它认为在观测序列中前期各序列值对当期序列值的影响随期限的加长而逐渐减弱，于是应加入权数 $w_i(i=1,2,\cdots,N,w_i\geqslant w_{i+1})$ 以区别其中不同程度的影响. 一次加权移动平均值 $w_t^{(1)}$ 为

$$w_t^{(1)}=\sum_{i=0}^{N}w_iy_{t-i+1}\quad(t=N,\cdots,T);$$

二次加权移动平均值 $w_t^{(2)}$ 为

$$w_t^{(2)}=\sum_{i=0}^{N}w_iw_{t-i+1}^{(1)}\quad(t=N-1,\cdots,T);$$

其中 w_i 满足

$$0<w_i<1,\sum_{i=1}^{N}w_i=1.$$

预测模型分别为

$$\hat{y}_{T+m}=w_t^{(1)}=\sum_{i=0}^{N}w_iy_{t-i+1}\quad(m=1,2,\cdots),$$

$$\hat{y}_{T+m}=a_T+b_Tm,$$

其中

$$a_T=2w_T^{(1)}-w_T^{(2)},\quad b_T=\frac{2}{N-1}(w_T^{(1)}-w_T^{(2)}).$$

加权平滑法(weighted smoothing method) 亦称适当滤波法. 指数平滑法的一种自然延伸. 与指数平滑法的不同在于计算前期各序列值对当期序列值的影响时，要求给出一组最适当的权数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots$，而指数平滑法中的权数 $\alpha,\alpha(1-\alpha),\alpha(1-\alpha)^2,\cdots$，只依赖于一个参数 α. 加权平滑法的一次平滑值为

$$w_t^{(1)}=\alpha_0y_t=\alpha_0y_t+\alpha_1w_{t-1}^{(1)}=\alpha_0\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_iy_{t-i},$$

其中 $\{y_t\}$ $(t=\cdots,-1,0,1,\cdots,T)$ 为观测序列；

一般 p 次光滑值 $w_t^{(p)}$ 为

$$w_t^{(p)}=\alpha_0w_t^{(p-1)}+\alpha_1w_{t-1}^{(p)}=\alpha_0\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_iw_{t-i}^{(p-1)}$$

$$(t=\cdots,-1,0,1,\cdots,T).$$

指数平滑法(exponential smoothing method) 由加权移动平均法发展起来的方法. 与加权移动平均法相比，指数平滑法将前期各序列值施加予当期序列值的影响权数，固定为 $\alpha,\alpha(1-\alpha),\alpha(1-\alpha)^2,\cdots$，而且假定这种影响是无限持续的. α 的一般范围在[0.1,0.5]内，适当地选取 α 的值是保证预测精度的关键所在. 设观测序列为 $y_t=\cdots,-1,0,1,\cdots,T$. 一次指数平滑值 $E_t^{(1)}$ 为

$$E_t^{(1)}=\alpha y_t+(1-\alpha)E_{t-1}^{(1)}$$

$$=E_{t-1}^{(1)}+\alpha(y_t-E_{t-1}^{(1)})$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i y_{t-i};$$

p 次指数平滑值 $E_t^{(p)}$ 为

$$E_t^{(p)} = \alpha E_{p-1t} + (1-\alpha) E_{t-1}^{(p)}$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i E_{t-i}^{(p-1)} \ (p = 2,3,\cdots);$$

作为预测模型有

1. 水平趋势预测模型

$$\hat{y}_{T+m} = E_t^{(1)} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i y_{t-i} \ (m=1,2,\cdots);$$

2. 线性趋势预测模型 $\hat{y}_{T+m} = a_T + b_T m$，

其中

$$a_T = 2E_T^{(1)} - E_T^{(2)}, \quad b_T = \frac{2}{N-1}(E_T^{(1)} - E_T^{(2)}).$$

3. 二次曲线趋势预测模型

$$\hat{y}_{T+m} = a_T + b_T m + \frac{1}{2} c_T m^2 \ (m=1,2,\cdots,)$$

其中

$$a_T = 3E_T^{(1)} - 3E_T^{(2)} + E_T^{(3)},$$

$$b_T = \frac{\alpha}{\alpha(1-\alpha)^2}[(6-5\alpha)E_T^{(1)} - 2(5-4\alpha)E_T^{(2)} + (4-3\alpha)E_T^{(3)}],$$

$$c_T = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}[E_T^{(1)} - 2E_T^{(2)} + E_T^{(3)}].$$

比指数平滑法更为一般的是加权平滑法.

适应滤波法(adaptive filtering method)　即"加权平滑法".

季节系数调整法(seasonal index adjustment method)　亦称季节补偿法、经典分解法. 时间序列法的一种. 即将时间序列中所包含的季节因素剔除掉以显示其长期趋势的方法. 它可以使预测结果更为精确. 设观测序列为$\{y_t\}$ $(t=1,2,\cdots,T)$，且 y_t 可分解为：

1. 加法模型. $y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$.
2. 乘法模型. $y_t = T_t S_t C_t R_t$.
3. 混合模型. $y_t = T_t C_t S_t + R_t$，或 $y_t = S_t + T_t C_t R_t$.

其中 T_t 表示 y_t 中代表其长期趋势的部分，S_t 表示 y_t 中代表其季节影响的部分，C_t 表示 y_t 中代表其周期循环的部分，而 R_t 表示 y_t 中所含随机干扰部分. 如果 C_t 的影响不存在，那么对第 1 种情形，

$$y_t = T_t + S_t + R_t \ (t=1,2,\cdots,T),$$

可令

$$S_t + T_t = \sum_{i=0}^{12} \left(a_i p \cos \frac{2\pi it}{T} + b_i \sin \frac{2\pi it}{T} \right),$$

其中 a_i, b_i 按最小二乘法，可由下面的方程组来确定：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

这里 A,B,C,D 均为 13×13 的方阵，其(i,j)位置的元素为

$$a_{ij} = \sum_{t=0}^{T} \cos \frac{2\pi it}{T} \cos \frac{2\pi jt}{T},$$

$$b_{ij} = \sum_{t=0}^{T} \sin \frac{2\pi it}{T} \cos \frac{2\pi jt}{T},$$

$$c_{ij} = \sum_{t=0}^{T} \cos \frac{2\pi it}{T} \sin \frac{2\pi jt}{T},$$

$$d_{ij} = \sum_{t=0}^{T} \sin \frac{2\pi it}{T} \cos \frac{2\pi jt}{T}$$

$$(i,j = 0,1,\cdots,12).$$

$$\alpha = (a_0, a_1, \cdots, a_{12})^T, \beta = (b_0, b_1, \cdots, b_{12})^T,$$

$$E = (E_0, E_1 \cdots, E_{12})^T, F = (F_0, F_1, \cdots, F_{12})^T,$$

其中

$$E_i = \sum_{t=0}^{T} y_t \cos \frac{2\pi it}{T}, \ F_i = \sum_{t=0}^{T} y_t \sin \frac{2\pi jt}{T},$$

$$(i=0,1,\cdots,12).$$

于是有

$$\hat{y}_t = \sum_{i=0}^{12} \left(a_i \cos \frac{2\pi it}{T} + b_i \sin \frac{2\pi it}{T} \right),$$

并且满足

$$\hat{y}_{12L+t} = \hat{y}_t \ (t=1,2,\cdots,12, L=1,2,\cdots).$$

只要求出 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{12}$，便可求出任一时期的预测值. 对第 2 种情形，$y_t = T_t S_t R_t, t=1,2,\cdots,T$，可设 $\hat{y}_t = T_t F_j$ $(j=1,2,\cdots,12)$，且 $T=12N, N=2,3,\cdots$由移动平均法可得

$$M_t^{(1)} = \frac{1}{2}(y_t + y_{t-1} + \cdots + y_{t-11})$$

$$(t=12,\cdots,T),$$

$$M_t^{(2)} = \frac{1}{12}(M_t^{(1)} + M_{t-1}^{(1)} + \cdots + M_{t-11}^{(1)})$$

$$(t=23,\cdots,T),$$

$$\hat{y}'_{T+L} = a_T + b_T L \ (L=0,-1,\cdots,-(T-1)),$$

其中

$$a_T = 2M_T^{(1)} - M_T^{(2)}, \ b_T = \frac{2}{11}(M_T^{(1)} - M_T^{(2)}),$$

令

$$S_{T+L} = \frac{y_{T+L}}{\hat{y}_{T+L}} \ (L=0,-1,\cdots,-(T-1)),$$

则平均季节指数.

$$\hat{F}_j = \frac{1}{2}(S_j + S_{j+12} + \cdots + S_{j+12(N-1)})$$

$$(j=1,2,\cdots,12),$$

而 $F_j = \hat{F}'_j / \overline{F}'$，其中

$$\overline{F}' = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \hat{F}_j \ (j = 1,2,\cdots,12).$$

最后有季节调整预测模型

$$\hat{y}_{T+L} = (a_T + b_T L) F_j$$

$$(L=1,2,\cdots; j=1,2,\cdots,12).$$

以上均假设观测序列$\{y_t\}$是按月度统计而得. 如果按季度,则只需将上面的 12 改成 4.

季节补偿法(seasonal compensated method) 即"季节系数调整法".

经典分解法(classical decomposition method) 即"季节系数补偿法".

自回归法(autoregressive method) 时间序列法的一种. 即利用时间序列$\{y_t\}$ $(t=1,2,\cdots,T)$的下列模型来预测的方法.

$$y_t=\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+\cdots+\phi_p y_{t-p}+\varepsilon_t,$$

其中当 ε 为正态白噪声时,y_t 为平稳序列. 这一模型是 p 阶自回归模型,简称 $AR(p)$模型,其参数 $\phi_1,\cdots,\phi_p$ 可由尤尔-瓦尔克方程组解出:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}$$

其中

$$\rho_k=\frac{E(y_t y_{t+k})}{\sqrt{Ey_t^2 Ey_{t+k}^2}}\quad(k=1,2,\cdots),$$

预测模型为

$$\hat{y}_{T+L}=\phi_1\hat{y}_{T+L-1}+\phi_2\hat{y}_{T+L-2}+\cdots+\phi_p\hat{y}_{T+L-P}\quad(L=1,2,\cdots).$$

自回归移动平均法(autoregressive moving average method) 简称 ARMA 模型法. 自回归法与移动平均法的结合对平稳时间序列的应用. 设时间序列$\{y_t\}$ $(t=1,2,\cdots,T)$,具有遍历性质,且满足

$$\phi_p(B)y_t=\theta_q(B)\varepsilon_t,\tag{1}$$

其中 B 为时滞算子:$By_t=y_{t-1},\cdots,B^m y_t=y_{t-m}$ $(m=1,2,\cdots)$,$\theta_p(B)=1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p$ 为 p 阶自回归算子;$\theta_q(B)=1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q$ 为 q 阶自回归算子;ε_t 是正态白噪声,$E\varepsilon_t^2=\sigma_\varepsilon^2$,$E\varepsilon_t y_{t+s}=0$ $(t=1,2,\cdots,T,s=1,2,\cdots)$,若 $\phi_p(B)=0$ 与 $\theta_q(B)=0$ 无相同根,并且它们的根都在单位圆外,则称(1)式为 AMRA 模型. AMRA 模型共有 $p+q+1$ 个参数:$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q,\sigma_\varepsilon^2$,可由下列尤尔-瓦尔克方程组解出:

$$\begin{pmatrix} \rho_q & \rho_{q-1} & \cdots & \rho_{q-p+1} \\ \rho_{q+1} & \rho_q & \cdots & \rho_{q-p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{q+p-1} & \rho_{q+p-2} & \cdots & \rho_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{q+1} \\ \rho_{q+2} \\ \vdots \\ \rho_{p+q} \end{pmatrix},$$

其中

$$\rho_k=\frac{E(y_t y_{t+k})}{\sqrt{Ey_t^2 Ey_{t+k}^2}}\quad(k=0,1,\cdots,T).$$

于是,令 $\bar{y}_t=\phi_p(B)y_t$,则由 $\bar{y}_t$ 的方差函数

$$\sigma_k(\bar{y}_t)=\begin{cases}\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2) & (k=0)\\ \sigma_\varepsilon^2(-\theta_k+\theta_1\theta_{k-1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q) & (1\geqslant k\geqslant q)\\ 0 & (k>q)\end{cases}$$

$$=\sum_{i,j=0}^{p}\psi_i\psi_j r_{k+j-i}(y_t),$$

可解得 σ_ε^2 及 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q$. 最后有自相关移动平均预测模型:

$$\hat{y}_{T+L}=\phi_1\hat{y}_{T+L-1}+\phi_2\hat{y}_{T+L-2}+\cdots+\phi_p\hat{y}_{T+L-p}\quad(L=1,2,\cdots).$$

自回归积分移动平均法(autoregressive integrated moving average method) 简称 ARIMA 模型法. 自回归移动平均法在非平稳随机时间序列上的应用. 设$\{y_t\}$ $(t=1,2,\cdots,T)$,为非平稳齐次观测时间序列,并满足遍历性. 如果 y_t 的 m 阶差分 $\Delta^m y_t$ 所形成的时间序列$\{x_t\}$,$(x_t=\Delta^m y_t,t=m+1,\cdots,T)$成为平稳序列,则称

$$\Phi_p(B)x_t=\Phi_p(B)\Delta^m y_t=\Theta_q(B)a_t,t>m$$

为自回归积分移动平均模型,其中 Φ_p 和 Θ_q 分别是 p 次和 q 次多项式,B 表示时滞算子. 记为 ARIMA (p,m,q). 显然,只要对 y_t 先求出其 m 阶差分 x_t 来,就可根据 x_t 的 ARMA 模型构造预测模型.

多元自回归移动平均法(multivariate autoregressive moving average method) 简称 MARMA 模型法,ARMA(p,q)模型中 $p>1$ 的情况(参见"自回归移动平均法").

时间回归法(time regressive method) 时间序列法与回归分析法的结合. 指数平滑法中,当序列的趋势很复杂,需要经过高次平滑才能找出时,一般都采取时间回归法来简化模型以减少运算量. 经常用于描述时间序列趋势变动的模型有:

1. 线性方程:$y_t=a+bt$.
2. 二次曲线:$y_t=a+bt+ct^2$.
3. 指数曲线:$y_t=Ae^{at}$.
4. 修正指数曲线:$y_t=k+ab^t$.
5. 康贝茨曲线:$\ln y_t=k+ab^t$ $(0<b<1)$.
6. 逻辑斯谛曲线:$y_t=\dfrac{1}{k+ab^t}$ $(0<b<1)$.
7. 振动曲线:$y_t=f(t)+A\cos(\omega t+\psi)$,$f(t)$为 t 的多项式.

上述各曲线几乎都可以化为线性模型(参见"回归分析法"和"线性模型法").

马尔可夫链法(Markov chain method) 亦称马尔可夫预测分析. 把经济事态的演变设想为有限马尔可夫链的预测方法. 所谓有限马尔可夫链是指只取有限种状态的无后效性的随机过程. 例如,某种股票的隔日价格变化可以有涨和跌两种状态. 如果认为它是按马尔可夫链的规律来变化的,那么其变化规律就由一个 2×2 的状态转移矩阵来决定. 这个

矩阵的四个元素是继续上涨的概率、涨转跌的概率、跌转涨的概率、继续下跌的概率.根据统计资料,可以对这四种概率有一个估计.由此就可根据以往的股市,来预测明天以至若干天后的该股票价格的涨跌的概率.马尔可夫链法常用于各种市场预测.

马尔可夫预测分析(Markov forecasting ananlysis) 即"马尔可夫链法".

类比预测法(analogy predicted method) 利用模型间的相似性来类比的预测法.如果两个或两个以上的经济变量,其结构和形式上的变化与发展存在着相同或相似的特点,那么人们就称这两个(或这些)变量之间存在着某种可类比性.当两个可类比的经济变量,在其变化发展过程中存在着时间差异时,人们便可以利用变化在前的变量的结构特点和发展规律来预测变化在后的变量的结构特点和发展规律.这种方法就称为类比预测法.例如,在黑白电视机与彩色电视机的市场销售与公众消费方面,便具有相当大的可类比性,而黑白电视机发展在前,对它的销售情况与消费特点,人们已有了足够多的研究和认识,也积累了大量的数据资料.于是,人们就可以直接利用关于黑白电视机的各种研究结果来预测彩色电视机的市场销售趋势和公众消费的变化规律.使用类比预测法既可作定性分析,也可作定量分析.

金 融 数 学

金融数学(mathematics of finance ,mathematical finance,financial mathematics) 一般理解为金融学中用到的数学或者金融学中遇到的数学问题的研究.狭义的金融数学的主要内容如达菲(Duffie,D.)于 1996 年所说,是不确定环境下的多时期框架中证券组合选择和资产定价理论.其中最主要的三个概念是:套利、最优和均衡.与证券市场上流行的技术分析不同的是:技术分析的出发点是寻求证券市场上的套利机会,资产定价理论面临的则是一个无套利机会的成熟市场;而个体经济活动者都在这样的市场中求最优;市场则在竞争中期望达到供需均衡.这三点构成金融数学研究的基本经济思想,其中后两点是微观经济学中新古典主义经济学的基本假设.理论上一般认为,金融数学前驱性的工作应该是美国学者阿罗(Arrow,K. J.)于 1953 年关于证券市场的一般均衡模型的研究.金融数学作为学科名称出现,至今不过十来年的时间.通常认为它是两次"华尔街革命"(即 1953 年美国学者马科维茨(Markowitz,H. M.)的证券组合选择理论和 1973 年布莱克-肖尔斯的期权定价理论)的产物.

金融工程(financial engineering) 一门使金融产品工程化的新学科.金融工程原先的狭义定义是组合金融工具(主要包括形形色色的衍生工具)和风险管理技术的研究.随着 20 世纪 70,80 年代以来金融创新和金融自由化浪潮席卷西方世界,人们对金融工程的认识迅速拓宽.成立于 1991 年的"国际金融工程师学会(IAFE)"对这一新兴学科在更广泛的意义上作了如下的界定:

金融工程将工程思维引入金融领域,综合地采用各种工程技术方法(主要有数学建模、数值计算、网络图解、仿真模拟等)设计、开发和实施新型的金融产品,创造性地解决各种金融问题.

这里的金融产品是广义的.它既包括金融商品(所有在金融市场交易的金融工具(亦称有价证券)如股票、债券、期货、期权、互换等都可看做是金融商品),也包括金融服务(结算、清算、发行、承销等都是金融服务).而设计、开发和实施新型的金融产品的目的是为了创造性地解决各种金融问题,因此金融问题的解就可以看做金融产品.这里提到的"新型"和"创造性"有三层涵义:一是指金融领域中思想的跃进,其创新程度最高,如第一份期权和约的产生;二是指对已有观念作重新理解与运用,如在商品交易所推出金融期货作为新品种;三是指对已有的金融产品进行分解和重新重合.

费纳尔迪(Finnerty,J. D.)于 1988 年还进一步认为,只有当下列两个条件中至少一个成立时,一种新证券才是创新的:与发行之前相比较,其一,在不影响发行人的税后资金成本的条件下,它使得投资者实现更高的税后收益;其二,在不影响投资者的条件下,它使得发行人获得了更低的资金成本.从这个意义上来说,只有当它提高了证券市场的有效性或完全性时,一种证券才是创新的.更进一步说,如果金融市场是强有效的而且是完全市场,那么金融创新就会失去意义.根据费纳尔迪于 1988 年、英国数学家马歇尔(Marshall,J. F.)和班赛尔(Bansal,V. K.)于 1992 年对金融工程的定义和研究范围的界定以及该学科近年来的发展,通常认为金融工程研究的范围包括如下四个层次:第一层次是金融工具与金融手段的设计、开发和实施;第二层次是风险管理技术,即运用各种金融工具和手段以达到预期的收益/风险目标;第三层次是整个金融架构的创造,例如设计企业的兼并与收购方案,资产证券化,设立货币市场基金,建立回购/反向回购市场等;第四层次是对金融市场的研究,例如对金融市场的完全性、有效性及金融市场的一般均衡的研究,以及对金融市场在整个市场体系中的地位、作用的研究等.

均值-方差分析(mean-variance analysis) 一种广泛应用于金融分析中的数量统计分析方法.在金融市场上对多种风险资产进行选择时,在给定的

收益水平，希望选择风险尽量小的资产．考虑一个由 n 种证券构成的投资组合

$$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n),$$

假定这 n 种证券的收益向量为 μ，各证券收益间的协方差矩阵为 $\sum$．这个投资组合的期望收益为 $E=\mu' X$，其方差为 $\sigma^2=X'\sum X$．一个投资组合称为一个可行的投资组合，是指 X 满足约束条件：$AX=b$，其中 A 为 $m\times n$ 系数矩阵，b 为 m 维常数向量．一个可行的投资组合称为是有效的，是指任何一个可行的投资组合或是没有比它更大的收益，或是没有比它更小的风险．一个投资组合称为是一个前沿，是指在所有具有相同期望收益的可行投资组合中，它是风险最小的投资组合．一个投资组合是前沿的充分必要条件是这个投资组合的权重系数向量

$$W=(W_1,W_2,\cdots,W_n)$$

是下列规划问题的解：

$$\min_{\{w\}} \frac{1}{2}W' \sum W$$

约束条件

$$W'\mu = E,\ W'I = 1$$

在所有的投资组合中，其风险最小的称为最小风险投资组合；由所有具有最大收益的前沿构成的全体称为有效的投资组合，对每一个有效的投资组合，一定存在另一个前沿使得它与这个有效投资组合的协方差为零．在已知投资组合的期望收益和方差的条件下，美国学者马科维茨（Markowitz，H. M.）于1959年给出一时期效用函数的近似方法．美国经济学家萨缪尔森（Samuleson，P. A.）于1970年给出了均值-方差分析的渐近充分条件．

通常的均值-方差分析针对一个时期的投资组合问题．如果把每一时期末的资产持有作为一时期效用函数的惟一状态变量，均值-方差分析可推广到多时期的投资组合问题．均值-方差分析的应用可以归为两个方面，一方面是把它用于实际的投资管理，如流动性偏好分析、资本资产定价模型、布莱克-肖尔斯的期权价格分析等．另一方面是从整个经济的角度，假定所有的投资者都具有相同的均值方差标准．其面临的主要问题是如何简化协方差矩阵的估计，美国学者夏普（Sharpe，W. F.）等提出的单因子模型和随后的多因子模型，都尽可能简化模型的参数估计，使得能在数百种证券中选择有效的投资．

最小风险投资组合（minimal risk portfolio） 见"均值方差分析"．

资本资产定价模型（capital asset pricing model） 简称CAPM．最早的一个在不确定性假设下对资本资产定价的均衡模型．这是一个相对定价模型，模型表述了资产价格依赖于资产所处的外部环境、投资者的品味和初始持有等．用概率分布来表示不确定性条件下资产的未来收益早在20世纪初就开始．20世纪30年代起，提出投资的偏好可以看做是对投资收益的概率分布的矩的偏好．作为一个近似，投资者的偏好可以用收益-风险空间中的无差异曲线来表示．20世纪50年代，美国学者马科维茨（Markowitz，H. M.）的投资组合理论，根据资产组合的总收益和收益的风险来确定投资者的偏好，应用边际分析方法来进行最优投资组合的选择，奠定了资本资产定价模型的基础．马科维茨和美国学者托宾（Tobin，J.）于1958年证明了如果效用函数是收益的二次函数，那么均值-方差偏好与冯·诺伊曼-莫根施特恩的公理是一致的．托宾的分析方法是讨论在单一的风险资产和现金之间的选择问题；这就是资产组合理论中的第一个分离定理．

美国学者夏普（Sharpe，W. F.）于1964年和美国学者林特纳（Lintner，J.）于1965年利用托宾分离定理的均衡结论，在假设所有投资者都对证券收益的联合分布持有相同的信念的条件下，建立了资本资产定价模型．在这种对联合分布的信念相似的假设与进一步假定所有投资者以无风险利率既能贷出又能借入的条件下可得出一个很强的结论：所有投资者都持有同样的风险资产组合——市场中所有风险资产的市场资产组合．

夏普-林特纳资本资产定价模型（Sharpe-Lintner capital asset pricing model） 一种著名的资本资产定价模型．假设：

1．投资者的效用函数由期末的收益和风险完全确定．

2．证券在没有赋税和交易成本的完全市场中进行交易．

3．投资者对未来证券收益的分布具有相同的信念，证券没有分红．

4．存在一个由外部决定的利率 r，每个投资者在此利率下可以任意地借入和贷出．

5．可以卖空．

把无风险资产的收益记为 r_f，市场组合的收益记为 r_m，则任一证券的收益由它与市场组合的相关系数决定，资产的收益率与该资产同市场组合的收益率的相关系数成正比．即

$$E[r_i] = r_f + \beta_{im}(E[r_m] - r_f).$$

其中

$$\beta_{im} = \frac{Cov(r_i,r_m)}{Var[r_m]}$$

通常称为证券 i 的"贝塔"系数．β_{im} 也可看成是该资产的收益 r_i 与市场组合资产收益 r_m 的回归系数，即

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i.$$

其中 ε_i 为随机干扰项．对上式两边取期望可导出限制条件 $\alpha_i=(1-\beta_i)r_f$，这个限制条件和市场组合存

在正的风险补偿正是夏普-林特纳模型的实证预测.

证券的贝塔系数(β-coefficient of security) 见"夏普-林特纳资本资产定价模型".

资产定价模型的实证检验(empirical testing of asset pricing models) 对各种可选的资产定价模型用各种实际数据验证模型及其假设,其中心问题是检验在对投资者所面临的经济环境的各种假设之下导出的理论模型的合理性.金融中的实证分析研究远远超过经济学的其他分支学科.一方面,关于各种金融中的相关变量有高质量的数据可供分析,如股票价格、利率、债券收益等;另一方面,在金融实证研究中,通过是否取得赢利这一共同标准使得金融模型能及时地用于实际操作的估价中,理论与实际的不断结合与反馈促进了资产定价研究的发展.对投资者的行为有两个方面的假定:一方面是对投资者而言,没有免费的午餐,即证券的价格将不能让投资者找到任何套利的机会;另一方面认为投资者的行为是理性的,对各种投资结果具有客观的概率信念和理性的预测.证券价格是其收益和状态价格密度乘积期望的累积,即

$$P_{i,t}=\sum_{j=1}^{\infty}E[d_{i,t+j}Q_{t,j}|I_t]\ (Q_{t,j}>0,t,j>0),$$

式中 $d_{i,t+j}$为证券 i 在 $t+j$ 时期的收益,$Q_{t,j}$为状态价格密度,I_t 为到 t 时刻所能得到的所有信息集.在现值模型中,$Q_{t,j}$可看成是折现因子,在鞅模型中,$Q_{t,j}$代表投资者对第 t 和第 $t+j$ 时期产品消费的边际替代率.$Q_{t,j}$在资产定价模型中通常被称为定价算子.根据对定价算子 $Q_{t,j}$的不同假定和对分离基金定理中均值-方差有效投资组合的选取,资产定价模型主要有以下几种形式:资本资产定价模型(CAPM)、套利定价理论(APT)、跨期资本产定价模型(ICAPM)、消费型资本资产定价模型(CCAPM)、消费型连续时间资本资产定价模型、含有不可交易资产的定价模型等.

以下通过讨论一种重要的情况——零贝塔的CAPM,对一个给定的投资组合 p 检验它是否是均值方差有效的问题来说明检验的过程.其模型为:

$$r_{t+1}=r_z+\beta_p(r_{p,t+1}-r_z)+\varepsilon$$

其中投资组合 z 的期望收益为 r_z,每个证券的系数向量 β_p 和残差协方差矩阵$\sum_p$ 都为未知参数.相关的许多计量经济学问题与这个非时变的贝塔定价模型有相似的几何描述.如果一个投资组合(如 p^*)是均值-方差有效的,则与其相对的所有零贝塔投资组合(如 z^*)具有相同的期望收益.由 p^* 及其正交组合所构所的成本为零的投资组合,其期望收益为 0,具体地说,均值-方差有效性检验就是回答其相应的成本为零的投资组合,其期望收益是否为零.考虑一个证券的无条件期望收益

$$E[r_{i,t+1}]=\alpha_{i,p}+(1-\beta_{i,p})r_z+\beta_{i,p}E[r_{p,t+1}],$$

其中参数 $\alpha_{i,p}$是由买进一个单位货币的证券 i,卖空$(1-\beta_{i,p})$个单位货币的投资组合 z 和 $\beta_{i,p}$个单位货币的投资组合 p 所构成的投资组合的期望收益.若 p 是一个有效的投资组合,则这个净投资为 0 的零贝塔投资组合的期望收益 $\alpha_{i,p}$必为 0.在没有特别的备择假设时,统计学家将自然地检验假设:所有的 N 个参数 $\alpha_{i,p}$都为零和备择假设:其中的某些参数非零.检验就是寻找 N 维空间中的无成本零贝塔投资组合中至少有一个具有非零的期望收益.在假设收益的分布服从联合正态且不同时期的分布独立的条件下,这正好是多元回归模型中对所有的截点都为零的标准 F-检验,其检验统计量服从自由度分别为 N 和 $T-N-1$ 的 F 分布.

对 CAPM 实证研究分为两个阶段:早期的研究主要是验证各种 CAPM 的表示方法,后一阶段的研究围绕着寻找通过估计的贝塔系数进行风险调整后,证券特征和假日效应等'异常'收益的证据,通过对单个证券进行统计分析发现红利和剩余风险对CAPM 有影响,最明显的证据是夏普-林特纳型CAPM 的零贝塔期望收益率 r_z 显著高于无风险利率.根据使用的方法,对 APT 的实证检验可以分为三类:

第一类是用极大似然因子分析和主成分分析等统计方法,通过收益的协方差矩阵的结构来确定模型因子;

第二类是通过先验地指定一些宏观变量的增长率或一些特别资产或投资组合收益作为模型因子,这类方法对预检验的偏差比较敏感;

第三类预定一个反映证券与公共因子之间的关系(即贝塔系数)来代替对证券特征的假定.虽然红利和剩余风险在 APT 中得到改进,但在实际应用中对 CAPM,APT 和跨期模型的区分并不明确.

系统风险(systematic risk) 描述投资的总风险中不能用投资组合的方法分散掉的部分.系统风险之所以不可规避,是因为它来源于经济中影响众多投资的收益的因素.例如,许多投资的未来收益依赖于国民经济的状况、中央政府的财政政策、利率水平、经济中广泛使用的商品的价格等因素.因为系统风险不能规避,所以投资者需要得到补偿作为承受系统风险的代价.投资总风险中除掉系统风险后剩余的部分被称为非系统风险,它与影响某项投资的特别因素有关.例如,普通股票的未来收益与公司的研究开发支出和广告支出有关."系统风险"最先由美国学者夏普(Sharpe,W. F.)于 1964 年用在投资领域中.

根据资本资产定价模型(CAPM),一项投资的期望收益是市场组合期望收益的线性函数.由于存

在着影响投资的特质因素，投资的实际收益可能偏离期望收益. 用下式来表示投资收益与市场组合收益之间的关系：

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$$

其中 R_i 是投资 i 的收益，R_M 是市场组合的收益，ε_i 是投资的特质收益

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, R_M) = 0, \beta_i = \mathrm{cov}(R_i, R_M)/\mathrm{var}(R_M)$$

刻画了投资的系统风险. 因此，投资的风险可以分成系统风险和非系统风险两部分，即，

$$\mathrm{var}(R_i) = \beta_i^2 \mathrm{var}(R_M) + \mathrm{var}(\varepsilon_i)$$

其中前一项是投资 i 的系统风险，后一项是投资 i 的非系统风险.

投资组合的 β 系数是各项投资的 β 系数的加权平均，权数为各项投资占总投资的比例. 根据 CAPM，投资组合的期望收益决定于投资组合的系统风险，风险资产的价格是资产未来期望收益的现值，贴现率是根据资产的系统风险而不是总风险调整的.

虽然系统风险的概念是在 CAPM 的框架下发展起来的，它也能应用于其他资产定价模型，如套利定价模型.

非系统风险(nonsystematic risk)　见“系统风险”.

市场组合(market portfolio)　见“系统风险”.

特质收益(idiosyncratic return)　见“系统风险”.

套利(arbitrage)　一种投资策略. 它能保证投资者在没有正的净投资的前提下获得正的收益. 现代经济学对套利的研究是研究无套利机会在经济学上的意义.

第一个明确描述并证明“无套利机会”可以推出“存在非负状态价格”的美国经济学家是罗斯(Ross, S. A.)于 1976 年和 1978 年，他不仅提供了一个形式的分析框架，而且证明了存在一个线性定价规则对所有资产(而不仅仅是市场上交易的资产)进行定价. 线性定价规则可以从交易资产构成的集合延拓到状态集上定义的所有虚拟资产. 这样延拓的好处是定价函数的定义域不依赖于交易资产构成的集合. 这里线性定价是指价格函数或价格算子在代数意义上是线性的；即，若用 q 表示价格函数或算子，x 和 y 表示两种资产，则称 q 为一个线性定价规则是指对于任何实数 a, b，有

$$q(ax + by) = aq(x) + bq(y).$$

对许多状态空间(包括有限状态空间)而言，q 可以表示成状态价格乘以数量再对状态求和或积分的形式. 以简单的两时期、有限状态空间模型为例说明. 用 Θ 表示状态空间，$\Theta = \{1, 2, \cdots, m\}$. 用 e_θ 表示指标资产，它在状态 θ 的支付为 1，在其他状态的支付为 0. 假设对每一个状态 θ，可以定义一个状态价格为 q_θ. 那么定义

$$q(x) = \sum_\theta q_\theta x_\theta,$$

其中 x_θ 表示资产在状态为 θ 时的值(作为指标资产 e_θ 的倍数)，q 就是一种线性定价规则.

另一方面. 设市场上交易的资产共有 n 种，它们在第一时期的价格向量记为 p，资产 i 在第二时期状态 θ 的支付为 $X_{\theta i}$. 用 $X = [X_{\theta i}]$ 表示支付矩阵，其行对应于状态，其列对应于资产. 这时，一个套利机会就是一个资产组合 η，它满足两个条件. 第一，它在第一时期的成本不大于零，即 $p \cdot \eta \leqslant 0$. 第二，它在第二时期的支付不小于零，$X\eta \geqslant 0$(这是一个向量不等式，其含义为每个分量不小于零)，并且以上两不等式中至少有一个不是等式. 在这样的框架下，罗斯的结果可叙述为无套利机会等价于存在一组正状态价格. 这一结果也称为资产定价基本定理.

现代金融学的许多理论都以无套利理论为基础，甚至可以用无套利这一概念来统一金融学. 在有效资本市场里，资产价格反映了所有可以获取的信息. 如果资本市场不是有效的，资产价格没有完全反映所有可以获取的信息，那么市场上存在没有正确定价的资产. 对于价格过高的资产，采用卖空的策略可以获利；对于价格过低的资产，采用买入的策略可以获利. 尽管这只是“近似套利机会(指承担很小的风险就可以获取大量利润的机会)”，但是，对于风险中性的投资者来说，只要近似套利机会存在，就可以赢利. 从这个意义上来说，有效市场理论与套利理论基本上是吻合的. 公司理财的核心内容 *MM* 定理的中心思想是资本市场不存在套利机会. 事实上，该定理的原始证明就利用了套利理论：能完全替代的两种资产具有相同的价格. 罗斯应用套利理论推导出著名的套利定价理论. 著名的布莱克-肖尔斯公式乃至由它导出的期权定价理论都是以无套利为基础.

虚拟资产(dummy assets)　见“套利”.

近似套利机会(approximate arbitrage)　见“套利”.

资产定价基本定理(the fundamental theorem of asset pricing)　套利定价的一般原理. 该定理可表述为：无套利假设等价于存在对未来不确定状态的某种等价概率测度，使得每一种金融资产的折现价格过程在该等价概率测度下为鞅. 资产定价基本定理是美国经济学家罗斯(Ross, S. A.)在关于 APT 的经典论文中提出的(参见“套利”).

套利定价理论(arbitrage pricing theory)　简称 APT. 资本资产收益的一种因子结构. 这一理论是美国经济学家罗斯(Ross, S. A.)于 1976 年创立

的.

1. 基本模型：假设每个投资者都相信资本资产的收益(单时期随机向量)满足下述因子模型：

$$r = E + Bf + e, \tag{1}$$

其中 r 和 e 是 $N\times 1$ 随机向量，因子 f 是 $K\times 1$ 随机向量，E 是 $N\times 1$ 向量，B 是 $N\times K$ 矩阵. 假设

$$E(f)=E(e)=0,$$

因此，$E(r)=E$. 对协方差矩阵 $E(ee^T)$ 的对角元、$E(ee^T)$ 与 BB^T 的特征值之间的关系加上一定的限制. 又假设资产的数目 N 远大于因子的个数 K. 在一些模型中，假设 $N\to+\infty$. 在上述条件下，存在 $(K+1)\times 1$ 向量 u(风险报酬)、正定矩阵 Z 和常数 a，使得

$$(E-Cu)^T Z^{-1}(E-Cu)\leqslant a, \tag{2}$$

其中 $C=(i,B)$，i 是 $N\times 1$ 列向量，每个分量为 1；正定矩阵 Z 通常就是协方差矩阵 $E(ee^T)$. 如果模型中包含无风险资产，那么 u 的第一个分量是无风险利率. 这个关系式说明 E 的每个分量近似线性地依赖于 B 的相应列向量. 常数 a 越小，逼近的效果越好. 如果 $a=0$，那么就得到严格的线性关系或严格的套利定价：$E=Cu$；

2. 实证检验：由于 APT 没有告诉人们如何确定因子，因此，对 APT 的实证检验都是对价格关系和因子正确性的联合检验. 对 APT 的检验通常忽略(2)并直接研究严格套利定价，它包含两个步骤：首先估计因子或者至少估计(1)中的矩阵，然后，检验严格套利定价是否成立. 这样，对 APT 的检验其实是对矩阵的正确性和严格套利定价的联合检验.

矩阵 B 的估计至少有三种方法：

1. 对估计的资产收益协方差矩阵进行算法分析.

2. 在估计资产收益协方差矩阵的基础上研究者选择因子，然后估计矩阵 B.

3. 研究者直接根据直觉来选择因子，然后估计矩阵 B 并检验它们是否满足严格套利定价公式.

总的来说，对 APT 进行实证检验的大部分文章支持 APT. 但是，像 CAPM 那样，即使把小公司和大公司的风险差异考虑在内，APT 也难以解释小公司和大公司的资产收益的差异，并且对此进行检验产生的结果也是混杂的.

到现在为止，APT 看起来比其他模型或理论更好地描述了现实数据. 但是，需要指出的是，APT 实证检验的成功也许是由于检验方法存在着缺点.

套利定价理论的基本模型(basic model of APT)　见“套利定价理论”.

套利定价理论的实证检验(empirical testing of APT)　见“套利定价理论”.

有效市场(efficient market)　简称 EM. 资本市场的一种. 是指在资本市场上确定资产价格时利用了所有可以获取的信息. 用数学语言描述就是所谓的 EMH 方程，即有效市场假设 $E(R_t|I_t)=1+r_t$ 或 $E(P_{t+1}|I_t)=(1+r_t)P_t$ 或

$$E\left(\frac{P_{t+1}}{1+r_t}\middle| I_t\right)=P_t,$$

其中 $E(\cdot|\cdot)$ 表示条件数学期望，R_t 表示风险资产从时间 t 到 $t+1$ 的(随机)总收益，I_t 表示在时间 t 获取的信息集合，r_t 表示在时间 t 的无风险利率，P_t 表示在时间 t 的资产价格. 有效市场按照所含信息从多到少的顺序分为强形式、半强形式和弱形式. 强形式有效市场是指信息集 I_t 中包含了所有可以获取的与资产定价有关的公开信息和未公开信息. 半强形式有效市场是指 I_t 中只包含了所有公开信息. 弱形式有效市场只要求信息集 I_t 中含有时刻 t 以及此前的资产价格信息.

有效市场假设(efficient market hypothesis)　见“有效市场”.

强形式有效市场(efficient market in storng form)　见“有效市场”.

半强形式有效市场(efficient market in semi-strong form)　见“有效市场”.

弱形式有效市场(EM in weak form)　见“有效市场”.

有效市场假设的实证检验(empirical testing of efficient market hypothesis)　根据资本市场的实际数据，运用统计方法对 EMH 进行检验，以解释用于确定价格的信息集 I_t 的内容. 对 EMH 的实证检验产生了大量的文献，总的来说，支持 EMH 的文献居多. 这种检验其实是对 EMH 和机会成本的确定及其相关理论的联合检验. 实证检验的大量结果表明，资本市场与弱形式有效性比较吻合，而对强形式有效性的检验所产生的结果则是混杂的. 对半强形式有效性的检验产生的结果在学术界尚存在分歧. 从 20 世纪 80 年代开始，在 EMH 检验中采用了许多新的统计方法，但产生的结果是混杂的.

当金融商品定价已建立在无套利假设的基础上时，对市场是否有效的实证检验就和金融理论是否与市场现实相符几乎成了一回事. 如果金融市场的价格变化能通过布朗运动之类的市场有效性假设的检验，那么市场就会满足无套利假设. 对投资者来说，因为无套利机会，就只能采取保守的投资策略. 而如果市场有效性假设检验通不过，那反映市场有套利机会，市场价格在一定程度上有可预测性，投资者应采取积极的投资策略.

期权(option)　一种有价证券. 其所有者具有在未来到期日按照事先规定的执行价格买入(卖出)一定数量的某种金融资产或实物资产(称为“标的资

产")的权力.期权分为欧式期权和美式期权.如果期权在规定的期限内没有被执行,它就变成一纸空文.没有任何价值.第一个有组织的普通股票期权交易市场于 1973 年在美国的芝加哥成立,名为芝加哥期权交易所(Chicago Board Options Exchange,CBOE)最先的交易品种为 16 种上市股票的买入期权.CBOE 的交易品种很快就扩展到以固定收入证券、货币、股票和债券指数以及商品期货为标的物的期权.美国股票交易所太平洋股票交易所和费城股票交易所也在随后几年里成立了类似的期权交易所,1977 年,这些期权交易所开始交易卖出期权.尽管期权市场发展迅速,但期权至今仍是一种专业化较强的证券.

标的资产(underlying asset)　见"期权".

期权定价理论(option pricing theory)　金融学中最基本的研究课题之一.1973 年(同年创立了芝加哥期权交易所,简称 CBOE)美国学者布莱克(Black,F.)和美国学者肖尔斯(Scholes,M. S.)合作发表了在期权定价方面的著名文章,从此期权定价理论获得了重大突破.

期权定价理论包含下述内容:

1. 买入－卖出期权平价关系.
2. 美式买入期权的最优执行方案.
3. 布莱克-肖尔斯期权定价模型.
4. 布莱克-肖尔斯分析.
5. 布莱克-肖尔斯期权定价偏微分方程等.

期权定价理论已经成为金融经济理论的基石,类似于期权的结构存在于金融经济学的每一个角落.布莱克和肖尔斯早在 1973 年就提出了应用期权定价理论的一个重要例子:公司股票的支付结构等价于以其资产为标的资产的买入期权的支付结构,该期权的执行价格是公司的账面债务,到期日为公司债务的到期日.因此,期权定价理论可以用于对公司的股东权益和债务进行定价.

许多公司金融工具与期权具有相同或相近的结构,可以利用期权定价理论构建这些金融工具的定价模型,用于对债务进行优先级、赎回、沉淀基金等安排;对债券进行可转换安排;对贷款设定利率上、下限;用股票和债券进行担保.总而言之,期权定价理论为公司债务的定价提供了理论基础.

期权定价的方法还可用来对非公司财务安排(如政府贷款担保、养老保险和存款保险等).进行定价,对各种雇员补偿计划进行评估.期权定价分析与资产组合理论相结合,已经成为研究保险理论的重要工具.金融机构在设计金融产品组合时,期权定价分析在风险共享产品的确认、产品定价、风险管理和风险控制等方面的作用尤为突出.

期权定价理论可以用于评估资本预算决策问题中的运行期权或实物期权.举例来说,有两套生产设施:一套可以使用多种投入并生产出多种产品;另一套是专用设施.只能使用一种投入,生产出来的产品只有一种.前一套设施为企业提供了运行期权或实物期权,期权定价理论可用来对它进行评估.

期权分析特别适用于评估项目的弹性部分,而这正是传统的资本预算技术难以胜任的工作.因此,期权定价理论为项目预算提供了适当的数量评估方法.

期权定价理论的研究工作开始于 1900 年,当时法国数学家巴歇利埃(Bachelier,L.)在巴黎大学写了一篇名为"投机理论"的论文.在该文中作者分析了期权定价问题,推导出了许多有关扩散过程的数学结果,这比美籍德国科学家爱因斯坦(Einstein,A.)发现布朗运动的数学理论早了五年.

运行期权(operating options)　见"期权定价理论".

实物期权(realoptions)　见"期权定价理论".

买入-卖出期权平价关系(put-call parity relation)　买入期权与卖出期权之间关系式.它说明买入期权的定价和卖出期权的定价是等价的.用数学公式表示为

$$P(s,t)+s=C(s,t)+E(1+r)^{-(T-t)},$$

其中 s 是标的股票的价格,T 是期权到期日,E 表示期权的执行价格,t 表示时间,r 是无风险利率,$P(s,t)$和 $C(s,t)$分别是卖出、买入期权的市场价.同时还假定以股票为标的资产的欧式买入、卖出期权,它们的执行价格到期日,标的股票都是一样的,而且在到期日之前不分红.

布莱克-肖尔斯期权定价模型(Black-Scholes option pricing model)　刻画欧式股票买入期权定价的数学模型.在 T 时刻到期的欧式股票买入期权在 t 时刻的价格为

$$C(S,t)=SN(d_1)-e^{-r(T-t)}EN(d_2)$$

这就是赫赫有名的布莱克-肖尔斯期权定价公式,其中 S 是标的股票在 t 时刻的价格,E 是期权的执行价格,$N(\cdot)$是累积标准正态分布函数,r 是无风险利率,σ 是股票收益标准差(波动率),

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{S}{E}+r(T-t)+\dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}.$$

上述公式中 $C(S,t)$是下面称为布莱克-肖尔斯期权定价二阶偏微分方程的解

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{ss}+rSC_s-rC=-C_t.$$

在布莱克-肖尔斯公式中,没有出现股票的期望收益率和投资者的风险偏好,这似乎背离了人们的直观,

最初令经济学家们迷惑不解.考克斯(Cox,J.)和美国经济学家罗斯(Ross,S. A.)于1976年和美国学者默顿(Merton,R.)于1976年通过引入风险中性和鞅表示解开了这个谜,哈里逊(Harrison,J. M.)和克莱普斯(Kreps,D. M.)于1979年和其他经济学家后来发展和完善了鞅表示的思想.

布莱克-肖尔斯期权定价公式(Black-Scholes option pricing formula) 见“布莱克-肖尔斯期权定价模型”.

布莱克-肖尔斯分析(Black-Scholes analysis) 基于布莱克-肖尔斯期权定价理论的金融分析.它在金融经济的研究和实践中发挥着重要作用.这大概可以用以下三个关键因素来解释:

1. 布莱克-肖尔斯模型的假设相对较弱.
2. 布莱克-肖尔斯公式的全部自变量和因子中,除了股票收益率的波动率(σ)外,其余四个都是可以直接观察的,而且可以准确定地估计出来.
3. 布莱克-肖尔斯分析中采用的方法具有一般性,可以用于其他种类期权和与期权结构相近的证券的定价.

虽然布莱克-肖尔斯公式是利用无套利的思想推导出来的,但是推导过程不依赖于市场上是否存在这种期权.因此,布莱克-肖尔斯交易策略和价格函数为投资者在市场上创造尚不存在的期权提供了方法.均衡期权价格是股票价格的二阶连续可微函数,并且是伊藤过程;而这是模型推导出来的结果,而不是模型的假设.

确定期权价格和复制资产组合策略无需估计标的股票的期望收益、投资者的风险偏好和投资者的初始持有.与大多数的均衡模型不同,期权定价不依赖于其他证券(标的股票除外)的价格和联合分布信息,只依赖于标的股票的价格和无风险利率.布莱克-肖尔斯公式中的自变量和因子只有股票收益波动率不能直接观测,因此,至今仍有大量的研究工作从理论和实践的角度探讨波动率的估计.

布莱克-肖尔斯模型的推广(generalization of Black-Scholes model) 布莱克-肖尔斯模型的推导过程依赖于以下六个假设:

1. 没有交易成本、税收和卖空限制.
2. 无风险利率是常数.
3. 标的股票在期权到期日之前不支付红利.
4. 标的股票的价格过程是几何布朗运动.
5. 市场交易是连续的.
6. 期权是欧式期权.

自布莱克-肖尔斯模型出现之后,许多文章对上述假设进行了广泛深入的探讨,发现在一定程度上放松这些条件不会对基本模型产生实质影响.

运用布莱克-肖尔斯模型和方法可以对其他类型的期权进行定价.美国学者默顿(Merton,R.)于1973年讨论了“下跌-出局”期权(down-and-out oprions)的定价,美国学者布莱克(Black,F.)于1976年讨论了商品期权,考克斯(Cox,J.)、英格索尔(Ingersoll,J.)和美国经济学家罗斯(Ross,S. A.)于1985年讨论了利率期权.这些关于期权定价的文章的一个共同点是,它们都利用了布莱克-肖尔斯期权定价偏微分方程.

布莱克-肖尔斯期权定价微分方程(Black-Scholes option pricing) 用来确定在无套利条件下欧式买入期权价格的微分方程.然而,买入期权作为一种特殊期权的特征完全由边界条件刻画.因此,方程具有一般性,可用来对一般的价格只依赖于标的证券价格的衍生证券进行定价.在对这类衍生证券定价时,方程是共同的,不同的是边界条件.

期权定价(option pricing) 见“布莱克-肖尔斯期权定价公式”.

期权定价的鞅方法(martingale method for option pricing) 利用等价鞅测度对期权定价的方法.期权定价的鞅方法是指:假设定义股票价格变化的概率空间中的概率测度为P,如果存在一个与P等价的新的概率测度P^*,使得期权价值的折现过程在概率测度P^*下成为一个鞅,这个概率测度P^*称为风险-中性概率测度,或称鞅测度.股票市场是完全的等价于这个鞅测度是惟一的.因此,在完全市场假设下,任何依赖于股票价格的期权可以按这个准则唯一定价.这个定价准则也可推广到未定权益的定价,即在完全市场假设下,任何依赖于股票价格的未定权益都可以按这个准则唯一定价,即只需把上述论述中的期权改为未定权益就可得未定权益定价的鞅方法.鞅方法进一步揭示了布莱克-肖尔斯期权定价模型的本质(参见“布莱克-肖尔斯期权定价模型”).

期权的无套利定价准则(non-arbitrage pricing principle for option pricing) 见“期权定价的鞅方法”.

期权的风险-中性定价准则(risk-neutral valuation principle for option pricing) 见“期权定价的鞅方法”.

未定权益定价的鞅方法(martingale method for contingent claims pricing) 见“期权定价的鞅方法”.

期权定价公式的实证检验(empirical testing of option pricing formula) 根据期权市场上资产定价的实际数据,运用统计方法对期权定价公式进行验证.期权定价理论与资本市场的实践吻合得如此之好,以至于对期权定价理论进行检验的文章很少.一些早期的检验文章试图探索这些模型是否可以用

来构建成功的交易策略和方法，但发现交易费用使得这些方法根本无利可图.

利用期权定价公式可以把股票收益波动率表示成期权价格的函数，它称之为隐性波动率，在解释股票未来的波动性方面具有很强的预测力.

当然，期权定价理论中也存在一些问题值得探索，如美式期权的定价问题. 虽然如此，就其解释实际数据能力而言，该理论不仅是金融学中最成功的理论，而且在整个经济学中亦是如此. 它在金融经济学领域获得了极其广泛应用，对经济学的贡献是极其深远的.

隐性波动率(implied volatility)　见“期权定价公式的实证检验”.

衍生产品(derivative products)　亦称未定权益、金融产品或期权. 根据合约或其他明确方式规定的资产或证券. 它的价值依赖于一个或几个基础变量. 衍生产品的基础变量通常是股价或商品价格，衍生产品大多限于卖出和买入期权、期货以及这些证券的简单延拓(如可转换债券). 20 世纪 70 年代初以来，衍生产品的种类和数量迅速增加，产生了以利率和汇率乃至商品为基础的衍生产品. 作为一个极端的例子，一个滑雪场发行一种债券，债券的还本付息与下雪情况相联系. 美国犹他州盐湖城的一家银行发行了一种储蓄存单，其利率与犹他爵士队获胜的场次有关.

衍生产品研究的重点之一是定价. 衍生产品的现代定价理论始于美国学者布莱克(Black，F.)和美国学者肖尔斯(Scholes，M. S.)于 1973 年的经典论文，这以后，在许多经济学家的探索下，期权定价理论或未定权益分析获得了飞速发展. 借用布莱克-肖尔斯方法对衍生产品进行定价的核心思想是无套利和构建资产组合来复制衍生产品. 该资产组合被称为复制组合，是由基础资产或另一项相关资产(如果基础变量不是一种资产的价格)和无风险资产组成，其支付等同于衍生产品的支付. 如果市场上不存在套利机会，那么该复制组合应具有与衍生产品相同的价值. 复制组合包括静态复制和动态复制两种.

未定权益(contingent clain)　即“衍生产品”.

金融产品(financial product)　即“衍生产品”.

复制组合(replicating portfolio)　见“衍生产品”.

未定权益分析(contingent claims analysis)　一种金融分析方法. 指金融学中对用某种或某几种不确定商品或变量来进行估价的合同给予估计的相关分析方法. 未定权益包括关于某种商品、股票指数、利率、汇率或单个证券、抵押证券的期货和期权合同；组合投资策略的结果也可以看做是一种未定权益. 未定权益分析是近 20 年来金融经济学研究的中心问题. 布莱克-肖尔斯(Balck-Scholes)于 1973 年和美国学者默顿(Merton，R.)于 1973 年提出期权定价理论和公司债务的估价. 期权定价理论从本质上说是一个部分均衡模型. 美国经济学家罗斯(Ross，S. A.)于 1977 年和 1978 年提供了一个把期权定价理论与一般均衡相结合的线索，哈里逊(Harrison，J. M.)和克莱普斯(Kreps，D. M.)于 1979 年把期权定价理论与一般均衡相结合，给出了状态未定消费权益的价格可行的充分必要条件是存在一个对所有未定权益都一致的线性定价算子，在均衡状态下，任一经纪人的交易策略都是其投资组合计划问题的最优解；还进一步证明了在一致定价算子和等价鞅测度之间存在一个复制关系.

未定权益分析主要采用连续时间模型，应用随机积分和鞅论等数学手段. 研究者为了直观理解和对连续时间模型给出数值近似也通常导出一些对有限状态空间的离散时间多时期未定权益分析公式. 未定权益分析为经济学理论的发展做出了重要贡献，同时它对未定支付的定价和复制使人们对金融中介的作用有了更深入的认识.

未定商品(contingent commodities)　金融学术语. 指用商品的标准特性和其所处的外部环境条件一起来描述的商品. 例如一把雨伞在下雨天和晴天的价值是不一样的. 一批在某一日期交货的小麦与它在生长期的气候情况有关. 1953 年，美国学者阿罗(Arrow，K. J.)首先引入了未定商品的概念. 而美籍法裔数学家德布罗(Debreu，G.)进一步用它来描述具有不确定的资源消费和产品条件下的均衡理论. 未定商品的一般竞争均衡模型与确定性商品的均衡模型相似，只是商品空间的维数不一样. 虽然在未定商品的均衡模型中并未使用概率分布的概念，但经纪人对于风险的态度和对消费的偏好在模型中有明确的表示. 未定商品的价格 p_{is} 是假定市场行为在不确定的事件发生之前，为了能够在第 s 种状态发生之后收到第 i 种商品而支付的金额. 对未定商品的支付在前，而只有当第 s 种状态出现时才进行交割.

静态复制(static replicating)　一种与时间无关的证券组合复制. 例如，一单位卖出期权可以由下列证券构成的证券组合来复制：一单位买入期权(其执行价格、到期日与卖出期权相同)、卖空股票和无风险债券. 卖出-买入期权平价关系是典型的静态复制实例. 以可转换认股权证为例来说明静态复制，可转换认股权证的持有人有权以 K 执行价格购买一股标的股票，或者用可转换认股权证换取 γ 股标的股票. 如果标的股票在到期日的价格为 x，那么可转换认股权证在到期日的价值为执行价值 $x-K$ 和转换价值 γx 中的较大者，即 $\max(x-K,\gamma x)$. 考虑由

γ股股票和$1-\gamma$单位执行价格为$K/(1-\gamma)$的买入期权(到期日与可转换认股权证相同)构成的资产组合,它在到期日的支付为

$$\gamma x+(1-\gamma)\max\left(x-\frac{K}{1-\gamma},0\right)$$
$$=\max(x-K,\gamma x),$$

在到期日可转换认股权证与该资产组合具有相同的支付.如果标的股票在到期日之前不分红,那么可转换认股权证与该资产组合的现值相同.运用布莱克-肖尔斯公式,就可以得出可转换认股权证的定价公式.

可转换认股权证(convertible warrant) 见“静态复制”.

动态复制(dynamic replicating) 一种与时间有关的证券组合复制.考虑时间t的因素确定衍生产品的价格.用x表示基础变量,t表示时间,$W(x,t)$表示衍生证券在时刻t的价值.假设基础变量x是由下述扩散过程来确定:

$$\mathrm{d}x=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}w,$$

其中μ表示x的变化期望,σ表示的x变化的标准差,w是美国学者维纳(Wiener,N.)过程.一般地,μ和σ依赖于x和t.根据伊藤引理,

$$\mathrm{d}W=\alpha W\mathrm{d}t+\delta W\mathrm{d}w.$$

其中α称为衍生证券的瞬时期望收益率,δ称为衍生证券的波动率或标准差,它们分别定义为

$$\alpha W=\frac{1}{2}\sigma^2W_{xx}+\mu W_x+W_t,\delta W=\sigma W_x,$$

假定W是依赖于同一基础变量x的一类衍生证券中的一种.因为同一维纳过程驱动着这些衍生证券的价格运动,它们所得收益应该是完全瞬时相关的.如果不存在套利机会,那么每一种衍生证券的瞬时风险报酬($\alpha-r$,其中r是无风险利率)与其瞬时标准差成比例,即

$$\alpha-r=\lambda(x,t)\delta.$$

λ虽然依赖于x和t,但是它不依赖于这一类衍生证券中的任何一种.把它代入前面式子,即得

$$rW=\frac{1}{2}\sigma^2W_{xx}+(\mu-\lambda\sigma)W_x+W_t.$$

这就是对只有一个基础变量的衍生证券进行定价的基本方程,与边界条件合在一起,就完全决定了衍生产品的价值.

风险中性定价(risk-neutral pricing) 一种衍生产品的定价方法.在资产组合的动态复制中如果x本身是一种资产的价格(买入、卖出期权就是这种情况),那么人们可以把基础变量看做一种衍生产品(就是基础资产)的价格.此时,衍生产品的定价方程就成为

$$rW=\frac{1}{2}\sigma^2W_{xx}+rxW_x+W_t,$$

(即有名的布莱克-肖尔斯偏微分方程)比较这个方程和动态复制中的方程

$$\alpha W=\frac{1}{2}\sigma^2W_{xx}+\mu W_x+W_t$$

可知,衍生产品期望收益率α和基础变量的期望收益率μ/x被无风险利率r所替代.x服从的随机过程“似乎”是

$$\mathrm{d}x=rx\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}w,$$

衍生产品的期望收益率“似乎”是无风险利率r.如果投资者是风险中性的,那么这两个“似乎”就变成了事实.这一修改的随机过程称为风险中性等价过程.

即使基础变量不是资产价格,风险中性定价方法仍然有效.此时,衍生产品的风险中性等价贴现率仍为r,风险中性等价随机过程变为

$$\mathrm{d}x=(\mu-\lambda\sigma)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}w,$$

为了确定风险报酬项λ,需要更多的信息.

复合期权(compound option) 一种期权.指以期权为标的资产的期权.复合期权有四种组合,看涨期权的看涨期权,看跌期权的看涨期权,看涨期权的看跌期权,看跌期权的看跌期权.复合期权的定价较复杂,盖斯克(Geske)于1979提出了复合期权定价的解决方法,卢宾斯坦(Rubinstein,M.)于1990进一步发展并将复合货币期权也包含在内,也可采取二项模型和相似模型来给复合期权定价.

特异期权(exotic option) 一种特殊期权.不是标准期权的期权统称为特异期权.它的条件和特点和标准期权多有不同,它的多样性使得很难将其归类.但为了进一步讨论,可以将其分为三类:

1. 合同条款变化型期权-由于标准条款的一些基本特征的变化而产生的新期权.

2. 路径依赖型期权-这类期权的最终收益不仅依赖于载体资产到期日的价格,更取决于随时间变化载体资产变化的途径.

3. 多因素型期权-期权的最终收益取决于两个或更多的载体资产的价格.

合同条款变化型期权包括半美式期权(或百慕大(Bermudan)期权)、数字期权(或二元期权)、迟付期权(或有期权)、延期期权、买卖权可选期权.

路径依赖型期权包括平均利(汇)期权(或平均价格期权,或亚洲式期权(Asian Option)、平均敲定价格期权、回顾期权(lookback option)、棘轮期权(Cliquet Option 或 Ratchet Option)、梯形期权(Ladder Option)、呼叫期权、挡板期权等,挡板期权中又分触销期权和触发期权,如向下触销型看涨期权(down-and-out calls)、向下触发型看涨期权(down-and-in calls)向上触销型看跌期权(up-and-out puts)和向上触销型看跌期权(up-and-in puts).

多因素型期权包括彩虹期权(或超表现期权)、一篮子期权、价差期权,双币种(数期)期权(Quanto Option)等.

特异期权的定价比标准期权的定价要困难得多.通常有三种办法:

1. 大多数的特异期权可以用解析表达式表出,当然这些表达式比布莱克-肖尔斯公式要复杂得多,如复合期权的解析表示需要一种重复(iterative)的技术,并要用到二重变化的正态分布.

2. 用二叉树方法.

3. 蒙特卡罗方法.

纯贴现债券(discount bond) 亦称零息债券.一种债券.是不分红利且以低于到期日面值价格出售的债券.

零息债券(zero-coupon bond) 即"纯贴现债券".

利率衍生产品(interest rate derivative) 关于未来利率或债券价格的未定权益的一种金融合约.

利率期限结构(term structure for interest rate) 金融学术语.指一种债券或存贷款的到期期限与它的到期收益率(即利率)的关系及其不同的期限利率之间的关系.

在布莱克-肖尔斯期权定价模型中假设无风险利率是常数或是时间的一个函数,对于基于股票类型资产的短期期权,这是可以接受的一种近似假设,但对于利率衍生证券,这个假设就不适当了,必须考虑随机利率模型.利率模型分短期利率和远期利率两种模型.

在离散时间模型下,在 $t+1$ 时刻偿还的单周期利率在 t 时刻的即期利率 $r(t)$、到期时刻为 T 的纯贴现债券或零息债券在 t 时刻的价格 $P(t,T)$、有效跨度为 $T-t$ 的债券偿还期收益率(yieldto-maturity)在 t 时刻的现值 $Y(t,T)$ 以及单周期的远期利率(相当于在 $T+1$ 时刻支付,在 T 时刻的利率现值)在 T 时刻的价格 $f(t,T)$ 之间有以下关系:

$$P(t,T)=[1+Y(t,T)]^{t-T},$$

$$f(t,T)=\frac{P(t,T)}{P(t,T+1)}-1,$$

$$f(t,t)=Y(t,t+1)=r(t),$$

$$P(t,T)=\frac{1}{[1+r(t)][1+f(t,t+1)]\cdots[1+f(t,T-1)]}.$$

在连续时间模型下,到期时刻为 T 的纯贴现债券或零息债券在 t 时刻的价格 $P(t,T)$ 和有效跨度为 $T-t$ 的债券偿还期收益率在 t 时刻的现值 $Y(t,T)$ 有以下关系

$$Y(t,T)=-\frac{\log(P(t,T))}{T-t}.$$

偿还期收益率在 t 时刻的现值 $Y(t,T)$ 曲线对 $T-t$ 的依赖关系称利率期限结构.而以下的极限

$$r(t)=\lim_{T>t,T\to t}Y(t,T)$$

即定义了短期利率.而远期利率则定义为

$$f(t,T)=-\frac{\partial\log(P(t,T))}{\partial T}.$$

对于非随机市场,根据无套利定价准则,纯贴现债券的价格 $P(t,T)$ 和短期利率 $r(t)$ 有关系

$$P(t,T)=\exp\left\{-\int_t^T r(u)du\right\}.$$

在不确定市场下,用 $P(t,T)=F^T(t,r(t))$ 表示 $P(t,T)$ 和短期利率 $r(t)$ 的依赖关系,假设 $r(t)$ 满足以下的随机微分方程

$$\mathrm{d}r(t)=b(r(t),t)\mathrm{d}t+a(r(t),t)\mathrm{d}B(t).$$

可以运用类似期权定价的鞅方法(或等价的风险-中性定价准则)得到债券定价方程.假设定义债券价格变化的客观概率空间中的概率测度为 P,如果存在一个与 P 等价的鞅概率测度 P^*,则纯贴现债券的价格 $P(t,T)$ 满足以下的债券定价方程

$$P(t,T)=E^*\left[\exp\left\{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u\right\}\Big|\mathscr{F}_t\right],$$

其中 $\{F_t\}$ 定义债券价格变化的概率空间中的 σ-域流(F_t 代表截至时刻 t 关于债券市场的所有信息),$E^*(\cdot|\cdot)$ 表示关于概率测度 P^* 的条件数学期望.选择不同的等价鞅测度将导致不同的债券价格模型.有

$$P(t,T)=F^T(t,r(t)),$$

其中 F^T 是以下偏微分方程的解.

$$\frac{1}{2}a^2(r,t)F_{rr}^T+[b(r,t)-\lambda(r,t)a(r,t)]F_r^T$$
$$+F_t^T-rF^T=0.$$

这个方程就称利率期限结构方程.在 P^* 下 $r(t)$ 满足修正的随机微分方程

$$\mathrm{d}r(t)=[b(r,t)-\lambda(r,t)a(r,t)]\mathrm{d}t+a(r,t)\mathrm{d}B(t).$$

$B^*(t)$ 在 P^* 下为布朗运算 $\lambda(r,t)$ 是到期时刻为 T 的债券每单位方差的风险溢价,也称风险的市场价格.

特别地,对于具有形如

$$P(t,T)=e^{A(t,T)-B(t,T)r(t)}$$

的仿射期限结构的特殊情形,可得到债券价格的显式表示.比如对于单因子(one-factor)的瓦司塞克(Vasicek,O. A.)模型

$\mathrm{d}r(t)=(b-ar(t))\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)$ 导致

$$B(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a},$$

$$A(t,T)=\frac{(B(t,T)-tT)(a^2b-\sigma^2/2)}{a^2}-\frac{\sigma^2B(t,T)^2}{4a},$$

其中 a,b,σ 是利率服从的随机微分方程中的常系数.这个模型的缺点是短期利率可能变成负的.而考克斯-因基苏尔-罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)模型(简称 CIR 模型)于 1985 年则避免了这个缺点,他们的模型中

$$\mathrm{d}r(t) = (b - ar(t))\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r(t)}\mathrm{d}B(t)$$

导致结果

$$B(t,T)=\frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma},$$

$$A(t,T)=\frac{2ab}{\sigma^2}\log\left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right],$$

其中 $\gamma=\sqrt{a^2+2\sigma^2}$,$a,b,\sigma$ 是该模型中利率服从的随机微分方程中的常系数.

这两个模型可以推广到多因子模型 a,b,σ 是依赖于时间的函数的情形.海什-迦罗-莫顿(Heath-Jarrow-Morton)于 1987 年给出了用远期利率表示的利率期限结构.傅莱克和胡斯顿(Flesaker and Hughston)于 1996 年利用上鞅分解定理给出了利率期限结构的另一种表示方法.

短期利率(short rate)　见"利率期限结构".

远期利率(fornard rate)　见"利率期限结构".

仿射期限结构(affine term structure)　见"利率期限结构".

莫迪利亚尼-米勒定理(Modigliani-Miller therom)　简称 MM 定理.现代公司理财理论的核心.简言之,在理想市场条件下,公司的财务政策不会影响公司的价值,MM 定理说明什么因素不会影响公司的价值,什么因素会影响公司的价值.这个理论主要包括四个命题:

1. 公司的市场价值与其资本结构无关.
2. 公司的资本成本是其债务/股东权益比例的线性递增函数.
3. 公司的市场价值与其红利政策无关.
4. 公司的股东不关心其金融政策.

所有这些命题都是一个重要思想的推论:如果公司的股东能够像公司那样以同样的价格进行金融交易,那么只要他们愿意,股东完全能够毫无代价地把公司的任何财务政策逆转过来.在无套利的条件下,从这一思想出发可以得到上述四个结论.

从 1958 年开始,美籍意大利学者莫迪利亚尼(Modigliani,F.)和美国数学家米勒(Miller,M.)围绕着"公司的财务政策是否会影响公司的价值"这一主题撰写了一系列文章,为公司理财理论奠定了基础.为此,他们获得了诺贝尔经济学奖.

许多经济学家对 MM 定理中的结论在什么条件下不成立进行了广泛深入的探讨,研究了信息不对称、交易成本、税收、卖空限制以及破产等因素对 MM 定理的影响.

MM 定理(Modigliani-Miller theorem)　莫迪利亚尼-米勒定理的简称.

公司理财(corporate finance)　见"莫迪利亚尼-米勒定理".

不确定性(uncertainty)　决策将会导致的可能结果多于一个时的现象.不确定性是经济和金融文献研究的一个重点.从 20 世纪 50 年代起受到了众多经济学家的关注.经济学中的不确定性可以分为四类:

1. 外生的不确定性.有关变量如消费者偏好和厂商的技术,经济学家通常把它们看成是外生的,虽然保险可以影响每个个体的外生不确定性,但没有一个经济系统能消除这类外生不确定性.

2. 内生的不确定性.这是由经济系统自身所产生的不确定性.这类不确定性来源于由经济行为者的决策,也正是经济学家希望进行解释和预测的内容.内生和外生的不确定性可以相互影响,例如一个水坝倒塌,是因为两个方面的不确定性,内生的是施工者偷工减料,外生的是意外的连续几场暴雨.

3. 正递的不确定性.现代经济中.一类重要的不确定性是有关经济政策以及它对税制利率、公共财物的影响,这就是政策的不确定性.对经济学家来说可以视为外生不确定性的一种形式.

4. 外部的不确定性.这是近来才开始研究的一类不确定性,这类不确定性并不是由通常的外生变量所产生,其例子是"太阳黑子效应".

不确定性的数学描述如下:设状态世界集 S 中的任何一个元素记为 s,决策集 D 中的每一决策记为 a,假定所有可能结果组成的集为 C,相应的每一个结果记为 c;每一个决策 d 在出现状态 s 时将导致一个惟一的结果事件 $c(d,s)$.状态世界的定义必须使得给定一个状态 s 对决策集 D 中任意一个决策 d 不能出现多个结果,即每一个结果事件 $c(d,s)$ 由一个决策 d 和状态 s 所惟一确定.每一个决策给定了一个从状态世界集 S 到结果事件集 C 上的一个映射

$$\gamma_d(s) = c(d,s)\ (s \in S),$$

称为未定结果函数.未定结果函数用来描述决策结果的不确定性.

不完全金融市场(incomplete financial markets)　完全金融市场的对立面.如果市场中的每一个参与者都能直接或间接地与其他任何一个参与者交换任何一种商品(包含证券),就称该市场是完全金融市场.导致市场不完全的因素至少包含三个方面:

1. 经济中存在不对称信息.
2. 对交易感兴趣的潜在交易者被排斥在外.
3. 存在交易成本.

不完全市场的研究使得对经济理论的探索与现

实更靠近了一步.一些在完全市场的框架中难以解释的问题或现象在不完全市场模型中得到了比较满意的答案或解释，例如：金融资产和实物资产的区别，货币中性等.

下面以两时期金融市场经济模型为例阐述不完全金融市场模型.所有金融工具的交易发生在现在(记为时期 0)，未来(记为时期 1).有 S 个可以确认的自然状态.在时期 0 和时期 1 的每一个状态有 L 种商品的现货市场，用 x_s 和 p_s 表示随机商品丛及其价格.金融工具或证券有名义和实物之分，名义证券的支付为状态随机货币，实物证券的支付为状态随机商品.假设市场上有 M 种名义证券，证券 m 的名义支付向量 y_m 为 S 维向量，其分量 y_{ms}表示证券持有人在时期 1 的状态 s 下得到的货币收入. $S\times M$ 维矩阵

$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_M)$$

表示名义证券的支付矩阵.假设市场上有 N 种实物证券，证券 n 的实物支付向量 x_n 为 SL 维向量，其分量 x_{ns}表示证券持有人在时期 1 的状态下得到的实物收入(商品丛). $S\times N$ 维矩阵

$$Y_r=(x_{ns}^T p_s)_{S\times N}$$

表示实物证券的名义支付矩阵(其中上标 T 表示矩阵转置).

对不完全金融市场的研究经常限于两种极端情况：$M=0$ 或者 $N=0$.然而，无论哪一种情况，金融市场交易的一个本质特征是使证券的持有人能在时期 0 和时期 1 的每一个状态之间转移财富.名义证券构成的资产组合可以用 M 维向量 b 来表示，它在时期 1 的名义支付为 Yb，它的成本为 b 的现值.

美国学者阿罗(Arrow，K. J.)于 1964 年指出，不含实物证券的金融市场是完全市场的充分必要条件为对于任何$s\in\{1,2,\cdots,S\}$，存在资产组合 b^s 满足下述条件：

$$(Yb^s)_{s'}=\begin{cases}1 & (s=s');\\ 0 & (s\neq s').\end{cases}$$

或者至少存在 S 种名义证券，并且支付矩阵 Y 的秩为 S.

关于不完全金融市场的竞争均衡的研究有下列结果：

1.均衡存在性.如果金融证券是名义的，不完全金融市场均衡的存在性在一般条件下得到了证明.如果金融证券是实物证券，由于名义支付矩阵 Y_r 依赖于商品价格 p_s 并且 Y_r 的秩可能会随着 p_s 的变化而变化，均衡存在性的证明要复杂得多.美国学者拉德纳(Radner，R.)(1972)证明了：如果对市场参与者的证券交易数量加以下界的限制，那么竞争均衡是存在的.达菲(Duffie，D.)和夏佛(Shafer，W.)(1986)证明了：对市场参与者的初始持有和证券的支付矩阵而言，几乎所有的不完全金融市场(实物证券)存在竞争均衡.

2.均衡的特征.竞争均衡的特征也依赖于金融工具是名义证券还是实物证券.在包含实物证券的金融市场中，一般地，均衡配置不是帕雷托最优的.然而，在市场可能提供的资源配置的范围内，均衡配置是最优的.

名义证券型不完全金融市场的均衡可能不具有局部惟一性，而均衡不具有局部惟一性是普遍的(generic).此外，在名义证券型不完全金融市场中，假设证券的名义支付是外生的，则对几乎所有的初始持有，均衡配置集合包含一个光滑 D 维流形，其中 $D=S-\text{rank}(Y)$.

期权定价理论涉及无限维的不完全金融市场理论.它不再能简单地用有限维向量空间理论来刻画.这时完全市场定义为每个未定权益都可被自筹资的交易策略来复制的市场.否则就称为不完全市场.由无套利假设得出的资产定价基本定理和原有的布莱克-肖尔斯理论只能对完全市场中的金融资产惟一定价.

用鞅测度的语言来表述如下：如果存在惟一的一个关于股票价格过程的等价鞅测度，那么市场完全.如果这样的等价鞅测度不惟一，那么有未定权益不可被自筹资的交易策略所复制，这就是不完全市场的特征.

这里所谓的等价鞅测度，是指与定义原金融市场的概率空间的概率测度 P(也称客观(objective)概率测度或自然(physical)概率测度)相等价的概率测度 Q，使得在概率测度 Q 下，股票价格的折现过程成为一个鞅过程.在概率测度 Q 下，风险资产的期望收益率加上红利率就等于无风险资产的收益率.因此等价鞅测度 Q 也称为风险中性(risk-neutral)概率测度.

完全市场(complete)　见“不完全金融市场”.

金融风险(financial risk)　金融学术语.指由于金融市场变化或者未来不确定事件的发生而导致未来净收益的不确定性.1994 年 7 月 26 日，国际证券事务委员会及巴塞尔委员会发表的一份联合报告，把金融衍生产品涉及的风险分为八种：1.市场风险；2.信用风险；3.流动性风险；4.交割风险；5.操作风险；6.系统风险；7.法律风险；8.道德风险.以下分别叙述：

1.市场风险是指所持有的金融资产和负债等随着市场的变化带来的未来损益变化的不确定性.

2.信用风险是指在交易完全履约期间内，由于金融市场环境的变化导致和约内容无法履行而蒙受损失的不确定性.

3. 流动性风险是指所持有的金融资产和负债等能否随时变现的不确定性.

4. 交割风险是指从签订合同到交割的期间内，发生无法交割事态的不确定性.

5. 操作风险是指由于人为的操作错误、交易系统或清算系统发生故障导致交易无法进行而造成损失的不确定性.

6. 系统风险是指金融市场中发生局部异常事件，不仅对该市场，而且对其他市场乃至整个社会体系造成影响，致使金融系统整个的安全性受到破坏的不确定性.

7. 法律风险是指由于和约内容的不充分造成损失或和约不具有法律效力而进行交易造成损失的不确定性.

8. 道德风险是指交易者利用市场信息的不对称性有意隐瞒风险，并通过造假手段来欺骗客户或蓄意扩大表外风险资产而造成的收益的不确定性.

以上八种风险中市场风险、信用风险和流动性风险可以量化，而操作风险、系统风险、法律风险和道德风险只能作定性分析.

金融风险度量(measure of financial risk)　对于可量化的金融风险进行的量化计算. 以下是对市场风险的基于不同场合和目的的几种度量：

1. 方差或标准差：如马科维茨的资产组合选择理论中把投资组合收益 X 的方差 $\mathrm{Var}(X)$ 作为风险的度量，也可以用标准差

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(x)}$$

作为风险的度量.

如果只考虑预期收益比实际收益或者所定目标小时资产收益的波动情况，则可用半方差、下偏离差或下偏方差作风险的度量.

2. 半方差：$\sigma_-^2(X)=E[(X-EX)^2 1_{\{X<EX\}}]$，其中 $1_{\{X<EX\}}$ 为示性函数.

3. 下偏离差(lower partial moments)(简记为 LPMs)：相对于目标收益 τ 的 n 阶下偏离差为

$$\mathrm{LPM}s(n,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-\chi)^n f(x)\mathrm{d}x\ ,$$

其中 $f(x)$ 为收益的概率分布密度. 特别地，当 $n=2$ 时即为下偏方差.

4. 风险值(value at risk)(简记 VaR)：全称“处于风险中的价值”. 它表示在一定的市场条件下，在未来一个选定的时期内，一项交易或头寸的最终净值 X，由于市场的反向运动，相对于一个参考证券的回报 r 和对一个设定的概率水平 α 来说的最大损失值

$$VaR_\alpha(X)=-\inf\left\{x\,\middle|\,P\left(\frac{X}{r}\leqslant x\right)>\alpha\right\},$$

其中 α 称为置信度，P 是 X 所服从的概率分布. VaR 可应用于风险度量、资本充足率度量和业绩评价.

5. VaR 期望亏空风险(shortfall-expectation value at risk)(简记 SvaR)：它表示在一定的市场条件下，在未来一个选定的时期内，对给定的置信度 α，一项交易或头寸的最终净值 X，实际超过经验 VaR 的期望损失：

$$\mathrm{Sva}R_\alpha(X)=E\{X\,|\,X>VaR\}.$$

由于大量的实证分析表明，资产收益的分布表现出“峰度”(kurtosis)、“厚尾”(fattails)和“偏态”(skewness)现象，SvaR 比 VaR 更稳定，且对尾部概率更具有敏感性，更容易表示出尾部的特征.

6. 风险的公理化度量：满足某些公理化假设的风险度量. ·

通常把一项交易或头寸在未来一个选定的时期内的风险，定义为这项交易或头寸的最终净值 X 的一个函数 $\rho(X)$. 关于 $\rho(X)$ 作为风险的度量应满足的公理化假设有多种版本，目前影响最大的一种是阿茨诺(Artzner, P.)，戴尔邦(Delbaen, F.)，艾伯(Eber, J-M)和海施(Heath, D.)于 1998 年提出的风险的一致度量，它必须满足以下的平移不变性、次可加性、正齐性和单调性 4 条公理，即：

1. 平移不变性. $\rho(X+\alpha\cdot r)=\rho(X)-\alpha$，其中 r 为参考证券的回报.

2. 次可加性. $\rho(X+Y)\leqslant\rho(X)+\rho(Y)$.

3. 正齐性. $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$，其中 λ 为非负常数.

4. 单调性. 如果 $X\leqslant Y$，则有 $\rho(Y)\leqslant\rho(X)$.

给定一个参考证券的回报 r，一项交易或头寸的一个风险度量 ρ 是一致的充分必要条件是存在这个交易或头寸可能状态集上的一个概率测度族 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\rho(X)=\sup\{E_P[-X/r]\,|\,P\in\boldsymbol{P}\}.$$

风险的一致度量(coherent measure of risk)　见“金融风险度量”.

撰　稿　丁明超　王志诚　叶中行　田钦谟　史树中
齐治平　杨福清　张玉珠　邵继福　周爱民
唐国正　董雨滋　滕成业
审　阅　史树中　严加安　彭实戈

生　物　数　学

生物数学(biomathematics, mathematical biology)　数学与生命科学的一个交叉学科.是研究生命体和生命系统的数量性质与空间格局的科学,也是应用数学的理论和方法.研究生命科学中的问题的科学.

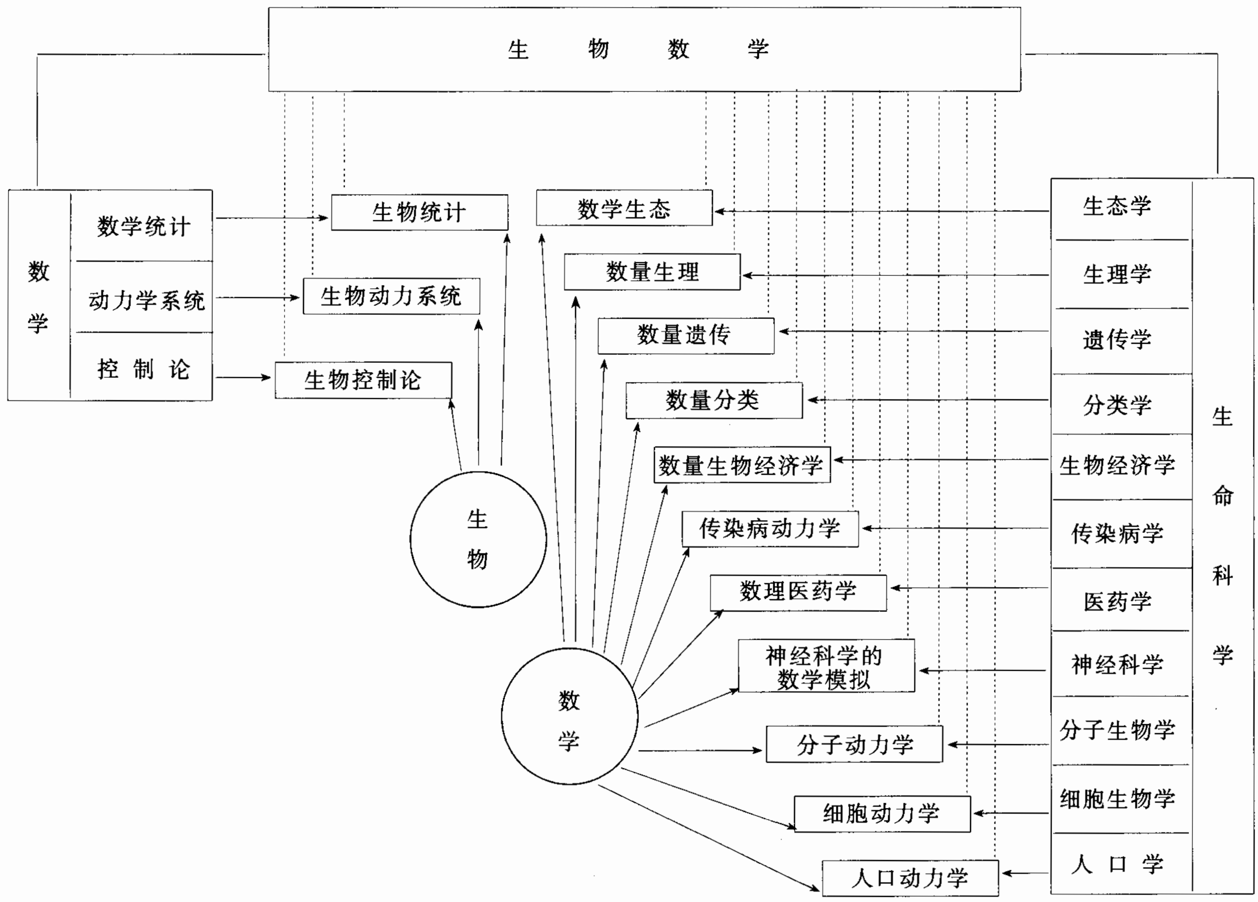
生命科学研究中常用的方法是观察和实验.人们通过观察和实验来了解生命体的性质,而这种观察和实验通常得到大量数据(包括数量,大小,形状等).怎样通过这些数据去描述一个生命体的性质?对于简单的数据,可以通过直观得到结论.随着生命科学的深入研究,实验和观察所得到的数据越来越多、越来越复杂,要从众多复杂的数据中得到结论,就必须要依赖于数学方法的应用.首先是统计方法的引入,也就是说,应用数理统计方法来研究生命科学中的问题.这种研究在19世纪末期就已有大量的工作.例如,蒙德尔(Mendel,T.R.)关于豌豆性状遗传定量规律的研究,就是一个很突出的例子.除了遗传学外,还利用数理统计的方法来研究生命科学中的其他问题,这样,就逐渐形成生物数学中的一个分支学科——生物统计.这个分支学科形成的标志,是英国生物学家皮尔逊(Pearson,K.)于1901年创办《生物统计学》杂志.

早期促使人们应用数学方法去研究生命科学,源于人们对人口增长问题研究的需要.16世纪,中国明朝的著名科学家徐光启就曾用数学方法估计人口的增长;英国人口学家马尔萨斯(Malthus,T.R.)于1798年出版的著作中,给出了一个很简单的反映人口增长的动力学模型,通过数学的推演得出人口增长趋势的结论,尽管他的模型和结论有重要的缺陷,但却是运用动力学方法研究生命科学的最早的例子,也是以后许多研究工作的基础.动力学方法在生命科学研究中早期最为成功的一个范例,是人们至今还常常说起的故事:1925年,意大利生物学家在研究工作中,发现第一次世界大战期间的几年中,在亚得里亚海北部,捕获的食肉鱼(简称大鱼,例如鲨鱼类等)的比例比过去有所上升,被食肉鱼食用的鱼类(简称小鱼)比例有所下降.人们分析,这是由于战争期间捕鱼量大大减少的缘故.然而,捕鱼量减少为什么会更有利于大鱼的增长,而不是更有利于小鱼的增长呢?当时,意大利数学家沃尔泰拉(Volterra,V.)建立了一个捕食者与食饵两种群相互作用的动力学模型,并且通过求解两个非线性微分方程,成功地解决了这个生物学的问题.动力学系统方法从此渐渐地被应用到生命科学的各个分支,这样,生物数学的另一个分支学科"生物动力学系统"逐渐形成,并且由确定性动力系统发展到随机动力系统.并应用它研究了某些生物量的增长,也研究了生物量之间的相互作用.例如,生态学和遗传学中的生灭过程、逻辑斯谛克增长过程、分支现象、扩散过程等.

研究自然,了解自然,更重要的目的是利用自然.应用数学方法对生命科学的机理作成功的揭示和描述,这不仅有利于人们进一步了解生命科学,而且便于应用数学的最优化方法、控制理论和方法对生命现象加以控制,使得大自然能符合人类意向去发展,更合理地为人们所开发利用.这样的研究,就形成了生物数学的第三个分支学科——生物控制论.控制论方法不仅用于研究人类如何控制自然,更多地被用以研究自然界或生物体内或生物群体内本身具有的控制机制.例如,人由眼的视觉获取外界的信息,通过视觉神经传递给大脑,又由大脑神经系统指挥人的机体去圆满地完成某个动作,这个过程本身就是一个很好的控制机制.如何应用控制论的理论、数学模型的方法,去揭示、去描述人的这种控制机制,已成为当前生物控制论中的重要研究课题.

从方法论的角度来区分,生物数学可以分为生物统计,生物动力系统和生物控制论三个主要的分支学科.当然,这不等于说在数学中,仅是数理统计、动力系统(包括随机动力系统)理论和控制论在生命科学中得到了应用,实际上要广泛得多.例如,代数学方法用以分析研究DNA上的碱基排列规律,有所谓《遗传代数》,《遗传几何学》的专著问世;又如,应用图论的方法研究DNA的结构以及用数论方法研究植物的叶序等.许多数学方法都在生命科学中得到了应用、得到了发展,而且渗透到生命科学的各个分支.

生物数学的内容是什么?它包含哪些分支学科?下面用图表来回答这两个问题.图表中,用虚线连结生物数学栏的14个长方框内的学科,皆被认为生物数学的分支学科.这里有两种分类方法,第一种方法是以所涉及的数学方法为基础来进行分类的.例如,利用数理统计方法研究生命科学中的问题的科学可归于生物统计范围.它包括的内容很多,根据所研究的对象不同,又有其子学科:统计生态学、统计医药学、人口统计学等.又如,利用动力学系统方法研究生命科学中的问题的科学,称为生物动力学系统.其包括的内容也很广,如种群动力学、传染病动力学、



分子动力学、细胞动力学、人口动力学等.第二种分类方法是按照所研究生命科学中的子学科的不同来分的(列于图表右面11个分支学科).例如,利用数学的方法研究生态学问题的科学称之为数学生态学.如果再考虑所用数学工具的不同,数学生态学又可分为几个子学科.如统计生态学、种群动力学等.图表中左边3个分支学科和右边的11个分支学科是相互关联、相互交错而又相互包含的,所以都被认为是生物数学的分支学科.

生物数学与生物化学、生物物理一样,是一门基础学科,它的应用是十分广泛的.从图表中可以看出,其分支学科几乎遍及整个生命科学,并且直接与国民经济的发展相关联,从农、林、牧、渔到医药、卫生,从农作物和畜禽的优良品种的培育,农田害虫的防治到农、林、渔业经济的优化管理,都与生物数学的研究有关.新技术、高科技的发展,例如生物工程、蛋白质结构、人类基因组图谱、脑与脑功能的模拟、未来计算机的设计等也有待于生物数学的进一步发展.

人类在21世纪将面临诸如天然资源和能源缺乏、环境污染、人口膨胀、疾病与健康等各种复杂而困难的问题,生物数学当前研究的热点也就是围绕上述问题开展的.

生物数学作为一门学科的形成是在20世纪70年代.其重要的标志就是1974年联合国教科文组织编制的学科分类目录中,第一次把生物数学作为一门独立的学科,与生物化学、生物物理等一起并列于生命科学类.

中国生物数学在1984年全国第一次生物数学会议后得到迅速发展,1985年初成立了“中国数学会生物数学专业委员会”和“中国生物物理学会生物数学专业委员会”;1986年创办了“生物数学学报”.1988年在中国西安召开了第一次“国际生物数学学术讨论会”.1990年,1994年和1998年分别在武汉,上海和鞍山召开了第二次、第三次和第四次全国生物数学学术讨论会.1997年在杭州召开了第二次国际生物数学大会.

数学生态学

数学生态学(mathematical ecology) 生物数学的分支学科.是应用数学的理论和方法研究生态学中的生物生存与环境关系的科学.生态学的发展从一开始就和数学紧密相连,从1798年英国学者马尔萨斯(Malthus,T.R.)发表人口论、阐明人口增长与食物的数量关系,到20世纪30年代生态系统概

念的出现，一直到20世纪50年代生态学的数量研究，逐渐受到人们重视，逐渐形成数学生态学这样一个新的分支学科．数学生态学包括种群生态学、统计生态学、系统生态学等，其研究内容除了生态学关于种群发展与环境的关系之外，近几年来人们所关心的问题有：人口控制问题，生物种群的保护问题（保护生物学），环境污染对种群生态的影响问题（生态毒理学），生态资源的开发、管理、利用的问题（生物经济学），流行病的传播规律与防治策略问题（流行病学）等．

单种群模型(single-species models)　种群生态学的基础模型．指用以描述某一种群的密度（或个体数量）随时间变化而改变的规律的数学模型．在自然界中，真正单一生存的种群是极少的，每一个种群在生物圈中必然属于某一层次，与之共同生存的还会有和它不同层次或相同层次的其他种群，而且每一种群的生存都要受到自然环境中其他种群的影响．但是，为了研究某一种群的特性时，可以把其他各种群的影响以及自然环境的影响都归结为模型的参数，即把它们概括为某种"内禀增长率"、"容纳量"等，使得问题简化，从而建立模型．

连续模型(continuous models)　种群生态学的基础模型．指确定种群增长的数学模型．按所研究种群的特点，可以分为两大类：

1．生命长、世代重叠并且数量很多的种群，常常可近似地用连续过程来描述其数量的变化，这种模型通常可表为微分方程、积分方程、泛函微分方程、偏微分方程等．称其为连续模型．

2．生命短、世代不重叠的种群，或者虽然生命长、世代重叠的种群，但在其数量比较少时，不能用连续过程来描述其数量的变化，这种数学模型通常表为差分方程，称其为离散模型．

离散模型(discrete models)　见"连续模型"．

马尔萨斯模型(Malthus model)　生态学的重要模型．指最早用以描述人口增长的最简单模型．1798年，英国人口学家马尔萨斯(Malthus, T. R.)根据百余年人口统计资料，建立了一个人口增长的数学模型，该模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx,$$

称为马尔萨斯模型．其中 $x(t)$ 代表在时刻 t 的人口总数（或人口密度），r 为"相对增长率＝相对出生率－相对死亡率"，又称 r 为内禀增长率．由方程的解 $x(t)=x_0e^{rt}$ 可知，当 $r>0$ 时，即相对出生率大于相对死亡率时，则有 $t\to\infty$ 时，$x\to\infty$．因此，马尔萨斯得出人口随着时间指数无限增长的结论．

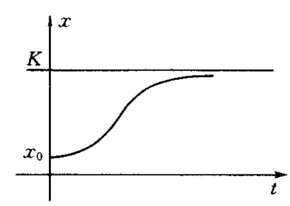
内禀增长率(intrinsic rate of natural increase)　见"马尔萨斯模型"．

逻辑斯谛克模型(logistic model)　一类重要的种群繁殖模型．即受资源约束的一个人口增长模型．由于马尔萨斯模型没有考虑到在有限资源环境下，种群密度的增大将会制约自身的增长速度——密度制约，因此，导致种群随时间无限增长的结论．1838年，比利时社会学家、数学家韦吕勒(Verhulst, P. F.)考虑到密度制约的关系，把相对增长率 r 改为

$$r(x)=r_0\left(1-\frac{x}{K}\right),$$

称为逻辑斯谛克模型：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(x)x,$$



这里 r_0 为内禀增长率，$K(>0)$ 为环境的容纳量，用以描述在所考虑的环境中所允许生存的最大种群密度．其方程在初值 $t=0$ 时 $x=x_0$ 下的解为

$$x(t)=\frac{Kx_0}{x_0-(x_0-K)e^{-\frac{r_0}{K}t}}.$$

其图象称为逻辑斯谛克曲线，如图所示．

逻辑斯谛克曲线(logistic curve)　见"逻辑斯谛克模型"．

营养动力学种群模型(models of populations based on the nutrition kinetics)　一种常见的单种群模型．指从生物生长依赖于环境中的营养物质供应这一基本概念出发建立的一种数学模型．该模型可表为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mu_c x\,\frac{1-\dfrac{x}{x_m}}{1-\dfrac{x}{x'_m}},$$

其中

$$x'_m=\frac{k}{a}+x_m,\quad \mu_c=\mu_m\frac{x_m}{x'_m},$$

$x(t)$ 为在时刻 t 的种群密度，x_m 为环境容纳量，k 是米氏常数（为种群变化相对速度 $\mathrm{d}x/x\mathrm{d}t$ 达到最大值 μ_m 的一半时，营养物的浓度），a 是营养物质化为种群密度的比例系数．

一般连续单种群模型(general single-species continuous model)　一种常见的单种群模型．指增长率为一般密度制约的种群模型．以 $x(t)$ 代表所研究的种群在时刻 t 的密度（或个体数量），则一般连续单种群模型可表为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xF(x),$$

其中 $F(x)$ 为连续函数，代表非线性密度制约的相对增长率．若存在正数 $x^*>0$，使 $F(x^*)=0$，则 x^* 称为一般连续单种群模型的正平衡点（位置）．

连续单种群模型的正平衡点(nontrivial equilibrium of single-species continuous model)　见"一般连续单种群模型".

连续单种群模型正平衡点的稳定性(stability of nontrivial equilibrium of single-species continuous model)　数学生态学的基本概念之一.即考虑研究使种群密度稳定于平衡态的基本条件.若单种群模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xF(x)$$

有正平衡点 $x^*>0, F(x^*)=0$,满足:

1. $F'(x^*)<0$ 时,正平衡位置 x^* 为渐近稳定,$F'(x^*)>0$ 时,正平衡位置 x^* 为不稳定;

2. $x^*>x>0$ 时 $F(x)>0$,且 $x>x^*$ 时

$$F(x)<0,$$

则正平衡位置 x^* 为全局渐近稳定的,即以任一正数 $x_0>0$ 为初始值方程的解 $x(t)$ 都有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x^*.$$

在研究生态平衡时常要考虑生态模型正平衡点的稳定性.

具定常收获的逻辑斯谛克模型(logistic model with constant harvesting)　一种生物种群繁殖模型.即研究用以描述人类对可再生资源开发的一个模型.如果对由逻辑斯谛克模型所描述的种群,加上定常瞬时收获,则被收获的种群数量的变化,可由下面具收获的逻辑斯谛克模型来描述:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(x)x-h,$$

$$r(x)=r_0\left(1-\frac{x}{K}\right),$$

其中 h 是正常数.由于

$$\max\{r(x)x\}=\frac{Kr_0}{4},$$

故当收获量 $h>Kr_0/4$ 时,模型不存在正平衡点,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0,$$

导致种群持续下降,以致最终灭绝.而当 $h<Kr_0/4$ 时,模型存在两个正平衡点 $x_1^*<x_2^*$.这时只要初始种群密度 $x_0>x_1^*$,则种群将会达到可持续收获种群密度 x_2^*,$Kr_0/4$ 称为最大承受生产.

最大承受生产(maximun sustainable yied)　见"具定常收获的逻辑斯谛克模型".

逻辑斯谛克模型的最优控制问题(optimal control of the logistic model)　一种生物种群繁殖控制问题.指可再生资源的合理开发中常需考虑的一个控制问题.逻辑斯谛克模型的最优收获问题的标准提法为:

系统　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_0x\left(1-\frac{x}{K}\right)-u(t)=0$;

初始　$x(0)=x_0>0$;

终点　$T=$常数,$x(T)\geqslant a$ (a 为正常数);

限制　$0\leqslant u(t)\leqslant u_{\max}$　($u_{\max}$为正常数);

目标　$\max\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$.

这类控制问题常用于渔业,如果鱼类的增长用逻辑斯谛克模型来描述,要求选择一个最优的收获率 $u(t)$,使得总收获量为最大.这个答案就是上面标准控制问题的解.

非自治逻辑斯谛克模型(nonautonomous logistic model)　一种生物种群繁殖模型.指环境因素随时间变化的模型.即逻辑斯谛克模型中参数 r(内禀增长率)和 K(容纳量)是随时间而变化的,该模型为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=r(t)x(t)\left[1-\frac{x(t)}{K(t)}\right].$$

此方程过(t_0,x_0)的解为

$$x(t,t_0x_0)=\frac{x_0\exp\left[\int_{t_0}^t r(s)\mathrm{d}s\right]}{1+x_0\int_{t_0}^t\exp\left[\int_{t_0}^s r(s_1)\mathrm{d}s_1\right]\frac{r(s)}{K(s)}\mathrm{d}s}.$$

并要求 r 和 K 满足不等式:

$$r_*\equiv\inf_{t\in\mathbf{R}_+}r(t)\leqslant r(t)\leqslant r^*$$
$$=\sup_{t\in\mathbf{R}_+}r(t)<\infty;$$
$$0<k_*\equiv\inf_{t\in\mathbf{R}_+}K(t)\leqslant K(t)\leqslant k^*$$
$$\equiv\sup_{t\in\mathbf{R}_+}K(t)<\infty.$$

周期逻辑斯谛克模型(periodic logistic model)　一种生物种群繁殖模型.指环境因素随时间周期性变化的模型,以 B 记 ω 为周期的连续函数的巴拿赫空间,在 B 中定义模

$$|x(t)|_0=\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|,$$

平均值

$$[x(t)]=\omega^{-1}\int_0^\omega x(s)\mathrm{d}s.$$

若 $b(t),c(t)\in B$,则模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x[b(t)-c(t)x]$$

称为周期逻辑斯谛克模型.若 $b(t),c(t)\in B,[b(t)]>0$,并且对所有的 t,有 $c(t)>0$,则周期逻辑斯谛克模型存在惟一周期为 ω 的解 $\bar{x}(t)$,并且对于所有 $t>0$,都有 $\bar{x}(t)>0$.

离散逻辑斯谛克模型(discrete logistic model)　一种生物种群繁殖模型.指时间离散状态下的逻辑斯谛克模型.它有不同的生成方式,从而得到不同类型的模型:

1. 具有与逻辑斯谛克微分方程解类似性质的差

分方程

$$x_{t+1}=\frac{\lambda x_t}{1+\frac{\lambda-1}{K}x_t}, \tag{1}$$

其解为

$$x_t=\frac{K}{1+c\lambda^{-n}} \quad (\lambda=e^{r_0}).$$

它类似于逻辑斯谛克微分方程的解

$$x(t)=\frac{Kx_0}{x_0-(x_0-K)e^{-r_0t}}.$$

2. 使用向前差商代替微商，得到离散情况下类似的逻辑斯谛克模型（差分方程）

$$x_{t+1}=x_t[1+r_0(1-\frac{x_t}{K})]. \tag{2}$$

只有当$-1<r_0<3$及$y_0\leqslant(1+1/r_0)K$时，才能保证x_t为非负. 通过变换

$$z_t=x_t\frac{r_0}{(1+r_0)K},$$

模型(2)有更简单的形式

$$z_{t+1}=\alpha z_t(1-z_t),\ \alpha=1+r_0,$$

这就是混沌动力学中研究倍周期分岔与混沌时使用的模型.

3. 在结点间，积分逻辑斯谛克方程，并在一定的假设下，可以得到

$$x_{t+1}=x_t\exp[r_0(\frac{1-x_t}{K})]. \tag{3}$$

模型(3)是描述鱼类种群增长时常用的一个模型，它同样具有模型(2)所显示出的倍周期分岔和混沌性质.

一般离散单种群模型(general single-species discrete model) 一种常见的单种群模型. 是离散单种群模型的一种更一般化的形式. 若以x_t代表在时刻t种群的密度（或个体数量），则一般离散单种群模型可以写为

$$x_{t+1}=x_tF(x_t),$$

其中$F(x)$为非负连续函数（对所有$x\geqslant0,F(x)\geqslant0$），若存在一个数$x^*>0$使$F(x^*)=1$，则称$x^*$为模型的正平衡点.

离散单种群模型的正平衡点(nontrivial equilibrium of single-species discrete model) 见“一般离散单种群模型”.

离散单种群模型正平衡点的稳定性(stability of nontrivial equilibrium of single-species discrete model) 数学生态学的基本概念之一. 即考虑离散模型下种群密度稳定于正平衡点的基本条件. 若离散单种群模型$x_{t+1}=x_tF(x_t)$，当

$$-2<x^*\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x^*}<0$$

时，有正平衡点$x^*>0,F(x^*)=1$，则正平衡点x^*为渐近稳定的（参见第三卷《常微分方程》中的“渐近稳定性”）.

离散单种群模型的全局稳定性(global stability of single-species discrete model) 数学生态学的重要性质之一. 是考虑离散单种群模型群的一种大范围性质. 记单种群离散模型为

$$x_{t+1}=x_tF(x_t)\triangleq g(x_t).$$

若模型有正平衡点x^*，且x^*是渐近稳定的，如果对于任意初值$x_0\in(0,\infty)$出发的差分方程的解x_t，都有

$$\lim_{t\to\infty}x_t=x^*,$$

则称x^*是全局稳定的，这时也称模型是全局稳定的. 如果x^*是模型的惟一正平衡位置，则x^*为全局稳定的充分必要条件是：当$x\in(0,x^*)$时，有

$$g[g(x)]>x.$$

离散单种群模型的周期点(periodic point of single-species discrete model) 数学生态学的基本概念之一. 它反映了离散单种群模型的一种特征. 指种群密度的周期性变化使其模型出现的周期点. 设单种群离散模型为

$$x_{t+1}=x_tF(x_t)\triangleq g(x_t),$$

记

$$g[g(x_t)]\triangleq g^2(x_t),$$
$$g[g^2(x_t)]=g^3(x_t),\cdots,$$
$$g[g^k(x_t)]=g^{k+1}(x_t)\ (k=1,2,\cdots,n).$$

若存在正整数K和一点$\bar{x}\in(0,\infty)$，使$\bar{x}=g^K(\bar{x})$，但当$1\leqslant n<K$时，所有的n都有$\bar{x}\neq g^n(\bar{x})$. 则称$\bar{x}$为模型的周期点，其周期为K，点列：$\{\bar{x},g(\bar{x}),g^2(\bar{x}),\cdots,g^{K-1}(\bar{x})\}$称为模型的$K$点环.

离散单种群模型的K点环(K-point cycle of single-species discrete model) 见“离散单种群模型的周期点”.

离散单种群模型周期点的稳定性(stability of periodic point of single-species discrete model) 数学生态学的基本概念之一. 指离散模型和种群密度稳定于周期点的基本条件. 设单种群离散模型为

$$x_{t+1}=x_tF(x_t)\triangleq g(x_t),$$

若$\bar{x}$是模型周期为K的周期点，并且存在一个区间$I=(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta),\delta>0$使得对一切$x_t\in I$，都有

$$|g^K(x_t)-\bar{x}|<|x_t-\bar{x}|,$$

则称$\bar{x}$为渐近稳定周期点. 若对上面方程，不等式

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g^K(x)\right|_{x=\bar{x}}<1$$

成立，则称周期为K的周期点$\bar{x}$是渐近稳定的.

离散单种群模型的混沌性质(chaotic behavior of single-species discrete model) 数学生态学的基本概念之一. 指描述生态极不稳定的一种性质. 如果

对于任意正整数 n，所研究的离散单种群模型都存在周期为 n 的周期点，则称其为离散单种群模型的混沌性质. 若所研究的单种群离散模型存在周期为 3 的周期点，则此模型有混沌性质.

具常数时滞的逻辑斯谛克模型(logistic model with a constant time lag)　一种生物种群繁殖模型. 指密度制约因素具有常量时间 ($T>0$) 的滞后模型. 该模型可表为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=r_0x(t)\left[1-\frac{x(t-T)}{K}\right].$$

其中 r_0 和 K 代表内禀增长率和容纳量.

具常数时滞的逻辑斯谛克模型的稳定性(stability of a logistic model with a constant time lag)　数学生态学的基本概念之一. 即考虑具常数时滞的逻辑斯谛克模型稳定于平衡点的基本条件. 若该模型表示为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=r_0x(t)\left[1-\frac{x(t-T)}{K}\right],$$

其平衡点为 $x=0$ 和 $x=K$. 模型关于此两平衡点的线性化方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=r_0x(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-r_0x(t-T).$$

由前一方程可见，当 $r_0>0$ 时，$x=0$ 是不稳定的平衡位置. 设 $x(t)=ce^{\lambda t}$ 为后一方程的解，代入可知，λ 应满足方程 $\lambda=-r_0e^{-\lambda T}$. 此方程称为原模型关于平衡位置 $x=K$ 的线性近似方程的特征方程. 当 $0<r_0T<\pi/2$ 时，特征方程的所有根均具负实部，从而平衡位置 $x=K$(局部) 稳定；当 $r_0T>\pi/2$ 时，$x=K$ 是不稳定的平衡位置. 现已证明当：$r_0T<3/2$ 时，平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的；当 $r_0T>\pi/2$ 时，平衡点 $x=K$ 为不稳定且存在周期解. 但参数满足

$$\frac{3}{2}<r_0T<\frac{\pi}{2}$$

时，是否全局渐近稳定，至今未得到解决.

分布时滞逻辑斯谛克模型(logistic model with distributed time lag)　一种生物种群繁殖模型. 即考虑到遗传因素影响的模型. 该模型表示为微分积分方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=r_0x(t)\left[1-\frac{1}{K}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)Q(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right].$$

若在积分中令 $u=t-\tau$，则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=r_0x(t)\left[1-\frac{1}{K}\int_{0}^{\infty}x(t-u)Q(u)\mathrm{d}u\right],$$

其中

$$\int_0^{\infty}Q(\xi)d\xi=1,$$

$Q(x)$为核函数，r_0 和 K 分别代表内禀增长率和容纳量. 此模型表示：t 时刻种群密度的相对变化率受到 t 时刻以前整个历史时期种群密度的影响，而各时刻影响的大小，则由核函数 $Q(x)$ 给出. 对于某一正常数 T：

$$Q(t)=T^{-2}t\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

称为强时滞核函数，

$$Q(t)=T^{-1}t\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

称为弱时滞核函数.

强时滞核函数(strong delay kernel function)　见“分布时滞逻辑斯谛克模型”.

弱时滞核函数(weak delay kernel function)　见“分布时滞逻辑斯谛克模型”.

弱时滞核逻辑斯谛克模型的稳定性(stability of a logistic model with weak time delay kernel)　数学生态学的基本概念之一. 指具有弱时滞核函数的特殊分布时滞逻辑斯谛克模型的稳定性. 该模型表示为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\{r-cx(t)-\omega\int_{-\infty}^{t}\exp[-a(t-\tau)]x(\tau)\mathrm{d}\tau\},\quad(1)$$

这里 r,c,ω 和 a 是正常数. 作变换

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp[-a(t-\tau)]x(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则模型(1)化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)[r-cx(t)-\omega y(t)],\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-ay(t)+x(t),\end{cases}$$

它有正平衡点

$$(x^*,y^*)=\left(\frac{ar}{ac+\omega},\frac{r}{ac+\omega}\right),$$

且是全局稳定的，即具弱时滞的逻辑斯谛克模型(1)是全局稳定的.

强时滞核逻辑斯谛克模型的稳定性(stability of logistic model with strong time delay kernel)　数学生态学的基本概念之一. 指具有强时滞核函数的特殊分布时滞逻辑斯谛克模型的稳定性. 该模型表示为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\{r-cx(t)-\omega\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)\exp[-a(t-\tau)]x(\tau)\mathrm{d}\tau\},\quad(1)$$

这里 r,c,ω 和 a 是正的常数. 作变换：

$$y_1(t)=\int_{-\infty}^{t}(t-s)\exp[-a(t-\tau)]x(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp[-a(t-\tau)]x(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

则模型(1)化为方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(r-cx-\omega y_2),\\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=-ay_1+y_2,\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-ay_2+x.\end{cases}\qquad(2)$$

它有一个正平衡位置(x^*,y_1^*,y_2^*),其中

$$y_1^*=\frac{r}{\omega+ca^2},$$

$$y_2^*=ay_1^*,$$

$$x^*=a^2y_1^*,$$

且当$ca^2>\omega$时是全局稳定的,因此,当$ca^2>\omega$时,强时滞逻辑斯谛克模型(1)是全局稳定的.

反应扩散逻辑斯谛克方程(reaction-diffusion logistic equation) 一种生物种群繁殖模型.指种群密度分布不均匀情形的一种模型.以往研究种群密度变化的模型,都假设种群的密度在其生活空间中的分布是均匀的.如果密度分布不是均匀的,则密度的改变除了种群的生、灭外,还要考虑迁移的因素.若以X表示种群所在空间R_+^3中的一个点$X(x_1,x_2,x_3)$,以$N(x,t)$表示种群在点X处于时刻t的密度,则种群的反应扩散逻辑斯谛克方程即为下面诺伊曼初边值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial N}{\partial t}=\Delta N+r_0N\left(1-\frac{N}{K}\right) & (x,t)\in\Omega\times[0,\infty),\\ \frac{\partial N}{\partial n}=0 & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,\infty),\\ N(x,0)=\varphi(x) & (x=\Omega),\end{cases}$$

Ω为R_+^3空间中有界开集,Ω的边界$\partial\Omega$充分光滑,$\partial/\partial n$为边界$\partial\Omega$的外法向导数,$\varphi(x)$在Ω中严格正,且充分光滑.

具阶段结构的种群模型(population model with stage structure) 一种生物种群增长模型.指种群按其生理特征划分为若干阶段的模型.例如,把某种昆虫分成幼虫和成虫两个阶段.幼虫成熟后变成蛹,化蛹成功则变成成虫.设t时刻的成虫所经历的成熟期为$\tau(t)$,它与时刻t有关,这样建立的具阶段结构的种群模型为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=B(t)-\Delta(t)L(t)-B(t-\tau)P(t)\left(1-\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right),\\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=B(t-\tau)P(t)\left(1-\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)\alpha(t)-\delta(t)A(t),\\ P(t)=e^{-\int_{t-\tau(t)}^{t}\Delta(x)dx},\end{cases}$$

其中$L(t)$与$A(t)$分别表示t时刻幼虫数量和成虫数量;$B(t)$为t时刻幼虫的出生率;$\Delta(t)$与$\delta(t)$分别为t时刻幼虫和成虫的相对死亡率(即死亡概率);$P(t)$为在$t-\tau(t)$时刻出生的幼虫活到年龄t的概率;$\alpha(t)$为t时刻化蛹成功的概率.

年龄结构种群的离散模型(discrete models for an age-structured population) 一种生物种群增长模型.指时间和年龄离散取值的情形下,描述年龄结构种群增长的模型.记$n_j(t)$为满j岁而不足$j+1$岁个体的总数$(j=0,1,\cdots,m)$,称为第j年龄组.b_j为第j年龄组的种群生育率,$b_j\geqslant0$ $(j=1,2,\cdots,m)$,s_j表示第j年龄组的种群存活率,$0<s_j\leqslant1$ $(j=1,2,\cdots,m-1)$.$\boldsymbol{N}(t)=(n_1(t),n_2(t),\cdots,n_m(t))^T$表示时刻$t$各年龄组的个体数.在定常环境下,当离散时间间隔与年龄同步增长时,种群增长的线性模型为如下形式的矩阵模型

$$\boldsymbol{N}(t+1)=\boldsymbol{MN}(t),$$

矩阵M为如下形式

$$M=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m\\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} & 0\end{pmatrix},$$

M称为莱斯利矩阵,此模型又称莱斯利矩阵模型.

莱斯利矩阵(Leslie matrix) 见"年龄结构种群的离散模型".

莱斯利矩阵模型(Leslie matrix models) 见"年龄结构种群的离散模型".

种群动态的强遍历性(strong ergodicity of population dynamics) 数学生态学的基本概念之一.指长时间原种群动态与初始状态无关的一种性质.对于具年龄结构种群的离散模型,从任意的初始状态出发,如果长时间后种群的动态将由种群增长率λ_1以及稳定的年龄结构向量$\boldsymbol{w}_1$来描述,即

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\boldsymbol{N}(t)}{\lambda_1^t}=c_1\boldsymbol{w}_1,$$

其中$\lambda_1,\boldsymbol{w}_1$与初始状态无关,则称种群动态具有强遍历性.这种遍历性意味着长时间后种群的动态将与初始条件无关,或者说一个遍历的群体将忘记它的"过去".由非负矩阵的佩龙-弗罗贝尼乌斯定理,在定常环境下,由素矩阵M所描述的种群动态一定具强遍历性.而一般生物种群不难满足矩阵M的素性条件.

年龄结构种群的连续模型(continuous model for an age-structured population) 一种生物种群增长模型.指时间和年龄连续取值的情形下,描述年龄结构种群增长的模型.通常指带年龄结构种群增长的线性模型,即所谓福斯特模型

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}+\mu(r)u(r,t)=0,\qquad(1)$$

$$u(0,t)=\int_0^w b(r)u(r,t)dr,\qquad(2)$$

$$u(r,0)=u_0(r)\ (0\leqslant r\leqslant w,t\geqslant0),$$

其中 r,t 分别表示年龄和时间，$u(r,t)$ 表示按年龄的种群密度，w 为个体存活的最大寿命，$u_0(r)$ 为初始密度函数，$\mu(r)$，$b(r)$ 分别表示年龄为 r 的种群的死亡率和生育率. 沿方程(1)的特征 $t=r+r_0$ 对方程(1)积分，代入边界条件(2)，可得

$$B(t)=G(t)+\int_0^t B(t-r)m(r)dr, \qquad (3)$$

其中 $B(t)=u(0,t)$ 为 t 时刻的初生密度，

$$m(r)=b(r)\exp\{-\int_0^r \mu(x)dx\}$$

为存活到 r 岁的个体平均生育后代数，而

$$G(t)=\begin{cases}\int_0^w u_0(r)b(t+r)\exp\{-\int_r^{t+r}\mu(x)dx\}dr & (t<w),\\ 0 & (t\geqslant w).\end{cases}$$

这个积分方程模型即所谓薛尔普-洛特卡模型. 由于模型(1)经常用于描述人口的发展，故方程(1)又称为人口发展方程.

福斯特模型(Foerster models)　见“年龄结构种群的连续模型”.

薛尔普-洛特卡模型(Sharpe-Lotka models)　见“年龄结构种群的连续模型”.

人口发展方程(population grouth models)　见“年龄结构种群的连续模型”.

高斯型捕食-被捕食模型(Gauss-type predator-prey model)　一种数学生态学模型. 指研究捕食与被捕食作用的一种模型. 该模型表示为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\alpha x-yp(x) & (x(0)=x_0\geqslant 0),\\ \dfrac{dy}{dt}=y[-r+cp(x)] & (y(0)=y_0\geqslant 0\}),\end{cases} \qquad (1)$$

其中 α,r 为正常数，分别代表被捕食者种群的内禀增长率和捕食者种群缺食时的死亡率，c 为由被捕食者种群转变为捕食者种群的转换率，$x(t)$，$y(t)$ 代表被捕食者种群和捕食者种群在时刻 t 的密度(个体数量)，对于所有 $x>0$，函数 $p(x)>0$，而且 $p(0)=0$. 因为模型(1)未考虑被捕食种群本身的密度制约效应，1980 年，弗里德曼(Freedman, H. L.)把模型(1)写成更一般的形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xg(x)-yp(x)\ (x(0)=x_0\geqslant 0),\\ \dfrac{dy}{dt}=y[-r+q(x)]\ (y(0)=y_0\geqslant 0).\end{cases} \qquad (2)$$

模型(2)也称为高斯型捕食-被捕食模型. 它由高斯(Gauss, G. F.)于 1934 年给出.

柯尔莫哥洛夫模型(Kolmogorov model)　一类生物种群模型. 是描述两个种群相互作用的一般模型. 若以 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别记两个种群在时刻 t 的密度(个体数量)，则模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1f_1(x_1,x_2),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2f_2(x_1,x_2)\end{cases}$$

称为柯尔莫哥洛夫模型，一般假设函数 f_1,f_2 在正象限 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$ 有连续偏微商，由这些偏微商的符号可以确定这两个种群的相互关系，如下表：

两种群间关系	$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$
捕食	$-$	$+$
	$+$	$-$
竞争	$-$	$-$
合作	$+$	$+$

注：合作也称互惠共存.

两种群相互作用模型(two species community models)　两种群个体数量变化规律的模型. 即描述在同一生态环境内生活的两个种群，在相互影响下，每一个种群个体数量变化规律的模型. 两个种群的相互作用有四种类型：

1. 捕食与被捕食.
2. 寄生物与寄主.
3. 两种群相互竞争.
4. 两种群互惠共存.

其中类型 1 和类型 2 有相同之处，即都是一种群以另一种群为食，因此，这两种关系都称捕食关系.

柯尔莫哥洛夫模型的正平衡点(nontrivial equilibrium of Kolmogorov model)　研究生态平衡的重要问题之一. 对于柯尔莫哥洛夫模型

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_1f_1(x_1,x_2),\\ \frac{dx_2}{dt}&=x_2f_2(x_1,x_2),\end{aligned} \qquad (1)$$

若存在正数 $x_1^*>0,x_2^*>0$，使得

$$f_1(x_1^*,x_2^*)=f_2(x_1^*,x_2^*)=0,$$

则点 (x_1^*,x_2^*) 称为柯尔莫哥洛夫模型(1)的正平衡点，其稳定性定义见常微分方程部分. 若(1)的正平衡点 (x_1^*,x_2^*) 是渐近稳定的，并且对于任何正初始条件 $(x_1(0),x_2(0))$ 出发的系统(1)的解 $(x_1(t),x_2(t))$ 都有

$$\lim_{t\to\infty}x_1(t)=x_1^*,\quad \lim_{t\to\infty}x_2(t)=x_2^*,$$

则称 (x_1^*,x_2^*) 为全局稳定，也称系统(1)为全局稳定.

洛特卡-沃尔泰拉系统(Lotka-Volterra systems)　一类最简单的柯尔莫哥洛夫模型. 在柯尔莫哥洛夫模型中取 f_1 和 f_2 为线性函数，即

$$f_i(x_1,x_2)=a_i+b_{1i}x_1+b_{2i}x_2\quad (i=1,2),$$

则此模型称为洛特卡-沃尔泰拉系统(亦称洛特卡-沃尔泰拉模型). 这里 $a_i,b_{ji}(i=1,2,j=1,2)$ 均为常

数，其中 b_{11}, b_{22} 为种内作用系数，当 $b_{11}<0, b_{22}<0$ 时，两种群都是密度制约的. $b_{ij}(i\neq j)$ 称为种间作用系数，当 $b_{ij}<0$ 时，两种群是竞争关系；当 $b_{ij}>0$ 时，两种群是合作关系；当 $b_{12}b_{21}<0$ 时，两种群是捕食关系.

洛特卡-沃尔泰拉模型（Lotka-Volterra models） 即"洛特卡-沃尔泰拉系统".

沃尔泰拉原理（Volterra's principle） 数学生态学的基本原理之一. 指捕获对具捕食关系的两种群繁殖生长规律影响的原理. 设两种群繁殖规律由下面方程组描述：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(a_1-h-b_1x_2),\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2(-a_2-h+b_2x_1),\end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1, x_2 分别代表被捕食种群与捕食种群的密度，h 表相对捕获率，方程组(1)有平衡点

$$\left(\frac{a_2+h}{b_2},\frac{a_1-h}{b_1}\right),$$

显然捕获率的减少有利于 x_2 的平衡位置增大，而 x_1 的平衡位置反而降低. 这一规律说明：在捕食者种群与被捕食者种群共存的生存环境中，捕获率的减少将有利于捕食者种群的繁殖生长，它称为沃尔泰拉原理.

1925 年，意大利生物学家发现，由于第一次世界大战期间捕鱼量大大减少，使得在亚得里亚海北部鱼类的捕食者种群(食肉类鱼)数量增加，而被捕食种群的鱼类数量下降，不知其原因，则请教当时的意大利数学家沃尔泰拉(Volterra, V.)，为回答此问题沃尔泰拉建立了两种群鱼类的上述增长模型.

竞争排斥原理（competition repellence principle） 数学生态学的基本原理之一. 指物种生存竞争的一种现象. 1934 年，生物学家高斯(Gauss, G. F.)做了下述试验：把两种习性相似的草履虫放在同一个容器内喂养，供给充分的食物. 过了一段时间，一种草履虫灭绝，而另一种的数量达到平衡态. 这一现象可通过下述数学模型的分析得到解释. 设此两种草履虫在时刻 t 的密度分别为 x_1 和 x_2，则其繁殖规律可用竞争型的洛特卡-沃尔泰拉模型表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(r_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2),\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2(r_2-a_{21}x_1-a_{22}x_2),\end{cases}$$

其中 $r_i>0, a_{ij}>0\ (i,j=1,2)$. 由于两种群的生活习性相似，其种间竞争与种内竞争的作用相仿，因而可近似地认为

$$a_{11}=a_{12},\quad a_{21}=a_{22}.$$

令

$$\frac{r_1}{a_{11}}=K_1,\quad \frac{r_2}{a_{21}}=K_2,$$

原系统可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1(K_1-x_1-x_2),\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_2(K_2-x_1-x_2).\end{cases}$$

此系统的平衡点为

$$(0,K_2),\ (K_1,0),\ (0,0),$$

无正平衡点. 设 $K_1<K_2$，则从向量场的分布可知，当 $t\to+\infty$ 时，从第一象限出发的任一轨线均趋向于点 $(0,K_2)$. 这说明两种群中，相应容纳量大者将持续生存，而另一种群最终灭绝. 这就是竞争排斥原理. 它表明：两个生活习性相近的竞争种群，在同一小生存环境中不能共存.

洛特卡-沃尔泰拉系统的全局稳定性（global stability of Lotka-Volterra system） 洛特卡-沃尔泰拉系统的一种大范围性质. 即给出这种系统稳定性的充分必要条件. 对洛特卡-沃尔泰拉系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_i\left(b_i+\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_j\right)\ (i=1,2),$$

若系统有正平衡点 (x_1^*, x_2^*)，并且 (x_1^*, x_2^*) 是渐近稳定的，又 $a_{11}<0, a_{22}<0$，则平衡点 (x_1^*, x_2^*) 在正象限是全局稳定的(即对于任何初值 $x_1(0)>0, x_2(0)>0$ 出发，当 $t\to\infty$ 时，系统的解都渐近于点 (x_1^*, x_2^*)). 若系统的正平衡点是全局稳定的，则称系统是全局稳定的. 利用定性理论的方法，可以得到系统为全局稳定的充分必要条件.

周期洛特卡-沃尔泰拉系统（periodic Lotka-Volterra system） 一种特殊的洛特卡-沃尔泰拉系统. 指环境因素随时间而周期性变化的洛特卡-沃尔泰拉系统. 以 B 记 ω 为周期的连续函数的巴拿赫空间，在 B 中定义模

$$|x(t)|_0=\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|,$$

在空间 $B\times B$ 中定义模

$$|(x_1(t),x_2(t))|_0=|x_1(t)|_0+|x_2(t)|_0$$

和平均值

$$[x(t)]=\omega^{-1}\int_0^{\omega}x(s)ds.$$

其模型表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1[b_1(t)-c_{11}(t)x_1-c_{12}(t)x_2],\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2[-b_2(t)+c_{21}(t)x_1-c_{22}(t)x_2].\end{cases} \tag{1}$$

若 $b_1(t), b_2(t)$ 以及所有

$$c_{ij}(t)\ (j,i=1,2)\in B,$$

则模型(1)称为周期洛特卡-沃尔泰拉系统. 若对于

所有 $t>0$，有

$$|b_1(t)|>0,\quad c_{ij}(t)\geqslant 0,$$

并且对于所有 $t>0$，有

$$c_{i1}(t)c_{i2}(t)>0,\quad c_{21}\neq 0,$$

则(1)称为周期捕食-被捕食洛特卡-沃尔泰拉系统. 其相应的周期逻辑斯谛克模型为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1[b_1(t)-c_{11}(t)x_1]\tag{2}$$

在此条件下，存在惟一以 ω 为周期的周期解 $x_1^*(t)$ (参见“周期逻辑斯谛克模型”).

若存在常数 b_0，$0\leqslant b_0<[c_{21}(t)x_1^*(t)]$，并且

$$0\leqslant b_0\leqslant[b_2]<[c_{21}(t)x_1^*(t)],$$

则周期捕食-被捕食洛特卡-沃尔泰拉系统(1)至少存在一个以 ω 为周期的周期解

$$(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t))\in B\times B,$$

并且对所有 $t>0$，有

$$0<\bar{x}_1(t)<\bar{x}_1^*(t),\ \bar{x}_2(t)>0.$$

周期捕食-被捕食洛特卡-沃尔泰拉系统(periodic predator-prey Lotka-Volterra system)　见“周期洛特卡-沃尔泰拉系统”.

豪林功能性反应(Holling's functional response)　数学生态学术语. 指对三类动物捕猎食物能力的不同描述. 把高斯型捕食-被捕食模型改写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xg(x)-yp(x),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y[-r+q(x)]\equiv y[-\bar{q}(x)+cp(x)],\end{cases}$$

其中 $p(x)$ 为捕食率，用以描述在单位时间内每一个捕食者捕猎食饵的个数，其大小取决于当时食饵种群的密度 $x(t)$ 的大小，即为 x 的函数. 这个函数又称为功能性反应函数，用以描述捕食者捕猎食物的能力. 每一种动物捕猎食物的能力是不一样的，1959年，豪林(Holling，T. G.)把动物的功能性反应分成三类：

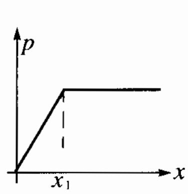


图 1

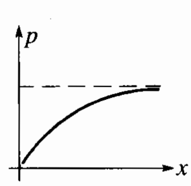


图 2

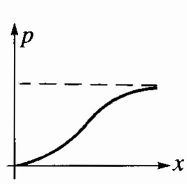


图 3

1. 低等生物(如藻类，菌类，细胞等)的功能性反应函数称为第Ⅰ类功能性反应函数(图 1)，其表达式为

$$p(x)=\begin{cases}cx & (x\leqslant x_1),\\ cx_1 & (x>x_1).\end{cases}$$

2. 无脊椎动物的功能性反应函数称为第Ⅱ类功能性反应函数(图 2). 其表达式为

$$p(x)=\frac{\alpha x}{1+\beta x},$$

其中 α,β 为正常数.

3. 脊椎动物的功能性反应函数称为第Ⅲ类功能性反应函数(图 3)，其表达式为

$$p(x)=\frac{\alpha x^2}{1+\beta x^2},$$

其中 α,β 为正常数.

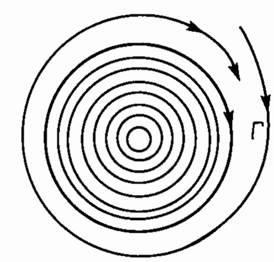
豪林Ⅰ类功能性反应函数(Holling's functional response type Ⅰ)　见“豪林功能性反应”.

豪林Ⅱ类功能性反应函数(Holling's functional response type Ⅱ)　见“豪林功能性反应”.

豪林Ⅲ类功能性反应函数(Holling's functional response type Ⅲ)　见“豪林功能性反应”.

弱极限环(weak limit cycle)　数学生态学的基本概念之一. 指一种单侧的极限环. 若微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f_1(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f_2(x,y)\end{cases}$$



有平衡点 (x^*,y^*)，而在相平面上，平衡点 (x^*,y^*) 的外围被一族有界闭轨线所充满，若将这族闭轨线的最外的一个记为 Γ，并且 Γ 是一个外不稳定(或外稳定)的半边极限环. 则称 Γ 为围绕平衡点 (x^*,y^*) 的不稳定(或稳定)弱极限环(如图所示).

具Ⅰ类功能性反应高斯模型的极限环(limit cycles of Gauss model with functional response type Ⅰ)　数学生态学的基本概念之一. 它适用于研究低等生物功能性反应模型是否存在孤立周期解的问题. 常用的具Ⅰ类功能性反应的高斯模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-bx^2-yp(x)\quad (x(0)=x_0>0),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y[-e+Kp(x)]\quad (y(0)=y_0>0).\end{cases}$$

其中 $a>0,e>0,K>0,b\geqslant 0$，函数 $p(x)$ 为

$$p(x)=\begin{cases}cx & (x\leqslant x_1)\\ cx_1 & (x>x_1)\end{cases}\quad (c>0,x_1>0).$$

该模型具有下列性质：

1. 当 $b=0$ 时，若方程组有孤立正平衡点为 (x^*,y^*)，其中

$$x^*=\frac{e}{Kc},\quad y^*=\frac{a}{c},$$

则在 (x^*,y^*) 外围存在外不稳定弱极限环.

2. 当 $b\neq 0$ 时，若方程组有孤立正平衡点为 (x^*,y^*)，其中

$$x^*=\frac{e}{Kc},\quad y^*=\frac{a\left(1-\dfrac{b}{a}x^*\right)}{c},$$

则当

$$\frac{e}{Kc}<x_1,\quad 0<\frac{b}{a}\ll 1$$

时，方程组至少存在两个围绕(x^*,y^*)的周期解．其最里面一个是内不稳定的，最外面一个是外稳定的．

具Ⅱ类功能性反应高斯模型的极限环(limit cycles of Gauss model with functional response type Ⅱ)　数学生态学的基本概念之一．它适用于研究无脊椎动物功能性反应模型是否存在孤立周期解的问题．具Ⅱ类功能性反应的高斯模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right)-\dfrac{m}{\alpha}\dfrac{xy}{a+x}\\ \qquad (x(0)=x_0>0),\\ \dfrac{dy}{dt}=y\left(\dfrac{mx}{a+x}-D_0\right)\\ \qquad (y(0)=y_0>0).\end{cases}\tag{1}$$

这里r,K,m,α,a,D_0均为正常数．当$m>D_0$时，记

$$\lambda=\frac{aD_0}{m}-1.$$

该模型具有下列性质：

1．系统的所有解一致有界．

2．若$m\leqslant D$,或$m>D_0$,但$K\leqslant\lambda$,则(1)的平衡点$E_1(K,0)$是渐近稳定的，系统的任意正解有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=K,\quad \lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

3．若$\lambda<K\leqslant a+2\lambda$,则平衡点$E^*(\lambda,y^*)$是渐近稳定的，并且所有的解有

$$\lim_{t\to\infty}(c)\ x(t)=\lambda,\quad \lim_{t\to\infty}y(t)=y^*,$$

其中

$$y^*=\frac{r\alpha}{m}\left(1-\frac{\lambda}{K}\right)(a+\lambda).$$

4．若$K>a+2\lambda$,则平衡点$E^*(\lambda,y^*)$是不稳定的，在(x,y)平面的第一象限内，存在惟一稳定极限环．

这是1983年沃特曼(Waltman,P.)研究得到的．

高斯型捕食-被捕食模型的正平衡点(positive equilibrium of Gauss type predator-prey model)　数学生态学的基本概念之一．指生态系统处于生态平衡的一种状态．它反映捕食-被捕食关系的高斯型模型的正平衡点及稳定性等性质．这种模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xg(x)-yp(x)\equiv p(x)[F(x)-y],\\ \dfrac{dy}{dt}=y[-r+q(x)]\equiv y\varphi(x),\end{cases}$$

其中

$$F(x)=\frac{xg(x)}{p(x)},\quad y=F(x)$$

称为食饵等倾线．若$\varphi(x)=0$有正根$x^*>0$,则$x=x^*$与食饵等倾线$y=F(x)$的交点$(x^*,F(x^*))$称高斯型捕食-被捕食模型的正平衡点．若$(x^*,F(x^*))$落在食饵等倾线$y=F(x)$上升的部分，则$(x^*,F(x^*))$为不稳定的；若$(x^*,F(x^*))$落在食饵等倾线$y=F(x)$下降的部分，则$(x^*,F(x^*))$为稳定的．

高斯型捕食-被捕食模型的极限环(limit cycles of the Gauss type predator-prey model)　数学生态学的基本概念之一．指对高斯型捕食系统种群密度周期性变化的描述．设高斯型捕食-被捕食模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xg(x)-yp(x)\equiv p(x)[F(x)-y]\\ \qquad\left(F(x)=\dfrac{xg(x)}{p(x)}\right),\\ \dfrac{dy}{dt}=y[-r+q(x)]\\ \qquad\equiv y[-\bar{q}(x)+cp(x)]\equiv y\varphi(x),\end{cases}$$

其中$g(x)$为食饵种群的相对增长率，对下列条件：

1．$g(0)>0$,并且存在一个$K>0$,使$g(K)=0$,当$x\neq K$时，所有的x满足$(x-K)g(x)<0$.

2．$p(x)$是捕食者种群的捕食率，且

$$p(0)=0,\quad p'(x)>0.$$

3．$\bar{q}(x)$是捕食者种群的死亡率，且

$$\bar{q}(0)=r>0,\quad \bar{q}'(x)<0,\ \lim_{x\to\infty}\bar{q}(x)=q_0>0.$$

4．函数$\varphi(x)$有惟一零点$\varphi(x^*)=0$.

如果条件1至条件4成立，且模型存在不稳定的正平衡点(x^*,y^*),则(x^*,y^*)外围必存在极限环．如果函数

$$H(x)\equiv-\frac{p(x)F'(x)}{\varphi(x)}$$

在$(0,x^*)$,$(x^*,+\infty)$内非减，则此极限环是惟一的，它描述了种群密度的周期性变化．

高斯型捕食-被捕食模型的全局稳定性(global stability of Gauss type predator-prey model)　数学生态学的基本概念之一．是对高斯型捕食系统中两种群变化趋势的一种描述．设高斯型捕食-被捕食模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xg(x)-yp(x)\equiv p(x)[F(x)-y],\\ \qquad\left(F(x)=\dfrac{xg(x)}{p(x)}\right),\\ \dfrac{dy}{dt}=y[-r+q(x)]\equiv y[-\bar{q}(x)+cp(x)]\\ \qquad\equiv y\varphi(x),\end{cases}$$

若其中函数$g(x)$,$p(x)$,$\bar{q}(x)$和$\varphi(x)$满足“高斯型捕食-被捕食模型的极限环”中条件1至条件4(参见“高斯型捕食-被捕食模型的极限环”)，而且正平衡点(x^*,y^*)为局部稳定，则若食饵等倾线为凹向下曲线，即

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{xg(x)}{p(x)}\right)<0\quad(0\leqslant x<k)$$

时，(x^*, y^*)为全局稳定，也称高斯型捕食-被捕食模型为全局稳定.

具相互干扰的捕食-被捕食系统(predator-prey system with mutual interference)　一种特殊的数学生态学模型. 指捕猎食物的过程中，捕食种群内各个体之间产生相互干扰作用的系统. 1971 年，哈塞(Hassell, M. P.)提出具相互干扰的高斯型捕食-被捕食模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xg(x)-y^m p(x)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=y[-s+cy^{m-1}p(x)-q(y)]\end{cases}\quad(0<m\leqslant 1),$$

这里 m 称为干扰常数，$p(x)$ 为功能性反应函数，s 和 $q(y)$ 为捕食者种群在缺食时的死亡率，$g(x)$ 为食饵种群的相对增长率. 1979 年，弗里德曼(Freedman, H. L.)在假设：

1. $g(0)=\alpha>0, g'_x(x)\leqslant 0$，存在常数 $K>0$，使 $g(K)=0$.

2. $p(0)=0, p'_x(x)>0$.

3. $q(0)=0, q'_y(y)\geqslant 0$

的情况下，讨论了系统平衡点的局部稳定性，但系统解的大范围性质尚无理论研究.

捕食-被捕食柯尔莫哥洛夫模型的极限环(limit cycles of Kolmogorov predator-prey model)　数学生态学的基本概念之一. 指一般捕食-被捕食系统的一种周期现象. 表现为柯尔莫哥洛夫模型

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1 f_1(x_1,x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_2 f_2(x_1,x_2).$$

作如下假设：

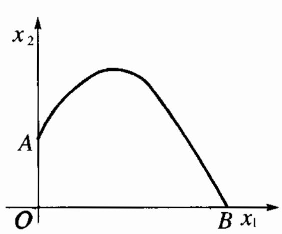


图 1

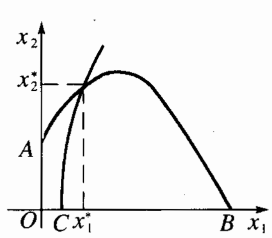


图 2

1. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}<0$ (食饵受到捕食者的抑制作用).

2. $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}>0$ (捕食者得到食饵的给养).

3. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}<0$ (食饵是密度制约的).

3_a. $\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_2=0}<0$ (无捕食者时，食饵密度制约).

4. $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}<0$ (捕食者是密度制约的).

5. 存在常数 $A>0$，使 $f_1(0,A)=0$ (A 为食饵不存在时的捕食者种群的上临界密度).

6. 存在常数 $B>0$，使 $f_1(B,0)=0$ (B 为无捕食者时食饵的容纳量).

7. 存在常数 $C>0$，使 $f_2(C,0)=0$ (C 为无捕食者时的食饵的下临界密度).

8. $C<B$.

9. $f_1(x_1,x_2)=0$，由隐函数定理可以惟一的解出 $x_2=h(x_1)$，这里 $h\in C^1[0,B], h'<0, h(0)=A, h(B)=0$.

10. $f_2(x_1,x_2)=0$，可以惟一地解出 $x_1=g(x_2)$，这里 $g\in C^1(0,\infty), g'>0$ 以及 $g(0)=C$.

11. $x_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)+x_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)<0$.

12. $x_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)+x_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)>0$.

13. 被捕食等倾线有单峰，如图 1.

14. $(x_1-B)f_1(x_1,0)<0$.

15. $(x_2-A)f_1(0,x_2)<0$.

16. $(x_1-C)f_2(x_1,0)>0$.

下面的结果属于俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)：

1. 若 f_1, f_2 满足条件 1, 2, 3_a, 4, 5, 6, 7, 8 和 13，并且捕食-被捕食等倾线有图 2 的构形以及 $a+d>0, ad-bc>0$，这里

$$a=x_1^*\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*),$$

$$b=x_1^*\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*),$$

$$c=x_2^*\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*),$$

$$d=x_2^*\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*).$$

则系统在 R_+^2 内有极限环.

2. 若条件 1, 2, 8, 11, 12, 14, 15 以及 16 成立，并且假设 $f_1(0,0)>0$，则模型有惟一的正平衡点. 如果这个平衡点是不稳定的，则在 R_+^2 内必存在极限环，这个极限环是外稳定的.

哈瑞松模型的稳定性(stability of Harrison model)　一般捕食-被捕食模型的重要性质. 该性质是指：对哈瑞松模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(x)-f(x)b(y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=n(x)g(y)+c(y),\end{cases}$$

其中各函数满足哈瑞松模型的各条件(参见“一般捕食-被捕食模型”)：

1. 若在正平衡点(x^*, y^*)的一个邻域内，$a(x)/f(x)$和 $c(y)/g(y)$均为非增，并且其中至少一个是严格下降，则平衡点(x^*, y^*)是渐近稳定的.

2. 若 1 中的假设成立，而且：

1) 当 $0<x<x^*$ 时，$a(x)\geqslant b(y^*)f(x)$；
当 $x^*<x<\infty$ 时，$a(x)\leqslant b(y^*)f(x)$.

2) 当 $0<y<y^*$ 时，$c(y)\geqslant -n(x^*)g(y)$；
当 $y^*<y<\infty$ 时，$c(y)\leqslant -n(x^*)g(y)$.

由于

$$\frac{a(x)}{f(x)} \text{ 或 } \frac{c(y)}{g(y)}$$

是严格下降的，因此其相应的不等式 1）或 2）是严格的，则 (x^*,y^*) 是全局稳定的.

一般捕食-被捕食模型（general predator-prey model） 一类数学生态学模型. 指对捕食-被捕食模型比较一般的描述. 该模型表示为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(x)-f(x)b(y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=n(x)g(y)+c(y),\end{cases}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 均在 R_+ 上为正值函数，$a(x)$ 表示无捕食种群时，食饵种群的增长率，$c(y)$ 表示无食饵种群时，捕食种群的增长率或减少率. 设 $n(x)$ 和 $b(y)$ 为非减函数，$f(x)b(y)$ 为捕食者种群的总体捕食率，$n(x)g(y)$ 为食饵种群到捕食者种群的转换率. 若 (x^*,y^*) 是系统的正平衡点，假设：

$$(n(x)-n(x^*))(x-x^*)>0 \quad (x\neq x^*),$$

$$(b(y)-b(y^*))(y-y^*)>0 \quad (y\neq y^*).$$

满足以上条件的系统称为一般捕食-被捕食模型，也称为哈瑞松模型. 它是 1979 年哈瑞松（Harrison，G. W.）研究的.

哈瑞松模型（Harrison models） 即"一般捕食-被捕食模型".

柯尔莫哥洛夫型竞争模型（competition models of Kolmogorov type） 一种特殊的数学生态学模型. 指两种群有相互竞争关系的柯尔莫哥洛夫模型. 该模型可表为

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1f_1(x_1,x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_2f_2(x_1,x_2).$$

这时不可能产生极限环. 假设：

1. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)<0$，　$\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)<0$；

2. 存在正数 $K>0$，使当 $x_i\geqslant K$，$i=1$ 或 2 时，$f_i(x_1,x_2)$ 两者均为非正；

3. 存在正数 $A>0$ 和 $B>0$，使得

$$(x_1-A)f_1(x_1,0)<0,$$

$$(x_2-B)f_2(0,x_2)<0;$$

则当 $t\to\infty$ 时，模型的任意解趋于一个正平衡点，也就是说，种群的数量终将趋于一个有限数.

柯尔莫哥洛夫型合作模型（cooperation model of Kolmogorov type） 一种特殊的数学生态学模型. 指两种群是合作关系的柯尔莫哥洛夫模型. 该模型可表为

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1f_1(x_1,x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_2f_2(x_1,x_2).$$

假设当 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$ 时，下列条件成立：

1. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}>0$，$\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}>0$；

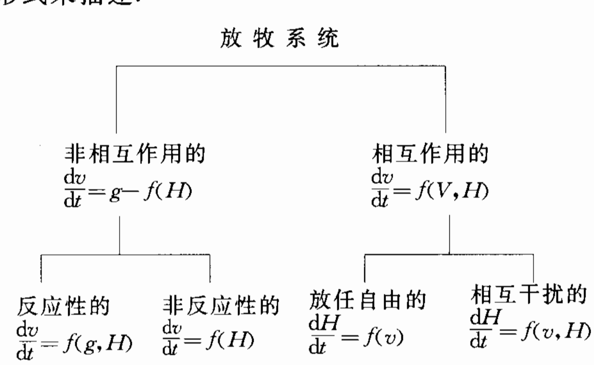
2. $x_1\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}\leqslant -\alpha<0 \quad (i=1,2)$；

3. $f_i(0,0)>0 \quad (i=1,2)$；

4. $f_1(K_1,0)=f_2(0,K_2)=0$；

则当上述四个条件均成立时，系统存在惟一正平衡位置，且是全局渐近稳定的.

放牧系统（grazing system） 一种柯尔莫哥洛夫模型. 即描述吃草动物与灌木之间相互作用的系统. 以 $V(t)$ 表示植被在时刻 t 的密度，$H(t)$ 表示食植者种群在时刻 t 的密度，g 表示植被资源的更新速度，放牧系统的模型有许多种情况，可以用下面的形式来描述.



柯尔莫哥洛夫型离散两种群模型（Kolmogorov type discrete two species model） 一类数学生态学模型. 指离散时间下的柯尔莫哥洛夫两种群模型. 该模型可表为

$$\begin{cases}x_{t+1}=x_tF_1(x_t,y_t),\\ y_{t+1}=y_tF_2(x_t,y_t),\end{cases}$$

其中 F_1,F_2 是 R_+^2 内的正连续函数. 若存在正数 x^*，y^*，使得：

$$F_1(x^*,y^*)=F_2(x^*,y^*)=1,$$

则 (x^*,y^*) 称为模型的正平衡位置，其稳定性可以用线性化系统来判定，其全局稳定性可用李亚普诺夫函数（参见"李亚普诺夫定理"）的方法来判定. 例如可选取李亚普诺夫函数

$$V(x_t,y_t)=\left[\frac{1}{2}(x_t^2-x^{*2})-x^*\ln\left(\frac{x_t}{x^*}\right)\right]+C\left[\frac{1}{2}(y_t^2-y^{*2})-y^*\ln\left(\frac{y_t}{y^*}\right)\right],$$

其中 C 为正常数.

洛特卡-沃尔泰拉型离散两种群模型(Lotka-Volterra type discrete two species model) 一类数学生态学模型. 是简单的离散两种群模型. 洛特卡-沃尔泰拉离散两种群模型可表为

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t \exp\left[\dfrac{r_1}{K_1}(K_1 - \alpha_{11}x_t - \alpha_{12}y_t)\right], \\ y_{t+1} = y_t \exp\left[\dfrac{r_2}{K_2}(K_2 - \alpha_{21}x_t - \alpha_{22}y_t)\right], \end{cases}$$

这里 r_i, K_i, α_{ij} $(i=1,2, j=1,2)$, 均为正常数. 此模型所描述的两种群是相互竞争关系. 若是捕食关系或协作关系, 只需把 α_{ij} 的符号改动即可. 此模型的正平衡点 (x^*, y^*) 满足方程

$$K_1 - \alpha_{11}x_t - \alpha_{12}y_t = 0,$$
$$K_2 - \alpha_{21}x_t - \alpha_{22}y_t = 0,$$

即

$$x^* = \frac{1}{\Delta}(K_1\alpha_{22} - K_2\alpha_{12}),$$

$$y^* = \frac{1}{\Delta}(K_2\alpha_{11} - K_1\alpha_{21}),$$

其中 $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. 例如, 在 1974 年, 梅(May, R. M.)考虑简单情况:

$$K_1 = K_2 = 1,\ r_1 = r,\ r_2 = 2r,$$
$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1,\ \alpha_{21} = \alpha_{12} = \alpha,$$

则有

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha}\right).$$

当 $\alpha < 1$ 且

$$r \leqslant \frac{3 - \sqrt{1 + 8\alpha^2}}{2(1 - \alpha)}$$

时, (x^*, y^*) 为稳定的.

高斯型离散两种群模型(Gauss type discrete two species model) 一类数学生态学模型. 是离散时间下的两种群高斯型模型. 该模型可表为

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 + r)x_t - f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = (1 - d)y_t + g(x_t, y_t), \end{cases}$$

这里 x_t, y_t 分别表示被捕食种群和捕食者种群在时刻 t 时的个体数量, r 等于食饵种群的出生率减去自然死亡率, d 是捕食者种群缺食时的死亡率, $f(x_t, y_t)$ 表示在时刻 t, 单位时间内被捕食种群吞食掉的食饵个数, $g(x_t, y_t)$ 是时刻 t 捕食者种群的出生率, 并且 $r \geqslant 0, 0 < d \leqslant 1$. 两种群离散高斯型模型也常写为

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 + r)x_t - p(x_t)y_t, \\ y_{t+1} = (1 - d)y_t + cp(x_t)y_t, \end{cases}$$

其中 $c > 0$, $p(x_t)$ 为功能性反应函数.

Ⅱ类功能性反应两种群离散模型(discrete two species model with functional response type Ⅱ) 一类数学生态学模型. 是描述脊椎动物捕食能力的离散模型. 1972 年, 哈塞(Hassell, M. P.)等用以描述鹿群与狼群相互作用时, 利用具Ⅱ类功能性反应的离散模型. 该模型表示为

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1+r)x_t - \dfrac{\alpha x_t y_t}{1+\beta x_t}, \\ y_{t+1} = (1-d)y_t + \dfrac{c\alpha x_t y_t}{1+\beta x_t}, \end{cases}$$

其中 x_t 与 y_t 分别表示在时刻 t 鹿和狼的数目, r, d, α, β 均为正数. 当 $c\alpha - d\beta > 0$ 时, 有正平衡点 (x^*, y^*), 其中

$$x^* = \frac{d}{c\alpha - d\beta}, \quad y^* = \frac{cr}{c\alpha - d\beta}.$$

而且 (x^*, y^*) 为不稳定平衡点.

相互干扰两种群离散模型(discrete two species model with mutual interference) 一种特殊的数学生态学模型. 指在捕食过程中, 捕食者种群内部干扰作用的模型. 1972 年, 哈塞(Hassell, M. P.)等研究了具有相互干扰的离散两种群捕食-被捕食模型. 该模型表示为

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1+r)x_t - \dfrac{\alpha x_t y_t^{1-m}}{1+\beta x_t}, \\ y_{t+1} = (1-d)y_t + \dfrac{\alpha x_t y_t^{1-m}}{1+\beta x_t}. \end{cases}$$

1959 年, 韦特(Watt, K, E. F.)研究了具相互干扰的离散两种群捕食-被捕食模型. 其模型表示为

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1+r)x_t - Ky_t[1 - \exp(-Kx_t^2 y_t^{1-m})], \\ y_{t+1} = (1-d)y_t + cKy_t[1 - \exp(-Kx_t^2 y_t^{1-m})], \end{cases}$$

其中 x_t, y_t 分别表示食饵种群-捕食种群在时刻 t 的个体数量, $r, d, \alpha, \beta, K, c$ 均为正常数.

尼柯森-贝利两种群模型(Nicholson-Bailey two species model) 一种特殊的数学生态学模型. 指增长率用指数形式描述的模型. 该模型表示为

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t \exp\left[r\left(1 - \dfrac{x_t}{K}\right) - ay_t\right], \\ y_{t+1} = \alpha x_t[1 - \exp(-ay_t)], \end{cases}$$

其中 x_t 和 y_t 分别表示食饵种群与捕食种群在时刻 t 的个体数量, r 为食饵种群的内禀增长率, K 代表环境对食饵种群的容纳量, r, K, α, a 均为正数, 其推广形式为

$$\begin{cases} x_{t+1} = \lambda x_t f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = rx_t[1 - f(x_t, y_t)], \end{cases}$$

这里 $f(x_t, y_t)$ 是食饵种群不被捕食种群所发现的概率, λ, r 为正数.

反应扩散洛特卡-沃尔泰拉系统(reaction-diffusion Lotka-Volterra systems) 一类数学生态学模型. 指种群密度在空间中分布不均匀时的模型. 其模

型可表示为反应扩散方程.通常考虑两种群相互作用的模型时,都假设种群的密度在其所生活的空间中分布是均匀的.如果其密度分布不是均匀的,则密度的变化除了两种群各自的生、灭以及相互作用因素外,还要考虑到种群的迁移.以 $N_1(x,t)$ 和 $N_2(x,t)$ 分别表示两种群于时刻 t 在空间位置 x 的密度,这里 x 表示空间的一个点 $x(x_1,x_2,x_t)\in\mathrm{R}^3$,则洛特卡-沃尔泰拉系统表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_1}{\partial t}=N_1f_1(N_1,N_2)+\mu\Delta N_1,\\ \dfrac{\partial N_t}{\partial t}=N_2f_2(N_1,N_2)+\Delta N_2,\end{cases}$$

其中

$$f_i(N_1,N_2)=b_i+\sum_{j=1}^{2}a_{ij}N_j\quad(i=1,2),$$

μ 为正常数,初始条件

$$\begin{cases}N_1(0,x)=\varphi(x)\\ N_2(0,x)=\psi(x)\end{cases}(\text{对所有 } x\in\Omega\subset\mathrm{R}^3),$$

这里,Ω 是所研究的两个种群的生活区域,$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界.边界问题的提法有以下三种:

1. 诺伊曼边值条件:

$$\frac{\partial N_1}{\partial n}=0,\quad\frac{\partial N_2}{\partial n}=0,$$

对所有 $(t,x)\in(0,\infty)\times\partial\Omega$.

2. 狄利克雷边值条件:$N_1=0,N_2=0$,对所有 $(t,x)\in(0,\infty)\times\partial\Omega$.

3. 在一维的情况下,$\Omega=[0,L]$周期边界条件:

$$N_1(t,0)=N_1(t,L),$$
$$N_{1x}(t,0)=N_{1x}(t,L);$$
$$N_2(t,0)=N_2(t,L),$$
$$N_{2x}(t,0)=N_{2x}(t,L).$$

时滞沃尔泰拉模型(Volterra's model with time delays) 一种特殊的数学生态学模型.指反应遗传效应的沃尔泰拉模型.当无时滞时,该模型表示为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1-a_{12}y,\\ \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2+a_{21}x,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $b_i>0,a_{ij}>0\ (i,j=1,2)$.此模型的建立,是假定食饵种群对捕食者种群的作用是瞬时的.实际上,捕食者种群捕食食饵种群后,转化为能量后繁殖,应该具有一个时滞,因此,具时滞作用的沃尔特拉模型为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1-a_{12}y,\\ \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2+a_{21}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}x(s)K_1(t-s)\mathrm{d}s,\end{cases}\tag{2}$$

这里 $K_1(s)\in L_+^1$,其模满足 $|K_1|_l=1$.

若考虑捕食者种群对食饵种群作用的时滞,则具时滞的沃尔泰拉模型更一般的形式应为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1-a_{12}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}y(s)K_2(t-s)\mathrm{d}s,\\ \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2+a_{21}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}x(s)K_1(t-s)\mathrm{d}s,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $K_1(s),K_2(s)\in L'_+,|K_1|_l=1,|K_2|_l=1$.

模型(1),(2)与(3)有同样平衡点(x^*,y^*):

$$x^*=\frac{b_2}{a_{21}}>0,\quad y^*=\frac{b_1}{a_{12}}>0.$$

具弱时滞核沃尔泰拉模型的稳定性(stability of Volterra's model with weak time delay kernel) 数学生态学的基本概念之一.指具弱时滞核的沃尔泰拉模型的重要性质.设具弱时滞核的沃尔泰拉模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1x-a_{12}xy,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2y+a_{21}y\displaystyle\int_{-\infty}^{t}x(s)K_1(t-s)\mathrm{d}s,\end{cases}$$

其中 $K_1(s)=a\exp(-as)$.引进新变量

$$z=\int_{-\infty}^{t}K_1(t-s)x(s)ds.$$

则它等价于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1x-a_{12}xy,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2y+a_{21}yz,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=a(x+z).\end{cases}$$

有正平衡点(x^*,y^*,z^*):

$$x^*=\frac{b_2}{a_{21}},\ y^*=\frac{b_1}{a_{12}},\ z^*=\frac{b_2}{a_{21}},$$

(x^*,y^*,z^*)是不稳定的(b_1,b_2,a_{12},a_{21}和 a 均为正数).

具密度制约沃尔泰拉时滞模型(Volterra's model with time delays and density dependence) 一种特殊的沃尔泰拉模型.即考虑密度影响且捕食能力受遗传因素影响的捕食模型.有密度制约的时滞沃尔泰拉模型为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1\left(1-\dfrac{x}{c}\right)-a_{12}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}K_2(t-s)y(s)\mathrm{d}s,\\ \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2+a_{21}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}K_1(t-s)x(s)\mathrm{d}s,\end{cases}$$

这里核函数 $K_j(s)\ (j=1,2)$所满足的条件,详见“时滞沃尔泰拉模型”.

具时滞洛特卡-沃尔泰拉模型(Lotka-Volterra model with time delays) 一种柯尔莫哥洛夫模型.指考虑两种群的密度影响和种群的遗传效应常用的

模型.对应于捕食系统的洛特卡-沃尔泰拉模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-a_{11}x-a_{12}y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-d+a_{21}x-a_{22}y).\end{cases}\tag{1}$$

具连续时滞的模型,在做以下假设(对于所有的 i):

1. 当 $\theta\in[0,r]$ 时,$K_i(\theta)\geqslant 0$ 且连续;当 $\theta\in[r,\infty)$ 时,$K_i(\theta)=0$.

2. 当 $\theta\in[0,r)$ 时,$K'_i(\theta)\leqslant 0$,连续,而且

$$\lim_{\theta\to 0^+}K'_i(\theta)\quad 和\quad \lim_{\theta\to r^-}K'_i(\theta)$$

均存在.

3. 当 $\theta\in(0,r)$ 时,$k''_i(\theta)\geqslant 0$ 且连续

的情况下为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x[a-\displaystyle\int_0^\infty K_1(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta\\ \qquad -\displaystyle\int_0^\infty K_2(\theta)y(t-\theta)\mathrm{d}\theta],\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y[-d+\displaystyle\int_0^\infty K_3(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta\\ \qquad -\displaystyle\int_0^\infty K_4(\theta)y(t-\theta)\mathrm{d}\theta].\end{cases}\tag{2}$$

其中,$K_i(\theta)$ 为核函数,且

$$\int_0^\infty K_i(\theta)\mathrm{d}\theta<\infty\ (i=1,2,3,4).$$

考虑比系统(2)更一般的系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\Big[a-a_{11}x-a_{12}y\\ \qquad -\displaystyle\int_0^r K_1(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta\\ \qquad -\displaystyle\int_0^r K_2(\theta)y(t-\theta)\mathrm{d}\theta\Big],\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\Big[-d+a_{21}x-a_{22}y\\ \qquad +\displaystyle\int_0^r K_3(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta\\ \qquad -\displaystyle\int_0^r K_4(\theta)y(t-\theta)\mathrm{d}\theta\Big],\end{cases}\tag{3}$$

其中 $a,d,a_{ij}(i,j=1,2)$ 如系统(1),均为正数,核函数如系统(2),满足条件 1 至条件 3,从"洛特卡-沃尔泰拉系统的全局稳定性"得知,当 $a_{21}>a_{11}d$ 时,系统(1)有正平衡点(x^*,y^*),且是全局稳定的,这里

$$x^*=\frac{aa_{22}+a_{12}d}{a_{12}a_{21}+a_{11}a_{22}},\quad y^*=\frac{aa_{21}-a_{11}d}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}.$$

若记

$$\int_0^r K_i(\theta)\mathrm{d}\theta\ (i=1,2,3,4)$$

分别为 $\bar{a}_{11},\bar{a}_{12},\bar{a}_{21},\bar{a}_{22}$,则时滞洛特卡-沃尔泰拉系统(3)有正平衡点$(\bar{x}^*,\bar{y}^*)$:

$$\bar{x}^*=\frac{a(a_{22}+\bar{a}_{22})+(a_{12}+\bar{a}_{12})d}{(a_{12}+\bar{a}_{12})(a_{21}+\bar{a}_{21})+(a_{11}+\bar{a}_{11})(a_{22}+\bar{a}_{22})},$$

$$\bar{y}^*=\frac{a(a_{21}+\bar{a}_{21})-(a_{11}+\bar{a}_{11})d}{(a_{12}+\bar{a}_{12})(a_{21}+\bar{a}_{21})+(a_{11}+\bar{a}_{11})(a_{22}+\bar{a}_{22})}.$$

这里,假设

4. $a(a_{21}+\bar{a}_{21})>(a_{11}+\bar{a}_{11})d$.

资源限制有滞后效应的沃尔泰拉模型(Volterra's model with response delays to resource limitation) 一种特殊的沃尔泰拉模型.指资源缺乏对种群增长有遗传性影响时的模型.考虑到食饵种群本身的密度制约作用,有时滞效应的沃尔泰拉模型为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1\Big[1-\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^t x(s)K_3(t-s)\mathrm{d}s\Big]-a_{12}y,\\ \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2+a_{21}x.\end{cases}$$

若既考虑到食饵种群密度制约的时滞,又考虑两种群相互影响的时滞效应,则模型为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b_1\Big[1-\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^t x(s)K_3(t-s)\mathrm{d}s\Big]\\ \qquad -a_{12}\displaystyle\int_{-\infty}^t y(s)K_2(t-s)\mathrm{d}s,\\ \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-b_2+a_{21}\displaystyle\int_{-\infty}^t x(s)K_1(t-s)\mathrm{d}s.\end{cases}$$

这里 $K_j\in L^1_+,|K_j|_I=1\ (j=1,2,3)$.

时滞洛特卡-沃尔泰拉模型的全局稳定性(global stability of Lotka-Volterra model with time delays) 时滞洛特卡-沃尔泰拉模型的一种大范围性质.该性质指:对具时滞的洛特卡-沃尔泰拉模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\Big[a-a_{11}x-a_{12}y\\ \qquad -\displaystyle\int_0^r K_1(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta\\ \qquad -\displaystyle\int_0^r K_2(\theta)y(t-\theta)\mathrm{d}\theta\Big],\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\Big[-d+a_{21}x-a_{22}y\\ \qquad +\displaystyle\int_0^r K_3(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta\\ \qquad -\displaystyle\int_0^r K_4(\theta)y(t-\theta)\mathrm{d}\theta\Big],\end{cases}$$

其核函数满足"具时滞洛特卡-沃尔泰拉模型"中的条件 1 至条件 4(参见"具时滞洛特卡-沃尔泰拉模型"),并且对于所有的 $\theta\in(0,r)$,有

5. $\dfrac{a_{21}}{a_{12}}[K'_2(\theta)]^2<\dfrac{2a_{11}}{r}K''_4(\theta)$,且

$$\frac{a_{12}}{a_{21}}[K'_3(\theta)]^2<\frac{2a_{22}}{r}K''_1(\theta)$$

成立,则系统对所有的 $t\in[-r,0]$,取值 $x_0(t)>0$ 和 $y_0(t)>0$ 的任何初始值的解$(x(t),y(t))$,当 $t\to\infty$ 时,都有$(x(t),y(t))\to(\bar{x}^*,\bar{y}^*)$.

具弱时滞核洛特卡-沃尔泰拉模型的稳定性

(stability of Lotka-Volterra model with weak time delay kernel) 具弱时滞核两种群捕食-被捕食模型的一个重要性质.该性质指:对模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x[b_1-\alpha_1 r_1 y],\\ \dfrac{dy}{dt}=y\left[-b_2-\alpha_2 y+r_2\int_{-\infty}^{t}F(t-\tau)x(\tau)d\tau\right],\end{cases}$$

其中 $F(t)=ae^{-at}$, b_i,α_i,r_i 均为正数($i=1,2$).当 $(b_1/\alpha_1)>(b_2/r_2)$ 时,模型存在惟一正平衡点 (x^*,y^*):

$$x^*=\frac{b_1\alpha_2+b_2r_1}{\alpha_1\alpha_2+r_1r_2},\quad y^*=\frac{b_1r_2-b_2\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2+r_1r_2},$$

并存在以下两个结论:

1. 若满足条件

$$0<\frac{r_1r_2}{\alpha_1\alpha_2}<f(a)=\frac{u}{v}\frac{a^2+ua+v}{a},$$

这里 $u=\alpha_1x^*+\alpha_2y^*$, $v=\alpha_1\alpha_2x^*y^*$,则正平衡点 (x^*,y^*) 为渐近稳定.

2. 若满足条件

$$0<\frac{r_1r_2}{\alpha_1\alpha_2}<8,\quad a>0,$$

则 (x^*,y^*) 在 R_+^2 中全局渐近稳定.

弱时滞核洛特卡-沃尔泰拉模型的周期解(periodic solution of Lotka-Volterra model with weak time delay kernel) 数学生态学的基本概念之一.指具弱时滞核两种群捕食-被捕食模型的周期性质.对于模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x[b_1-\alpha_1 r_1 y],\\ \dfrac{dy}{dt}=y\left[-b_2-\alpha_2 y+r_2\int_{-\infty}^{t}F(t-\tau)x(\tau)d\tau\right],\end{cases}$$

其中 $F(t)=ae^{-at}$, b_i,α_i,r_i 均为正数($i=1,2$).若记 $b=r_1r_2/\alpha_1\alpha_2$,则有以下结果:当 $b_1/\alpha_1>b_2/r_2$,但 $b>f(a)$ 且 $|b-f(a)|$ 适当小时,系统在正平衡点 (x^*,y^*) 附近存在周期解.这里

$$f(a)=\frac{u}{v}\frac{a^2+ua+v}{a},$$

其中 $u=\alpha_1x^*+\alpha_2y^*$, $v=\alpha_1\alpha_2x^*y^*$.

具时滞高斯模型(Gauss model with delays) 一类数学生态学模型.指描述有遗传效应的捕食-被捕食模型.该模型表示为具时滞的Ⅱ类功能性反应模型

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=b_1[1-c^{-1}\int_{-\infty}^{t}x(s)K_3(t-s)ds]\\ \qquad -a_{12}\int_{-\infty}^{t}\dfrac{y(s)}{1+x(s)}K_2(t-s)ds,\\ \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dt}=-b_2+a_{21}\int_{-\infty}^{t}\dfrac{x(s)}{1+x(s)}K_1(t-s)ds.\end{cases}$$

其中 $K_j(s)=L_+^1$, $|K_j|_l=1$ ($j=1,2,3$).当 $a_{21}>b_2$ 时,有正平衡点 (x^*,y^*):

$$x^*=\frac{b_2}{a_{21}-b_2},\quad y^*=\frac{b_1(c-x^*)}{a_{12}c-b_1(c-x^*)}.$$

具离散时滞洛特卡-沃尔泰拉模型(Lotka-Volterra model with discretetime delays) 一种特殊的柯尔莫哥洛夫模型.指具有常量时间滞后的洛特卡-沃尔泰拉模型.捕食-被捕食具有离散时滞的洛特卡-沃尔泰拉模型的一般形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=\varepsilon_1x(t)-a_{11}x^2(t)-a_{12}x(t)y(t)\\ \qquad -\beta_{11}x(t)x(t-\tau)-\beta_{12}x(t)y(t-\tau),\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=-\varepsilon_2y(t)+a_{21}x(t)y(t)-a_{22}y^2(t)\\ \qquad +\beta_{21}x(t-\tau)y(t)-\beta_{22}y(t)y(t-\tau).\end{cases}$$

这里假设所有 $\varepsilon_i,a_{ij},\beta_{ij}(i,j=1,2)$ 均为非负常数,则当 $\varepsilon_1(a_{21}+\beta_{21})>\varepsilon_2(a_{11}+\beta_{11})$ 时,系统有正平衡点 (x^*,y^*),且:

$$x^*=\frac{\varepsilon_1(a_{22}+\beta_{22})+\varepsilon_2(a_{12}+\beta_{12})}{(a_{11}+\beta_{11})(a_{22}+\beta_{22})+(a_{12}+\beta_{12})(a_{21}+\beta_{21})},$$

$$y^*=\frac{\varepsilon_1(a_{21}+\beta_{21})-\varepsilon_2(a_{11}+\beta_{11})}{(a_{11}+\beta_{11})(a_{22}+\beta_{22})+(a_{12}+\beta_{12})(a_{21}+\beta_{21})}.$$

又若存在正常数 c_1,c_2,使得:

1. $a_{11}-\dfrac{\beta_{11}^2}{a_{11}}-\dfrac{c_1\beta_{12}^2}{c_2a_{22}}>0.$

2. $a_{22}-\dfrac{\beta_{22}^2}{a_{22}}-\dfrac{c_2\beta_{21}^2}{c_1a_{11}}>0.$

3. $\left(-c_1a_{12}+c_2a_{21}+c_1\dfrac{\beta_{12}\beta_{22}}{a_{22}}-c_2\dfrac{\beta_{11}\beta_{21}}{a_{11}}\right)^2<c_1c_2\left(a_{11}-\dfrac{\beta_{11}^2}{a_{11}}-\dfrac{c_1\beta_{12}^2}{c_2a_{22}}\right)\left(a_{22}-\dfrac{\beta_{22}^2}{a_{22}}-\dfrac{c_2\beta_{21}^2}{c_1a_{11}}\right),$

则正平衡点 (x^*,y^*) 在第一象限全局稳定.

无害时滞(harmless delays) 数学生态学术语.指一种特殊的时滞效应,是对模型性态下产生本质影响的时滞.无论时滞大小如何,都不改变模型的正平衡点 (x^*,y^*) 的渐近稳定性,称这个时滞为具有无害时滞.对于具有离散时滞的柯尔莫哥洛夫模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=x(t)f[x(t),y(t-\tau)],\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=y(t)g[x(t-\tau),y(t)],\end{cases}\tag{1}$$

其中 τ 是非负常数, f,g 满足下列条件:

1. 存在一点 (x^*,y^*), $x^*>0$, $y^*>0$,使

$$f(x^*,y^*)=0=g(x^*,y^*).$$

2. 在 R_+^2 上连续可微且

$$\frac{\partial f}{\partial x}<0,\ \frac{\partial g}{\partial y}<0,\ (x,y)\in R_+^2.$$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}>0,\ (x,y)\in R_+^2.$

则模型(1)中的 τ 为无害时滞.

具无害时滞洛特卡-沃尔泰拉模型(Lotka-

Volterra models with harmless delays） 一种特殊的柯尔莫哥洛夫模型. 指时滞不产生本质影响的洛特卡-沃尔泰拉模型. 相互竞争的两种群离散时滞的洛特卡-沃尔泰拉模型可表示为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)[r_1-a_{11}x(t)-a_{12}y(t-x)],\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)[r_2-a_{21}x(t-\tau)-a_{22}y(t)],\end{cases}\tag{1}$$

其中 a_{ij}和 $r_i(i,j=1,2)$为正常数. 如果

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}>\frac{r_1}{r_2}>\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

系统(1)的时滞是无害时滞.

捕食-被捕食两种群离散时滞的洛特卡-沃尔泰拉模型表示为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)[K_1-x(t)-\alpha y(t-\tau)],\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)[-K_2+\beta x(t-\tau)-y(t)],\end{cases}\tag{2}$$

其中 K_1,K_2,α,β 为正常数，当 $K_1\beta<K_2$ 时，系统(2)的时滞是无害时滞.

捕食-被捕食系统的最优控制(optimal control of a prey-predator system) 一种生物控制问题. 即按需要对捕食与被捕食种群发展规律进行控制的最优策略. 在生态学中，有时为了人类的需要，必须对生态现象作一定的人为控制，例如对农田害虫的控制：在农田中，本来存在一个天敌与害虫的捕食与被捕食的生态系统，但是，如果这个生态系统中害虫数量过多，有害于农作物的生长，就必须投放化学杀虫剂以控制害虫的生长. 这时的数学模型为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xF_1(x,y)-\alpha u(t)x,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yF_2(x,y)-\beta u(t)y,\end{cases}$$

其中 $x(t),y(t)$分别表示害虫与天敌在时刻 t 的密度，$u(t)$表示在时刻 t 化学杀虫剂的投放率，α,β 分别表示化学杀虫剂对害虫和天敌的伤害效率. 如果 $\alpha=\beta=0$，模型即为描述害虫与天敌两种群增长的柯尔莫哥洛夫模型. 控制的要求是利用最少的杀虫剂，使在时刻 T 害虫减少到所要求的水平，且天敌也符合人类要求的数量. 问题的标准提法为：

状态方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xF_1(x,y)-\alpha u(t)x,$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yF_2(x,y)-\beta u(t)y;$

初始条件 $x(0)=x_0,y(0)=y_0;$

限制条件 $0\leqslant u(t)\leqslant b;$

终点条件 $x(T)=K,y(T)=m;$

目　标 $\min\int_0^T[cx(t)+u(t)]dt,$

其中 c 为正常数，其大小视具体需要而定.

n 种群的群落系统(system of n-species communities) 一种特殊的数学生态学模型. 指描述两个以上共居种群相互作用的模型. 在一个生态环境中，有多于两个种群在一起生活，它们之间相互影响，描述这种生态系统的模型是多种群生态系统模型，也称复杂生态系统. 以 $x_i(t)$表第 i 个种群在时刻 t 的密度，则有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_iF_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (\text{或}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_iF_i(x)).$$

记 n 维空间的正象限为

$$\mathrm{R}^n_+:\{x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0\},$$

设所有 F_i 在 R^n_+中连续，并存在

$$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)\in\mathrm{R}^n_+,$$

使得

$$F_i(x^*)=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则 x^* 称为系统的正平衡位置. 系统在 x^* 的线性化系统为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^n x_i^*a_{ij}x_j\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

其中，矩阵

$$(a_{ij})=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\Bigg|x=x^*.$$

若矩阵$(x_i^*a_{ij})$的所有特征根具有负实部，则系统的正平衡位置 x^*是渐近稳定的.

复杂生态系统(complex ecosystem) 见“n 种群的群落系统”.

李亚普诺夫定理(Liapunov theorem) 数学生态学的重要定理之一. 是判定系统稳定性质的重要定理. 对于复杂生态系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_iF_i(x),$$

设有正平衡点 x^*，$x^*\in\Omega\subset\mathrm{R}^n_+$. 若在区域 Ω 内定义的函数 $V(x)$对于系统具有性质：

1. $V(x^*)=0$，并且 x^*是 $V(x)$在 Ω 内惟一整体最小值；

2. 在 Ω 内，对每一个正值 K，曲面族 $V(x)=K$ 都是闭曲面；

3. 导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial V}{\partial x_i}x_iF_i(x)$$

对于所有 $x\in\Omega$ 是非正的；则称函数 $V(x)$是系统在 Ω 内的李亚普诺夫函数.

李亚普诺夫定理断言：若系统有正平衡点 $x^*\in\Omega$，如果存在李亚普诺夫函数 $V(x)$，在 Ω 内 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 是负定的，则 x^*在区域 Ω 内为渐近稳定的(即以 Ω 内任意点为初值的解，当 $t\to\infty$时趋于 x^*). 特别当 $\Omega\equiv\mathrm{R}^n_+$时，$x^*$称为全局渐近稳定的.

李亚普诺夫函数(Liapunov functions) 见“李

亚普诺夫定理".

复杂生态系统的全局稳定性(global stability of complex ecosystems) 数学生态学的基本概念之一.指共居的两个以上种群变化趋势的大范围性质.对于复杂生态系统

$$\frac{dx_i}{dt}=x_iF(x),$$

设系统有正平衡点 x^*.于是有以下结论:若存在常数矩阵 G,使得对所有 $x\in \mathbb{R}_+^n$,有

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\leqslant G_{ii}\ (i=1,2,\cdots,n);$$

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|\leqslant G_{ij}\ (i\neq j).$$

并且矩阵 G 的顺序主子式(参见《线性与多重线性代数》部分同名条)为正,则平衡点 x^* 是全局渐近稳定的,也称复杂生态系统是全局渐近稳定的.

多种群洛特卡-沃尔泰拉系统(species Lotka-Volterra systems) 一种复杂的柯尔莫哥洛夫模型.它是共居的多种群相互作用模型的常见形式.以 $x_i(t)$ 表示第 i 个种群在时刻 t 的密度,则 n 种群洛特卡-沃尔泰拉系统为

$$\frac{dx_i}{dt}=x_i(b_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 b_i,a_{ij} 对所有 $i,j=1,2,\cdots,n$ 为常数.系统最多可能有 2^n 个孤立平衡位置,但孤立正平衡点最多只有一个,记为 $x^*(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$,满足方程组

$$b_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*=0\ (i=1,2,\cdots,n).$$

正平衡位置为局部渐近稳定的条件是矩阵 $(x_i^*a_{ij})$ 的所有特征根的实部为负.

多种群洛特卡-沃尔泰拉系统的全局稳定性(global stability of species Lotka-Volterra systems) 数学生态学的基本概念之一.指用洛特卡-沃尔泰拉模型描述的多种群变化趋势的大范围性质.对于洛特卡-沃尔泰拉系统

$$\frac{dx_i}{dt}=x_i(b_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

设 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 为其正平衡位置,有以下结果:

1. x^* 为全局渐近稳定的充分条件为:

1) 存在一个正对角线矩阵 C,使得 $CA+A^TC$ 为半负定.

2) 函数

$$W(x)=\frac{1}{2}(x-x^*)^T(CA+A^TC)(x-x^*)$$

不沿系统的整条轨线恒等于零(除 $x=x^*$ 外).

2. 若 A 的非对角线元素是非负的,且存在一个正平衡点 x^*,则 x^* 为全局渐近稳定的充分必要条件,是矩阵 $-A$ 的所有顺序主子式为正(即 $-A$ 是 M 矩阵).

矩阵的V-L稳定性(V-L stability of a matrix) 数学生态学术语.指判定一个生态系统是否稳定的方法之一.设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,若存在一个正对角线矩阵 C,使得 $CA+A^TC$ 为负定(半负定),则称矩阵 A 为V-L稳定(V-L半稳定).

关于矩阵的V-L稳定性,有以下克罗斯定理:若 A 是 3×3 矩阵,$A=(a_{ij})\ (i,j=1,2,3)$ 是V-L稳定的充分必要条件为:每一个主子式

$$M_{i_1\cdots i_k}=(-1)^k\det A(i_1\cdots i_k)\ (k=1,2,3)$$

是正的,而且多项式

$$P_1(\eta)=(a_{13}\eta+a_{31})^2-4a_{11}a_{33}\eta,$$

和

$$P_2(\eta)=(b_1\eta+b_2)^2-4M_{12}M_{23}\eta,$$

对于同一个 $\eta\in\mathbb{R}_+$,同时为负,这里

$$b_1=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13},\ \ b_2=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}.$$

捕食-被捕食洛特卡-沃尔泰拉复杂系统(predator-prey Lotka-Volterra complex system) 一种特殊的数学生态学模型.指多个种群之间相互捕食作用的一个常用模型.其模型为

$$\frac{dx_i}{dt}=x_i(b_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)\quad(i=1,2,\cdots,n).\quad(1)$$

该系统具有下列性质:

1. 若系统(1)满足:

1) 对所有 $i=1,2,\cdots,n$,$a_{ii}\leqslant0$,并且至少有一个 $a_{ii}<0$.

2) 对所有 $j\neq i$,$a_{ij}a_{ji}\leqslant0$,并且 a_{ij} 与 a_{ji} 同时为0或同时非0.则称系统(1)为捕食与被捕食系统.

2. 如果存在不同的下标 $i_1,i_2,\cdots,i_m(m\geqslant3)$,使得 $a_{i_1i_2},a_{i_2i_3},\cdots,a_{i_mi_1}$ 均不为零,则称系统(1)为环型系统.

3. 如果系统(1)不是环型系统,则称其为链型系统.捕食-被捕食链型洛特卡-沃尔泰拉系统(1)的系统数矩阵 A 是V-L半稳定的.

关于这个系统,还有一个猜想:若系统(1)是一个捕食-被捕食的链型系统,且正平衡位置是局部渐近稳定的,则也必是全局渐近稳定的.特别地,已证明猜想在 $n\leqslant7$ 时是正确的.

环型系统(systems of cycles) 见"捕食-被捕食洛特卡-沃尔泰拉系统".

链型系统(systems of chains) 见"捕食-被捕食洛特卡-沃尔泰拉系统".

捕食与被捕食系统全局稳定性的一个猜想(conjecture for the global stability of predator-prey systems) 见“捕食-被捕食洛特卡-沃尔泰拉系统”.

复杂生态系统的持久性(persistence of complex ecosystems) 数学生态学术语. 指研究共居的多种群能否共同持续生存的问题. 设复杂生态系统为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_iF_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,n).\quad(1)$$

若对于系统(1)的每一个起始于 $\mathbf{R}_+^n$ 的解

$$\varphi=\varphi(t)(\varphi(0)\in\mathbf{R}_+^n),$$

当 $1\leqslant i\leqslant n, t\in[0,T_\varphi)$, 总有

$$\limsup_{t\to\tau}\varphi_i(t)>0,$$

其中 $[0,T_\varphi)$ 是解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间. 则称系统(1)是持久的. 对于一维方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=W(u)\ (W\in C^1)\qquad(2)$$

若其任意的有正初始值的解

$$\psi=\psi(t)\quad(\psi(0)>0),$$

对所有的 $\tau\in(0,\infty)$, 满足

$$\limsup_{t\to\tau}\psi(t)>0,$$

则称一维方程(2)是持久型的.

单食物链(simple food chain) 数学生态学的基本概念之一. 指一种最简单的生态食物链系统. 有 n 个种群按顺序排成单列 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 它们之间相互关系都是捕食-被捕食关系, 而且只有相邻的两个种群之间有捕食关系, 即 A_i 种群捕食 A_{i-1} 种群, 但 A_i 种群又被 A_{i+1} 种群所捕食, 作为 A_{i+1} 种群的食饵 $(i=2,3,\cdots,n-1)$. 这种由 n 个种群所组成的系统, 人们称之为单食物链.

持久性函数(persistence function) 数学生态学的一种特殊函数. 指研究生态系统持久性所用的一种函数. 对于复杂生态系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_iF_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

称函数 $\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为系统的持久性函数. 如果它满足下列条件:

1. 对于每一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$, 如果 $x_i\to0$, 则
$$\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to0.$$

2. ρ 满足微分不等式 $\dot\rho\geqslant W(\rho)$, 这里
$$\dot\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_i}x_iF_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
并且, 比较方程
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=W(u)$$
是持久型的. 可以证明, 如果系统存在一个持久性函数 ρ, 则系统是持久的.

单食物链持久性(persistence of simple food chains) 数学生态学术语. 指一种最简单的食物链系统中种群的持续生存问题. 设单食物链洛特卡-沃尔泰拉模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(a_{10}-a_{11}x_1-a_{12}x_2),\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2(-a_{20}+a_{21}x_1-a_{23}x_2),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}t}=x_{n-1}(-a_{n-1,0}+a_{n-1,n-2}x_{n-2}-a_{n-1,n}x_n).\end{cases}$$

对于这个模型有如下结果:

1. 当 $a_{11}>0$ 时, 系统的一切有正初始条件的解有界.

2. 若 $a_{11}>0$, 则系统是持久的充分必要条件为 $\mu<0$, 这里

$$\mu=a_{10}-\frac{a_{11}}{a_{21}}\left[a_{20}+\sum_{j=2}^k\prod_{i=2}^j\frac{a_{2i-2,2i-1}}{a_{2i,2i-1}}a_{2j,0}\right]-\sum_{j=1}^l\left(\prod_{i=1}^j\frac{a_{2i-1,2i}}{a_{2i+1,2i}}\right)a_{2j+1,0},$$

其中

$$k=\begin{cases}\dfrac{n}{2}&(n\text{ 是偶数}),\\ \dfrac{n-1}{2}&(n\text{ 是奇数}),\end{cases}$$

$$l=\begin{cases}\dfrac{n}{2}-1&(n\text{ 是偶数}),\\ \dfrac{n-1}{2}&(n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

具时滞复杂生态系统(complex ecosystems with time delays) 有遗传效应的复杂生态系统. 它常描述为具时滞的 n 种群洛特卡-沃尔泰拉系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=x_i(t)\Big[b_i+\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^n r_{ij}\int_{-\infty}^t F_{ij}(t-\tau)x_j(\tau)\mathrm{d}\tau\Big],$$

其中

$$b_i,a_{ij},r_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

为实常数, $F_{ij}:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的连续非负函数, 并且

$$\int_0^\infty F_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau=1\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

同时, 假设过去的种群密度为已知的非负有界函数

$$x_i(t)=\varphi_i(t)\quad(-\infty<t<0, i=1,2,\cdots,n).$$

三种群高斯型捕食-被捕食模型(three species Gauss type predator-prey model) 一种复杂生态

系统. 指三个相互之间有捕食-被捕食关系的种群模型. 以 $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ 分别表示三个种群 A,B,C 在时刻 t 的密度：

1. 单食物链的高斯模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1g(x_1)-x_2p(x_1),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2[-r+cp(x_1)]-x_3q(x_2),\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_3[-s+dq(x_2)],\end{cases}$$

其中 p 和 q 分别表示种群 B 捕食种群 A 的功能性反应和种群 C 捕食种群 B 的功能性反应.

2. 两捕食者种群,一食饵种群的高斯模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1g(x_1)-x_2p_1(x_2)-x_3p_2(x_1),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2[-r+cp_1(x_1)],\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_3[-s+dp_2(x_1)],\end{cases}$$

这里 p_1 和 p_2 分别表示种群 B 和种群 C 捕食种群 A 的功能性反应.

n 种群离散模型(*n* species discrete model) 一种复杂生态系统. 指离散时间下的多种群模型. 以 $x_i(t)$ 表示第 i 个种群在时刻 t 的密度，则 n 种群离散模型可表示为

$$x_i(t+1)=x_i(t)F_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))\equiv G_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{1}$$

若存在 $x^*(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$($x_i^*$ 为正常数,$i=1,2,\cdots,n$),使对所有 $i=1,2,\cdots,n$,

$$F_i(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)=1$$

或

$$G_i(x^*)=x_i^*,$$

则称 x^* 为模型(1)的正平衡位置. 模型(1)在 x^* 的线性化系统为

$$x_i(t+1)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial G_i}{\partial x_j}x_j\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{2}$$

其中 $\dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$ 为在 x^* 点的值,将系统(2)写成矩阵形式,即

$$x(t+1)=Ax(t),\ A=(a_{ij})=\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right).$$

于是有结论:若 A 的所有特征值的模都小于 1,则模型(1)的平衡点 x^* 为局部渐近稳定.

离散系统的李亚普诺夫函数(Liapunov functions of discrete system) 数学生态学的特殊函数之一. 是用以判定离散系统稳定性的一个函数. 设 n 种群离散模型为

$$x_i(t+1)=x_i(t)F_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))\equiv G_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{1}$$

若 $x^*(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$为其正平衡位置,即

$$G_i(x^*)=x_i^*\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

而 Ω 是正象限 R_+^n 内的一个开域,函数 $V(x)$ 在 Ω 内有定义称函数 $V(x)$ 为模型(1)在区域 Ω 内的李亚普诺夫函数,且具有性质：

1. 对所有 $x\in\Omega$,且 $x\neq x^*$ 时,有 $V(x)>0$,而 $V(x^*)=0$.

2. 在 Ω 内,对于每一个 $K>0$,曲面 $V(x)=K$ 是一个闭曲面,而且函数 $V(x)$在 $x=x^*$ 处有惟一的极小值.

3. 函数 $\Delta V(x)=V(G(x))-V(x)$对于所有 $x\in\Omega$ 为非正的.

于是,用李亚普诺夫函数来判别系统的稳定性有下述结论:若在 Ω 内存在模型(1)的李亚普诺夫函数 $V(x)$,使 $\Delta V(x)$不沿着模型(1)在 $x=x^*$ 附近的一整条解恒等于零,则区域 Ω 是模型(1)的吸引区域. 若 $\Omega\equiv\mathrm{R}_+^n$,则平衡点 x^* 是全局渐近稳定的,也称模型(1)为全局渐近稳定的.

n 种群离散模型的全局稳定性(global stability of *n* species discrete model) 见"离散系统的李亚普诺夫函数".

时变矩阵模型(time-varying matrix model) 一种特殊的数学生态学模型. 指一种用元素随时间变化的矩阵来描述种群动态的模型. 如果以矩阵模型描述的年龄结构种群,处于随着时间而变化的外界环境中,这种变化对种群的生育、死亡的影响又不能忽略不计,那么种群的动态将用如下的时变矩阵模型来描述：

$$\boldsymbol{N}(t+1)=A_t\boldsymbol{N}(t)=A_tA_{t-1}\cdots A_0\boldsymbol{N}(0),$$

其中 $\boldsymbol{N}(t)$是向量(列矩阵),A_i 是矩阵,它的元素将随时间 t 而变化. 序列

$$A_0,A_1,A_2,\cdots$$

描述了环境变化序列所产生的生育、死亡的结果. 特别对于周期变化的环境(如一年四季),它可以转化为描述种群在一个环境变化周期上增长的矩阵模型.

种群动态的弱遍历性(weak ergodicity of population dynamics) 数学生态学的基本概念之一. 指在时变环境下的种群动态的一个性质. 给定两个不同的初始种群 $N_1(0),N_2(0)$,使它们经历相同的环境序列,则有

$$\boldsymbol{N}_1(t)=A_{t-1}A_{t-2}\cdots A_0\boldsymbol{N}_1(0),$$
$$\boldsymbol{N}_2(t)=A_{t-1}A_{t-2}\cdots A_0\boldsymbol{N}_2(0).$$

如果 $\boldsymbol{N}_1(t),\boldsymbol{N}_2(t)$的年龄结构之差,或者两者间的距离随着 t 的增长而减少到零,则弱种群动态具有弱

遍历性质. 它是强遍历性的一个推广，并不要求种群收敛于一个固定的结构. 利用非负矩阵的压缩性质，可以给出时变模型中种群动态弱遍历性的充分必要条件.

随机矩阵模型(stochastic matrix models) 数学生态学基本概念之一. 指考虑随机因素的矩阵模型. 由于各种随机因素的影响，生物种群的动态一般是随机的. 种群动态的随机性来源主要有二：生命过程的随机性和环境的随机性.

由生命过程的随机性(即死亡和生育随机性)出发，可将通常模型中的矩阵转化为随机矩阵模型，其投影矩阵的元素将是随机变量，它实质上就是多重分支过程的矩阵描述. 对于随机环境的情形，可以使用随机矩阵乘积的形式描述种群的动态.

设 $\mathscr{A}=\{A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(k)}\}$ 为有限的矩阵集. 矩阵 A_t 表示时刻 t 发生的环境. 假设环境的随机变化可以用马尔可夫链描述，令

$$p_{ij}(t)=P_r\{A_{t+1}=A^{(i)}\mid A_t=A^{(j)}\},$$

$p_{ij}(t)$ 表示时间 t 环境为 $A^{(j)}$，下一时间 $t+1$ 环境变为 $A^{(i)}$ 时的概率. 矩阵

$$P(t)=(p_{ij}(t))$$

描述了环境随机变化的规律，而种群的动态由模型

$$\boldsymbol{N}(t)=A_{t-1}A_{t-2}\cdots A_0\boldsymbol{N}(0)$$

给出，其中

$$A_{t-1},A_{t-2},\cdots,A_0$$

是一个马氏链，$P(t)$ 为其转移矩阵，$\boldsymbol{N}$ 为向量(列矩阵). 如果 $P(t)$ 与时间 t 无关，则称环境的变化是时齐的；否则称为非时齐的.

具密度制约的年龄结构种群离散模型(density dependent discrete model for an age structured population) 一种特殊的数学生态学模型. 指考虑密度制约作用的离散年龄结构模型. 年龄结构种群的离散模型通常以矩阵的形式给出. 如果矩阵的元素是种群密度的函数

$$\boldsymbol{N}(t+1)=M(\boldsymbol{N}(t))\boldsymbol{N}(t),$$

则此模型描述了具密度制约的年龄结构种群的离散增长过程. 矩阵 M 的元素对 $\boldsymbol{N}(t)$ 的不同依赖方式描述了种群不同的密度制约机制. 如果 M 为莱斯利型的，其元素分别为函数：

$$b_i(\boldsymbol{N}(t)) = b_i\exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\tilde{r}_{ij}n_j(t)\right\},$$

$$s_i(\boldsymbol{N}(t)) = s_i\exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}r_{ij}n_j(t)\right\},$$

则此模型为逻辑斯谛克离散模型在年龄结构种群上的类似，称为逻辑斯谛克矩阵模型.

具生理结构种群连续模型(continuous model for a physiologically structured population) 一种特殊的数学生态学模型. 指用生理结构指标代替年龄的种群模型. 在生物体发育的过程中，对某些生理指标(如体长，体重，树木的胸径等)的观测，较年龄要容易和直接. 因此，代替年龄讨论具生理指标结构种群(如大小结构种群)，将更方便. 为此，构成了如下具生理指标结构的模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial(v(x)u)}{\partial x}+\mu(x)u(x,t)=0,\\ u(0,t)=\displaystyle\int_0^w b(x)u(x,t)dx,\\ u(x,0)=u_0(x),\end{cases}$$

其中 x 表示生理指标值，$v(x)$ 为生理指标 x 的变化速度，其他均同于年龄结构种群的模型(参见“年龄结构种群连续模型”).

具密度制约的年龄结构种群连续模型(density dependent continuous model for an age structured population) 一种特殊的数学生态学模型. 指考虑密度对种群增长的制约作用的年龄结构模型. 密度制约作用是种群增长过程中不可忽视的重要因素. 考虑到这种作用，线性的福斯特模型可以推广为如下形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial r}+D(u)(r,t)=0,\\ u(0,t)=\displaystyle\int_0^w F(u)(r,t)dr,\\ u(r,0)=u_0(r),\end{cases}$$

其中死亡率 $\mu(r)$，生育率 $f(r)$ 分别由

$$D(u)(a,t),\quad F(u)(a,t)$$

代替，它们分别是种群密度 $u(r,t)$ 的泛函. 当 D,F 为线性泛函时，此模型就是逻辑斯谛克模型在年龄结构种群上的类似.

种群动态的随机遍历性(stochastic ergodicity of population dynamics) 数学生态学的基本概念之一. 指两种群动态的概率分布之差收敛于 0 的性质. 考虑在同一随机环境下的两个种群：

$$\boldsymbol{N}_1(t)=A_{t-1}A_{t-2}\cdots A_0\boldsymbol{N}_1(0),$$

$$\boldsymbol{N}_2(t)=B_{t-1}B_{t-2}\cdots B_0\boldsymbol{N}_2(0).$$

矩阵乘积

$$A_{t-1}A_{t-2}\cdots A_0 \text{ 和 } B_{t-1}B_{t-2}\cdots B_0$$

是由转移矩阵 $P(t)$ 描述环境过程的两个独立的样本途径. 与确定型的时变模型不同之处，在于不同的初始种群将经历不同的环境序列. 随机遍历性描述

了 $N_1(t),N_2(t)$ 长时间后的收敛性. 分为强随机遍历性和弱随机遍历性.

在时变的随机环境下，种群年龄结构的概率分布最终收敛于一个稳定分布的性质，为种群动态的强随机遍历性. 在非时变的随机环境下，从任何两个初始群体出发产生的年龄结构概率分布之差收敛于零的性质，称为种群动态的弱随机遍历性.

种群动态的强随机遍历性(strong stochastic ergodicity of population dynamics) 见"种群动态的随机遍历性".

种群动态的弱随机遍历性(weak stochastic ergodicity of population dynamics) 见"种群动态的随机遍历性".

增长种群可持续收获(sustainable harvesting for an increasing population) 数学生态学的基本概念之一. 指可更新资源管理理论中的一个概念. 增长种群 $x(t)$ 的动态可以用模型

$$\frac{dx}{dt}=r(x)x \quad (r(x)\geqslant 0)$$

来描述. 如果用 $u(x)$ 表示该种群的瞬时收获量，则被收获种群的动态将服从

$$\frac{dx}{dt}=r(x)x-u(x).$$

此即是收获模型. 如果收获模型存在有正平衡点 $x^*>0$，使得

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x^*}=r(x^*)x^*-u(x^*)=0,$$

则该种群在 x^* 处收获 $u(x^*)$ 后仍能持续以群体 x^* 生存下去. 收获量 $u(x^*)$ 称为种群的可持续收获，而 x^* 是可持续收获的种群密度.

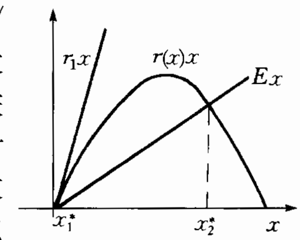
薛福尔收获模型(Schaefer's harvesting model) 一类重要的种群繁殖模型. 指收获量与种群密度成正比的具收获的逻辑斯谛克模型. 如果收获量不是定常的，而是以固定努力量的形式出现，也就是说，收获的能力是固定不变的，那么收获量将正比于现存的种群大小 $x(t)$. 这时，被收获种群的动态模型为

$$\frac{dx}{dt}=r(x)x-Ex\left(r(x)=r_0\left(1-\frac{x}{K}\right)\right),$$

其中 E 是正常数. 当 $E\geqslant r_0$ 时，模型只有平衡点 $x_1^*=0$，且 $dx/dt<0$，因此有

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0,$$

即种群将最终灭绝. 而当 $E<r_0$ 时，模型还有一个正平衡点 $x_2^*=K(1-E/r_0)$，它是模型的可持续收获种群密度，收获量为 $KE(1-E/r_0)$. 当 $E=r_0/2$ 时，收获量达到最大值 $r_0K/4$，$x_2^*=K/2$ 为可持续收获种群密度，此是以收获种群的个体数为标准讨论的. 它相当于在约束 $r(x)=E$ 下求 E 和 x，以极大化 Ex. 如果考虑经济收益，记 p 为生物个体的单价，c 为单位努力量的成本，则最优可持续收获问题，相当于在约束 $r(x)=E$ 下求 E,x，以极大化



$$pEx-cE.$$

这时，当

$$E=\frac{r_0}{2}\left(1-\frac{c}{pK}\right),\quad x_2^*=\frac{K}{2}\left(1+\frac{c}{pK}\right)$$

时，有最大收益

$$\frac{pKr_0}{2}\left(1-\frac{c}{pK}\right)^2.$$

如果考虑总和经济收益，则最优可持续收获问题相当于在约束 $r(x)=E$ 下，极大化

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}[pEx-cE]dt,$$

其中 δ 为资金的贴现率. 利用变分法可以得到这个问题的最优解.

神经网络霍普菲尔德模型(Hopfield model of a neural network) 神经网络理论的一个基础模型. 是神经元构成网络的一种模型. 对于由 n 个神经元相互连接所构成的互相作用的神经网络，如果取每个神经元上的膜电位 $u_i(t)$ 作为状态变量，则可以用如下的非线性微分方程组来，描述在网络中其他神经元突触电流的影响下，神经元状态变量 $u_i(t)$ 随时间的变化

$$C_i\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{N}T_{ij}f_j(u_j)-\frac{u_i}{R_i}+I_i$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

这个方程表明，使电容为 C_i 的神经元 i 的电位 u_i 发生变化的输入电流有三个来源：由神经元 j 的突触前刺激在神经元 i 上产生的突触后电流 $T_{ij}f_j(u_j)$；由于神经元 i 的有限的电阻 R_i 导致的漏失电流 u_i/R_i；从网络以外的其他神经元输入的电流 I_i. 这里，函数 $f_j(u_j)$ 表示电位 u_j 在神经元 j 上产生的刺激电流. 它一般是 S 型的非线性函数，是由霍普菲尔德(Hopfield, J. J.)于 1984 年提出来的，故称之为神经网络的霍普菲尔德模型.

神经传导霍金-赫胥黎模型(Hodgkin-Huxley model for neural communication) 生物数学的一个主要成果. 是神经元对刺激传播的一种数学模型.

电信号或刺激在个体神经细胞或神经元上的传播是一个基本的生理现象.霍金(Hodgkin,A.L.)和赫胥黎(Huxley,A.F.)于1952年在这方面的工作是经典的、富有启发性的.他们基于在枪乌贼巨轴突上对动作电位的观测,构造了神经膜理论的数学模型——H-H模型.神经元的轴突是神经元伸长而成的长管状部分.电信号将沿着厚度为50—70埃(Å)的膜的外部传播.由于膜在电流和电压的影响下,有选择地渗透不同的化学离子而产生电脉冲,主要是钾离子(K^+)和钠离子(Na^+).在静息状态下,由于轴突内部K^+的浓度高于周围的介质,膜两侧的电位差约为-70mV.膜两侧电位的变化可以通过实验观测到.膜的渗透性的变化受到瞬时电流的影响,它同样依赖于电位的变化.其模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=R\{\dfrac{\partial v}{\partial t}+g_{N_a}m^3h(v-v_{N_a}) \\ \qquad +g_K n^4(v-v_K)+g_L(v-v_L)\}, \\ \dfrac{dm}{dt}=\alpha_m(v)(1-m)-\beta_m(v)m, \\ \dfrac{dn}{dt}=\alpha_n(v)(1-n)-\beta_n(v)n, \\ \dfrac{dh}{dt}=\alpha_n(v)(1-h)-\beta_h(v)h,\end{cases}$$

此模型称为神经传导的霍金-赫胥黎模型.其中$v(x_1,t)$是定膜两侧的电位差,m是关于钠离子移动的变量,n是关于钾离子移动的变量,h是其他离子移动的变量.v_{Na},v_K,v_L是定常的平衡电位,g_{Na},g_K,g_L是三种离子的导电常数,$\alpha(v)$和$\beta(v)$是v的已知函数.霍金和赫胥黎给出了问题的数值解.这是一个四变量的非线性偏微分方程组.数学上要解决的问题是:初值问题或初边值问题的解的存在惟一性及渐近性质;行波解的存在性及其稳定;门槛现象,即初始刺激大到一定程度就会产生行波解;周期解的存在性.由于H-H模型的复杂性,难于给出彻底的解决.不少人对H-H模型的简化情形进行了讨论.

这项成功的研究在1963年与埃克道斯(Ecdos,J.C.)一起获得了诺贝尔生理学和医学奖.

生态毒理学(toxicological ecology) 生物学内部生态学与毒理学交叉形成的一个学科.生态毒理学一词是由毒理学和生态学结合而成.毒理学通常是研究毒素对生物个体的影响,而生态毒理学则是研究释放在环境中的毒素对生物种群.群落乃至生态系统的影响.生态毒理学可分为两大部分:一是实验生态分析,包括实验的方法和技术;二是模型生态分析,借助于数学模型,从受毒素侵蚀的严重性、推断在毒素侵蚀下的生态系统持续生存的可能性、从实验室的实验和微观世界的研究推断现实情况,通过分析计算预测环境中毒素的影响,进行生态系统可否持续生存的风险估计.

污染环境中的单种群模型(single population model in a polluted environment) 一种特殊的数学生态学模型.指研究种群在受污染的环境中生存的可能性而建立的单种群模型.若某单种群生活的环境中有毒素从外界输入,则生物体将从被污染的环境中吸收毒素,从而影响其生长繁殖.设$x(t)$表t时刻种群在此环境中个体的总数,$c_0(t)$与$c_E(t)$分别表t时刻生物体内和环境中毒素的浓度,则相应的数学模型,即污染环境中的单种群模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xF[r(c_0(t)),x], & (1) \\ \dfrac{dc_0}{dt}=kc_e-gc_0-mc_0, & (2) \\ \dfrac{dc_e}{dt}=-k_1c_ex+g_1c_0x-hc_e+u(t). & (3)\end{cases}$$

这里假定种群适合一般的柯尔莫哥洛夫模型,毒素影响其内禀增长率r. k,g,m,k_1,g_1,h均为正常数.方程(2)右端的第一项表示生物体对环境中毒素浓度的吸收率,第二、三两项分别表示生物体内毒素的排泄率和净化率;方程(3)右端第一、三两项分别表示由于生物体的吸收和自然损耗所造成环境毒素浓度的损失率,第二项表示由于生物体的排泄,造成的环境毒素浓度的增长率,$u(t)$表示外界毒素浓度的输入率.如果相对于种群的个体数量,环境容量很大,则方程(3)右端的前两项可以略去.

种群持续性(persistence of a population) 数学生态学的基本概念之一.指生物种群是否持续生存的性质.设$x(t)$为某种群在时刻t的密度(数量),对一切$t\geqslant 0$,有$x(t)>0$.并有下列定义:

1. 若$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup x(t)>0$时,称此种群弱持续生存.

2. 若$\lim\limits_{t\to+\infty}\inf x(t)>0$时,称此种群强持续生存.

3. 若$\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\int_0^t x(s)ds>0$时,称此种群平均持续生存.

4. 若存在正数δ(δ与x无关),有$\liminf\limits_{t\to\infty}x(t)\geqslant\delta$时,称此种群一致持续生存.

5. 若此种群一致持续生存并且有界.即

$$\limsup_{t\to\infty} x(t)<\frac{1}{\delta},$$

则称此种群永久持续生存.

6. 若$\lim x(t)=0$,则称此种群走向灭绝.

强持续生存必弱平均持续生存,弱平均持续生存必弱持续生存,但其逆不真.

弱持续生存(weak persistence) 见"种群持续性".

强持续生存(strong persistence) 见"种群持

续性".

平均持续生存(persistence in mean)　见"种群持续性".

一致持续生存(uniform persistence)　见"种群持续性".

永久持续生存(permanence)　见"种群持续性".

灭绝(extinction)　见"种群持续性".

小容量污染环境中单种群持续性的阈值(threshold of persistence for single population in a polluted environment with small capacity)　数学生态学的基本概念之一. 指相当于种群密度环境容纳量较小时,单种群持续生存与否的临界值. 如果无污染时,单种群的增长用逻辑斯谛克模型表示,那么在小容量污染环境中,相应模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(r_0-r_1c_0-fx) & (x(0)>0),\\ \dfrac{dc_0}{dt}=kc_e-gc_0-mc_0 & (c_0(0)>0),\\ \dfrac{dc_e}{dt}=-k_1c_ex+g_1c_0x-hc_e+u(t)\end{cases}$$

$$(0\leqslant u(t)\leqslant u+\infty).$$

模型中各量的涵义参见"污染环境中单种群模型". 并有下述结果:

1. 当 $r_0-\dfrac{k}{g+m}r_1>0$ 时,任一种群 $x(t)$ 强持续生存.

2. 当 $r_0-\dfrac{k}{g+m}r_1\leqslant 0$ 且 $\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}>k_1\dfrac{r_0}{f}$ 时:

1) 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds<\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}$,则任一种群 $x(t)$ 弱平均持续生存.

2) 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds>\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}$,则任一种群 $x(t)$ 走向灭绝.

3. 当 $r_0-\dfrac{k}{g+m}r_1\leqslant 0$ 且 $\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}\leqslant k_1\dfrac{r_0}{f}$ 时:

1) 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds<\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}$,则任一种群 $x(t)$ 弱平均持续生存.

2) 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds>k_1\dfrac{r_0}{f}$,则任一种群 $x(t)$ 走向灭绝.

4. 若 $\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}\leqslant\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds\leqslant k_1\dfrac{r_0}{f}$ 时,则种群 $x(t)$ 持续生存还是走向灭绝,取决于此种群的初值 $x(0)$.

大容量污染环境中单种群持续性的阈值(threshold of persistence for a single population in a polluted environment with large capacity)　数学生态学的基本概念之一. 指在大容量污染环境中单种群持续生存与否的临界值. 假设环境的容量很大,因而种群所占据的空间相对较小,这种情况称为大容量污染环境. 如果无污染时单种群的增长用逻辑斯谛克模型表示,那么在大容量污染环境中相应模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(r_0-r_1c_0-fx) & (x(0)>0),\\ \dfrac{dc_0}{dt}=kc_E-gc_0-mc_0 & (c_0(0)\geqslant 0),\\ \dfrac{dc_e}{dt}=-hc_e+u(t) & (c_e(0)\geqslant 0),\end{cases}$$

$$(0\leqslant u(t)\leqslant U<+\infty),$$

其中 r_0 与 r_1 均为正常数. 这里假定生物体内毒素将使其内禀增长率线性地减少. 并有下述结果:

1. 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds<\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}$,则由模型确定的任一种群 $x(t)$ 均弱平均持续生存.

2. 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds>\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}$,则由模型确定的任一种群 $x(t)$ 均走向灭绝.

3. 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\dfrac{1}{t}\int_0^t u(s)ds=\dfrac{g+m}{k}h\dfrac{r_0}{r_1}$,则种群 $x(t)$ 至多勉强持续生存.

有关弱平均持续生存和勉强持续生存等定义参见"种群持续性".

复杂生态系统一致持久性(uniform persistence of complex ecosystems)　数学生态学的基本概念之一. 指多种群一般模型的一种性态. 设复杂生态系统为

$$\frac{dx_i}{dt}=x_iF_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

若存在区域 $D\subset\mathbb{R}_+^n$, $d(D,\partial\mathbb{R}_+^n)>0$ 和正数 T_0,使得对于系统的任意一条具有正初始值的轨线 $x=x(t)$,当 $t\geqslant T_0$ 时,均有 $x(t)\in D$,则称系统是一致持久的,其中 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$.

变系数沃尔泰拉系统一致持久性(uniform persistence of Volterra system with variable coefficients)　数学生态学的基本概念之一. 指在环境因素随时间变化的情况下,沃尔泰拉模型的一种性态. 具有一般变系数的沃尔泰拉二维系统为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1[r_1(t)-a_{11}(t)x_1-a_{12}(t)x_2],\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2[r_2(t)-a_{21}(t)x_1-a_{22}(t)x_2],\end{cases}$$

其中 $r_i(t), a_{ij}(t)(i=1,2, j=1,2)$ 均为连续有界函数. 令

$$\liminf_{t\to\infty} a_{ij}(t)=\bar{a}_{ij},$$

$$\limsup_{t\to\infty} a_{ij}(t)=A_{ij},$$

对具密度制约的竞争系统($\bar{a}_{ij}>0$),若

$$\liminf_{t\to\infty}[\bar{a}_{22}r_1(t)-A_{12}r_2(t)]>0,$$

$$\liminf_{t\to\infty}[\bar{a}_{11}r_2(t)-A_{21}r_1(t)]>0,$$

则系统一致持久. 对捕食和协作系统也有类似的结果.

系统生态学

系统生态学(systems ecology) 生态学的一个新兴的分支学科. 是将系统分析的方法应用于生态研究的学科. 整体性和综合性是系统生态学的重要特征. 它强调通过生态系统的能量流动和物质循环来研究系统的组织结构、功能特征和整体行为. 其内容包括系统测量、系统分析、系统描述、系统模拟和系统最优化. 它的产生和发展,使人们得以在系统的整体水平上来认识和合理利用、管理生态系统.

生态系统(ecosystem) 系统生态学的基本概念之一. 指某一环境中所有生物共存的系统. 在某一特定地域或水域的一定空间范围内存在的所有生物和非生物的环境要素,通过物质循环和能量流动相互作用、相互依存而构成的动态系统称为生态系统. 生态系统概念最初是由英国学者坦斯利(Tansley, A. G.)于 1935 年提出来的. 其理论基础有两个:

1. 整体观点. 生物及其环境相互作用,形成一个功能整体.

2. 层次学说. 在生态系统的物物组合的每一个层次,都出现一些新的属性,为其下级成分单独存在时所不具备.

生态平衡(ecological balance) 亦称自然平衡. 系统生态学的基本概念之一. 指某一环境中,各种生物互相作用使其相对稳定的状态. 一定的动植物群落和生态系统,在其发展过程中,各种生态因子(相互制约的生物种和非生物条件)通过相互制约、补偿、交换等作用,达到一个相对稳定的平衡阶段的过程称为生态平衡. 在生态数学领域,生态平衡也指数学模型的稳定解.

生态平衡是有条件的,生态系统内部或外界的任何干扰,都可能导致平衡的破坏或产生新的平衡. 在某种意义上,生态系统的稳健性可更恰当地描述系统的平衡稳定性. 稳健性是指系统离开平衡状态的可能性,具有统计意义. 稳健性不但给出生态系统稳定平衡的概率,而且给出系统不稳定的可能性. 因而,生态系统稳健性研究具有很大的实际意义.

自然平衡(natural balance) 即“生态平衡”.

生态干扰(ecological disturbance) 系统生态学的基本概念之一. 指一种非正常的系统状态. 生态系统状态变量或参数在时间序列中的异常变化,使得系统状态、过渡函数、响应函数(输出)最终偏离原有的正常状态的过程称为生态干扰. 外界变化对系统的影响是干扰的原因,系统状态或输出的异常行为是干扰的结果.

生态干扰的因果同步性和干扰强度是干扰的两个重要性质,可通过定义适当的干扰函数来研究. 在不同的条件下,生态干扰具有不同的生态学效果. 过去常将干扰作为一种破坏的力量,但事实上,生态干扰能促进次生演替,维持生态系统的多样性和提高生产力.

生态系统结构(ecosystem structure) 系统生态学研究的中心内容. 生态系统的组分及其连结方式称为生态系统结构. 生态系统物质和能量在系统网络结构中的运动以及生态系统状态的变化称为生态系统功能. 生态系统结构与功能是生态系统研究的中心内容,生态系统结构是系统的基础,系统功能寓于结构之中. 生态系统结构与功能的依存关系是生态系统管理的理论基础.

生态系统功能(ecosystem function) 见“生态系统结构”.

生态系统分析(ecosystem analysis) 研究系统生态学的一种方法. 指利用系统工程学的概念和对系统的处理方法,建立生态系统模型(系统的微缩小)的过程. 生态系统分析大体有三个步骤. 先要对一个生态系统进行一般的定量调查,了解其成分、结构及相互关系,做出流程方框图;然后根据流程方框图,对该系统的各变量进行分析、实验(模拟)、参数估计,建立数学模型;最后将模型放到模拟实验室或自然生态系统中加以检验.

系统模拟(systems simulation) 系统生态学的一种研究方法. 指利用模型来研究生态对象的过程,尤其是指用计算机模拟来进行的这种研究. 系统模拟可在测验条件下再现实际事件和过程. 由于生态系统模拟大都是在计算机上实现的,故可避免真实生态系统的实验研究风险,而且经济和省时.

构元(holon) 系统生态学的基本概念之一. 指一般系统在某一层次上的亚系统. 在生态系统中,指具有组织层次的生态系统的结构单元,是生态系统的基本结构成分. 构元 H 本身也是一个系统,它可定义为由时变的输入 Z 和输出 Y 的集合所组成:

$(Z,Y)\in H$. 一个生态系统由若干个构元

$$H_K \quad (K=1,2,\cdots,n)$$

组成，每一个构元包含若干个状态变化量 $x_l(l=1,2,\cdots,m)$，并且构元之间、构元和环境之间有着不断的能量和物质交换. 生态系统的构元结构强调的是系统输入与输出的因果关系，从而是研究生态系统协同运行的基础. 构元分析在生物地球化学循环中有广泛的应用. 柯斯特勒(Koestler, A.)于 1967 年首先提出的这个概念.

能量电路语言(energy circuit language) 系统生态学的基本概念之一. 指用特定符号描述生态系统的一种语言. 即根据生态系统的能流，用一些特定的、分别代表能源、初级生产者、消耗者、贮存、热散失、工作阀等的符号，来描述生态系统结构与功能过程的系统语言.

能量电路语言是欧得姆(Odum, H. T.)于 20 世纪 70 年代初在能量学的基础上创立的. 在该语言中，每个符号都有其数学意义，都有输入、输出的功能反应. 因此，能量电路语言不仅可在计算机上实现，而且可以用电路装置来模拟，是一种行之有效的生态系统语言.

灵敏度分析(sensitivity analysis) 检验模型性能的方法之一. 指模型特性和行为对其输入变量或参数扰动的效应分析. 设系统的状态方程为

$$F(\dot{p},p,t,\lambda)=0,$$

其中 λ 为系统参数($\lambda>0$)，p 为生态变量，t 为时间，则该生态系统对参数 λ 的灵敏度为

$$S(t,\lambda)=\left|\frac{\partial p(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right|.$$

相对灵敏度为

$$S'(t,\lambda)=\left|\frac{\partial p(t,\lambda)}{\partial\lambda}\bigg/\frac{p(t,\lambda)}{\lambda}\right|.$$

灵敏度分析不但能分析生态系统输入和结构对输出的影响，而且在分析复杂系统时，可揭示出系统的关键组分和关键的相互作用.

模型有效性(validation of ecosystem models) 对模型性能的一种刻画. 是模型输出结构与真实生命系统的特性符合程度的定量表示. 它研究的是模型的可靠性和精确性. 通过可用于测定模型精确性的统计学描述，做出对基本假设的明确和客观的检验. 有效性不同于校验，校验是模型的一般特性和过程机制与真实生命系统是否相符的检验过程. 因此，校验主要是对所建模型的一种主观评价，而不是对模型基本假设的一种明确的检验.

流通率(flow rate) 系统生态学术语. 指生态系统中单位时间、单位面积或体积的物质移动量.

周转率(turnover rate) 系统生态学术语. 指生态系统中出入一个库的流通率与该库中营养物质之比，即

$$\text{周转率}=\frac{\text{流通率}}{\text{库中营养物质}}.$$

周转率在生态系统中用以说明系统对营养物质的利用率. 周转率大，利用率高；反之，则小. 另一个用以表示物质在生态系统中利用效率的量是周转时间，它指物质在生态系统中的周转速率，是周转率的倒数.

生物地球化学循环(biogeochemical cycles) 系统生态学术语. 指生态系统的物质循环，即生命的存在依赖于生态系统的物质循环和能量流动. 物质循环和能量流动密切相关，不可分割，构成一个统一的生态系统功能单位. 但与能量流动不同，物质在生态系统中是循环的.

地球化学循环常用"库"来描述，它表示物质循环过程中，存在某些生物和非生物中的化学元素的数量. 元素在库与库之间的转移，并彼此联系起来形成物质流动. 生物地球化学循环中的各种物质，在自然状态下应该是平衡的，即各库之间的输出量应该等于输入量.

生态能量学(ecological energetics) 研究生态能量转换的一门学科. 指生态能量在生态系统中储存和释放、传递和转换、消耗和利用，以及能量流动与生物适应性的关系的科学. 能量是生态系统的基础，太阳能是生态系统能量的最终来源，生态系统中的能量传递和转换服从热力学第一定律和第二定律. 生态能量学的最早研究要追溯到 1887 年弗培斯(Forbas, S. A.)的湖泊学古典论文，但对生态能量学贡献最大的要数林德曼(Lindeman, R. L.)(1942)和欧得姆(Odum, H. T.). 他们将能量学与生态系统的营养等级联系在一起，使得复杂生态系统取得了统一划定的度量单位——能量单位. 能量学的研究作为系统生态学的重要方法和基础之一，使人们对种间关系和生态系统的认识更为深入.

生态效率(ecological efficiency) 系统生态学术语. 指在一个食物链中，不同营养级的能量之间的比率. 从生产与利用角度来说，生态效率就是所生产的生物量与生产这些生物量所消耗的物质量的比率；从能量流动角度来说，第 n 营养级的生产力与第 $n+1$ 营养级的生产力的比率就是生态效率.

生态效率有两种类型：一是营养级间的生态效率，常用林德曼(Lindeman, R. L.)生态效率表示；另一是营养级内的生态效率，常用组织生长效率、同化效率等表示. 一般情况下，营养级间能量转化效率约为 10%，即能量经过一个营养级，约有 90%

要散失掉.此规律即为通常所称的林德曼百分之十定律.

林德曼百分之十定律(Lindeman's ten percent law) 见"生态效率".

生态金字塔原理(pyramid principle of ecology) 系统生态学的基本原理之一.指生态系统结构与功能的重要原理.常用的有数量金字塔和生产力金字塔.前者指动物在食物链中,按各级营养层次排列,以最下面一层的植食性种类,个体数量为最多;其次是初级肉食性动物;再次是次级肉食性动物.营养层次越高的,数量越小,但也有数量金字塔倒置的现象.生产力金字塔是指在一个稳定的生态系统中的各营养层,随着食物链的延长,各营养层的生产力逐级减少的情况.生产力金字塔(单位:千卡/米^2·年)较之数量金字塔更为准确和更有意义.

生态金字塔原理是英国生态学家埃顿(Elton,C.)于1927年在食物链研究中首先提出的,

生物潜能(biotic potential) 系统生态学术语.指生物在最适环境条件下的最大生殖能力.该术语是查普曼(Chapman,R.N.)于1928年提出来的,后来人们将它与内禀增长率 r 等同.生物潜能的充分表现受环境阻力(抑制种群数量增加的一切条件总和)的限制,环境阻力包括不利的气候条件、空间不足、营养缺乏.

多样性指数(diversity index) 一种函数关系.指生态系统中种数及其分布均匀度的函数.由于环境条件不同,生态系统各有不同生长、发育和演替的历史,形成具有不同结构特征的生态系统,称为生态系统多样性.多样性是生态系统结构的特征之一,并以多样性指数表示之.

常用的多样性指数 H 有:

1.仙农-温纳指数

$$H=-\sum_{i=1}^{s}P_i\log_2 P_i.$$

2.辛普森指数

$$H=1-\sum_{i=1}^{s}P_i^2.$$

其中 s 为种数,P_i 为第 i 物种占全部抽样物种的百分比.

仙农-温纳指数(Shannon-Weiner index) 见"多样性指数".

辛普森指数(Simpson index) 见"多样性指数".

负反馈机制(mechanism of negative feedback) 系统生态学术语.指生态系统的一种自调节机制,是种群数量长期反复增减,最终保持一定水平的机制.在生态系统各组成要素的相互作用中,由于某种原因,会使系统内某一生物种群的个体数目或生物量增加(或减少).此时,这种增加(或减少)也作为诱导原因,在其以后阶段里,一再使该种群的数量或生物量减少(或增加),而使生态系统中的种群数量或生物量保持在一定的水平.这种自调节机制称为负反馈机制.如种群自身的调节、捕食—食饵关系的调节、生产者—营养元素关系的调节等,都是生态系统普遍存在的调节行为.负反馈机制是生态系统的重要调节机制.

生物动力学系统分析

生物动力学系统分析(analysis of dynamic system in biology) 生物数学的一个分支学科.即利用动力学的思想和方法建立生物科学的数学模型,并通过数学中的动力系统的理论与方法对所建数学模型进行分析研究,以使生物科学中的一些问题得到解决,同时对数学的理论与方法有所创新,它是20世纪70年代发展起来的边缘学科.

动力学方法起始于经典力学,以后用到天体力学、无线电、控制理论等.20世纪70年代,人们发现生命科学中许多问题也符合动力学的规律,可以用动力学的方法建立数学模型,可以应用动力学系统的理论和方法研究解决生物问题.例如,生态学中的种群动力学模型、化学与生物化学中的酶动力学模型、传染病模型、微生物种群动力学模型、群体遗传学模型、药物动力学模型等,都是生物动力学系统分析模型.

质量作用定律(law of mass action) 关于化学反应速度的定律.指:在一定温度下,化学反应的速度与反应物的分子浓度(或活性)的乘积成正比.

具常数反应率的化学反应模型(chemical reactions model with rate constants) 化学反应的一种数学模型.指在参与反应的反应物的浓度比较低时,可以利用质量作用定律建立反应时浓度变化的数学模型.例如:

一级反应(一分子反应) 描述一个分子的 A 物质逐渐变为一个分子的 B 物质.以$[A]$记 A 在时刻 t 的浓度,则反应过程中$[A]$满足微分方程

$$\frac{d[A]}{dt}=-K_1[A].$$

二级反应(二分子反应)　描述一个分子的 A 物质与一个分子的 B 物质起反应,生成一个分子的 C 物质.可记为

$$A + B \xrightarrow{K_2} C,$$

以 $[A]$,$[B]$ 分别记 A 和 B 在时刻 t 的浓度,则在反应过程中,$[A]$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -K_2[A][B].$$

若 $A \equiv B$ 即

$$2A \xrightarrow{K_2} C,$$

则模型变成

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -K_2[A]^2,$$

其中 K_1,K_2 为正常数,称为反应常数.

反应常数(reactions constant)　见"具常数反应率的化学反应模型".

酶动力学(enzyme kinetics)　生物动力学的一个分支学科.它是在酶作用下的化学动力学.以 E 代表酶,以 S 代表底物,以 $e(t)$ 和 $s(t)$ 分别代表酶 E 和底物 S 在时刻 t 的浓度.在酶作用下的反应过程(米氏定律)是:酶与底物作用,先生成一个复合体,记为 C,这个反应是可逆的.然后由复合体再分解成自由酶和生成物 P,同样以 $p(t)$,$e(t)$ 和 $c(t)$ 分别代表生成物 P 和分解出来的自由酶以及复合体在时刻 t 的浓度.反应公式为

$$E + S \underset{K_2}{\overset{K_1}{\rightleftarrows}} C \xrightarrow{K_2} E + P.$$

按质量作用定律,建立该反应的数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -K_1 es + (k_{-1} + K_2)c, \ e(0) = e_0 > 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -K_1 es + K_{-1}c, \ s(0) = s_0 > 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = K_1 es - (K_{-1} + K_2)c, \ c(0) = c_0 \geqslant 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = K_2 c, \ p(0) = 0. \end{cases}$$

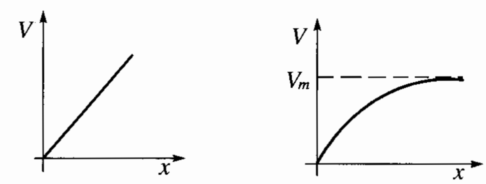
米氏反应速度(Michaelis-Menten reaction velocity)　酶动力学的基本概念之一.指一种在酶催化作用下的化学反应速度.在酶作用下的反应,于平衡态时的出产品的速度为

$$V = \frac{-K_2^{(e_0+c_0)} s}{(K_m + s)} = \frac{-V_m}{K_m + s},$$

这里

$$V_m = K_2(e_0 + c_0)$$

为反应的最大速度,K_m 称为米氏常数,是使反应速度达到最大速度的一半时,底物的浓度.米氏反应速度与质量作用定律之不同点,是米氏反应速度有一个最大值.如下图,以 V 表反应速度,以 x 表反应物的浓度.



质量作用定律　　米氏反应速度

米氏常数(Michaelis constant)　见"米氏反应速度".

普利高金反应模型(Prigogine reaction model)　一种酶动力学模型.它是一种三分子反应过程的数学模型.它描述三分子反应

$$\begin{aligned} A &\rightarrow x \\ B + x &\rightarrow y + D \\ 2x + y &\rightarrow 3x \\ x &\rightarrow E \end{aligned}$$

的反应中间过程物质的浓度变化.利用质量作用定律可建立数学模型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = A - (B+1)x + x^2 y + D_1 \Delta x, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = Bx - x^2 y + D_2 \Delta y. \end{cases}$$

在浓度分布均匀的假设下,即无扩散时,系统在远离平衡态时,也可能呈现时间的耗散结构.若设 $A>0$,$B>0$,则当 $B>1+A^2$ 时,系统有惟一不稳定焦点,并且围绕此焦点存在惟一稳定极限环.这是普利高金(Prigogine,I.G.)等于 1972 年研究的结果.

布罗索夫-察鲍金斯基反应(Belousov-Zhabotinskii reaction)　一种特殊的化学反应过程.1958 年,布罗索夫(Belousov,B.P.)和察鲍金斯基(Zhabotinskii,A.M.)在备有搅拌器的烧杯内,把 $CH_2(COOH)_2$ 及 $Ce(NO_3)_6 \cdot (NH_4)_2$ 溶于硫酸中,此溶液首先呈黄色,几分钟后转为无色;此时加入 $NaBrO_3$,所得溶液呈黄色,然后变为无色……然后又呈黄色,变为无色……这样,大约以一分钟为周期.若加入几 cc 浓度为 0.025M 的试铁灵.则会呈现红色与黄色的交替振荡现象.这种振荡,作为一种化学现象,当时无法解释.人们称这种反应为布罗索夫-察鲍金斯基反应.

1974 年,费德(Field,R.J.)和努叶斯(Noyes,R.M.)用一个数学模型来描述布罗索夫-察鲍金斯基反应,它由五个不可逆反应组成

$$A+Y\xrightarrow{K_1}X,$$

$$X+Y\xrightarrow{K_2}P,$$

$$B+Y\xrightarrow{K_3}2X+Z,$$

$$2X\xrightarrow{K_4}Q,$$

$$Z\xrightarrow{K_5}fY.$$

其中 f 是化学计量系数，P 和 Q 为产物，$X=HBrO_2$，$Y=Br^-$，$Z=Ce(IV)$，$A=BrO_3^-=B$. 用 x，y，z，A 及 B 表示它们各自代表的浓度. 则反应动力学模型称为布罗索夫-察鲍金斯基模型. 该模型为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=K_1Ay-K_2xy+K_3Bx-2K_4x^2,\\ \frac{dy}{dt}=-K_1Ay-K_2xy+fK_5z,\\ \frac{dz}{dt}=K_3Bx-K_5z.\end{cases}$$

1975 年，哈斯厅斯(Hastings，S. P.)与马叠(Marray，J. D.)用布劳威尔不动点定理得到该模型周期解的存在性.

布罗索夫-察鲍金斯基模型(Belousov-Zhabotinskii model)　见“布罗索夫-察鲍金斯基反应”.

二次自催化反应系统(reaction systems with second order autocatalysis)　描述一种特殊的化学反应过程的系统. 所谓自催化剂作用是指某种底物，本身又是酶，对反应又起催化作用. 若常速输入底物 y，而 y 在另一种底物 x 作用时，同时又是酶起催化作用，这种自催化作用如果在整个反应过程中发生两次后，才完成产物而输出，这种反应系统称为二次自催化反应系统. 其反应式为

$$a_0\rightarrow y,$$

$$x+y\underset{a_2}{\overset{a_3}{\rightleftarrows}}2x,\quad 2x+y\xrightarrow{a_4}3x,$$

$$x\xrightarrow{a_1}F.$$

相应的数学模型为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-a_1x-a_2x^2+a_3xy+a_4x^2y,\\ \frac{dy}{dt}=a_0+a_2x^2-a_3xy-a_4x^2y,\end{cases}$$

其中 $a_i(i=0,1,2,3,4)$ 为正数. 模型有惟一正平衡位置 (x^*,y^*). 当 (x^*,y^*) 为不稳定时，则在 (x^*,y^*) 外围必存在惟一稳定极限环.

ADME 过程(ADME processes)　见“药物动力学”.

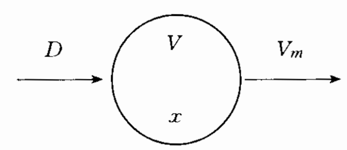
药物动力学(pharmacokinetics)　生物动力学的一个分支学科. 它是研究药物、毒物及其代谢物在机体内的吸收、分布、代谢和排泄的过程(简称 ADME 过程)及其定量规律的学科. 药物动力学研究的主要目的是：

1. 阐明药理或毒理反应与体液中的药物或代谢物水平之间的关系.

2. 加深对药物或毒物在体内发生的 ADME 过程基本机制的理解.

3. 为药品的生产及临床上的合理使用，特别是剂型的改革和给药方案的拟订提供重要的依据.

非线性药物动力学(nonlinear pharmacokinetics)　室分析的一种. 它是一种非常数速率的室分析. 在二室模型的建模中，其基本假设是一室的消除具有一级“常数速率”，而且两室之间的转运也具有“常数速率”的. 但实际上有许多情况不是这样，特别是当药物的浓度比较大时，用常数速率来描述就十分粗糙.



为了更精确描述药物在机体内的 ADME 过程，必需引进非常数速率，例如米氏型消除的室分析. 这样，快速静脉注射的一室模型为

$$-\frac{dx}{dt}=\frac{V_mx}{K_m+x},$$

其中 $x(t)$ 表示中央室在注射后，t 时刻药物的浓度，V_m 是血内药浓度下降过程的理论最大速率，K_m 为米氏常数.

室分析(compartment analysis)　一种对 ADME 过程进行分析的方法. 在药物动力学中，室分析方法是把药物 ADME 过程设想为在一个或几个“室”内或“室”间进行，并在假定的室模型基础上，分析实验数据，求取表征药物动力学特性的参数. 其基本步骤是：

1. 提出一个适当的室模型.

2. 列出描述该模型的微分方程并求解.

3. 由实验数据估计模型的参数及其误差.

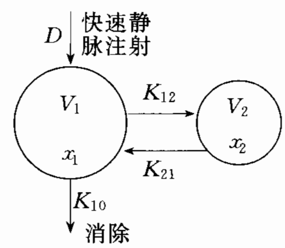
在步骤 2 中，若所列的微分方程不可求解，则要用系统辨识的办法确定微分方程的参数.

二室模型(two compartment model)　室分析的一种. 在快速静脉注射药物时，经常用二室模型来描述 ADME 过程. 如图所示，一次快速静脉注射剂量为 D 的药物到血液中，中央室 V_1 代表血液，假设

在注射后的时刻 t，药物的浓度为 $x_1(t)$；二室 V_2 代表肾脏，在时刻 t，药物的浓度为 $x_2(t)$. 由线性动力学的规律，可以建立模型

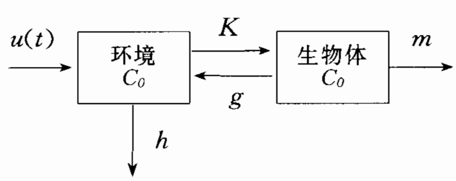
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=K_{21}x_2-(K_{12}+K_{10})x_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=K_{12}x_1-K_{21}x_2,\end{cases}$$

其中 K_{10} 为药物从中央室清除的一级速率常数，K_{12} 和 K_{21} 为一室和二室间的一级转运速率常数. 初始条件为



$$t=0,\ x_1=D,\ x_2=0.$$

生态毒理学的数学模型(mathematical models of ecoloxicology)　生态学的基本模型之一. 指在被污染了的环境中生活的种群增长与环境污染程度之间关系的数学模型. 生态毒理学是研究这种关系的科学(参见“生态毒理学”)，利用二室模型的方法可建立这个数学模型，框图为



相应的数学模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(r-fx),\ r=a-bc_0,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0}{\mathrm{d}t}=Kc_E-gc_0-mc_0,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_E}{\mathrm{d}t}=-\widetilde{K}c_Ex+\widetilde{g}c_0x-hc_E+u(t),\end{cases}$$

其中 $u(t)$ 表示工厂不断向环境排污，K 表示环境污染生物体的效率，g 表示生物体向环境排泄污染物的效率，h 表示污染物在环境中从其他路径的消除率，m 表示生物体吸收、静化所消除掉的污染物，a 是种群的出生率，bc_0 是种群的死亡率，死亡率的大小与生物体受污染的程度 c_0 有关，m 为每个生物体的平均质量，$\widetilde{K}=Km$，$\widetilde{g}=gm$.

SI 传染病模型(SI epidemic model)　最简单的传染病模型. 框式为：

$$S(t)\to I(t).$$

$S(t)$ 为在时刻 t 易感者(未感染上病，但只要与染病者接触，就会感染得病)的数量. $I(t)$ 为在时刻 t 染病者(已感染上病，并且与未感染者接触就会把病传染给他)的数量. 做以下假设：

1. 染病者一经得病，在所考虑的期间不会痊愈，也不会死亡，保持属于染病者类.

2. 总人口是常数，即对任何时刻 t，都有

$$S(t)+I(t)=N.$$

3. 人之间接触是随机的，而且易感者转为感染者的变化率，与当时易感者人数及感染者人数的乘积成正比.

在上述假设下，SI 传染病模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=-\beta S(t)I(t),\\ S(t)+I(t)=N.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t),\\ S(t)+I(t)=N.\end{cases}$$

SIR 模型的阈值定理(threshold theorem of SIR model)　寻求传染病模型阈值的一个定理. 对于 SIR 模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta SI,\ S(0)=S_0>0,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-rI,\ I(0)=I_0>0,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=rI,\ R(0)=0,\end{cases}$$

$$S(t)+I(t)+R(t)=N_0,$$

记 $\rho=r/\beta$，称为相对移除率，其他符号意义参见“SIR 传染病模型”. 阈值定理断言：如果 $S_0<\rho$，则当 $t\to\infty$ 时，染病者的数量 $I(t)$ 单调下降趋于零；如果 $S_0>\rho$，则当 t 增加时，染病者的数量 $I(t)$ 增加到一定的数量 $I_{\max}$ 后，就单调减少趋于零，且

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=S(\infty)$$

存在，并且它是下面超越方程的惟一正根

$$S_0\exp\left[\frac{-1}{\rho}(1-z)\right]-z=0,$$

而且

$$I_{\max}=1-\rho+\rho\log\frac{\rho}{S_0}.$$

SIR 传染病模型(SIR epidemic model)　亦称 KMK 模型. 一种传染病传播模型. 设 $S(t)$，$I(t)$ 与“SI 传染病模型”中相同. $R(t)$ 为在时刻 t 因为染病死亡或病愈有免疫力的人数. 做以下假设：

1. 人口总数为一常数 N_0，即在任何时刻 t，有

$$S(t)+I(t)+R(t)=N_0.$$

2. 易感者由于受传染，其人数随时间变化的变

化率，与当时易感者的人数和当时染病者的人数之积成正比.

3. 从染病者类转到消除者类（$R(t)$类）的速度，与当时染病者类的人数成正比.

在上述假设下，建模的框式为

$$S(t)\xrightarrow{\beta}I(t)\xrightarrow{r}R(t),$$

SIR 传染病模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta SI,\ S(0)=S_0>0,\\ \dfrac{dI}{dt}=\beta SI-rI,\ I(0)=I_0>0,\\ \dfrac{dR}{dt}=rI,\ R(0)=0,\end{cases}$$

$$S(t)+I(t)+R(t)=N_0,$$

其中 $\beta>0$ 称为传染率，$r>0$ 称为移除率.

一般接触率的SIR 模型（generalized contact SIR model） 一类 SIR 传染病模型. 指用非线性函数描述传染力的 SIR 传染病模型. 在 SIR 模型中，βS 表示单位时间内，由每一个病人传染而得病的人数，称为传染力. 这里，简单地把一个病人的传染力看成是易患者人数的线性函数. 实际上，由于病人与外界接触能力的限制，而不能用线性函数来表示. 因此，一般接触率的 SIR 模型为（符号意义参见“SIR 传染病模型”）

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-f(S)I,\\ \dfrac{dI}{dt}=f(S)I-rI,\\ \dfrac{dR}{dt}=rI,\end{cases}$$

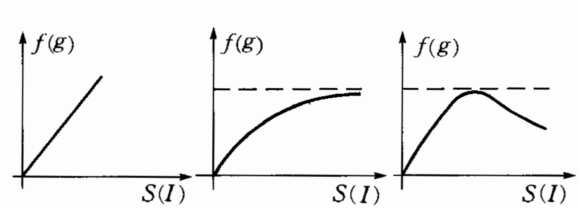
$$S+I+R=N.$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-Sg(I),\\ \dfrac{dI}{dt}=Sg(I)-rI,\\ \dfrac{dR}{dt}=rI,\end{cases}$$

$$S+I+R=N.$$

其中函数 f 或 g 常用的形式有下图中的三种：



具时滞SIR 传染病模型（SIR epidemic model with time delay） 一类 SIR 传染病模型. 指用时滞微分方程来描述的 SIR 传染病模型. 在“SIR 传染病模型”中作了三个假设（参见“SIR 传染病模型”），这里保持假设 1 和假设 2，改假设 3 为假设 4，增加假设 5.

4. 以 $I_0(t)$记开始就染病到时刻 t 还未愈的人数.

5. 以 $P(t)$记在时刻 t 以前得病，而到时刻 t 时还未愈的概率.

这样在假设 1，2，4 和 5 下，SIR 模型写为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta IS,\\ I(t)=I_0(t)+\displaystyle\int_0^t\beta S(u)I(u)P(t-u)du.\end{cases}$$

若模型中

$$P(t)=\frac{1}{e^{rt}},\quad I_0(t)=\frac{I_0}{e^{rt}},$$

则模型就是 SIR 模型. 若模型中 $I_0(t)=0$，且存在正数 τ，当 $t\leqslant\tau$ 时，$P(t)=1$；当 $t>\tau$ 时，$P(t)=0$，则模型变成

$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}=\beta I(t)S(t)-\beta I(t-\tau)S(t-\tau),\\ \dfrac{dS}{dt}=-\beta I(t)S(t).\end{cases}$$

具非线性传染率的SIRS 传染病模型（SIRS epidemic model with nonlinear incidence rates） 一类传染病模型. 指描述免疫能力不能永久保持的传染病模型. 在“SIR 传染病模型”中，假设传染率（单位时间内，由一个病人传染而得病的人数）是 S 的线性函数 βS，但在实际问题中，传染率是 S 和 I 的非线性函数 $H(I,S)$，因此，SIRS 模型变为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-IH(I,S)-bS+rR+B(N),\\ \dfrac{dI}{dt}=IH(I,S)-(b+v)I,\\ \dfrac{dR}{dt}=vI-(b+r)R.\end{cases}$$

其中，人口总数 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$，非常数；

$$\frac{dN}{dt}=B(N)-bN;$$

b 是人口的自然死亡率；v 是由 S 类转移到 R 类的转移率；r 是得病后有免疫力的人又失去免疫的比例，其他符号意义参见“SIR 污染病模型”.

微生物动力学模型（kinetic models of chemostat） 一种描述微生物培养过程的数学模型. 它是微生物在培养室内培养生长以及营养液消耗过程的数学描述. 利用动力学的方法，可建立微生物与营养液之间相互作用的动力学模型. 以 $X(t)$和 $S(t)$分别

记培养室内在时刻 t 微生物的浓度和营养液的浓度，两者在培养室内的相互作用框式为

$$X+S\xrightarrow{K_1}2X.$$

应用化学动力学方法建立模型，得

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=K_1SX.$$

当线性反应速率 $\mu(s)=K_1S$ 时，数学模型为

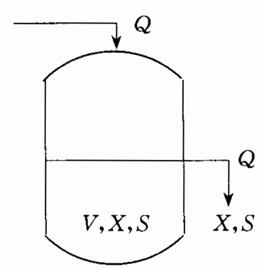
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\mu(s)X.$$

$\mu(s)$可以是米氏反应速率

$$\mu(s)=\frac{\mu_mS}{K_m+S},$$

其中 μ_m 为最大理论反应速率，K_m 表示米氏常数.

连续发酵模型(models of continuous-flow fermenter)　一种微生物动力学模型. 它是连续发酵过程的数学描述. 在微生物培养中，常采用连续发酵的工业技术，其设备如图，并作如下四个假设：



1. 有一个有固定容积 V 的培养室，其中装营养液，有搅拌和供氧.

2. 有供液系统. 单位时间以流量 Q 供应浓度为 S_0 的营氧液.

3. 有溢流装置，使培养室内体积保持不变.

4. 微生物的增长对营养基的消耗是一个常数消耗率 $1/y$.

根据假设 1 至假设 4 可得数学模型(符号 S,X 的意义参见"微生物动力学模型")

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=Q(S_0-S)-\dfrac{1}{y}\mu(S)X,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\mu(S)X-QX.\end{cases}$$

常用 $\mu(S)$表示米氏反应速率

$$\mu(S)=\frac{\mu_mS}{K_m+S}.$$

莫诺得-汶登斯连续发酵模型(models of Monod-Haldance continuous fermenter)　反应速率有特殊形式的连续发酵模型. 它是在连续发酵模型中，反应速率 $\mu(s)$取莫诺得-汶登斯速率，即

$$\mu(s)=\frac{\mu_mS}{K_m+S+S^2/K}$$

的连续发酵模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{y}\dfrac{\mu_mSX}{K_m+S+S^2/K}+Q(S_0-S),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mu_mSX}{K_m+S+S^2/K}-QX,\end{cases}$$

称为莫诺得-汶登斯连续发酵模型，各符号的意义参见"连续发酵模型".

微生物竞争模型(models of competition in the chemostat)　两种微生物放在一起培养的模型. 即在一个培养室内，用一种营养基，同时培养两种微生物的数学描述. 设其在时刻 t 的浓度分别为 $x_1(t)$，$x_2(t)$，以 $\mu_1(s)$和 $\mu_2(s)$分别记用营养基培养两种微生物的速率，以

$$\frac{1}{y_1}\quad 和\quad \frac{1}{y_2}$$

分别记两种微生物增长对营养基的常数消耗率. 两种微生物同时"食用"一种营养基，这种对营养基的竞争模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=Q(S_0-S)-\dfrac{1}{y_1}\mu_1(S)x_1-\dfrac{1}{y_2}\mu_2(S)x_2,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\mu_1(S)x_1-Qx_1,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\mu_2(S)x_1-Qx_2,\end{cases}$$

其中 Q 为输入营养液的流量.

微生物捕食模型(models of chemostat predation)　有捕食关系的两种微生物在一起受培养的模型. 即在一个培养室内，用一种营养基，同时培养两种微生物 X_1 和 X_2，其中 X_1 是靠营养基培养繁殖，而 X_2 则是微生物 X_1 的捕食者，它与营养基不发生直接的关系. 设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$分别为 X_1 和 X_2 在时刻 t 的浓度，以 $\mu_1(s)$记用营养基 S 培养微生物 X_1 的培养速率，$1/y_1$ 为基常数消耗率，以 $\mu_2(x_1)$记用微生物 X_1 培养微生物 X_2 的培养速率，$1/y_2$ 为其常数消耗率，则模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=(\mu_1(S)-Q)x_1-\dfrac{1}{y_2}\mu_2(x_1)x_2.\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=(\mu_2(x_1)-Q)x_2.\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=Q(S_0-S)-\dfrac{1}{y_1}\mu_1(S)x_1,\end{cases}$$

其中 Q 为输入营养液的流量.

生物统计学

生物统计学(biostatistics)　生物数学的分支学科. 主要研究分析生物学和医学现象(尤其是变异现象)的统计学理论和方法. 1901 年，世界上第一本生物统计学杂志《生物统计》使用了"计量生物学"术语；1935 年，美国统计学会会刊(JASA)增设生物统计栏目，称"biometric section"；1945 年，"biometrics bulletin"创刊，1947 年，改名"biometrics"；1936 年，

斯尼德柯(Snedecor,G. W.)曾建议改称“biometric”为“bio-statistics”. 现在,美国多数大学的生物统计系均以 biostatistics 命名. 英国牛津词典、美国韦伯斯特词典和特伯医学词典等对 biometry,biometrics 和 biostatistics 的解释大同小异.

偏倚(bias) 生物统计学的基本概念之一. 指在观察或推断的任何阶段,趋于使结果系统地、而不是随机地偏离真值的任何效应. 统计学家常易忽略偏倚而假数真算. 偏倚的种类很多,必须善于避免、发现和校正. 由欠妥的研究设计引起的偏倚称设计偏倚;由确认和诊断病例方法的错误引起的偏椅称检出偏倚;由各组信息质量不同引起的偏椅称信息偏倚;由推断错误引起的偏倚称解释偏倚;由观察者变异引起的偏倚称观察偏倚;由测量系统误差引起的偏倚称测量偏倚;由不同类型的人回忆的准确性和完整性的不同引起的偏倚称回忆偏倚;由选中者或志愿者与其他人的不同特点引起的偏倚称选择性偏倚;由两组追踪对象起始时间不相当引起的偏倚称超前偏倚等

非选择性(non-selectivity) 生物统计学的基本概念之一. 指研究设计与分析必须满足的一个基本条件. 其目的是为了正确解释观察资料,使之真正反映实际行为. 人口变化过程常伴有干扰,若干扰有选择地作用于特定子群,观察值便不能反映全人群的基本行为. 最普遍而棘手的是死亡引起的选择性,因为一般只能对尚存者作度量和计算,称之为生存力的选择;在回顾性调查中,按结局分组是危险的;误差和无反应与被调查者的特点有关,也导致选择性. 通常,人口分析对选择性偏倚并无明确的校正法,但警觉其存在至为重要.

正态概率单位变换(probit transformation) 生物统计学中常用的一种方法. 指对(0,1)上的比率变量 p 常作的两种变换. 按标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 的反函数所作的变换 $y=\Phi^{-1}(p)$ 或 $y'=\Phi^{-1}(p)+5$ 称正态概率单位变换. $\Phi^{-1}(p)$ 又称正态等价偏差. 按

$$y=\ln\frac{p}{1-p}$$

或

$$y'=\frac{1}{2}\ln\frac{p}{1-p}$$

所作的变换称对数优势变换. 实践中,当 $p=r/n$ 时,若 $r=0$ 或 n,则常以

$$p'=\frac{1}{2n}\text{ 或 }\frac{2n-1}{2n}$$

进行变换,以避免出现 $-\infty$ 或 $+\infty$ 的对应值.

对数优势变换(logit transformation) 见“正态概率单位变换”.

逻辑斯谛克函数(logistic function) 生物统计学的重要函数之一. 它是描述生物群体在有限资源下增殖过程的函数

$$P=\frac{P_{\max}}{1+ae^{-bt}},$$

其中 $P_{\max}$ 为个体数 P 的渐近值,a 和 b 为参数,曲线呈 S 形. 它是相对增长率 $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}t)/P$ 为 P 的线性递减函数时微分方程的解. 此模型由费沪尔斯特(Verhulst,P. F.)于 1838 年提出,皮尔(Pearl,R.)和雷尔(Reel,L. J.)于 1920 年用于果蝇研究. 20 世纪 30 年代曾流行于人口推算,由于未考虑其他人口因素和社会经济因素,效果欠佳. 其拓广到多个自变量的逻辑斯谛克回归却是较好的统计学方法(参见“逻辑斯谛克模型”).

逻辑斯谛克回归(logistic regression) 判别分析的推广. 它是一种常用的广义线性回归模型. 设自变量为 $X'=\{X_1,X_2,\cdots,X_p\}$,因变量 P 为事件的概率. 模型

$$\ln\frac{P}{1-P}=\alpha+\beta'X$$

或

$$P=\frac{1}{1+\exp(-\alpha+\beta'X)}$$

称逻辑斯谛克回归,α 和 $\beta'=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_P\}$ 为参数. 此模型在流行病学研究中应用广泛,

$$\ln\frac{P}{1-P}$$

的可加性反映了危险因素的“乘法效应”. 事件多于二类时,不难推广. 常用最大似然法估计参数. 若用通常的似然函数,称非条件逻辑斯谛克回归;若用条件似然函数,称条件逻辑斯谛克回归. 对于追踪研究和病例——对照研究,两者均适用. 而分层较多,以致层内样品较少时,宜用条件逻辑斯谛克回归.

曼特-赫斯则检验(Mantel-Haenszel test) 生物统计学的一种常用方法. 指用于综合分析不同时间或地点进行的同类研究所获资料的一种方法. 设多个独立 2×2 表独立性的联合检验,第 i 个 2×2 表的第一行元素为 a_i,b_i,第二行元素为 $c_i,d_i,a_i+b_i+c_i+d_i=n_i$,则优势 ψ 的联合估计为

$$R_{MH}=\sum(a_id_i/n_i)\Big/\sum(b_ic_i/n_i),$$

曼特(Mantel,N.)等人于 1959 年给出 $\psi=1$ 的假设检验. 若 $\psi=1$,a_i 的期望和方差为

$$E(a_i)=\frac{(a_i+b_i)(a_i+c_i)}{n_i},$$

$$\mathrm{Var}(a_i)=\frac{(a_i+b_i)(c_i+d_i)(a_i+c_i)(b_i+d_i)}{n_i^2(n_i-1)},$$

检验统计量为

$$\left\{\left|\sum a_i - \sum E(a_i)\right| - \frac{1}{2}\right\}^2 \Big/ \sum \mathrm{Var}(a_i)$$

的渐近分布为自由度为 1 的 χ^2 分布. 当 a_i, b_i, c_i, d_i 数值不大时,此方法较稳健.

生存分析(survival analysis) 生物统计学的重要分支. 是用数理统计的方法,着重对寿命资料进行分析的学科. 一般地,事物在发生质的飞跃前处于一种状态,飞跃后转为另一状态. 转变状态前,量变过程的持续时间或有关的非负度量可视为"寿命",质的飞跃作为点事件,标志前一状态的"死亡". 寿命资料的特点是非负、含删失、有伴随变量. 对此,经典的、基于误差理论的统计方法常不敷使用. 在寿命表基础上发展起来的寿命资料的参数估计、假设检验、回归等参数、半参数和非参数理论与技术形成了生存分析. 它在理论与应用两方面颇具吸引力.

删失(censoring) 生物统计学的基本概念之一. 该词源于心理学,意指刺激过强时,感官不予反应. 统计学借以描述对某些个体不可能观察到特定点事件发生的现象. 例如,临床观察中,病人的失访或死于无关原因;工业寿命试验对象未损坏即停止观察等. 最常见的是右删失;令个体死亡时刻为 T,删失时刻为 C,观察值为 $\min(T, C)$,若 C 为随机变量,称随机删失;此外还有左删失和区间删失等. 就删失机制而论,分定数删失和定时删失,分别称第一型和第二型删失. 缺失数据也可看成特殊的删失. 含删失的资料又称不完全资料.

生存函数(survival function) 一种描述生存变化规律的函数. 指寿命 T 超过或等于 t 的概率,即

$$P_r(T \geqslant t) = S(t).$$

它是 t 的单调下降函数,下降得缓慢,表示寿命普遍较长,老化进展缓慢. 生存函数的图形称为生存曲线. 临床医学中,术后 5 年的生存率只是 $t=5$ 时生存函数的数值,对应于生存曲线上的一个点.

生存曲线(survival curve) 见"生存函数".

危险率函数(hazard function) 一种特殊函数. 它是描述死亡规律的一种函数. 活到 t 时刻的个体,若在此后一瞬间单位时间内死亡,其概率

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} P_r \frac{t < T < t + \Delta t \mid T > t}{\Delta t},$$

其中 T 为寿命. 这个概念是寿命表中死亡概率的推广,也是研究删失资料的必然产物. 它反映个体在时刻 t 死亡的危险程度. 这里"死亡"是广义的,可以是任何不可逆点事件. 点事件是死亡,它就是死亡力或死亡率的概念;点事件是发病,它就是发病力或发病率的概念. 用危险率函数能细致地描写寿命资料的分布特点. 危险率函数有单调上升,单调下降和先降后升(澡盆式)之分,但分布函数间的差异却并非如此鲜明.

发病力(force of morbidity) 生物统计学中危险率函数的原型之一. 即单位人-时发生的新病例数. 其理论定义为

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_r(\text{在时间区间}(t, t+\Delta t)\text{内新发病} \mid \text{个体在时刻 } t \text{ 无病})}{\Delta t}.$$

在$(t, t+\Delta t)$内的平均值用下式估计:

$$\frac{\text{在时间区间}(t, t+\Delta t)\text{内观察到的新发病例数}}{\text{在时间区间}(t, t+\Delta t)\text{内暴露于发病危险的人-时数}}.$$

这个概念有下列同义语:危险率、瞬时发病密度、瞬时发病率、人-时发病率. 若将上述理论定义中的"病例"二字改为"死亡",则称死亡力,又称保险统计率.

比例危险率模型(proportional hazards model) 一种生物统计学模型. 它是寿命资料回归的一个主要模型. 令 $S(t)$ 和 $h(t)$ 是伴随变量为 $X_1, X_2, \cdots, X_p$ 时的生存函数和危险率函数,$S_0(t)$ 和 $h_0(t)$ 是排除伴随变量作用时的生存函数和危险率函数,

$$\psi(X_1, X_2, \cdots, X_p) > 0$$

为修正函数,则伴随变量对基本生存规律的修正方式

$$h(t) = \psi \cdot h_0(t)$$

便构成比例危险率模型. 它等价于按

$$S(t) = [S_0(t)]^{\psi}$$

对生存函数的修改. 当

$$\begin{aligned}&\psi(X_1, X_2, \cdots, X_p)\\&= \exp(-\beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \cdots - \beta_p X_p)\end{aligned}$$

时,便是科克斯(Cox)(1971)的模型. 科克斯提出了部分似然法,当时虽然未经证明,却在实践中得到了广泛的应用,并刺激了半参数估计的理论研究.

加速寿命模型(accelerate model) 一种生物统计学模型. 它是寿命资料回归的一个主要模型. 令 $S(t)$ 是伴随变量为 $X_1, X_2, \cdots, X_p$ 时的生存函数,$S_0(t)$ 是排除伴随变量作用时的生存函数,

$$\psi(X_1, X_2, \cdots, X_p) > 0$$

为修正函数,则伴随变量对基本生存规律的修正方式

$$S(t) = S_0(\psi t)$$

便构成加速寿命模型. 它相当于生存函数 $S_0(t)$ 的压缩. 当

$$\begin{aligned}&\psi(X_1, X_2, \cdots, X_p)\\&= \exp(-\beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \cdots - \beta_p X_p)\end{aligned}$$

时,便得寿命 T 的对数线性模型

$$\ln T = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon,$$

其中 ε 的分布取决于 $S_0(t)$，一般不是正态分布.

代偿风险(complementary risks) 一类生物统计学问题.指可以转化为竞争风险的一类问题.人体的某组织受损伤时，其他组织继续维持.一般地，人体的任何系统都有多种代偿功能，直到最后一个代偿功能衰竭，这个系统才停止工作.设 $X_1,X_2,\cdots,X_p$ 是各部分维持功能的潜在寿命，无法观察.而系统的寿命

$$V=\max(X_1,X_2,\cdots,X_p)$$

却可以观察.如何从观察到的系统寿命资料来推测各部分的潜在寿命，这就是代偿风险问题.代偿风险模型可与并联系统类比，$X_1,X_2,\cdots,X_p$ 为各部件的寿命，V 为系统的寿命.虽然竞争风险和代偿风险的物理意义截然不同，但在数学上处理这两类问题的方法却是相同的.因而，关于竞争风险的研究结果不难推广到代偿风险问题中去.

竞争风险(competing risks) 生命分析中的基本概念之一.设可能引起个体死亡的疾病有 p 种，$X_1,X_2,\cdots,X_p$ 是个体死亡于疾病 $1,2,\cdots,p$ 的潜在寿命，无法观察.实际寿命

$$U=\min(X_1,X_2,\cdots,X_p)$$

却可以观察，并可以知道死因是这 p 种疾病中的哪一种.如何根据观察到的寿命资料来分析与不同疾病相关的潜在寿命，从而了解各疾病的危害性，这就是竞争风险问题.竞争风险模型可与一个串联系统类比，$X_1,X_2,\cdots,X_p$ 为各部件的寿命，U 为系统的寿命.各疾病的效应互相独立假定下的竞争风险问题易于解决；不独立时，从观察到的 U 未必能推断出 X_i 的性质，这就是竞争风险的可辨认问题.

联系(association) 生物统计学术语.指两个或多个事件或变量间统计依赖性的程度.几个事件同时出现的频率远高于机遇，称它们有联系.联系有两种：对称或非因果联系；非对称或因果联系.希尔(Hill,B.)于1965年提出下列性质的出现将支持因果性结论：一致性(不同情形或方法下的可重复性)；强度("原因"在病人中出现的频率不同于在非病人中的频率)；特异性(单一原因与单一效应的联系)；剂量-反应关系(剂量或暴露的时间增大，导致疾病危险或程度的提高)；时间性(因先于果)；生物学合理性；与理论的不矛盾性；实验事实的支持.

因果模型(causal model) 一类生物统计学模型.是反映因果关系的模型.此类模型以变量与变量间的单向关系，表示原因变量的变化引起结果变量的变化，反之不然.这种因果结构必须在分析之前确定.关于断面研究的统计方法并不能确定因果关系，然而，一旦因果的方向已经由其他知识所肯定，或者作为假定置于模型中，那么用它估计效应的大小还是允许的.

通径分析(path analysis) 亦称通径系数方法.生物统计学的重要方法之一.是一种分析系统结构内的各种自变量对其因变量影响大小的线性回归或相关分析方法.通径分析法根据专业知识，以通径图形式，就变量间因果关系提出一套假说，通过计算，引出与假说相吻合并与观察数据相一致的结果.赖特(Wright,S.)首先用通径分析研究遗传学问题.在他1921年的文章中，系统阐述了通径方法.作为统计学方法公之于世的则是1934年的文章"The method of path coefficients"(Ann. Math. Stat. 5: 161—215).

通径分析的应用，除遗传学外，已遍及流行病学、卫生学、教育学、经济学和其他社会科学.

通径系数(path coefficient) 生物统计学名词.指标准化变量多重回归模型中的部分回归系数.记标准化变量回归模型为

$$x_0=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_mx_m+p_{m+1}x_{m+1},$$

其中因变量 x_0 和自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 以及误差变量 x_{m+1} 均为标准化变量，且 x_{m+1} 独立于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$.部分回归系数 p_i 称为第 i 个来源的通径系数.它有两条重要性质(以 Cor 表示相关系数)：

$$\mathrm{Cor}(x_0,x_j)=\sum p_i\mathrm{Cor}(x_i,x_j)$$

和

$$1=\mathrm{Cor}(x_0,x_0)=\sum p_i\mathrm{Cor}(x_i,x_j)p_j.$$

通径系数的估计，既可利用多重线性回归，也可利用上述两条性质.通径分析则借助通径图，将假定的复杂因果系统分解成符合上述模型的若干子系统后，求解通径系数.

共性分析(analysis of commonality) 生物统计学的重要方法之一.是有别于方差分析的一种平方和分解技术，用作评价各因素的单独作用和联合作用.记因变量 x_0 对自变量 $x_1,x_2,\cdots$的各种子集分别回归所得回归平方和为$R(x_{i_1},x_{i_2},\cdots)$，据此可定义各自变量的个性和各变量子集的共性.例如：个性

$$U(x_1)=R(x_1,x_2,\cdots)-R(x_2,\cdots),$$

共性

$$\mathrm{Com}(x_1,x_2)=R(x_1,x_2,x_3,\cdots)-R(x_3,\cdots)-U(x_1)-U(x_2)$$

等.个性和共性分别反映变量和变量子集对因变量变异的贡献.对相同数据作共性分析和通径分析，结果未必相同.相对而言，前者高估联合作用，后者高估单独作用.通径分析的发展较充分，共性分析则不难推广到非线性模型.

共性分析由克朴索讷(Kempthorne, O.)于1957年首先提出，穆迪(Mood, A. M.)于1971年独立发展并命名.

混合模型(mixed model)　数量遗传和遗传流行病学模型之一. 假定单个位点的等位基因为 A 和 a，频率为 q 和 $(1-q)$；随机交配下，基因型 AA，Aa，aa 的频率分别为

$$(1-q)^2,\ 2q(1-q),q^2;$$

各基因型服从正态分布，体现环境影响；均值各为 $z,z+dt,z+t$；t 和 d 表示纯合子间距离和显性，则倾向变量的分布是三者的混合，一般不对称，此为单一位点模型. 设存在多基因效应，其中有一主要者，效应 g 由单一位点模型描述，效应 c 反映多因素遗传背景，效应 e 反映无关残差，假定倾向变量

$$X=g+c+e,$$

此即混合模型. 称

$$\frac{\mathrm{Var}(c)}{\mathrm{Var}(X)}$$

为遗传度.

遗传度(genetic value)　见"混合模型".

多因素模型(multifactorial models)　数量遗传和遗传流行病学模型之一. 假定与某种变异有关的全部基因和环境因素可以综合成多个倾向变量的分布，以描述产生相似表型的几个不同疾病过程，称为多因素模型. 相关的倾向模型已用于反映表型的非齐性；不同性别的不同倾向分布，已用于分析性别的差异. 亲属相似性可用倾向变量的相关系数来度量. 但由于倾向变量常常不可观察，有时虽可观察，所得的却是截尾数据，它们的相关系数需通过最大似然估计等求得，计算较繁杂.

倾向-阈值模型(liability-threshold models)　数量遗传和遗传流行病学模型之一. 假定与某属性的变异有关的全部基因和环境因素可综合成一个称为"倾向"的连续变量，反映患病或异常的倾向性；并假定对于一个群体，存在一个或几个阈值，"倾向"的数值高于某阈值，对应于患病或异常；介于某两个阈值之间，对应于中等严重程度的亚型. 这样，患病或异常个体的期望和方差便是条件期望和条件方差. 此即倾向一阈值模型. 在这个模型下，条件期望大于期望，条件方差小于方差. 阈值的概念可代以危险率函数的概念，后者反映患病或失常的概率，是"倾向"这个变量的递减函数.

多变量混杂得分(multivariate confounder score)　控制多个混杂变量的分层技术. 当多个混杂变量并存时，按诸混杂变量的各种可能组合来分层，必定导致分层过多而样本量不足. 为此，可根据混杂变量的某个综合得分来分层，一般认为5层为宜. 为了确定如何计算这个综合评分，需要利用判别分析之类的多元分析技术，称为多变量混杂得分.

捕获-再捕获抽样(capture-recapture sampling)　亦称捕获-释放抽样. 生物统计学的一种抽样方法. 指估计野生动物群体大小的一种抽样方法. 该抽样方法是：在捕获特定类别动物的一个随机样本时，附以牢固的标记，不加伤害地释放；一段时间后，再捕获一批随机样本. 在第二批样本中，具有先前所附标记的动物数目在该样本中所占的比例，可用来估计整个群体中动物的数目.

道路抽样(route sampling)　生物统计学的一种抽样方法. 指类似于直线抽样的一种抽样方法. 该抽样方法在道路遍布的区域里可用作庄稼占地面积的估计. 选择一条遍布整个区域的道路，记录不同庄稼地路边的长度. 由于道路的位置不会是随机的，这样得到的面积估计会有偏倚. 但多年采用同一条道路，可以估计占地面积的变化. 作为系统抽样的一种形式，称为道路抽样. 这种抽样也可用来估计庄稼数量.

直线抽样(line sampling)　生物统计学的一种抽样方法. 是在一个区域内抽样的方法. 用于大范围动植物调查，也用于生物学显微镜下的测量. 画一些直线贯穿整个区域，群体中所有落在直线上或与直线相交的个体都包含在样本中. 若这些直线是等间隔平行的，则相当于系统抽样；若不是所有落在直线上的个体都包含在样本中，而是选择直线上等间隔点上的个体，则相当于在网格点上抽样，也可看做二阶段直线抽样.

人口统计学

人口统计学(demometrics)　生物统计学的一个分支学科. 是度量人口学指标与社会-经济变量间关系的科学. 所研究的关系包括社会-经济因素对人口特征的影响和人口因素对社会-经济特征的影响. 尽管已经有许多这类研究，罗杰斯(Rogers, C. R.)于1978年，人口统计学中最有兴趣的是迁移和就业变化之间的关系.

生命统计(vital statistics)　人口统计学的重要内容之一. 是以人口生命事件为内容的统计活动和有关资料. 生命事件包括出生、死亡，也包括结婚、迁移等与人口构成有关的个体状况的变化. 生命统计资料由生命登记系统搜集.

中国早在周朝就有生命登记；欧洲始于16世纪教区关于洗礼、命名、结婚和死亡登记. 人口普查和

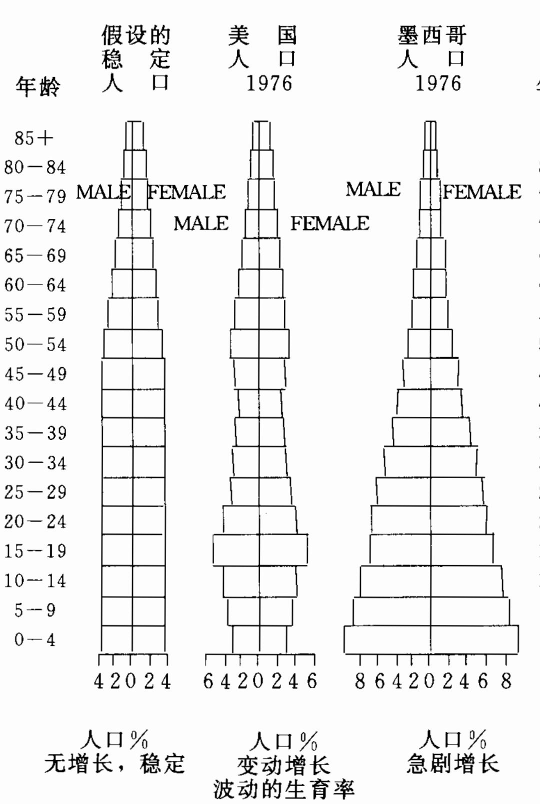
调查主要提供静态数据，生命统计则是人口动态信息的基本来源，是前者的重要补充.

同批分析(cohort analysis) 亦称纵向分析.人口统计学的常用方法.指对前期经历相同的个体群的后继经历的分析.同在某时段、经历同种基本事件的个体构成同批群，或称队列、定群.观察同批群的后继经历，得追踪资料，相应的分析称为同批分析，或纵向分析.在特定时段，观察全部相异同批群的当时表现，得断面资料，相应的分析称为同期分析，又称现时分析.

同批分析反映动态过程，同期分析描述某时段的现象.过去，人口统计学主要作同期分析，现在，同批分析的应用日益广泛.

前瞻性调查(prospective survey) 人口统计中的一种调查方法.指通过定期检查、面谈或信访，对选定的人群反复进行的调查.前瞻性调查的目的是考察不同时刻事件间的关系.按事件发生的顺序随时记录数据的研究方法称为前瞻性观察.而回顾性观察是在事件发生后，通过询问以前的经历，收集资料的研究方法.运用回顾性观察方法进行的调查称为回顾性调查，调查的核心是生命史及伴随因素.由于死者和迁出者无法回顾而不得不排除，以及回顾过去时难免的不确切性，使偏倚和含混时有发生.

人口金字塔(population pyramid) 人口统计



学术语.指有效且广泛地用以反映人口结构的一种双向条形图.如图，纵轴左右分别表示各年龄组男女性人数或百分比.其形状鲜明反映人口结构特点：增长型、年轻型，下宽上渐窄；静止型、成年型，中、下部齐同；缩减型、老年型，中、上部较宽.波动状是生育率波动的结果.

稳定人口(stable population) 人口统计学术语.指无迁移、年龄-性别结构不变、人数恒速变化的人口.变化速率为零的人口数量称为稳定人口，也称为静止人口，或称寿命表人口.

稳定人口是根据寿命表的年龄组别死亡率构造的理论模型.稳定模型在人口学中有广泛影响，是数学人口学的主要成就之一.瑞士数学家欧拉(Euler, L.)于1760年为其奠定了基础，美籍奥地利数学家洛特卡(Lotka, A. J.)于1907年提出基本方程

$$\int_0^{\infty} e^{-rx} f(x) p(x) \mathrm{d}x = 1,$$

并解出内在自然增长率 r，其中 $f(x)$ 是 x 岁妇女的活产女婴数，$p(x)$ 是活到 x 岁的概率.

静止人口(stable population) 即“稳定人口”.

人口推算(projection) 亦称人口预测.推算未来人口数量的一种方法.指根据关于未来生育、死亡和迁移趋势的假定，对未来人口数目和特征所进行的推算.实际并非预测，只是将设想的假定“投射”到未来的“屏幕”上.实践中，预测和推算不易区分，多数官方推算往往被视为预测.因素法应用最广，它分别估计未来出生、死亡和迁移人数，然后，连同当时人口推算未来人口.常用时间序列和计量经济的办法改善诸因素的估计精度.人口行为的理论模型尚不能指导推算.

人口预测(prediction of populations) 即“人口推算”.

逆推算(reverse projection) 推测人口的一种方法.指根据当前的年龄结构和假定的当年死亡率水平，重建以前人口年龄结构的方法.与传统的人口推算相反，它利用生存概率之逆来倒推.通常用于生命登记不健全的国家借助普查资料，估计普查前若干年的粗出生率.若已知人口增长率，利用平衡方程，可以估计相应的粗死亡率.这一技术的变通，也可用于估计纯迁移率.

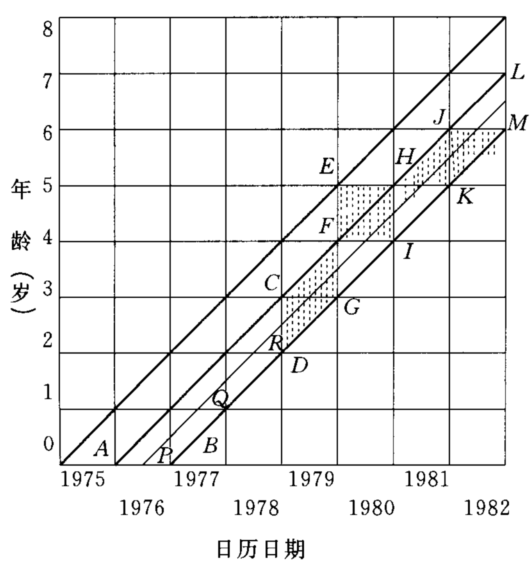
人口更替(renewal of the populations) 人口统计学术语.指出生者增补死亡者，使人口以稳定速度更替的过程.关于更替的细致研究，基于美籍奥地利数学家洛特卡(Lotka, A. J.)于1939年的著名更替方程

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-a) l(a) m(a) \mathrm{d}a + G(t),$$

其中 $B(t)$ 是时刻 t 的出生人数，$l(a)$ 和 $m(a)$ 是年龄

为 a 时的生存概率和生育概率，α 和 β 是再生产年龄的下限和上限，$G(t)$是过程开始时已经出生的妇女在停止生育前的生育数.这个方程是稳定人口理论的基础，可用以研究任何生育率、死亡率组合下的更替结果.

莱克西斯图(Lexis diagram)　亦称时间年龄方格图.人口统计学术语.指联系出生日期、观察日期和年龄的坐标图.它形象地反映同批分析与同期分析的关系.如图，横轴是出生日期，垂线表示同观察时点；纵轴是年龄，横线表示同年龄；与横轴成45°的斜线称生命线，表示同批群观察时间与年龄的推进.由图可见，同批群在任一日历年份跨两个年龄组(CDGF)；同批群的同龄组分跨两个日历年(HKMJ)；同日历年的同龄组分属两个同批群；沿斜线和垂线进行，分别表示同批分析和同期分析.由德国统计学家莱克西斯(Lexis，W.)于1875年创造.



标准化(standardisation)　人口统计学术语.指通过校正人口结构差异，提高不同人口资料可比性的技术.以年龄校正为例，将观察到的一组年龄别率和某个"标准"年龄结构结合计算，供比较的粗率，称直接标准化；将人口的年龄结构和某组"标准"年龄别率结合，连同观察值，计算某种标准化指标，称间接标准化.其结果受"标准"选择的影响很大，只有可比性，无内在意义.有人甚至认为，这样做常会引向谬误.此类技术，是用计算机作复杂统计分析的方法问世前沿续下来的，今后将会被摒弃.

间接估计技术(indirect estimation techniques)　人口统计的一种技术.指对缺乏常规资料来源(如可靠和完整的生命登记)的人口，估计生育、死亡、迁移水平和趋势的所有统计技术.例如：

1.根据母亲年龄编制的已生儿童存活比例的表格，估计婴儿死亡率；根据孤儿或寡妇资料，估计成人死亡率等技术.

2.根据常规人口资料和其他信息结合的计算结果，反过来评价和校正原资料的技术，包括增长平衡方法、比较累积生育率和平均怀胎数的 P/F 比方法.

3.以不完全资料拟合生育和死亡模型的技术，如冈珀茨生育率模型、柯勒-秋塞生育模型和布拉斯(Brass)的对数寿命表系统.

4.利用母亲报告的孩子数和人们报告身在国外的兄弟姐妹数，估计迁移的技术.

集团分析(aggregate analysis)　亦称宏观水平分析.人口统计学的常用方法.指传统的基于官方统计资料的分析.大多以国家或行政区域为单位进行.抽样调查提供了丰富的个体资料，个体分析或微观水平分析的方法已开始流行.

宏观水平分析(macroscopic level analysis)　即"集团分析".

率(rate)　人口统计学术语.指一定时期内一个事件的发生率，由该事件的发生数除以平均人口数或期中人口数给出.若除数为暴露于该事件"危险"之下的总人-年数，则称为年发生率.对除数和被除数同作某种限定，称为特殊率，否则称粗率.例如：事件为死亡时，称为死亡率；以年龄限定，称为年龄别死亡率；不作限定，称为粗死亡率.对不可更新事件(如死亡)，泛称损耗率.某些虽名为率，实际上宜称比或概率.

婴儿死亡率的生物统计分析(biometric analysis of infant mortality)　人口统计学的常用方法.指分析婴儿死亡率的一个近似方法.它将由于出生前或出生时原因的内源性死亡和由于产后环境的外源性死亡分离开来.由观察发现，出生一月后的死亡率模式很大程度上独立于死亡率水平.若以天为单位的年龄 n，取对数尺度

$$\log(n+1)^3,$$

则累积死亡数随年龄而线性变化.假定出生一月后的死亡均属外源性，将直线外推到零岁，纵轴截距便是内源性死亡数的估计值.

生育模型(fertility models)　一类重要的人口统计学模型.指描述和解释生育模式的数学模型.大致有两类：生育与社会经济变量相联系的模型和孤立地反映人口再生产细节的模型.

多数模型都涉及生育的直接因素，即直接影响生育的生理和行为因素.特别有影响而较简单的是宾格兹分解模型.还有一些考虑怀孕和出生过程不确定性的随机模型.关于生育年龄别模式的描述性

模型也有发展，最成功的是基于经验性研究的柯勒-秋塞生育模型.

冈珀茨生育率模型(Gompertz fertility model) 一种生育模型.指生育率年龄分布的一个关系模型.基本前提是:任两个人口的累积生育率

$$F_i(x)\ (i=1,2),$$

经冈珀茨双指数变换的反演，得

$$Y_i(x)=-\ln\left[-\ln\frac{F_i(x)}{T}\right],$$

其中 T 是总生育率 $F(50)$;假设

$$Y_1(x)=\alpha+\beta Y_2(x).$$

树立一标准生育率模式 $Y_s(x)$，则对任意生育率函数 $Y(x)$，有

$$Y(x)=\alpha+\beta Y_s(x),\ F(x)=Te^{-Y(x)}.$$

这就形成了反映生育率年龄分布各种变异的三参数模型系统，称为宫兹生育率模型.其中 T 为水平参数，α 为位置参数(正值表示比“标准”年轻)，β 为分散系统(大于1表示年龄分布比“标准”集中).

寿命表(life table) 亦称生命表.人口统计学术语.指处理年龄别死亡率资料的统计表.年龄逐岁列出者称为完全寿命表，年龄分组列出者称为简略寿命表.基于追踪资料者称定群寿命表或同批寿命表，基于断面资料者称现时寿命表或同期寿命表.后者设想一同批群，令其生命过程按断面上各年龄别死亡率推进，从而将断面资料综合成假想同批群的“死亡经历”.

公元3世纪就出现了寿命表，今联合国仍以它作为国际比较的常规工具.寿命表中若干概念已成为生存分析的基础，并渗透到数理统计学的各个方面.

生命表(life table) 即“寿命表”.

寿命表方法(life table methods) 寿命表技术的应用和发展.指处理和解释寿命表数据的各种方法.除传统的单消失寿命表外，还包括多消失寿命表、增-消寿命表等多状态人口学中的某些方法.它们大多基于有限状态马尔可夫链假定.对非齐性人口这一重要问题，传统的分层办法难以奏效，可利用含伴随变量的危险率模型实现寿命表的回归.

寿命表函数(life table functions) 一种特殊函数.指寿命表中普遍使用的函数.主要有生存函数:活到 x 岁的人数 l_x，l_0 称基数;生存概率:x 岁者活到 $x+n$ 岁的概率为

$$p_x=\frac{l_n}{l_0};$$

死亡概率:x 岁者死于 $x+n$ 岁前的概率为

$$q_x=1-p_x;$$

死于 x 岁和 $x+n$ 岁间的人数为

$$d_x=l_x-l_{x+n};$$

死于 x 岁和 $x+n$ 岁间者在此区间内存活的平均年数 a_x;在 x 岁与 $x+n$ 岁间存活的总人-年数

$$L_x=l_x-d_xa_x;$$

在 x 岁后存活的总人-年数

$$T_x=\sum_{i\geqslant x}L_i;$$

x 岁时预期寿命为

$$e_x=\frac{T_x}{l_x};$$

中心死亡率为

$$m_x=\frac{d_x}{L_x}.$$

其中，死亡概率的概念尤其重要，统计学的分支生存分析中的核心概念“危险率函数”就是从死亡概率发展而来的.

预期寿命(life expectancy) 亦称平均剩余寿命.寿命表函数之一.指活到时刻 t 的个体，此后存活时间的数学期望.人类的预期寿命是一条单调下降的曲线，中年之前是接近斜率 -1 的直线，此后逐渐向上凹，表明一旦活到中老年，预期寿命下降缓慢，这是常见的却不是惟一的模式.这个函数在临床医学和职业卫生中均有应用.

寿命资料回归(regression of life data) 人口统计学的常用的方法.指分析寿命与诸多伴随变量间关系的统计方法.因为寿命是非负的，不服从正态分布，也很少服从对数正态分布.更重要的，经典回归分析中的自变量不随时间变化，用它处理随时间变化的伴随变量就软弱无能.20世纪60年代，曾有一些学者尝试用老方法解决新问题，效果却不甚满意，随后便出现了许多适用于寿命资料的回归模型.这类模型常分两部分:一是基本规律，即排除伴随变量作用后的寿命规律(共性);二是伴随变量对基本规律的修正(个性).不同的修正方式得出不同的回归类型.

模型寿命表(model life table) 一种假想的寿命表系统.指概括性别和年龄别死亡率的典型模式.它有两类应用，一是据有限或残缺资料估计寿命表，二是推算未来趋势.联合国(1955,1982)利用经验资料的平均值产生“典型的”年龄模式，先后建立了两套模型寿命表系统.另外，基于19世纪和20世纪欧洲与北美的寿命表，由一系列回归方程导出四种模式，用不同办法建立了五参数模型.其理论虽有优点，但采纳者不多.广泛应用的是对数寿命表系统.该系统假定不同人口的年龄组别生存概率 p_x 经对数变换

$$y_x = \frac{1}{2}\ln\frac{1-p_x}{p_x}$$

后呈线性关系.

冈珀茨-梅克海姆公式(Gompertz-Makeham formula) 人口统计学模型.是英国统计学家冈珀茨(Gompertz,B.)与梅克海姆(Makeham,W. M.)于1825年为死亡年龄资料提供的模型,后又被梅克海姆分别于1860年和1867年改进.冈珀茨的公式为

$$q_x = BC^x,\ l_x = l_0 \cdot g^{(c^x-1)},$$

其中 q_x 和 l_x 是年龄为 x 时的死亡概率.他解释说,这个模型对应于"日益无能地抗拒毁灭".梅克海姆建议为 q_x 增加一个与年龄无关的常数项,以反映死亡原因

$$q_x = A + BC^x.$$

这个模型能较好地拟合寿命表函数.q_x 在儿童期以后的上升段,在生存分析和工业产品的寿命研究中有广泛应用.上述 A,B,C,g 为参数.

莱斯利矩阵(Leslie matrix) 人口推算的一种模型.指同批-因素推算技术的矩阵形式模型.这个矩阵概括了在引起人口变化中的生育率和死亡率的效应.矩阵的第一行含有反映生育和儿童生存水平的因素;主对角线含有反映从一个年龄组 $(x,x+n)$ 生存到下一年龄组 $(x+n,x+2n)$ 的生存概率;其他元素均为零.此矩阵由莱斯利(Leslie,P. H.)(1945,1948)建立,称为莱斯利矩阵.如果各年龄组的人口数以列向量表示,则以莱斯利矩阵左乘这个向量,便产生反映 n 年后人口推算值构成的向量.此矩阵以离散形式表达了稳定人口理论,其性质,特别是遍历性,得到了广泛研究,并已推广到多状态模型,用于多个状态或区域的人口推算.

迁移矩阵(migration matrix) 人口统计学模型.指描述从一些出发地到一些目的地的人口总迁移流的矩阵形式的模型.常住地的改变称为迁移.有四类主要的迁移矩阵:以出生地为行,现居住地为列的终生迁移矩阵;指定的若干年前的居住地为行,现居住地为列的固定期迁移矩阵;以前次居住地为行,现居住地为列的前次居住迁移矩阵;以迁移前居住地为行,迁移后居住地为列的变动迁移矩阵.不同年龄组的迁移矩阵是多区域人口学的基本资料.许多文献用出发地特征、目的地状况和两地间交通渠道等解释一些人口总迁移流的模式.

一般增殖-死亡-迁移过程(general birth-death-migration processes) 一种重要的人口统计学模型.指与人口增殖、死亡和迁移有关的一类马尔可夫过程模型.以

$$S_1,S_2,\cdots,S_s$$

表示健康状态,随机向量

$$X_t = (X_{1t},X_{2t},\cdots,X_{st})'$$

为 t 时刻处于各状态的人口数,

$$X_{it}\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

为非负整数,$\lambda_a(t)$ 表示处于状态 S_a 的人数由于迁移或增殖增加1名的转移强度,$\mu_a(t)$ 表示处于状态 S_a 的人数由于迁移或增殖减少1名的转移强度.对状态的数目 S 以及转移强度 $\lambda_a(t)$ 和 $\mu_a(t)$ 等作适当假定,可派生出各式各样的模型.如泊松过程、纯增殖过程、纯死亡过程、玻利亚过程、增殖-死亡过程、迁移过程和增殖-死亡-迁移过程等.

人口动力学(population dynamics) 人口统计学的一个分支.指关于死亡、迁移和生育引起的人口数量和结构变化过程的研究.有时,人口运力学指对任何易变人口变化过程的研究.与人口静力学相对照,人口动力学涉及生命事件随时间变化过程的分析,其中注意的焦点是任何时刻人口的状态.尽管原则上与人口学分析的许多方面有关,但人口动力学指常用来表示对所有人口变化因素的一些综合分析研究.

多状态人口学(multistate demography) 人口统计学的一个分支.指不同状态之间人口运动的研究.其中人口以"状态"分类,并且各"状态"可有输入人口和输出人口.现在研究的人口系统,有不同区域的人口、不同婚姻状况的人口、按劳动力性质分类的人口和按教育程度分类的人口.

多状态人口学的主要工具是增-失寿命表模型.例如,结婚人口可能通过离婚、丧偶或死亡而流失成员,也会由于单身者的结婚和离婚、丧偶者的再婚而增加成员.

数学人口学(mathematical demography) 人口统计学的一个分支.指关于人口分析的数学方法及其联系的研究.

17世纪,英国数学家格兰特(Graunt,J.)和德威特(Dewit,L.)等的工作,是早期数学人口学;瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于1760年建立了稳定人口理论的基础,是现代数学人口学的先驱;

19世纪,英国统计学家冈珀茨(Gompertz,B.)和梅克海姆(Makeham,W. M.)推动了死亡率数学模型的研究;

20世纪,美籍奥地利数学家洛特卡(Lotka,A. J.)重建稳定人口理论,在人口学和其他相关学科中得到广泛应用,并刺激了对人口学的进一步研究;

柯勒(Coale,D. R.)于1982年推广了洛特卡方程,可应用于任何人口学.

矩阵模型日益增多，最知名的是构成离散人口动力学的莱斯利矩阵及其在多状态人口学和多区域人口学中的拓广，这类马尔可夫过程亦可应用于其他领域．许多工作依赖于计算机数值分析和模拟，尤*其需用随机模型和复杂的统计方法*．

医 学 统 计

卫生统计(health statistics)　医学统计的一个分支．据拉斯特(Last，J. M.)等于1983年为国际流行病学学会编写的流行病学词典(牛津大学出版)，卫生统计指描述、查点与卫生、疾病以及卫生服务有关的属性、事件、行为、服务、资源、成果及费用的集团数据．这些数据来自调查、医学记录和行政文件．生命统计是卫生统计的一部分．

正常范围(normal range)　医学统计的基本概念之一．在医学中，习惯上将健康人群中，以某种指标测定值的均数为中心的95%置信区间称为正常范围．尽管这个"范围"是根据健康人群的测定值计算出来的，实际上，测定值落在这个范围内的个体未必"正常"，落在这个范围外也未必异常．这个术语不仅无助于确定个体在医学上正常与否，而且在语义上含糊、混淆，常引起误解，因为只有对比正常人群的测定值和异常人群的测定值才能给出有意义的正常界限或正常范围．许多学者建议放弃"正常范围"这个术语．如果医生坚持保留这个概念，有人建议改称为惯常范围，也有人建议改为参考范围．

临床试验(clinical trial)　医学统计的基本概念之一．指由随机化控制、谨慎而符合伦理的、旨在回答某个医学问题的试验．实践中，除随机将个体安排在若干处理组的平行组试验外，还有任一个体先后接受各种处理的交叉设计，接受几种因素搭配处理的析因设计，以及每次观察一个或一组个体、不断以已有结果指导下一步的序贯设计．平行组试验最普及、简单、个体数固定；当后效应持续不长，个体先后自身差异小于个体间差异时，宜用交叉设计；需分析诸因素单独效应和联合效应时，宜用析因设计；而序贯设计谨慎、经济、符合伦理．

混杂(confounding)　医学统计术语．在病因学研究中，关于对所研究的两个变量间联系的评价，必须考虑其他因素的影响，在未排除其他因素影响的情形下所得到的结果带有偏倚性，称这种偏倚为混杂．导致混杂的因素称为混杂变量．在研究设计和统计分析中，同时控制一组混杂变量的联合效应，可以校正混杂，若需要控制的混杂变量不能再减少，则称其为充分混杂变量组．校正混杂效应，需从研究的设计、个体的选择和统计方法等多方面入手，关于因素间联系的背景知识和以数据为基础的分析技术缺一不可．

匹配(matching)　医学统计的一种常用术语．*这里指使研究组和对照组关于研究因素以外的一些*因素具有可比性的技术过程．所依据的变量称匹配变量．常见的匹配技术有：

1. 卡钳式匹配．使研究组个体与对比组个体在某个连续变量的取值方面保持在一定距离之内．例如，年龄差别不超过2岁．
2. 频率匹配．使研究组和对照组在某些匹配变量方面具有相似的频率分布．例如，年龄分布相近．
3. 类别匹配．使研究组和对照组在某些类别变量方面有相似的结构．例如，相似的职业结构．
4. 个体匹配．为研究组的每一个体选择若干某些匹配变量取值相似的个体，构造对照组．若研究组每一个体均有m个匹配者，称$1:m$匹配；$m=1$时，称成对匹配．

偏倚钱币随机化(biased coin randomization)　医学统计术语．指在临床随机化对比试验中，减少受试人数不平衡的一种技术：临床试验中，病人陆续到来，假定一个新病人到来时，随机安排到A组的人数已远超过B组的人数，则分别以适当的概率$p>0.5$和$1-p<0.5$，随机地将该新病人安排到B组或A组．

适应性设计(adaptive design)　医学统计的一种设计方法．指针对临床随机化对比试验的伦理问题出现的一种设计．经典的随机化对比试验，以几乎相等数目的病人分配给不同的处理组．适应性设计则根据累积的资料，将陆续到来的新病人按较高的比例，分配给显出优越性的处理组．这一设计很直观，引起许多人的注意．一方面，统计学要求等样本量；另一方面，应当使尽可能多的病人尽快使用较优越的处理．对此，学者们提出了一些在两者之间求得妥协的办法．

筛查(screening)　一类特殊的医学统计方法．是关于慢性病调查的一种方式．应用快速试验、检查或其他手段，初步识别对其规律尚未充分认识的疾病或缺陷．筛查试验分检出可能患有某病的和可能未患此病的个体，并非诊断，其中的阳性或可疑个体必须请医生确诊和治疗，常由研究者或医务部门而不是患者发起．通常关心的是慢性病在尚未医疗的人群中进行．对整个人群的筛查称为普查；同时使用多种筛查手段的称为多重筛查；常规筛查旨在看似正常的个体中，发现那些早期检出能较好控制的疾病．衡量筛查试验，着眼于准确性、检出率、精确性、

可重复性、灵敏性、特异性和真实性.

伯克松悖论(Berkson's fallacy) 亦称伯克松偏倚.医学统计中的一种偏倚.指一种由于选择性偏倚而得出的自相矛盾的结论.当不同个体被纳入研究样本的机会有所不同时,若将样本引出的结果推广到总体,便可能是悖论.例如,设所研究的两种疾病 A 和 B 的发生与否,在总体中互相独立,即

$$P(A|B)=P(A|\overline{B}),$$

H 表示住院,则在住院人群中,概率

$$P(A|B,H) = \frac{P(H|A,B)P(A)}{[P(H|A,B)P(A)+P(H|\overline{A},B)P(\overline{A})]}$$

和

$$P(A|\overline{B},H) = \frac{P(H|A,\overline{B})P(A)}{[P(H|A,\overline{B})P(A)+P(H|\overline{A},\overline{B})P(\overline{A})]}$$

未必相等,即住院人群中 A 和 B 未必独立.

盲试验(blind experiment,blind trial) 医学统计术语.在医学研究中,若试验者或受试者并不知道受试者被安置的组别,这种试验称盲试验.其目的是消除受试者或研究者的偏倚或成见.如果仅试验者知道受试者所在组别,这种试验称为单盲试验;试验者和受试者均不知道,称为双盲试验;如果连同分析者也不知道,则可称三盲试验.

对照组(control group) 医学统计术语.指在研究之前选定的、作为标准供比较的观察组.对照组由未暴露于疾病、干预、处理或其他所研究变量的个体组成.

"对照"有时指对照组,有时指对照组成员.以研究阶段之前的类似个体为对照组,称历史对照,常因时过境迁而不甚满意;从医院病人中选择对照,称医院对照,常是选择性偏倚的来源;以年龄、性别、种族、社会经济等特征,与研究组成员类似的个体为对照,称匹配对照;以与研究组成员生活在同一地区,因而环境、社会经济类似的个体为对照,称邻近对照;以研究组成员的同胞手足为对照,因而有相同遗传背景,称同胞对照.除匹配对照外,一般地,对照组和研究组的个体数不宜过于悬殊.

交叉设计(cross-over design) 临床试验的一种设计.指为减少个体差异的干扰,安排受试者不同时期相继接受不同处理.适用于病情长期稳定,而处理却能迅速见效的情形(如止痛药).

最简单的交叉设计,含两种处理 A 和 B,随机选择两组病人,一组依次接受 A 和 B,另一组依次接受 B 和 A.两个疗程间设有停药期,称"洗脱"期,使病人恢复如前,以消除前一处理的残余效应.两个疗程之末,分别测定受试者的反应,或在疗程中多次测定,数据处理方法多采用方差分析.若统计检验表明残余效应显著,仅第一疗程的结果可供比较,则失去交叉设计的优越性.

组序贯设计(group sequential design) 广泛用于临床试验的一种技术.无论从经济、精度、伦理和临床实际看,序贯试验和分析皆适合于临床研究.但是,每试验一次(即分析一次),并非总是可行与必要的.在较多场合,研究者希望在全过程中仅作少数几次分析,以监控试验进程.例如,一项预计五年的大规模多中心协作试验中,不妨委托一个独立的资料监察委员会,每年对累积资料作一次暂时分析,以决定是否建议提前停止该试验.为此,需进行重复的假设检验,但检验次数通常远小于序贯分析要求的次数.

重复测量(repeated measurements) 一种测量方法.指对一些个体在短时间内进行次数不多的同类型的测量.在医学中,重复测量颇为多见.例如,不同剂量组的个体施用支气管扩张药物后,每小时测定一次呼吸功能,共 3 次;对一批病人相继 5 天测量血压;中学生每年体检 1 次,共 4 次.从同一个体获得的短时间序列,可能有某种趋势和随机波动相伴,并且个体间也存在变异.对这类资料,因为各时刻随机波动并不独立;不能简单套用一般统计方法,因为观察时点过少,时间序列的各种模型也无帮助.处理重复测量资料的统计方法,有特殊模型下的方差分析、正交多项式回归、多元分析等.

暴露于危险(exposure to risk) 医学统计术语.个体或群体处在易于发生某事件的环境中,或具有易于发生某事件的特征,统称暴露于危险.在保险统计中,"危险"指易引起死亡或灾害的因素;在流行病学中,"危险"指易致病的因素.但"危险"未必总与不悦事件相伴,例如,也有暴露于结婚"危险"之说.通常以人数与时间的乘积构成的量,来度量个体或群体暴露于危险的程度.对于非齐性人群,常根据暴露于危险的程度划分成相对具有齐性的亚群.暴露于危险的人-年数,在计算人口学或流行病学中,计算各种"率"时,常作为除数.

配合作用(synergism) 医学统计术语.在通常意义下,当两个或多个因素的联合效应大于它们单独效应之和时,称这些因素有配合作用;当联合效应小于它们单独效应之和时,称这些因素有对抗作用.配合作用一词在流行病学中是有争议的.在生物检定中另有特殊定义.若有一些人在同时暴露于两个因素时将得病,而仅暴露于其中任何一个因素时,则不得病,便称这两个因素是配合起来起作用的.相反,若有一些人单独暴露于两个因素之一时将得病,

而同时暴露于两个因素时,则不得病,便称这两个因素对抗地起作用.应注意的是,根据这个定义,两个因素可能对某些人是配合起来起作用的,对另一些人则是对抗地起作用的.

对抗作用(antagonism)　见"配合作用".

相对危险度(risk ratio)　医学统计术语.指不愉快事件的发生与危险因素联系的一种度量.以 E 和 $\bar{E}$ 分别表示暴露和不暴露于危险因素,D 和 $\bar{D}$ 分别表示不愉快事件的发生和不发生,则条件概率

$$P_r(D|E) \text{ 和 } P_r(D|\bar{E})$$

分别表示暴露于危险因素条件下的危险度和不暴露于危险因素条件下的危险度,两者之比称为相对危险度

$$RR = \frac{P_r(D|E)}{P_r(D|\bar{E})}.$$

它反映该危险因素危害的程度.由贝叶斯逆概率公式,当 $P_r(D)\approx 0$ 时,即对罕见疾病,有

$$RR \approx \frac{P_r(E|D)/P_r(\bar{E}|D)}{P_r(E|\bar{D})/P_r(\bar{E}|\bar{D})}.$$

换言之,对罕见疾病,相对危险度近似于暴露的相对机会比(优势比).

相对机会比(relative odds, odds ratio, cross-product ratio)　医学统计术语.事件发生的概率与不发生的概率之比,称该事件的机会比或优势比.以 E 和 $\bar{E}$ 表示暴露于和不暴露于危险因素,以 D 和 $\bar{D}$ 表示发病和不发病,则

$$\frac{P_r(E|D)}{P_r(\bar{E}|D)} \text{ 和 } \frac{P_r(E|\bar{D})}{P_r(\bar{E}|\bar{D})}$$

为发病和不发病条件下关于暴露的机会比或优势比.两个机会比或优势比相除:

$$\frac{[P_r(E|D)/P_r(\bar{E}|D)]}{[P_r(E|\bar{D})/P_r(\bar{E}|\bar{D})]}$$

便是关于暴露的相对机会比或相对优势比.而且,它等价于

$$\frac{[P_r(D|E)/P_r(\bar{D}|E)]}{[P_r(D|\bar{E})/P_r(\bar{D}|\bar{E})]},$$

即关于暴露的相对机会比等价于关于发病的相对机会比.设观察数据 a,b,c 和 d 分别为发生事件 (D,E),$(D,\bar{E})$,$(\bar{D},E)$ 和 $(\bar{D},\bar{E})$ 的人数.不论回顾性研究或前瞻性研究,相对机会比或相对优势比的估计值都是交叉积之比 $\psi=ad/bc$.其方差的近似计算公式为

$$\mathrm{Var}(\log\psi) = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

超额危险度(excess risk)　医学统计术语.指不愉快事件的发生与危险因素联系的一种度量.以 E 和 $\bar{E}$ 分别表示暴露和不暴露于危险因素,D 和 $\bar{D}$ 分别表示不愉快事件的发生和不发生.用

$$P_r(D|E) \text{ 和 } P_r(D|\bar{E})$$

之比(相对危险度)来度量 E 的危害程度.相对危险度有时不被认为是出于严格的实践观,而患者或死亡者增加了多少才是公共卫生所关心的.主张用两者之差

$$P_r(D|E)-P_r(D|\bar{E})$$

来度量的,称为超额危险度或附加危险度.也有人建议以

$$\frac{P_r(D|E)-P_r(D|\bar{E})}{1-P_r(D|\bar{E})}$$

来度量,称为相对差.运用相对危险度和超额危险度分析同一问题时,常会引起不同结论,孰是孰非,需由实践仲裁.

归因危险度(attributable risk)　医学统计术语.是估计发病可能性的一个指标,也是在考虑人群中暴露于危险因素者所占比例(θ_E)的情形下,关于危险因素与疾病联系的一个测度,它反映了消除该危险因素的重要性.令 I_p,I_E 和 I_{NE} 分别为人群的发病率、暴露于危险因素者的发病率和未暴露于危险因素者的发病率,则归因危险度定义为

$$\lambda = \frac{I_p - I_{NE}}{I_p}.$$

记相对危险度

$$\varphi = \frac{I_E}{I_{NE}},$$

由于

$$\begin{aligned} I_p &= \theta_E I_E + (1-\theta_E) I_{NE} \\ &= I_{NE}\{1+\theta_E(\varphi-1)\}, \end{aligned}$$

则有

$$\lambda = \frac{\theta_E(\varphi-1)}{[1+\theta_E(\varphi-1)]};$$

记 θ_1 为暴露于危险因素者中发病者在全部发病者中所占比例,又有 $\lambda=\theta_1(\varphi-1)/\varphi$.对于任何可能估计 φ 和 θ_E(或 θ_1)的研究,λ 均能得到估计.

灵敏度(sensitivity)　医学统计术语.是间接反映诊断试验效率的统计指标.灵敏度是实际具有某特征者,其诊断试验呈阳性的概率.特异度是实际无某特征者,诊断试验呈阴性的概率.设诊断试验的一份随机样本中,a,b,c 和 d 分别为:(试验阳性,实际有病)、(试验阳性,实际无病)、(试验阴性,实际有病)和(试验阴性,实际无病)的人数,则灵敏度和特异度的估计值分别为

$$\frac{a}{a+c}, \quad \frac{d}{b+d}.$$

但是,仅灵敏度和特导度两项,不足以评价诊断试验的预测价值.

特异度(specificity)　见"灵敏度".

阳性准确度(positive accuracy) 医学统计术语.是直接反映诊断试验预测价值的统计指标.诊断某特征的试验呈阳性,而个体确实具有此特征的概率,称阳性准确度.(1－阳性准确度)称假阳性率.诊断试验呈阴性,而个体确实不具有此特征的概率,称阴性准确度.(1－阴性准确度)称假阴性率.设诊断试验的一份随便机样本中,a,b,c 和 d 分别为:(试验阳性,实际有病);(试验阳性,实际无病);(试验阴性,实际有病)和(试验阴性,实际无病)的人数,则阳性准确度、阴性准确度、假阳性率和假阴性率的估计值分别为

$$\frac{a}{a+b},\ \frac{d}{c+d},\ \frac{b}{a+b},\ \frac{c}{c+d}.$$

灵敏度和特异度与患病率三者结合,可推算阳性准确度和阴性准确度.

阴性准确度(negative accuracy) 见"阳性准确度".

生物检定(biological assay) 生物统计的重要方法之一.即按照统计学设计和分析方法,将某药物施加于生命系统,根据其反应,估计药物的本质、成分、浓度或效力的实验过程.最简单的是直接检定,即估计相对效力的直接方法:将两种(或多种)制备分别施加于符合统计学要求的不同组的对象,测定恰好产生特定质反应(例如,死亡)的剂量,估计两组(或多组)平均剂量之比.直接检定要求剂量连续增加,且立即出现反应,因而可行性有限.更广泛采用的是间接检定,即研究剂量与引起的量反应之间的关系,如平行线检定、斜率比检定、质反应检定等.回归分析、参数估计和假设检验等,是生物检定最常用的分析手段.

平行线检定(parallel-line assays) 生物检定的方法之一.设待检制备 T 和标准制备 S 的期望反应与对数剂量 x_T 和 x_S 呈平行的线性关系,相同反应的对数剂量之差记为 $\log\rho$(称对数强度比).平行线检定方法是:分别在 n_S 和 n_T 个剂量下取得 S 和 T 的反应值,以平行直线拟合,斜率为 b.则 $\log\rho$ 的点估计为

$$M=\bar{x}_S-\bar{x}_T-\frac{\bar{y}_S-\bar{y}_T}{b},$$

$$\mathrm{Var}(M)\approx\frac{S^2}{b^2}\left\{\frac{1}{n_S}+\frac{1}{n_T}-\frac{(\bar{y}_S-\bar{y}_T)^2}{b^2\sum(S_{xx})}\right\},$$

S^2 为平均残差平方和,$\sum(S_{xx})$为制备内 x 离差平方和.记 $t_{v,2\alpha}$为自由度 $v=n_S+n_T-3$ 的 t 分布$(1-2\alpha)$分位点,当

$$g=\frac{t_{v,2\alpha}^2S^2}{b^2\sum(S_{xx})}<0.1$$

时,$\log\rho$ 的区间估计为

$$M\pm t_{v,2\alpha}\sqrt{\mathrm{Var}(M)};$$

当 $0.1\leqslant g\leqslant1$ 时,$\log\rho$ 的区间估计为

$$\bar{x}_S-\bar{x}_T+\frac{1}{1-g}\left\{M-\bar{x}_S+\bar{x}_T\pm\frac{t_{v,2\alpha}S}{b}\cdot\left[(1-g)\left(\frac{1}{n_S}+\frac{1}{n_T}\right)+\frac{(M-\bar{x}_S+\bar{x}_T)^2}{\sum(S_{xx})}\right]^{\frac{1}{2}}\right\};$$

当 $g>1$ 时,此法无效.

质反应检定(quantal-response assays) 生物检定的方法之一.该方法指:在预先选定的若干剂量或对数剂量 X_i 下,各试验一组 n_i 个对象,观察特定质反应呈阳性者的数目 r_i,期望反应 $E(r_i/n_i)$与剂量或对数剂量间的关系常呈 S 形曲线状,可以看做是一个随机变量的分布函数.这个随机变量在生物检定中称耐受量,在心理测验中称阈值.这类曲线常可通过 r_i/n_i 的正态概率单位变换或对数优势变换直线化.除此之外,数据分析的方法与平行线检定类似.

斜率比检定(slope-ratio assays) 生物检定的方法之一.在某些场合(如微生物检定),待检制备 T 和标准制备 S 的期望反应 $E(y)$,与剂量 X_T 和 X_S 呈等截距、不等斜率的线性关系,残差分布近似正态,等方差.相同反应的剂量之比记为 ρ.斜率比检定是:分别在 n_S 和 n_T 个剂量下取得 S 和 T 的反应值,同时测定若干次空白对照的反应值.作 Y 关于变量 X_S 和 X_T 的多重回归,得

$$Y=a+b_SX_S+b_TX_T.$$

则 ρ 的点估计为 $R=b_T/b_S$.记残差平方和为 S^2,回归系数的协方差矩阵为$\{v_{ij},i,j=1,2\}$,则

$$\mathrm{Var}(b_S)=v_{11}S^2,$$

$$\mathrm{Var}(b_T)=v_{22}S^2,$$

$$\mathrm{Var}(R)\approx\frac{S^2}{b^2(v_{22}-2Rv_{12}+R^2v_{11})}.$$

据此可得 ρ 的区间估计.ρ 称强度,系两条直线的斜率之比.

癌症剂量-反应模型(dose-response models for cancer) 一种化学物质致癌的模型.指利用动物做剂量-反应试验,以此评价低剂量化学物质对人类患癌症的危险性时,所用的统计学模型.包括两种外推:从高剂量到低剂量;从动物到人.设 $P(d)$为剂量为 d 时患癌的概率;$P(0)$为剂量为 0 时,由于其他原因患癌的概率;$Q(d)$为未因其他原因患癌者在剂量 d 作用下患癌的概率.则

$$P(d)=P(0)+Q(d)[1-P(0)],$$

称阿布特公式,其中,$P(0)$和$Q(d)$由动物试验估计,$Q(d)$与剂量-反应模型的选择有关.如一次打击模型

$$Q(d)=1-\exp(-kd);$$

多次打击模型

$$Q(d)=\frac{\int_0^{kd} t^{m-1}\exp(-t)\mathrm{d}t}{\Gamma(m)};$$

外布模型

$$Q(d)=1-\exp(-kd^m);$$

多阶段模型

$$Q(d)=1-\exp\left(-\sum_{i=1}^{m}a_i d^i\right).$$

阿布特公式(Abbort formula) 见“癌症剂量-反应模型”.

韦布尔模型(Weibull formula) 见“癌症剂量-反应模型”.

疾病时空积聚(disease clustering in time and/or space) 医学统计术语.指确定病人是否存在时间和(或)空间积聚现象的统计方法.流行病学关心病人的时空积聚现象,以揭示可能的病因.单纯的时间积聚或空间积聚,可经分层后比较发病率的差异来确定.若稀有疾病与传染有关,可能发现时-空交互影响.在英格兰东北儿童白血病的研究中,将所有可能的病人对按时间距离和空间距离,以特定标准划分为“相邻”与“不相邻”,形成 2×2 表,通过关于泊松分布的检验近似地考察时-空交互影响.后来,人们采用了一些新方法,尤其考虑了真实距离,并估计可能发生传染的时间范围和空间距离.

一般疾病-死亡过程(general disease-death processes) 一种医学统计模型.指考虑多种疾病状态和多种死因的一类马尔可夫过程模型.设有 s 个状态

$$S_1,S_2,\cdots,S_s$$

和 r 个死亡状态

$$R_1,R_2,\cdots,R_r,$$

s 和 r 为正整数,$\upsilon_{\alpha\beta}(t)$为从状态$S_\alpha$到$S_\beta$的转移强度,$\mu_{\alpha\delta}(t)$ 为从状态 S_α 到死亡状态 S_δ 的转移强度,并假定:没有一个死亡是无原因的,个体的死亡时刻是受死因影响的,而 r 种死亡状态对应着 r 种独立的死因.在

$$\upsilon_{\alpha\beta}(t)=\upsilon_{\alpha\beta}Q(t),\ \mu_{\alpha\delta}(t)=\mu_{\alpha\delta}\theta(t)$$

的条件下,可以给出这个过程的解及其应用.

计算机辅助诊断(computer-aided diagnosis) 医学统计术语.指利用计算机辅助医生作医学诊断.“辅助”二字表明并非“取代”,而且因为医学资料日趋复杂、繁多,医生也确需辅助.大致有统计决策和专家系统两类方法.前者从已经确诊的病史资料(称训练样本)“学习”出诊断规则,后者则模拟专家的思考过程建立诊断树.统计诊断最初以贝叶斯逆概率公式为依据,假定分类变量彼此独立,用已知疾病种类条件下各分类变量的条件概率,去计算已知分类变量条件下各疾病的条件概率.常用的方法还有判别分析和逻辑斯谛克回归.专家系统大多以知识库为基础,也有将统计方法与知识库相结合的诊断系统.

行 为 统 计

韦伯-菲纳定律(Weber-Fechner law) 在韦伯定律基础上提出的一个关于心物关系的定律:刺激引起的感觉量 S 的大小和刺激的物理强度 R 的对数成正比,即

$$S=k\log R.$$

由此

$$\Delta S\approx\frac{k\Delta R}{R},$$

其中 ΔS 为感觉差,ΔR 为刺激的增量.1834 年,德国学者韦伯(Weber,H.)提出的关于感觉差别阈限的定律是它的特例:为了产生最小感觉差,一个刺激必须增加它本身数值的一个恒定的分数.这说明,两个刺激物的辨别可能性不取决于刺激量的绝对值,而取决于相对差.后人的许多实验证实,这个定律在各种感觉的工作区是适用的.

心理测验量表(test scaling in psychology) 亦称常模量表.一种心理测试工具.它包括测验项目(任务或问题)和记分标准.以常模为参照点,测验量表的制定步骤是:

1.根据测验的性质和使用范围选取一个标准化样组.

2.实施测验于标准化样组的每个成员,获得一组原始分数.

3.对原始分数作统计分析,产生某种变换,以计算导出分数.

以产生分数的方法区分,常见的量表类型有:

1.百分量表,基于原始分数的累积频数表.

2.标准分数表,基于原始分数的均数与标准差.

3.T 量表,基于百分位数的正态概率变换.

4.发展量表,基于与各种年龄或年级水平的常模作比较.

5.商数,基于与同龄者的常模作比较.

项目分析(analysis of items) 一种统计分析

方法．即对测验项目的一种分析．在心理或教育测验的编制过程中，为了改进测验的信度和效度，需要对试题逐个进行分析，这种研究称项目分析．它包括一组被试者中，答对某测验项目者所占的比例（准度），某测验项目的得分与总分间的正相关性（鉴别力），项目与项目间的相关性以及某项目与外部准则间的相关性等．

效度(validity)　统计学术语．指测验确实能测量出所要测量的个体行为特征的程度．从理论上说，效度应当反映测量结果与行为特征间的相关性，但行为特征本身是未知的，否则何必测量？因此，效度只能间接考察．常用的是效标效度，即选定某项“标准”测验为效标，或选定某个经反复斟酌、集体评定的结果为效标，以测验结果与效标的相关系数为效度的估计值．也有采用构念效标的，即以某种理论为标准，通过统计分析，考察测验结果与该理论吻合的程度．每项测验必须有关于其效度的证据给以支持，但效度的求法又是难以彻底解决的问题．

常模(norm)　统计学术语．指心理和教育方面进行比较时所参照的标准．现代心理和教育测量的知识表明，人类的行为几乎没有绝对测度，在个体差异的研究中，总体均数已成为参照点，这就是常模．实践中，将按照标准化样组的测量值算出的平均数或中位数作为常模．常模是否有效？可靠是个重要问题，它取决于标准化样组的代表性和数量．常用的有两种常模：年龄常模和年级常模，分别为某年龄和某年级被试者实际达到的平均水平．不论心理测验还是教育测验，都必须有一定的常模，否则测验的结果无从比较．

信度(reliability)　统计学术语．指对心理、教育等行为测量结果一致性的度量．同一组被试者用同样试题，先后实施两次，所得分数间的相关系数，称重测信度或稳定系数；同一组被试者用假定等价的两种试题，先后两次得分间的相关系数，称复本信度或等值系数；同一组被试者仅作一次测验，奇数题得分与偶数题得分间的相关系数经一定校正后，称分半信度或内在一致性系数．

群体遗传学

群体遗传学(population genetics)　生物数学的一个分支．指研究群体中遗传结构的学科．在这门学科中，群体遗传学家试图估计自然群体中的基因频率和揭示选择的影响．他们建立了各种统计学和数学模型，来阐明选择、群体规模、突变和迁移等因素对固定、丧失关联和非关联基因的相互作用．许多群体遗传学家同时也是生物统计学家．

基因型频率(genotype frequency)　群体遗传学的基本概念之一．即在遗传过程中，某世代各基因型的个体在群体中所占的比例数．

基因频率(gene frequency)　群体遗传学的基本概念之一．即在遗传过程中，某世代携带某基因的个体在群体中所占的比例数．由于群体中可能的基因型的数目大大超过基因的数目，在群体遗传学中，使用基因频率代替基因型频率，可以大大简化讨论，虽然会丢失一些信息，但可以通过其他参量的引入，达到比较满意的近似．

哈代-温伯格定律(Hardy-Weinberg principle)　群体遗传学的一个基本定律．指一个大的随机交配的群体，如果不存在突变、选择、迁移和随机漂移等因素的影响时，该群体的基因频率和基因型频率将很快（至多经过一代交配）达到平衡状态，即其基因频率和基因型频率将保持世代不变．它是由英国数学家哈代(Hardy，G. H.)和德国医生温伯格(Weinberg，W.)于1908年同时分别得到的．所以，这个定律被称为哈代-温伯格定律．该定律保证了在一个大的群体中，稀有基因型的频率不会因随机交配而降低，从而解决了生物学家达尔文(Darwin，C. R.)在研究物种进化时稀有物种得以长期存在的难题．定律中关于交配形式、突变、选择等因素对群体平衡的影响的讨论，构成了群体遗传学的基本内容．由哈代-温伯格定律所得到的平衡群体，称为哈代-温伯格平衡群体．

哈代-温伯格平衡群体(Hardy-Weinberg equilibrium)　见“哈代-温伯格定律”．

近亲繁殖(inbreeding)　群体遗传学的基本概念之一．遗传过程中，具有亲缘关系的个体之间的交配，多于群体中的随机选择交配．它是区别于随机交配群体的一类重要的交配体系．

自交（自体受精）或相同基因型个体间的交配，是这个体系中最简单和最极端的情形．这一交配体系大量出现在自花授粉的作物繁育过程．对于雌雄异体的有机体，全同胞间的交配，通常称兄妹交配是最强的近亲繁殖系统．这个系统的研究在家畜育种方面是很重要的．

对近亲繁殖系统的群体遗传规律的研究，是群体遗传学的一个重要研究内容，近亲繁殖的问题要比随机交配的问题复杂．

近亲繁殖系数(inbreeding coefficient)　生物遗传学术语．是群体近亲繁殖程度的一个指标．一个个体某位点上的两个相同基因，是从祖先的某一个基因而来的概率，称为近亲繁殖系数，记为 f．对于

一个位点、两个等位基因的群体来说，如果基因 A 和 a 的频率分别为

$$p \text{ 和 } q(p+q=1),$$

则具有系数 f 的群体的基因型 AA，Aa 和 aa 的频率分别为

$$p(p+fq),\ 2pq(1-f),\ q(q+fp).$$

$f=1$ 意味着群体是完全自交的纯合群体，而 $f=0$ 则产生了哈代-温伯格随机交配群体. 因此，它从 0 到 1 的变化反映了群体内近亲繁殖的程度. 这一指数是 1948 年由马勒柯特(Malecot，G.)给出的，它与赖特(Wright，S.)于 1921 年所给出的、用以描述结合的配子之间有关的相关系数是完全一致的.

带有近亲繁殖的平衡群体(equilibrium for inbreeding population)　亦称赖特平衡定律. 群体遗传学中最重要的定律之一. 在一个含有一定程度的近亲繁殖的群体中，如果其近亲繁殖系数 f 世代保持不变(通过某种规则或不规则的交配系统)，那么各类合子(基因型)的比例也将保持不变，则称这种群体为带有近亲繁殖的平衡群体. 哈代-温伯格定律是上述平衡群体当 $f=0$ 时的特例.

赖特平衡定律(Wright princeple)　即"带有近亲繁殖的平衡群体".

选择(selection)　群体遗传学的重要研究内容. 这里主要是指自然选择. 群体中许多基因分离后，通过有性生殖，发生结合和再结合，每代产生很多基因型(遗传类型). 群体中不同的基因型存活率和繁殖力都可能不同，当环境改变时，现存的基因型可能并不适于生存，但一些可塑的群体可以通过基因型的重组、更新，产生更加适应的类型. 在遗传进化过程中，选择是不可忽略的因素.

适应度(fitness)　亦称达尔文适应度. 群体遗传学中的基本概念之一. 基因型的适应度是指该基因型对该物种延续所做的相对贡献，可用携带这个基因型的个体所繁殖的存活到繁殖期的子女的平均数来测度. 若用 w_{ij}表示基因型 A_iA_j 的适应度，则当适应度的群体平均数 $\overline{w}$ 比 1 大时，群体逐代扩大；反之，比 1 小时，群体逐代缩小. 并称基因型 A_iA_j 的适应度 w_{ij}与 1 的差距

$$s_{ij}=w_{ij}-1$$

为 A_iA_j 的选择系数.

选择系数(selection coefficient)　见"适应度".

费希尔自然选择基本定理(Fisher's fundamental theorem of natural selection)　生物遗传学的基本法则之一. 费希尔定理是指在随机交配的群体中，对单个位点的自然选择，使得群体适应度的变化率等于适应度的遗传方差，方差皆非负. 因此，该定理就可以解释为：在固定的外界环境中，随机交配群体的适应度随着自然选择而趋向增加. 这在遗传进化学上是重要的，可以说是生物进化的基本性质的抽象. 该定理是英国数学家、生物学家费希尔(Fisher，R. A.)于 1930 年提出的. 当时，他认为这是生物学的基本法则，可与热力学的第二定律相比. 但是，在现实的生物群体中，外界条件的变化、不同种或不同基因型的竞争等原因，大大限制了定理的适用范围. 后来，这一定理在群体遗传学的研究中不断被讨论、推广，得到了更加满意的结果.

突变(mutation)　生物遗传学的基本概念之一. 基因除了每代复制与自己同一结构的基因以外，还以低的频率变化成新的基因，称这种现象为突变. 突变率大多在 $10^{-5}\sim10^{-6}$的范围内. 每代中发生的这种变化，经过长时期之后，逐渐地改变一个群体的基因频率. 这类基因频率的变化与交配系统无关. 突变方向是随机的，突变和新的基因组合为自然选择提供了原始材料.

基因突变下的平衡群体(equilibrium under mutation pressure)　生物遗传学的基本概念之一. 指在有基因突变发生的情况下，达到平衡状态的群体. 考虑 n 个等位基因

$$A_1, A_2, \cdots, A_n,$$

p_i 为突变前基因 A_i 的频率，u_{ij}是从 A_i 到 A_j 的基因突变率，则每个世代基因频率 p_i 的增量为

$$\Delta p_i = -p_i\sum_j u_{ij} + \sum_j u_{ji}p_j.$$

令 $\Delta p_i=0$，关于 p_i 求解上面的方程组，就得到在基因突变的作用下群体的平衡状态.

种群迁移(population migration)　群体遗传学的基本概念之一. 一个大种群分为几个亚种群，各个亚群间的个体可能发生迁移，于是，种群的基因频率可以因为各群间个体的迁移所改变. 迁移是群体遗传学中不可忽略的一个重要因素. 种群间连续迁移，最明显的效果是使各种群的基因频率更加相似，因而在缺少相互措施的情况下，将使整个群体更加同质化. 带有迁移的平衡群体是迁移因素研究的一个内容.

随机遗传漂移(random genetic drift)　群体遗传学的基本概念之一. 一个群体的大小不够大，是有限的，每代中，由于配子的随机取样引起的基因频率的变动，称为随机漂移. 这个因素所引起的基因频率的变化是随机的，与由突变、选择和迁移所引起的变化完全无关. 它构成了具有一定转移概率的马尔可夫链. 在没有选择、突变和迁移的条件下，简单地由

随机漂移所引起的基因频率的变化过程,很早就引起了生物学家的注意. 1922 年,英国数学家、生物学家费希尔(Fisher,R. A.)最初对它进行数学的研究时,称之为海格顿效应. 1931 年,赖特(Wright,S.)研究以后,“drift”一词开始流行,应称为赖特漂移.

海格顿效应(Hagedoorn effect)　见“随机遗传漂移”.

赖特漂移(Wright drift)　见“随机遗传漂移”.

群体遗传学随机过程(stochastic processes in population genetics)　群体遗传学术语. 从群体遗传学的观点来看,进化中最基本的过程是群体基因频率的变化,它所出现的问题中,最简单的可作为确定型现象来处理,对于充分大的群体,时间足够长而且环境是不变的,可以得到有意义的结论. 但在现实的群体中,由于各种因素的作用,基因频率的变化不可能是确定性的. 如在有性生殖中,基因频率会由于配子的随机取样而随机变动;突变基因存在随机性;环境条件的随机波动引起选择强度、迁移率和突变率的随机变动等,因此,基因频率的变化过程应看做随机过程.

在群体遗传学中,将基因频率的变化过程看做随机过程是一种更接近现实的研究方法. 针对不同的假设,将出现不同的随机过程模型(参见“随机遗传漂移”). 关于随机过程的研究,对于群体遗传学的数学理论愈益显得重要.

扩散方程方法(diffusion equation method)　群体遗传学的一个重要研究方法. 在群体遗传学中,用以描述孟德尔群体遗传组成的基本量,是基因频率而不是基因型频率,其主要原因不仅是每个基因是自我繁殖的实体,而且它的频率几乎是随时间连续变化的. 因为在漫长的进化过程中,基因频率的变化即使以世代为时间单位,也是非常缓慢的. 于是,完全可以把基因频率的变化过程看成是连续的随机过程,进而假设基因频率的变化过程具有马尔可夫性质.

用于研究这个连续的马尔可夫过程的基本方程,是柯尔莫哥洛夫前向方程和后向方程. 前向方程被物理学家称之为弗克-卜兰克方程. 它是一类扩散方程,因此,这一研究方法被称为扩散方程方法.

前向方程和后向方程是俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров. A. H.)于 1931 年在研究连续的马尔可夫过程时提出的. 前向方程于 1945 年首先由赖特(Wright,S.)引入群体遗传学领域,后向方程于 1957 年首先由奇木拉用于研究基因固定问题.

柯尔莫哥洛夫前向方程(Kolmogorov forward equation)　群体遗传学中研究基因频率变化的一个方程. 记 $\varphi(p,x;t)$ 是基因 A_1 的频率 x 在时刻 t 的概率分布密度,t,x 为连续变量,p 是初始时刻 $t=0$ 时给定的密度值. 则

$$\varphi(p,x;t)$$

满足如下的柯尔莫哥洛夫前向方程

$$\frac{\partial\varphi(p,x;t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{V_{\delta x}\varphi(p,x;t)\}-\frac{\partial}{\partial x}\{M_{\delta x}\varphi(p,x;t)\}.$$

其中在时刻 t 的基因频率是随机变量,但其初始值 p 是固定的. 这表明所考虑的变化过程是前向的($t>0$). 同样 $M_{\delta x}$ 和 $V_{\delta x}$ 分别是时刻 t 基因频率变化关于 δx 的均值和方差. $M_{\delta x}$ 和 $V_{\delta x}$ 可能依赖于 x 和 t.

柯尔莫哥洛夫后向方程(Kolmogorov backward equation)　群体遗传学中研究基因频率变化的一个方程. 假设在时刻 t 的基因频率 x 是固定的,而初始频率 p 是一个随机变量,这就是所考虑的反向追溯过程. 概率分布密度 φ 满足如下的柯尔莫哥洛夫后向方程

$$\frac{\partial\varphi(p,x;t)}{\partial t}=\frac{1}{2}V_{\delta p}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\varphi(p,x;t)+M_{\delta p}\frac{\partial}{\partial p}\varphi(p,x;t).$$

实际上,它是一个限制在时齐情况之下的柯尔莫哥洛夫后向方程.

数量遗传学

数量遗传学(quantitative genetics)　生物遗传学的一个分支. 传统遗传学的研究,大多偏重于单因子的遗传,因为它们的作用显著,分离清楚,受环境影响小,所以可用比较简单的方式进行分析. 可是,动、植物的许多经济性状,如作物的籽粒产量、乳牛的产奶量、家禽的产卵量以及这些性状的品质等,往往是多因子遗传的. 这些因子的显性常常不完全,单个基因的效应很小,有着累加的作用,而且受环境的影响很大. 这一类性状称为数量性状.

数量遗传学就是研究数量性状遗传规律的科学. 动、植物的育种,主要是对这些性状在人工选择的情况下,朝着有利于人类方向的改良,因此,对数量性状遗传规律的研究必然是不可缺少的. 所以,它也是育种学的重要理论基础. 对于数量性状遗传规律的分析,往往要对大量的观测数据进行较复杂的统计分析,因此,数量遗传学又称为“统计遗传学”或“生统遗传学”.

在 1920 年前后,英国数学家、生物学家费希尔(Fisher,R. A.)等人的研究工作奠定了数量遗传学

的理论基础. 其后，经许多遗传学家、统计学家和动、植物育种家的努力，在理论模式、试验设计及分析方法等方面得到了充实和发展. 现在，数量遗传学已具备了完整的理论体系，其实际应用也在不断地向深度和广度方面扩展.

数量性状(quantitative character) 数量遗传学的基本概念之一. 在遗传学中，除了要研究像花朵是红还是白，植株是高还是矮等这一类区别明显、分离清楚的、属于单一基因控制的性状之外，还有另一类性状：不同个体之间在该性状上的表现几乎都是强度不同而不能明显区分的，例如人的身高，这种性状的变异属连续变异，称这类性状为数量性状或度量性状.

数量性状的研究，主要借助于度量而不是分类计数. 有关数量性状遗传的原理，基本上就是群体遗传学，但有关基因的分离不能逐个追索，所以需要新的研究方法，而且必须引入新的概念.

高等生物中可研究的数量性状很多，其中包括形态解剖的大小和比例、各种生理功能、精神或心理学素质等. 这类研究通常要度量大量的个体，有些性状还需要复杂的度量技术.

表现型值(phenotype value) 数量遗传学的基本概念之一. 在个体上，度量某数量性状所得的观测值称为表现型值. 数量性状的表现型是基因型和非遗传因素的环境相互作用的结果. 表现型中，由基因型决定的那部分数值称为基因型值. 数量性状的表现型值 (P) 可以按生成的原因分解成两部分：由遗传原因引起的部分 —— 基因型值(G) 和由环境原因引起的那部分 —— 环境差值(E). 一般地，它们之间有关系

$$P = G + E.$$

这就是数量遗传学讨论的出发点.

基因型值(genotype value) 见“表现型值”.

基因平均效应(average effect of gene) 数量遗传学的基本概念之一. 群体中携带某基因 A_1 的基因型值，距离群体平均基因型值的平均离差，称为基因 A_1 的平均效应.

基因代换平均效应(average effect of a gene-substitution) 数量遗传学的基本概念之一. 指在一个位点、两个等位基因的情形下，群内的 A_2 基因由 A_1 基因替代后，群体平均基因型值的改变量. 其数值等于代换中的两个基因平均效应之差.

加性效应(additive effect) 数量遗传学的基本概念之一. 按照关于基因作用可加性的假设，单位位点上每个基因型中的两个基因型效应值之和，称为该位点上基因型的加性效应. 在多位点情形下，所有位点加性效应值的总和，称为加性效应，记为[d]. 在一对等位基因的情形下，基因型的效应值与其加性效应值的离差，称为该基因型的显性效应. 由多对基因决定一个性状时，所观察到的显性效应，是正方向的显性效应和负方向的显性效应的代数和

$$\sum(h_+) - \sum(h_-).$$

不同基因位点间的交互作用所产生的效应，称为上位效应.

显性效应(dominance effect) 见“加性效应”.

上位效应(epistatic effect) 见“加性效应”.

表现型值的数学模型(mathematical model of a phenotype value) 数量遗传学研究的基本数学模型之一. 由多对等位基因控制的某数量性状的基因型值，可以分解成

$$G = m + [d] + [h] + [i],$$

其中[d]为加性效性，[h]为显性效应，[i]为上位效应. 从而该数量性状的表现型值的数学模型为

$$P = G + E = m + [d] + [h] + [i] + E.$$

此模型是分析数量性状的出发点. 上位效应的作用比较复杂，为了使问题简化，有时在模型中忽略[i]，则有

$$G=m+[d]+[h],$$

称该模型为加性-显性模型. 该条中符号参见“表现型值”.

加性-显性模型(additive-dominance model) 见“表现型值的数学模型”.

三参数模型(model with three parameters) 数量遗传学研究的基本数学模型之一. 是基于加性-显性模型对亲代以及其各交配世代(F_1, F_2, B_1, B_2等)均值的遗传分解式. 因它们的组成中仅包含 m, d, h 三种基因效应，故称为三参数模型. 如果再考虑上位效应 i，则还需区分加性×加性的上位效应 i_{dd}、加性×显性的上位效应 i_{dh} 和显性×显性的上位效应 i_{hh}. 这时的参数就变成六个. 亲代及其交配后代均值的分解式包含六个遗传参数，故称为六参数模型. 条目中符号的意义参见“表现型值的数字模型”.

六参数模型(model with six parameters) 见“三参数模型”.

遗传力(heritability) 数量遗传学的基本概念之一. 生物的变异是普遍存在的，数量性状也是如此. 通常可以用数量性状表现型值的方差来度量其变化的程度. 如果基因型与环境独立，则表现型值方差 V_p 有分解式

$$V_P=V_G+V_E,$$

其中 V_G 为该性状的基因型值方差，V_E 为环境差值方差，称基因型值方差 V_G 与表现型值方差 V_P 的区

分率为该性状的遗传力.它反映了亲代的性状值传递给后代能力的大小,是育种工作中的一个主要遗传参数.

选择响应(response to selection) 数量遗传学的基本概念之一.指由挑选亲本而导致的后代群体平均值的改变量.通过挑选亲本个体,以实现择优进行繁育,这是育种者改变群体遗传特征的一个途径,此就是选择.

选择所带来的后代群体平均值的改变,称为选择响应.它是中选亲本的后代与选择前亲本世代的群体平均数之差.中选亲本个体平均表型值与群体平均值的离差,称为选择差.数量遗传学的分析可以提示,为了比较不同的育种方案,在育种工作中如何选择最优的个体,以及预测选择的效果.

选择差(selection difference) 见"选择响应".

配合力(combining ability) 数量遗传学的基本概念之一.是复杂组合中,亲本有关性状配合能力的一个指标.杂交是培育优良品种的重要手段.杂交组合及其后代表现的优劣,主要取决于杂交双亲对其后代影响的大小.大量杂交育种的实践表明,优良品种本身不一定就是优良亲本.要想根据亲本对杂种表现进行准确预测,就必须研究不同亲本杂交所得杂种后代表现的规律.某一品种在其杂交后代中的平均表现,或者该品种在其杂交后代中的平均数与整个杂交后代平均数的离差,称为该品种的一般配合力,记为GCA,简记g.对于某些特定的组合来说,其实测值与在其双亲平均表现的基础上预期结果的偏差,称为该组合的特殊配合力,记为SCA,简记s.

一般配合力(general combining ability) 见"配合力".

特殊配合力(specific combining ability) 见"配合力".

配合力的数学模型(mathematical model of combining abilities) 数量遗传学研究的基本数学模型之一.从配合力的效应考虑,亲本 i 和亲本 j 的杂交组合中,第 k 个个体的表现型值 x_{ijk} 可分解为

$$x_{ijk}=\mu+v_{ij}+e_{ijk},$$

其中 μ 为总平均,v_{ij} 为杂交组合的基因型效应值,e_{ijk} 为杂交组合第 k 个个体的环境差值.而基因型效应值

$$v_{ij}=g_i+g_j+s_{ij},$$

这里 g_i,g_j 分别是亲本 i 和 j 的一般配合力,而 s_{ij} 是杂交组合的特殊配合力.这就是表型值 x_{ijk} 的配合力数学模型.

双列杂交设计(diallel cross design) 育种上广泛应用的近交系杂交的试验设计方案之一.它的含义是:一套品种既做父本又做母本,彼此进行所有可能的交配组合,可以产生四种后代,其中两种分别与父本、母本两套亲本相同,另外两种则是它们的 F_1 代的正交和反交.

这个设计所得到的资料整齐、完备,较适合于数学上的分析讨论,并且可以得到较丰富、完整的分析结果,受到育种工作者的欢迎.当参试亲本数增多时,试验的杂交组合数急骤增加,致使在遗传育种上没有意义的杂交也必须做,因此大大限制了这套试验的规模和广泛使用.

赫明双列杂交分析(Hayman dialed analysis) 分析双列杂交试验资料的方法.该方法以加性-显性模型为基础,通过有关资料的方差和协方差的遗传分析,可以利用双列杂交材料得到较多的遗传信息,如加性、显性方差和其他遗传参数以及杂交组合的显性程度等.是一套较完整、有效的分析方法.

格里芬双列杂交分析(Griffing dialed analysis) 分析双列杂交试验资料的一种方法.该方法以观测值的配合力模型为基础,利用统计学上线性模型参数估计的最小二乘技术,以及有关参数的统计推断分析,对一般配合力、特殊配合力及它们的误差都给出了较好的估计.对于杂种优势利用的分析,是一个十分有效的方法.

数量分类学

数量分类学(numerical taxonomy) 生物分类学的边缘分支学科.它是一门应用数学方法和电子计算机技术研究解决生物分类问题的学科.

数量分类学产生于20世纪50年代末.它的产生,标志着传统生物分类学的发展,从对生物的调查描述,进入精确的定量分析阶段.按照生物学中表征分类和分支分类两种不同的学术观点,数量分类亦分为相应的两种不同的数量分类方法.

分类运算单位(operational taxonomy unit) 数量分类学名词.性状、性状状态和分类群是数量分类学中最基本的专有名词.分类运算中,构成分类对象的实体称为分类运算单位,简称分类单位;作为分类的依据,区别不同分类单位的特征、性状和属性,都称为性状;分类单位对某一性状所呈现的状态,称为性状状态.

分类就是依据被分类的分类单位集合具有的性状状态,按一定的原则做出划分或聚合,得到一组新的分类单位集合.通过分类获得的分类单位集合称

为分类群.

依据 n 个性状的分类问题，利用数量化的性状状态值 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，可以将分类单位表示成 n 维向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 具有 t 个分类单位、n 个性状的分类问题，其原始数据写成矩阵

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{t1} & x_{t2} & \cdots & x_{tn} \end{bmatrix}$$

该矩阵称为原始数值矩阵.

分类单位之间的共分类群是实现分类的基本概念. 如果分类单位 x 属于分类群 A，记为 $x\in A$，同时又有分类单位 y 亦属于分类群 A，即 $y\in A$，则两分类单位 x 与 y 之间具有共分类群关系 φ，记为 $x\varphi y$. 共分类群关系有以下数学等价性质：

1. 自反性，即 $x\varphi x$.

2. 对称性，即若 $x\varphi y$，则 $y\varphi x$.

3. 传递性，即若 $x\varphi y$ 且 $y\varphi z$，则 $x\varphi z$.

被分类的分类单位集合按照共分类群的等价关系，产生等价集合类，是进行分类的根据.

传统分类是由分类学家个人的经验做出共分类群的判断. 而数量分类则要求在两分类单位 x 与 y 之间建立数值关系 $C(x,y)$，相应于共分类群 φ，又有判别值 C，并确认共分类群 φ 成立的条件是

$$C(x,y)\geqslant(\text{或}\leqslant)C$$

在数量分类学中，有各种各样的相似性系数，可作为上述判别共分类群的数值关系.

相似性系数(similarity coefficient)　数量分类学术语. 即以定量的形式描述分类单位之间相似性的数值，包括生物亲缘关系. 相似性系数数值的大小与相似性程度一致时，称相亲系数；与相似性程度不一致时，称相异系数. 通常使用的相似性系数有距离系数、相关系数和联合系数等.

距离系数(distance coefficient)　一种相似性系数. 如果

$$X[x_1,x_2,\cdots,x_n]\ \text{和}\ Y[y_1,y_2,\cdots,y_n]$$

分别表示两分类单位，平均欧氏距离系数定义如下：

$$d(X,Y)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

闵科夫斯基距离系数定义如下：

$$d(X,Y)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r\right]^{\frac{1}{r}}\ (\text{常数}\ r>0).$$

距离系数具有以下性质：

1. $d(x,y)\geqslant 0$，且 $d(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$.

2. $d(x,y)=d(y,x)$.

3. $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$.

距离系数值愈小，表示两分类单位相似性程度愈大；反之，距离系数值愈大，相似性程度愈小. 因此，距离系数是相异系数.

相关系数(correlation coefficient)　一种相似性系数. 数量分类学中的相关系数与通常统计学中的相关系数相同. 如果

$$X[x_1,x_2,\cdots,x_n]\ \text{和}\ Y[y_1,y_2,\cdots,y_n]$$

分别表示两分类单位，相关系数计算公式如下：

$$r(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

相关系数具有以下两条性质：

1. $-1\leqslant r(X,Y)\leqslant 1$，当且仅当 $x_i=y_ic(i=1,2,\cdots,n;c$ 为非零常数$)$时，

$$r(X,Y)=1(c>0)$$

或

$$r(X,Y)=-1(c<0).$$

2. $r(X,Y)=r(Y,X)$.

相关系数值愈大，相似性程度愈大；反之，相关系数值愈小，相似性程度愈小. 因此，相关系数是相亲系数.

联合系数(association coefficient)　一种相似性系数. 联合系数针对表现为肯定与否定两种性状状态的二元数据而设，它是分类单位之间性状状态配对一致性度量的函数. 如果性状状态肯定与否定分别以 1 和 0 表示，两分类单位性状状态的配对出现 1—1，1—0，0—1 和 0—0 四种情形，它们的计数分别是 a,b,c，和 d，联合系数将是 a,b,c，和 d 的函数. 最常见的联合系数有：

简单联合系数　$S_{SM}=\dfrac{a+d}{n}$，

寨卡德(Jaccard)联合系数　$S_J=\dfrac{a}{n-d}$，

相关联合系数

$$S_\varphi=\frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(d+b)(d+c)}}.$$

按照 a 与 d 在系数计算公式中的对称与否，联合系数可分为对称联合系数与非对称联合系数两大类. 非对称联合系数对生物地理学等研究问题具有特殊意义.

数量分类运算分为原始数据的标准化、相似性系数计算、聚类运算和分类结果的表示等步骤.

原始数据标准化(standardization of original data) 数量分类学术语. 指对原始数据的预处理计算. 由于性状取值的量纲不同,单位不同,性状状态的数值大小和离差不同,不同性状之间的这种差异不具有分类意义. 因此,需要对原始数据进行变换处理,称为原始数据标准化.

在原始数值矩阵上,通常采取的统计学标准化计算如下:

标准化变换后的数据

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{s_j}\quad(i=1,2,\cdots,t;j=1,2,\cdots,n),$$

其中

$$\bar{x}_j=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}x_{kj},$$

$$s_j=\left[\frac{1}{t-1}\sum_{k=1}^{t}(x_{kj}-\bar{x}_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

按照分类运算选择的数学方法的不同,数量分类有系统分类、信息分类、图论分类、主成分分类和模糊分类等.

系统分类法(hierarchical classification method) 数量分类学分类运算方法之一. 指借助于统计学、简单的几何与代数运算,并能够产生具有系统隶属关系的数量分类运算方法. 在电子计算机中,该方法按相似性系数作为判别其分类群的依据,每次选择最相似的类群,逐级将分类群合并而完成.

信息分类法(information classification method) 数量分类学分类运算方法之一. 指借助信息论而产生的分类运算方法. 此种分类要求获得离散程度小、表现为清一色的分类群.

离散程度的度量,可利用信息理论中的信息量或离散量,由此建立基于信息论的相似性系数,并利用此系数作为判别共分类群的依据,获得信息分类运算方法.

图论分类法(graph theory classification method) 数量分类学分类运算方法之一. 指借助图论而设计的分类运算方法. 取图论中的赋权树图,以节点代表分类单位,节点间边的赋权值表示相似性系数,赋权图可以描述生物类群之间的相似性关系,再利用图论中的最小生成树理论,构造出树图形式的分类结果,这就是图论分类.

主成分分类法(principal component classification method) 数量分类学数量分类运算方法之一. 指借多元统计学中主成分分析而构造的分类运算方法. 在多个性状指标下,分类单位和性状都以多维向量表示,利用主成分分析运算,把一个多维复杂事物降低到三维以下,再在三维以下空间中描绘出显示分类关系的图形,由此得到基于主成分分析的分类运算方法.

模糊分类法(fuzzy classification method) 数量分类学分类运算方法之一. 指建立在模糊集合概念上的分类运算方法. 在模糊数学中,取模糊关系表示分类单位之间的相似性程度,但是,模糊关系通常不具有等价性,不能满足分类的需要. 对相似性模糊关系施行合成运算,经多次合成运算可获得具有等价性的模糊关系. 由等价模糊关系可获得合理的分类结果.

表征分类树谱图(dendrogram) 数量分类运算结果的表示方法. 以树状的图形,显示表征分类运算的结果,称该树状图形为表征分类树谱图. 图中包括全部被分类单位,以连线表示各级分类群逐级结合的过程,并以一定的位置定量地表示其相似性水平. 树谱图是数量分类系统分类结果最常见的表示方法.

生物控制论

生物控制论(biocybernetics) 控制论的分支学科. 是将控制论的理论和方法应用于研究生物系统,主要研究生物体内如何通过信息的接收、编码、传递、存储和处理(亦称加工),最终实现控制或调节机理的科学.

由于生物控制系统本质上是非线性的,而且是十分复杂的无限维大系统,到目前为止,尚未发现能很好表示生物系统的数学方法. 当前处理生物系统的基本方法是根据研究问题的目的,以生理学背景为基础,分析和描述与研究问题密切相关的主要信息传递和处理流程. 按此,从整个复杂的生物体中孤立出一个待研究的简化系统,分析其信息处理中的物理、化学等定量规律,建立起能对该系统进行定量分析或作模拟计算的数学模型,然后根据实验资料,用系统辨识等方法估算出模型中具有生理背景的参数.

如果此模型的分析结果经实践检验是可以接受的,则模型可为生物系统的局部信息加工过程提供机理,并为疾病诊断和控制生理、病理现象提供新的方法和手段.

生物信息论(biological information theory) 信息论的分支学科. 是将信息论的理论和方法用于研究生物系统的科学. 信息论是通讯理论中研究编码的一个分支. 信息论的独特之处,就在于对所获得的信息使用的数字量度;信息论与概率论关系密切,

由于这个缘故，信息论这个词往往被不严格地用于通讯理论中其他的一些概率研究，如信号检测随机噪声和预测等，而对其范围很难作严格的限定．因此，将信息论应用于研究生物系统，如研究遗传信息的表达、生物体内分子间的识别及其通讯、神经信号的编码特性、生物信号处理以及建立医院信息系统等，均可看做是生物信息论的内容．

仿生学(bionics)　横跨多门科学的边缘学科．指在对特定生物研究的基础上，创造具有该生物特征的人工系统的科学．

仿生学与控制论都是边缘学科，都研讨生物模型，但两者目的不同．仿生学在生物中寻求启示以供制造人工系统时参考；控制论则力图解释生物的行为表现．

仿生学更不同于生物工程，生物工程只是利用生物来完成某些工业过程．模仿是仿生学的基础．探索生物模型，尤其是体内的信息处理过程和能量转化过程，是仿生学的两个主要领域．

体内稳态(homeostasis)　生理学术语．指生物系统中维持稳定性的自我调节过程．这是一种动态平衡，在其中变化不断发生，但相对不变的状态占优势．例如，人体中的体温调节过程，血中二氧化碳水平的调节过程，血中渗透压的调节过程，血中钙离子、钾离子、血糖、甲状腺激素 T_3 和 T_4、肾上腺激素等的调节过程，都是体内稳态的例子，它存在于生命的各级水平(原子、分子、细胞、器官、机体和群体)中，也存在于长短悬殊的时间过程．体内稳态持续时，生命继续；稳态破坏时，生命将终止．身体对疾病的反应也是一种体内稳态的应答．

生物反馈(biofeedback)　生物控制论术语．它是生物有机体普遍存在的一种功能．即将体内的生物过程或状况的即时信息提供给自身，以便做出及时的生理、行为反应．

生物反馈一词创于 1969 年．在医学上通常是借电子仪器监测个人的心脏情况、体温、脑电波或肌肉张力等，再借仪表读数、光线或声音“反馈”给本人．通过训练，人们可学会利用这些数据自主控制身体过程或功能．这种生物反馈训练，曾帮助某些人在一定程度上终止因肌肉紧张造成的问题．并已证实，任何对体外事件的知觉过程都伴有电物理活动．这些活动影响脑的意识和非意识结构时，可被验知和测量，并可引起边缘系统的电生理变化，激发内分泌稳态平衡的变化．例如，脑电反馈有助于控制多种情况，像自控制癫痫到增加自我意识，均有实验报导．

神经网络(neural network)　神经科学研究的重要内容．指以人脑结构为模型的处理元素(对神经元的模拟)的集合．每一根神经可能联至成千上万根其他神经，由这些神经，以输入和反馈的方式获得刺激，并将这些刺激向前传播到其他神经元．

从结构上看，神经网络由大量的处理元素(对神经元的模拟)组成，每个元素连结到许多其他元素形成网络层．由数的序列组成的输入阵列写入网络，这样，每个处理元素有许多输入信号(粗糙的树突模拟)，但仅有一个输出信号(轴突模拟)．某一层的每个处理元素接受输入阵列中的一个分量，根据传递函数对该分量进行处理．此传递函数是一种数学规则，它将元素的输出信号定义成两个量的函数：到达的输入信号和存放在处理元素局部存贮器中的自适应系数，这些自适应系数是通过以前的计算所得到的值，并且每个系数赋以一个不固定的“权”．在同一层内，各处理元素是以平行方式处理信号的，处理完成后，释放一信号，输出到位于该层下面的处理元素．

虽然神经网络只是脑系统的十分简化的模拟，但有以下功能：

1. 以处理器本身的状态与它的连结形式存贮信息．

2. 可以处理不完整、不准确的信息．

3. 从结构上与处理功能上保证相当的冗余度．

4. 具有自学习功能．

自组织系统(self-organizing system)　生物控制论的基本概念之一．一个系统在对外界发生事件的响应中，有自组织能力者，称之为自组织系统．所谓自组织，是指在环境变动的情况下，具有分类或内部管理的能力，使其和给定的指令或一组规则相一致．在大脑中，自组织是指大脑皮层的神经元的宏观连结投射，如何通过所属域的神经元的活动模式，及突触可塑性的协同作用机制来实现的过程．近年来，在视觉形状、颜色、深度感知方面，已经出现一些用神经网络技术进行自组织建模的工作，即研究在无监督和有监督两种学习条件下，感知系统可能是怎样发育的，以及可能是怎样工作的．

自繁殖系统(self-reproducting system)　生物控制论的基本概念之一．一种指令操作装置(如通用计算机)用来以物理操作能力进行扩大(如工业机器人)，即提供素材和程序来产生本身的复制品，这一过程称为机器的自繁殖系统．此过程的理论模式由美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, J.)提出．其原始机器保存在一种有备用件(开关、感觉、切割、熔化元件等)的环境中，此父代机器随机地从环境中取出一部分，辨识它们，遵照存储的指令，把这部分纳入本身的复制中．目前已建立了多种自繁

殖系统.

自繁殖系统有两条基本原则,一是存储单元的内容是作为构造指令去读和解释的;二是为了在新的存储器中装入一复制件,存储器要再读第二次.这一行为平行于生物过程中两次读核酸,一次发生在蛋白质合成时,另一次发生在再次复制遗传信息时.

体育运动数学

体育数学(mathematics in physical education) 生物数学的一个分支学科.指研究人体运动的数学理论和计算方法的新兴科学.它以人的自然属性和社会属性为研究对象,其主要任务是探讨体育运动中的数学理论与科学计算方法,定时地寻找和反映体育运动中的本质特征和客观规律.运用这些理论、方法和规律,直接或间接地为体育运动及其科学研究提供或开发各种技术和战略战术.它包括体育科学计算、体育统计、竞赛对策、体育测量学、体育控制论、体育预测、体育决策、人体运动生物数学等内容.体育数学不仅研究具有自然属性(如生物属性)的事物与现象,也研究具社会属性的事物与现象(如体育管理).

此外,体育数学侧重于研究人体(而不是动物)运动,因而有别于运动生物数学.

运动生物数学(athletic biomathematics) 生物数学的一个分支.它是通过建立模拟人体结构与运动的数学模型,即利用生物学、数学、物理学、力学等知识,定量地研究生物体(人、动物等)运动的内在与外在规律的一门学科.其研究范围包括生物体的主动运动,生物体的整体和分部的位置与姿势,运动时生物体在空间、时间内位移的特点和引起运动的各种原因,骨骼与肌肉的系统结构和功能特性,运动对生理功能的影响及作用机制,机器人仿生,生物体运动的神经控制,运动时的能量变换,运动技术诊断,创伤防治,运动器官的功能恢复,运动时的能量变换等.它偏重于研究体育运动中具自然属性的事物规律,也研究一般动物运动的规律,因而有别于体育数学.

人体运动模型(modelling of human body motion) 模拟人体结构与运动的数学模型.即把人体或人体环节看做形状和大小不变的刚体,或只有质量而没有大小和形状的质点,利用数学、力学、物理学的理论与方法,以及运动解剖学参数,建立的人体结构与运动的数学模型.通常是由多个常微分方程和积分方程联立而成的方程组,其中涉及泛函分析和优化等方面的知识,有时也退化成代数方程组.它主要用以描述人体及各环节的运动学、静力学及动力学特性.

根据抽象程度不同,人体运动模型可分为人体退化模型(多刚体模型)、人体瘦化模型(多杆模型)、人体简化模型(多质点模型)与人体质点模型(集中质点模型或单质点模型).它不同于人体生理数学模型.

体育统计(statistics in physical education) 体育数学的一个分支.是运用统计学的理论、方法和工具,揭示体育领域中事物发展变化统计规律的科学,着重研究人体运动、体育管理、运动训练以及体育教育中的随机现象.如人体运动形态、机能、素质、运动成绩、训练模式、训练效应的统计特性.已渗透到诸如运动训练、运动心理、运动生理、运动生物力学、体育测量、体育经济、体质调查、体育管理等体育分支学科之中.

体育统计学中,应用的主要统计学方法有参数估计、假设检验、判别分析、因子分析、时间序列分析、实验设计、数值分析、相关分析、回归分析等.

体育控制论(cybernetics of physical education) 体育数学的一个分支.是以体育运动活动中的一般控制规律为主要研究对象的科学.包括研究人的有机体适应机能活动的控制规律的运动控制论、研究体育管理控制规律的体育管理控制论、研究运动技能控制规律的运动技能学习控制论等.

体育控制论涉及信息过程的规律、控制与被控制规律、控制与反馈规律、机体系统与环境之间的制约与控制的规律,也涉及体育自身系统中的运动训练、运动竞赛、体育数学、体育锻炼、体育管理、体育科技中的特殊规律.

撰　稿　马知恩　方积乾　刘来福　陈兰荪　赵似兰　蒋　勇　徐克学　傅廷蕙
审　阅　马知恩　沈佑锐　徐克学

数学物理与理论物理

数 学 物 理

数学物理(mathematical physics)　研究物理学等自然科学中的问题的数学理论和数学方法的学科. 它包含由实际问题建立数学模型、寻求问题的数学解法和解答及应用这解答来解释和预见物理或其他自然现象等内容.

历史上,物理、力学问题的研究始终和数学密切相关. 在近代物理学的先河——牛顿力学中,质点与刚体的运动用常微分方程描述,求解这些方程就成为牛顿力学中的重要数学问题. 这种研究导致了天体力学中三体问题及其他各种经典的动力系统问题研究的发展. 在这一过程中促进和发展了作为许多物理等理论基础的变分法. 18 世纪以来,在连续介质力学、传热学和电磁场理论中,归结出许多常微分方程、偏微分方程、积分方程和微分积分方程,它们通称为数学物理方程. 到了 20 世纪初,数学物理方程的研究已成为数学物理的主要内容. 后来,由于等离子体物理、固体物理、非线性光学、空间技术、核技术等方面研究的需要,又建立了许多新的偏微分方程问题. 例如,描述孤立子波、间断解、分歧解、反问题等方程. 这使得数学物理方程的内容得到进一步丰富. 在上述数学物理方程的研究过程中,应用并发展了复变函数、积分变换、特殊函数、变分法、调和分析、泛函分析以至现代微分几何、代数几何等数学理论和方法.

20 世纪,电磁理论和引力场的深入研究中使人们对时空观念发生了根本变化,使得闵科夫斯基空间和黎曼空间(或洛伦茨流形)的几何学成为爱因斯坦狭义相对论和广义相对论所必需的数学理论,许多物理量以向量、张量和旋量作为表达形式. 在探讨大范围时空结构时,还需要整体微分几何. 量子力学和量子场论的产生,为数学物理增添了新鲜、丰富的内容. 在量子力学中物质的状态用波函数刻画力学量成为算子,在电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用中描述粒子的产生和消灭. 因此,必须研究各种函数空间的算子谱、函数的谱分析和由算子所形成的代数. 同时还需研究微扰展开和重整化(处理发散困难)的数学基础. 另外,用非微扰方法研究非线性场论也是一个重要课题.

群论在研究物理等对象中的各种对称性现象中,具有十分重要的作用. 晶体的结构就是由欧几里得空间运动群的若干子群给出. 正交群和洛伦茨群的各种表示对讨论具有时空对称性的许多物理问题有很重要的作用. 基本粒子之间,也有种种对称性,可以按群论明确它们的某些关系. 对基本粒子的内在对称性的研究导致了杨-米尔斯理论的产生. 规范场论的研究在粒子物理学中意义重大,它统一了弱相互作用和电磁相互作用的理论,建立了研究强相互作用的量子色动力学. 这个理论以规范势为出发点,而它实际上就是现代微分几何的一个非常重要的概念——纤维丛上的联络.

微观的物理对象具有突出的随机性特征,在统计物理学中需要对各种随机过程的统计规律作深入的研究.

电子计算机的迅速发展开辟了数值求解数学物理问题的新领域. 它导出了计算力学、计算物理等新的分支,开创并发展了用计算机直接模拟物理模型的重要方法. 此外,各种渐近方法也得到进一步充实和发展.

伴随着物理学、力学、化学、生物学、地学、经济学等各门科学的发展,数学物理研究的内容和方法也必将更加丰富和深化,同时数学物理中的许多方法和结果对于这些科学的研究和工程技术的进步也必将发挥更大的推动作用. 此外,数学物理的研究也是产生数学的新思想、新对象、新问题及新方法的源泉,因而对数学的发展也具有重大的促进作用.

数学物理方程 (equations of mathematical physics)　数学物理研究的主要内容. 指物理学等自然科学及技术中所提出的常微分方程、偏微分方程、积分方程及微分积分方程.

早期建立的数学物理方程有根据牛顿引力理论推导出的描述引力势的拉普拉斯方程和泊松方程. 而在连续介质力学中,从质量、动量、能量守恒定律出发,建立了流体力学中的纳维-斯托克斯方程组(有粘性)和欧拉方程组(无粘性)以及弹性力学中的圣维南方程组等. 另外,描述波的传播的波动方程、描述传热和扩散现象的热传导方程也都是古典的数学物理方程.

自 19 世纪开始,相继出现了大量数学物理方程,其中最基本的有描述电磁场变化的麦克斯韦方程,描述微观粒子的薛定锷方程和狄喇克方程,广义相对论中确定引力场的爱因斯坦方程和在基本粒子研究中有重大作用的杨-米尔斯方程等.

在研究光辐射、中子迁移以及气体分子运动的

过程中，导出了辐射迁移方程，中子迁移方程和波尔兹曼方程，它们都是微分积分方程．在进一步研究带电粒子在磁场中的运动时，建立了流体力学方程的耦合．而研究具有扩散现象的化学反应导致了反应扩散方程的建立．

对于建立的数学物理方程，需要做出各种附有具体条件而构成典型问题的解．然后根据实际测得的结果来检验和修正相应的物理理论．通过求解物理方程，使人们对自然现象获得更加深刻的认识，并能预见新的现象．

数学物理方程中有许多是线性方程，对应于它们已经有很多求准确解的方法，如分离变量法、积分变换法、复变函数法等．解有时能用各种初等函数和超越的特殊函数来表示，但这些仅限于较特殊的情况．更多的数学物理方程是非线性方程或方程组，其求解方法一般都很复杂，且只有少数问题有精确解．而得到准确解的有效方法之一是利用问题的对称性，例如球对称性、轴对称性和相似性（量纲分析）等来求解，它可减少自变数，进而化为常微分方程去求特解．对于大量的不能获取准确解的问题，往往设法求出近似解，例如，摄动法就是一种重要方法．伴随电子计算机而迅速发展起来的数值解法是求解数学物理问题的极为有效的方法．近年来，与孤立子、杨-米尔斯方程等近代理论的研究密切相关的，正在发展着求解非线性方程的新方法．

随着科学和技术的进步，新的数学物理方程将不断出现，而其产生和应用的范围已经且更多地超出传统的力学、物理学、天文学等领域，例如在化学、生命科学和社会科学等各个领域均涉及数学物理方程的重要应用．

数学物理方法（method of mathematical physics） 研究数学物理问题的基本数学理论和方法．它包含复变函数、分离变量法、积分变换、特殊函数、变分法、调和分析、泛函分析及近代发展起来的微分几何、代数几何等．它的内容将随数学物理的发展而不断充实．

数学物理中的反问题（inverse problems in mathematical physics） 数学物理研究的一类重要问题．指数学物理方程非正常意义下求解的问题．通常在科学研究和工程技术中出现的偏微分方程问题分为两类．一类是对方程的定解问题要求出问题的解或揭示解的某些性质，它起着由因推果的作用，称为正问题．另一类是由于在所考查的方程定解中出现某些不确定的因素，还须利用预先给定解的一些附加信息和若干定解条件，欲确定诸如方程中某些项的系数、源项、部分定解条件以及描述解存在区域的形状等一些特定因素问题；或者是在讨论某些非线性偏微分方程问题中所涉及的需通过散射体外的场的测量来确定散射体内部结构等的逆（反）散射问题．这一类问题统称为反问题，它起着由果寻因的作用，是近代发展起来的十分活跃且具有重要应用的课题．

数学物理中的反问题来源且应用于资源勘探、大气物理、航天工作、海洋工程、大气测量、遥感技术、控制与识别、医疗诊断与材料无损探伤、遗传工程及量子力学等广泛的科技领域．例如，在地球物理勘探中，通过测量地震波来判断地球内部的结构或地下矿藏的位置；在无损探伤中，用红外线扫描来探测固体材料中的内部缺陷，利用 X 光分层扫描构像来作医学诊断等，都是在研究对象非直接接触的情况下，利用特定的办法来获取有关的某些信息，再化为数学上的反问题来处理的，而在量子物理中，则有利用散射资料来反求位势的逆散射问题．

依据微分方程所给出的定解条件和待定因素的不同，反问题有许多不同的提法，一般地，在经典意义下它们往往是不适定的．对于反问题的研究还不成熟，目前已应用的主要方法有：代数方法，拉东变换，频谱分析，偏移理论，逆散射微扰论，最优化设计及各种正则化方法等．然而这些方法的应用都有一定的限制，许多反问题尚待新的方法的研究和解决．

数学物理中的几何方法（geometrical methods of mathematical physics） 数学物理的重要方法之一．指研究物理学（特别是相对论和规范理论等近代物理学分支）所应用的现代微分几何学的基本理论和方法．

伴随着 20 世纪中相对论的伟大发现，使得以法国数学家嘉当（Cartan，H.）为首的一些数学家对于几何学和分析学之间的关系提出了新的认识，即一方面，分析学是研究几何学的基础；另一方面，几何学的研究自然地导致某些工具的发展（诸如李导数和外微分），以及某些概念的出现（如流形、纤维丛和向量与求导的同化），它们在分析学的应用中十分有用．而从近代的观点来看，几何学仍依附于分析学．例如，微分几何的重要概念——微分流形是用实数和可微函数来定义的．

几何概念与分析概念之间所发展的这种密切关系，使得现代微分几何对理论物理变得越来越重要．在理论物理中，微分几何大大地简化了数学方法，并使得人们能更深刻地理解物理．同时，这种变革不仅影响了含几何学内容的狭义相对论和广义相对论，而且也影响到其他一些物理领域，其中涉及的几何并非总是物理空间的几何，而是更为抽象的变量空间．这些领域有电磁学、热力学、哈密顿理论、流体动力学和基本粒子物理学．

近年来迅速发展的大范围分析，也是经典分析与几何的综合，它已成为处理非线性现象的一种重

要数学工具，其应用范围已远远超出了物理学.

数学物理中的不适定问题(ill-posed problem in mathematical physics) 一个经典数学物理方程的定解问题. 即法国数学家阿达马(Hadamard, J. (-S.))意义下的不适定问题. 如果它不同时满足下述三个要求：

1. 解是存在的；
2. 解是惟一的；
3. 解连续依赖于定解条件；

则称该问题(在阿达马意义下)是不适定的. 不适定问题的典型例子是拉普拉斯方程的柯西问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_y(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

其数据 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 作微小的变动时，其解往往会发生很大的变化，即该问题不满足上述要求 3.

其他一些不适定问题有：第一类弗雷德霍姆积分方程、逆向热传导方程的边值问题、波动方程的狄利克雷问题及求解微分方程系数的反问题等.

在较长一段时间内，不适定问题被认为没有物理背景，因而未引起足够的重视. 20 世纪 70 年代以来，随着科学技术和生产的发展，提出了许多具有实际意义的不适定问题，与其相应的数学理论和近似解法的研究也获得很大发展. 苏联数学家吉洪诺夫(Тихонов, А. Н.)对这一领域做出了重要贡献.

数学物理中的直接方法(direct method in mathematical physics) 数学物理的基本方法之一. 指求解数学物理问题的近似方法. 它是伴随着变分学理论和电子计算机的发展而发展起来的. 目前应用的直接方法主要有里茨方法、加辽金方法、有限元方法和差分方法等. 应用直接方法处理问题时，需把数学物理方程的问题化为代数方程组问题而求其近似解. 这个方法不仅可以解决大量工程技术中的问题，而且在理论研究上，也占有重要地位. 数学物理中某些基本问题的解的存在性和一些非线性问题解的重要性质(例如孤立子波)就是利用直接方法获得的.

超圆法(method of hypercircle) 解数学物理问题的一种近似方法. 它是由美国学者于 1947 年在讨论弹性静力学问题时提出的. 后来，此法被推广到解一般的数学物理方程边值问题. 超圆法实质上是一种函数空间方法，其特点是将泛函分析的解析概念形象化. 用它能具体地给出问题精确解的上、下界. 此法属泛函分析的范畴，在用它处理实际问题时，需研究解决三个问题：

1. 选择什么函数或函数集合来对应于函数空间的一个点或矢量.

2. 确定函数空间中合适的数量积的定义，并给出函数空间的度量.

3. 定义松弛问题，即定义函数空间的全伴矢量、余矢量和齐次相伴矢量.

格林函数(Green's function) 亦称源函数或影响函数. 数学物理中的一个重要函数. 它是英国数学家格林(Green, G.)于 1828 年引入的. 数学物理方程边值问题的求解往往化归为对其相应的格林函数的讨论. 在近代量子理论的研究中，格林函数已成为极有力的工具.

源函数(source function) 即"格林函数".

影响函数(influence function) 即"格林函数".

反应-扩散方程(reaction-diffusion equation) 一类数学物理方程. 指描述化学反应和扩散相耦合的数学物理方程. 一类典型的耦合的反应-扩散方程可表为如下形式：

$$(u_i)_t - L_i u_i = f_i(t, x, u_1, u_2) \quad (i = 1, 2, \quad t \in (0, T], \quad x \in \Omega) \tag{1}$$

相应的初始与边界条件为

$$u_1(0,x) = u_0(x), \quad u_2(0,x) = v_0(x) \ (x \in \Omega), \tag{2}$$

$$B_i[u_i] \equiv \alpha_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial \nu} + \beta_i(x) u_i = h_i(x) \quad (i = 1, 2, \quad t \in (0, T], \quad x \in \Omega) \tag{3}$$

其中，Ω 是 R^n 内的有界区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，$\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$，且 $\alpha_i + \beta_i > 0$ $(\forall x \in \partial\Omega)$，$f_i (i = 1, 2)$，$u_0$，$v_0$ 及 $h_i (i = 1, 2)$ 均为已知函数.

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ 是 $\partial\Omega$ 上的外法向导数，L_i 是如下形式的一致椭圆算子：

$$L_i \equiv \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{(i)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2),$$

这里，条件(3)代表狄利克雷、诺伊曼和罗宾三类边界条件的组合.

反应-扩散方程是近代发展起来的具有广泛应用的方程，属于这类方程的著名数学模型有流行病模型、生物化学模型及核反应模型等. 这类方程(组)属于半线性方程组，通常具有行波解且当 $t \to \infty$ 时，解趋于相应的椭圆型方程组对应边值问题的解(称为平衡解).

理论物理(theoretical physics) 物理学的分支学科. 通常是指理论力学、热力学、统计物理学、电动力学及量子力学等学科的总称. 主要是指物理学中的各种理论框架，它既可以指从第一性原理(即物理学中公认的原理，如作用量原理、守恒定律，拉格朗日量等)出发经演绎、推理归纳建立的理论，也可以是从实验总结出来的规律、唯象理论. 简言之，是从

理论上阐明有关的现象和过程及预言当时的实验还没有发现和验证的现象.是相对于实验物理而言的.是从各类学科的普遍规律出发.较深入、系统地阐述有关概念,讨论有关的各种现象及实际应用.这些学科的研究采用演绎法.从一般到特殊,并且较多地应用数学理论和方法.

理论力学(theoretical mechanics) 力学的一个分支.是用经过科学抽象的力学模型(如质点、刚体等)研究物体机械运动普遍规律的基础学科.理论力学一般分为静力学、运动学和动力学三部分.它通常依据一些由经验和实验建立起来的基本概念和反映理想物体运动基本规律的公理、定律作为研究的出发点,并采用数学工具进行演绎,最终导出各种以数学形式表达的力学理论.

规 范 场 论

规范场(gauge field) 数学物理与理论物理的重要概念之一.一种与定域变换不变性联系在一起的物质场,它传递规范变换下不变的相互作用.规范不变的相互作用一般包括电磁作用、弱电统一作用、色作用(强作用的量子色动力学)等具有内部定域不变性的作用.在引力规范场理论中还包括具有时空定域不变性的引力作用.相应的规范场分别为电磁场、弱电统一场、色场、引力场等.其量子化粒子分别为光子、光子与中间玻色子、胶子、引力子等.与内部对称性对应的守恒量称为荷.例如电荷、弱电 $SU(2)\otimes U(1)$ 荷、色荷、带荷粒子与规范场偶合等.荷为规范场的源,规范场传递荷间的作用.

规范变换概念来源于德国数学家外尔(Weyl,(C. H.) H.).他在1918年将时空度规标度(即规范)的定域伸缩变换与电磁势的定域变换相联系,希望以此构成统一的引力电磁理论,但未获成功.1925年,量子力学建立后,规范变换有了新的含义.在量子力学中有一种新的不变性:波函数的整体相位的选择有着任意性,相因子的改变

$$\psi(x,t)\rightarrow e^{i\alpha}\psi(x,t) \tag{1}$$

对力学量的观测值毫无影响.

若波函数在时空的每一点上相位的改变与电荷成正比的改变

$$\psi(x,t)\rightarrow\exp\frac{ie\alpha(x,t)}{hc}\psi(x,t), \tag{2}$$

并要求量子力学在这变换下不变,则必有一相应的矢量场 $A_\mu(x,t)$,它在变换(2)下作相应的变换 $A_\mu\rightarrow A_\mu+\partial_\mu\alpha$,由它定义的场强正好为麦克斯韦方程组所描述,它与波函数 ψ 所描述的带电粒子的相互作用,正好是熟知的电磁相互作用.因此,它就是电磁场的矢量势.这样,就完成了由外尔所尝试的从定域规范变换不变性导出电磁理论的工作.只是,规范变换已经从原来的定义换成由式(1)及(2)所规定的相位的变换,前者与时空无关,称为整体规范变换,后者与时空有关,称为定域规范变换.满足定域规范变换下不变性要求的场,称为规范场.变换(2)在数学上构成单参数的正变换群 $U(1)$,这种变换往往被称为 $U(1)$ 定域规范变换.电磁场就是 $U(1)$ 定域规范变换不变性所要求的规范场.这种场的量子就是光子,它的质量为零,自旋为 h,是传递电磁作用(它在 $U(1)$ 定域规范变换下不变)的量子.

上述 $U(1)$ 正变换群是可以对易的.即先后两次变换的次序可以对易,在数学上称为阿贝尔群,而同位旋的转动变换也构成一个3参量的正模变换群 $SU(2)$,它是不可对易的,在数学上称为非阿贝尔群.若规范变换群是阿贝尔群,则定域规范变换不变性所规定的规范场称为阿贝尔规范场;若规范变换群是非阿贝尔群,则定域规范变换不变性所规定的规范场称为非阿贝尔规范场.

阿贝尔规范场(Abel gauge field) 见“规范场”.

非阿贝尔规范场(non-Abel gauge field) 见“规范场”.

规范变换(gauge transform) 规范场理论中的重要概念.在内部空间的转动下,场量 $\varphi_\sigma(x)$ 作变换

$$\varphi_\sigma(x)\rightarrow\varphi'_\sigma(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha_{\sigma\rho}]\varphi_\rho(x), \tag{1}$$

这个变换称为规范变换.当群参数 θ^α 是与时空坐标 x 无关的常数时,称为整体规范变换.当群参数 θ^α 是时空坐标 x 的函数 $\theta^\alpha(x)$ 时,称为定域规范变换.在整体规范变换下,若 n 为内部空间表示的维数,则

$$T^\alpha_{\sigma\rho}(\sigma,\rho=1,2,\cdots,n)$$

是生成元 T^α 的 n 维表示,是 $n\times n$ 矩阵的矩阵元. n 维表示空间的矢量 $\varphi(x)$ 的 n 个分量 $\varphi_\sigma(x)$ $(\sigma=1,2,\cdots,n)$ 可写成

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \vdots\\ \varphi_n(x)\end{pmatrix}.$$

此时(1)式可写成

$$\varphi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\varphi(x), \tag{2}$$

由于 θ^α 与时空坐标 x 无关,场量的时空导数 $\partial_\mu\varphi(x)$ 就像场量 $\varphi(x)$ 一样变换,即

$$\partial_\mu\varphi(x)\rightarrow\partial_\mu\varphi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\partial_\mu\varphi(x), \tag{3}$$

这是整体规范变换的一个重要特点.物理系统在内部空间的对称性,通常用它的拉格朗日函数在式(2)及(3)表示的规范变换下的不变性,即

$$\mathscr{L}(\varphi'(x),\partial_\mu\varphi'(x))=\mathscr{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)) \tag{4}$$

来描述.在定域规范变换下,场量按

$$\varphi(x)\to\varphi'(x)=\exp[-i\theta^a(x)T^a]\varphi(x) \tag{5}$$

的规律变换，而场量的导数 $\partial_\mu\varphi(x)$ 的变换

$$\begin{aligned}\partial_\mu\varphi(x)\to\partial_\mu\varphi'(x)&=\exp[-i\theta^a(x)T^a]\partial_\mu\varphi(x)\\&-i\partial_\mu\theta^\beta T^\beta\exp[-i\theta^a(x)T^a]\varphi(x)\\&\neq\exp[-i\theta^aT^a]\partial_\mu\varphi(x),\end{aligned} \tag{6}$$

从而 $\mathscr{L}(\varphi'(x),\partial_\mu\varphi'(x))\neq\mathscr{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x))$. 这就是与整体规范变换的本质差别. 由量子电动力学的启示，按照杨-米尔斯的观点，引进规范场势 $A_\mu^a(x)$ 和称为协变导数的量 $D_\mu(x)$：

$$\begin{aligned}&D_\mu(x)\equiv\partial_\mu+A_\mu(x),\\&A_\mu(x)\equiv-igA_\mu^a(x)T^a,\end{aligned} \tag{7}$$

可以使场量的协变导数 $D_\mu\varphi(x)$ 在定域规范变换下有和场量 $\varphi(x)$ 同样的变换规律，从而把在整体规范变换下不变的拉格朗日函数 $\mathscr{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x))$，推广为在定域规范变换下不变的拉格朗日函数 $\mathscr{L}(\varphi(x),D_\mu\varphi(x))$，即有

$$\mathscr{L}(\varphi'(x),D'_\mu\varphi'(x))=\mathscr{L}(\varphi(x),D_\mu\varphi(x)),$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x)\to\varphi'(x)=\exp[-i\theta^a(x)T^a]\varphi(x)\\&D_\mu\varphi(x)\to D'_\mu\varphi'(x)=\exp[-i\theta^a(x)T^a]D_\mu\varphi(x)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

所以

$$A_\mu^{a'}(x)=A_\mu^a(x)+f^{a\beta\gamma}\theta^\beta(x)A_\mu^\gamma(x)-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x). \tag{9}$$

由上式可确定规范场势 $A_\mu^a(x)$ 在规范变化下的变换规律. 由式(7)及(8)可得(略去高阶小量)

$$\begin{aligned}A_\mu^{a'}T^a&=A_\mu^aT^a-i\theta^\beta A_\mu^a[T^\beta\cdot T^a]-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^aT^a\\&=A_\mu^aT^a+f^{a\beta\gamma}\theta^\beta(x)A^\gamma\mu T^a-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^aT^a.\end{aligned}$$

这就是规范场势在无穷小变换下的变换规律. 它是与 $\varphi(x)$ 场的表示 T^a 无关的.

定域规范变换(gauge transform of definite domain) 见“规范变换”.

整体规范变换(integral gauge transform) 见“规范变换”.

规范场势(potential of gauge field) 见“规范变换”.

杨-米尔斯理论(Yang-Mills theory) 亦称规范场理论. 数学物理与理论物理的重要内容之一. 是研究自然界基本相互作用内在联系的理论. 1954年，美籍华人物理学家杨振宁和米尔斯(Mills, R. L.)把电磁作用是由定域规范不变性所决定的观念推广到不可对易的定域对称群，提出具有定域同位旋不变性的理论，发现必须引进三种矢量规范场，它们形成同位旋转动群 $SU(2)$ 的伴随表示. 这就揭示出规范不变性可能是电磁作用和其他作用的共同本质，从而开辟了用此规范原理来统一各种相互作用的新途径.

在杨-米尔斯理论中的基本概念——规范势恰是20世纪数学家深入研究过的纤维丛上的联络；而这一理论所包含的杨-米尔斯方程则是一组在此之前从未考虑过的极有意义的非线性偏微分方程. 20世纪70年代，一些数学家深入地研究了该方程，这对纯粹数学的发展，也起了推动作用. 在电磁场中，其场强 E 和 H 可用德籍俄国数学家闵科夫斯基(Minkowski, H.)时空中的反对称张量 $F_{\lambda\mu}(\lambda,\mu=1,2,3,4)$ 表示：

$$(F_{14},F_{24},F_{34})=E,\quad(F_{23},F_{31},F_{12})=H \tag{1}$$

存在电磁势 A_λ，使

$$F_{\lambda\mu}=\partial_\lambda A_\mu-\partial_\mu A_\lambda\quad\left(\partial_\lambda=\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right), \tag{2}$$

其中 A_λ 可允许规范变换

$$A_\lambda\to A'_\lambda=A_\lambda-\partial_\lambda\varphi\quad(\varphi\text{为任意函数}). \tag{3}$$

如果取 $S=e^{i\varphi}$，$S\in U(1)$，那么规范变换就可用 $U(1)$ 群的李代数 $u(1)$ 中的关系表示

$$iA'_\lambda=iA_\lambda-(\partial_\lambda S)S^{-1},$$

$U(1)$ 群反映了波函数具有的内禀对称性. 由规范场理论，存在规范场，其规范势为 b_λ，$b_\lambda\in SU(2)$（它为 $SU(2)$ 的李代数），它们也有规范变换

$$b'_\lambda=Sb_\lambda S^{-1}-(\partial_\lambda S)S^{-1}, \tag{4}$$

其中 S 是 $SU(2)$ 值函数. 而规范场有强度

$$F_{\lambda\mu}=\partial_\lambda b_\mu-\partial_\mu b_\lambda+[b_\lambda,b_\mu], \tag{5}$$

这里，规范势就是闵科夫斯基空间 $R^{3,1}$ 上的直积纤维丛 $G\times R^{3,1}$ 上的联络，$F_{\lambda\mu}$ 就是曲率. 杨-米尔斯还提出规范势的泛函

$$YM(b)=\frac{1}{4}\int(F_{\lambda\mu},F^{\lambda\mu})\mathrm{d}^4x,$$

其中(,)是李代数的嘉当内积. 作它的变分可得到纯杨-米尔斯方程

$$\eta^{\lambda\mu}(\partial_\mu F_{\sigma\lambda}+[b_\mu,F_{\sigma\lambda}])=0,$$

这里 $\eta^{\lambda\mu}$ 是以 $1,1,1,-1$ 为对角元的对角阵，是闵科夫斯基空间的度量张量.

除了闵科夫斯基时空上的杨-米尔斯方程外，还有一般的可定向的四维黎曼流形上的杨-米尔斯方程. 这些方程都是十分复杂的非线性偏微分方程，它们的求解是数学家研究的重要课题. 杨-米尔斯场还包含其他许多数学问题，中国的数学家与物理学家在规范场理论的研究中做出了重要贡献.

规范场理论(gauge field theory) 即“杨-米尔斯理论”.

杨-米尔斯方程(Yang-Mills equation) 见“杨-米尔斯理论”.

规范群(gauge group) 规范场理论术语. 指在规范场理论中，表达内部空间转动的概念. 规范群用 G 表示，它的元素写作

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^aT^a], \tag{1}$$

T^{α} 是群 G 的生成元，满足对易关系

$$[T^{\alpha}, T^{\beta}] = i f^{\alpha\beta\gamma} T^{\gamma}, \tag{2}$$

$f^{\alpha\beta\gamma}$ 是群 G 的结构常数. $\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,N$, N 是群 G 的维数，它等于生成元的个数. θ^{α} 是群 G 的参数，称为群参数，也有 N 个. 若规范群是 $\mathrm{SU}(n)$ 群，那么 $N=n^2-1$，就有 n^2-1 个生成元 T^{α} ($\alpha=1,2,\cdots,n^2-1$). 群元素的表示 $u(\theta)$ 就是幺正、幺模的矩阵. 生成元的表示就是厄密、无迹的矩阵. 而且，在 n^2-1 个生成元中，有 $n-1$ 个是可以同时对角化的. 若群 G 是 n 维实空间的转动群，那么有 $N=n(n-1)/2$ 及 $n(n-1)/2$ 个生成元. 它的表示 T^{α}, $\alpha=1,2,\cdots,n(n-1)/2$，就是厄密、纯虚、反对称的矩阵. 它的基本表示可以写作

$$\left.\begin{aligned} &L_{ij} = -i(E_{ij}-E_{ji}) \\ &(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \\ &(i,j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

群的生成元可以用作描写规范场粒子性质的算符. 在具体问题中，选择什么样的规范群，要依据场粒子的具体性质及粒子之间的相互作用规律来确定，例如，在量子电动力学(QED)中，采用 $U(1)$ 群，生成元 $T=Q$ 是电荷算符.

规范场的几何解释(geometric interpretation of gauge field)　规范场理论术语. 是应用纤维丛联络论等现代微分几何理论对规范场的解释. 实际上，杨-米尔斯的规范势就是闵科夫斯基空间上的直积纤维丛上的联络，规范场强度就是曲率，而场函数就相当于丛上的截面.

协变导数(cooperative variable derivative)　见“规范变换”.

路径积分表示的量子理论(quantum theory in path integral representation)　规范场理论的内容之一. 是场量子化的一种重要途径，也是规范场量子理论中常用的基本方法. 它的基本特征是：其中的量子动力学是由对所有的场位形作积分来描述，这称为路径积分. 费因曼(Feynman, R. P.)首先按这一方法为量子电动力学建立了一个自洽的、明显相对论不变的微扰论. 对于规范场的量子化，这一方案已表明是最方便的，因为它以最简单的方式考虑了相对性原理：积分不是对所有的场位进行，而只是对规范等效的类进行. 这一理论的基本形内容是：

1. 对相空间的路径积分.
2. 全纯表象中的路径积分.
3. 场论中 S 矩阵的生成泛函.
4. 对费米场的路径积分.
5. 路径积分的微扰性质.

目前，路径积分已成为解决弯曲时空的量子场论的非常有效的数学方法. 它不仅在规范场、量子力学、量子电动力学、统计物理学等已获得广泛应用，而且与关于具有奇异拉普拉斯函数系统的狄喇克方法相结合，对于规范场理论的发展发挥了重要的作用.

黑格斯机制(Higgs mechanism)　规范场理论术语. 是用标量粒子场来实现规范对称性自发破缺的一种机制. 而相应的标量粒子称为黑格斯粒子，它是自旋为 0 的粒子. 规范对称性的特点是对应于每一个规范对称性，有一零质量的自旋为 1 的粒子，称为规范粒子. 当黑格斯机制使规范对称性破缺时，就使黑格斯粒子的种类减少一个，与此同时，相应于被破缺的规范对称性的自旋为 1 的粒子，从无质量变为有质量，而其独立分量的数目由 2 增加到 3，增加的 1 个分量来自减少的黑格斯粒子分量. 重的规范粒子传递的作用力程短，轻的规范粒子传递的作用力程长，对称性自发破缺前性质相似的规范粒子，在对称性自发破缺以后，有的保持零质量，有的获得质量，它们传递的相互作用，就带上了极不相同的性质. 这样，黑格斯机制就为在一个简单的规范理论基础上，统一诸多性质各异的相互作用提供了可能.

黑格斯机制为格拉肖(Glashow, S. L.)、温伯格(Weinberg, S.)、萨拉姆(Salam, A.)提出的弱电统一模型奠定了基础. 黑格斯机制是一切统一弱作用、电磁作用和强作用的大统一理论中必不可少的部分. 在规范场论中引入黑格斯机制时，会随之出现一些不能用规范理论原则来规定其大小的耦合常数. 这些同黑格斯粒子有关的耦合常数是理论中无法确定的. 对此，一些物理学家受超导新理论的启发，提出新的看法，认为对称性自发破缺是费密子凝聚的结果(参见“真空对称性自发破缺”). 这种不要黑格斯粒子的机制称为动力学自发破缺. 有一些物理学家认为黑格斯粒子是与规范粒子、费密子一样的基本的粒子. 黑格斯粒子的存在性尚未被以往的实验肯定，它是今后实验研究的一大课题.

规范粒子(gauge particle)　见“黑格斯机制”.

黑格斯粒子(Higgs particle)　见“黑格斯机制”.

黑格斯场(Higgs field)　规范场理论术语. 指构成黑格斯机制的物质场. 其拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}_{\varphi} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi^{+}\partial^{\mu}\varphi - \frac{\mu^2}{2}\varphi^{+}\varphi - \frac{\lambda}{4}(\varphi^{+}\varphi)^2$$
$$(\mu^2<0, \lambda>0).$$

它的内部空间可能有多个分量，但是，它在时空空间却只有一个分量，因而也称之为标量场，与之相应的粒子的自旋为 0. 它与通常的标量场不同，$\mu^2<0$，且有自相互作用，$\lambda\neq 0$. 黑格斯场具有两面性的破缺对称性的特点. 一方面，对应于虚质量(粒子的质量是虚的)，在内部空间反射变换下，拉格朗日密度是对称的，而真空是破缺的；另一方面，对应于实质量，其真空是对称的，而拉格朗日密度是破缺的. 黑格斯场

与规范场结合构成黑格斯机制.

重正化方法(renormalization's method) 规范场理论的一种方法.指克服应用微扰理论于量子场论计算过程中出现的发散困难而采用的方法.重正化方法包括两个步骤.首先,把发散积分中的极限情况,称为正规化.然后,把理论中出现的场量、参数重新定义,用抵消项消除正规化了的发散部分,使计算结果成为有限且有意义,这称为重正化.正是因为有了重正化方法,量子电动力学才成了一门十分精确的理论.量子规范理论(包括电弱统一理论、量子色动力学和大统一理论)的情况虽然比量子电动力学复杂,但它们的重正化问题也已获得解决.重正化是一个涉及面较广的研究课题.粒子物理、统计物理等,都可遇到重正化问题.对于像有束缚态时的重正化,弯曲时空量子场论的重正化等一些很有意义的问题,都有待深入探索.现代的重正化理论并非只是应付发散困难,它还可通过重正化群方法给出物理上的新预言.例如,关于渐近自由预言.重正化方法也有其局限性,它不能解决微扰近似方法本身所固有的问题,如微扰级数收敛问题及强耦合不能用微扰方法的问题等.

重正化(renormalization) 见“重正化方法”.

重正化群(renormalization group) 量子场理论中的一个概念.指描述量子场论中重正化的格林函数(包括矩阵元)的变换规律的群.重正化中,分离发散部分的方法并非惟一.在分离时总要引入可变动的质量参数 μ,这相当于所选取的质量标度是不惟一的.由此,重正化的格林函数必随 μ 而变,而物理的结果则不随 μ 而变.这种不变性可看做是一种“群”的不变性,μ 是此群参数.这个群即为重正化群(在统计物理学和固体物理学中,重正化群是半群).

20 世纪 70 年代初,卡伦(Carlven, C.)和西曼吉克(Seamanjick, K.)给出了表达重正化的格林函数与参数 μ 之间关系的微分方程(称为卡伦-西曼吉克方程).后来,一些学者在此基础上导出了在大的动量能量传递下量子色动力学的渐近自由性质,这些性质后来被实验证实.重正化群方法还被有效地用于凝聚态相变和临界现象的研究,取得了很好的结果.

量子色动力学(quantum chromodynamics) 规范场理论的重要内容之一.一种可重正化的强相互作用的规范理论.它描述组成强相互作用粒子(强子)的夸克和与自旋为 1 的规范粒子——胶子之间的相互作用,且可以统一地描述强子的结构和它们之间的强相互作用.量子色动力学是严格的 SU(3) 对称的规范理论.它的突出特点是这种规范作用具有渐近自由的性质,即在夸克(以及可能存在的标量粒子)的数目不很多的条件下,相互作用的耦合常数随能量的增高而变小,在高能下可以比 1 小得多,因而高能(小距离)行为可用微扰论处理.虽然量子色动力学还存在一些基本问题,但它是强作用基本理论.

规范场的动力学模型(dynamics model of gauge field) 动力学模型之一.指用拉格朗日函数来描述杨-米尔斯场与物质场相互作用的动力学模型.

1. 旋量场情况:若此场多重态 $\psi_k(x)$ 实现了一个单纯紧致规范群 Ω 的表示 $\Gamma(\omega)$,则拉格朗日函数有如下形式

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu D_\mu\psi(x)-m\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (1)$$

其中 $\mathscr{L}_{YM}$是真空中杨-米尔斯场的拉格朗日函数

$$\mathscr{L}_{YM}=\frac{1}{8g^2}\mathrm{tr}\mathscr{F}_{\mu\gamma}\mathscr{F}_{\mu\gamma}, \quad (2)$$

而 $\mathscr{F}_{\mu\gamma}$是表示电荷空间曲率的矢量.在旋量场的标积中,要对内部自由度的指标求和.如质量写成

$$m\bar{\psi}(x)\psi(x)=m\bar{\psi}_k(x)\psi_k(x), \quad (3)$$

且有

$$(D_\mu\psi(x))_k=\partial_\mu\psi_k(x)-(\Gamma(A_\mu(x)))_{kl}\psi_l(x), \quad (4)$$

这里 $A_\mu(x)$表示规范场(是在紧致半单李群的李代数中取值的矢量场).$(\Gamma(A_\mu))_{kl}=A_\mu^a(\Gamma(T^a))_{kl}$,$(\Gamma(T^a))_{kl}$(简称 Γ_{kl}^a)是生成元 T^a 在由场 $\psi(x)$所实现的表示中的矩阵.有

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu D_\mu\psi(x)=\bar{\psi}_k(x)\gamma_\mu(\partial_\mu\psi(x)-A_\mu^a(x)\Gamma_{kl}^a\psi_l(x)). \quad (5)$$

例如,若规范群为 $SU(2)$,而场 $\psi(x)$实现了这个群的基础表示,则

$$(\Gamma(A_\mu))_{kl}=-\frac{i}{2}A_\mu^a(\tau^a)_{kl}, \quad (6)$$

这里 τ^a 是泡利矩阵,完全的拉格朗日函数为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4g^2}(\partial_\gamma A_\mu^a-\partial_\mu A_\gamma^a+\varepsilon^{abc}A_\mu^bA_\gamma^c)^2+i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu\psi+\frac{i}{2}A_\mu^a\tau^a\psi)-m\bar{\psi}\psi, \quad (7)$$

若规范群是 SU(3)且旋量 $\psi(x)$实现其基础表示,则相应的拉格朗日函数为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4g^2}(\partial_\gamma A_\mu^a-\partial_\mu A_\gamma^a+f^{abc}A_\mu^bA_\gamma^c)^2+i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu\psi+\frac{i}{2}A_\mu^a\lambda^a\psi)-m\bar{\psi}\psi, \quad (8)$$

其中 $f^{abc}(a,b,c=1,\cdots,8)$是 SU(3)群的结构常数,而 λ^a 是盖尔曼矩阵.后一拉格朗日函数应用于强相互作用理论中,此时,旋量 ψ 被认为是夸克场,杨-米尔斯场称为胶子,而内禀空间称为色空间.在上述的规范群为单纯群的例子中,所有相互作用只由一个单一耦合常数表征.相互作用的这种普适性是杨-米尔斯理论的一个特点.

2. 标量场情况.若场多重态 $\varphi_k(x)$实现了单纯

紧致群 Ω 的一个实表示 $\Gamma(\omega)$,则规范不变的拉格朗日函数为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{YM} + \frac{1}{2}D_\mu\varphi D_\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi\varphi - V(\varphi), \quad (9)$$

其中 $D_\mu\varphi$ 为协变导数 $D_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi-\Gamma(A_\mu)\varphi$,$\varphi\varphi$ 为电荷空间的标积,$V(\varphi)$ 是场 φ 对于群 Ω 不变的一个三次或四次型. 若 $\Omega=SU(2)$,而场 φ 实现伴随表示 $\varphi=\varphi^a(a=1,2,3)$,则相应的公式为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{YM} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^a - g\varepsilon^{abc}A_\mu^b\varphi^a)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^a\varphi^a - \lambda^2(\varphi^a\varphi^a)^2, \quad (10)$$

其中 m 相当于质量,λ^2 起标量场接触相互作用耦合常数的作用. 式(10)经适当改动后,能在杨-米尔斯理论的框架内描述有质量的矢量场. 而为矢量场产生质量的这一机制称黑格斯效应. 可用规范群 SU(2)为例说明此效应. 首先考虑标量场属伴随表示的情况. 选用如下拉格朗日函数

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+\frac{1}{2}(D_\mu\varphi^a)^2-\lambda^2(\varphi^a\varphi^a-\mu^2)^2, \quad (11)$$

式(11)与(10)的差别在于常数项 $-\lambda^2\mu^4$ 及 φ 平方项的符号. 表面上,式(11)描述带有虚质量的粒子,因而没有物理意义. 实际上,φ 平方项只是在 $\varphi=0$ 是稳定平衡点,因而是势能极小值时,才起质量项的作用. 上述情况下,势能为

$$U(A_\mu,\varphi) = \int[\frac{1}{4g^2}F_{ik}^aF_{ik}^a + \frac{1}{2}D_i\varphi^aD_i\varphi^a + \lambda^2(\varphi^a\varphi^a - \mu^2)^2]d^3x \quad (i,k = 1,2,3), \quad (12)$$

位形 $\varphi^a=0, A_\mu^a=0$ 是一个鞍点,对应的平衡是不稳定的. 然而,也存在稳定平衡点,它们对应于等于零的 A_μ^a 和有固定长度 $\varphi^2=\mu^2$ 的常数 φ. 这样的 A_μ,φ 使得组成势能的三个正项都变为零. 除了这些具有平移不变性的极小值之外,势能还有另外的极小值. 但这些是能量值较高的位形,它们仅是局部极小.

为确定真空的质量,需将势能在真极小值周围展成泰勒级数. 在所述情况下,平衡点是简并的(即该平衡点是系统含多个表示能量最低态或基态点之一),极小值的位形形成一个二维球 S^2,它上面的点对应于常矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的方向. 用 $\boldsymbol{n}$ 表示此方向,将对应的 φ 注明指标 n,因而有 $\boldsymbol{\varphi}_n=\mu\boldsymbol{n}$. 若将位形空间约化,只考虑在大 $|x|$ 时渐近地和某一个 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 相合的场 $\boldsymbol{\varphi}$,则这一简并消失. 自然,这样的选择破坏了常参数 SU(2)变换下的不变性(同位旋不变性),但这一条件并不与动力学矛盾,而且和 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 的不同选择对应的理论在物理上等效. 通常,取 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,相应的 $\boldsymbol{\varphi}_n=(0,0,\mu)$. 转换到无穷远渐近地趋于零的 $\boldsymbol{\varphi}(x)$,

$$\boldsymbol{\varphi}(x) \to \boldsymbol{\varphi}_n + \boldsymbol{\varphi}(x) \quad (13)$$

使得同位旋对称性明显地被破坏,而拉格朗日函数成为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+\frac{1}{2}(D_\mu\varphi^a)^2+\frac{m_1^2}{2}[(A_\mu^1)^2+(A_\mu^2)^2] + m_1(A_\mu^1\partial_\mu\varphi^2-A_\mu^2\partial_\mu\varphi^1) + gm_1[\varphi^3((A_\mu^1)^2+(A_\mu^2)^2)-A_\mu^3(\varphi^1A_\mu^1+\varphi^2A_\mu^2)] - \frac{m_2^2}{2}(\varphi^3)^2-\frac{m_2^2g}{2m_1}\varphi^3(\varphi^a)^2-\frac{m_2^2g^2}{8m_1^2}(\varphi^a\varphi^a)^2,$$

$$m_1=\mu g, m_2=2\sqrt{2}\lambda\mu. \quad (14)$$

这虽然破坏了同位旋不变性,但拉格朗日函数和边界条件在无穷远趋于 1 的函数 $\omega(x)$ 的局域规范变换下是不变的. 可导出在新变量下规范变换的显示. 局限于无穷小变换

$$\delta\varphi^a(x)=-g\varepsilon^{abc}\varphi^b(x)a^c(x)-m_1\varepsilon^{abc}a^c(x), \quad (15)$$

式(14)产生的质量谱的分析要求在场 $A_\mu(x),\varphi(x)$ 的规范等效类中选择代表,即必须固定规范. 可选择下述方便的规范条件

$$\varphi^1(x) = 0, \varphi^2(x) = 0, \partial_\mu A_\mu^3(x) = 0, \quad (16)$$

可验证,对于充分小的 $\varphi^3(x)$,相容性条件是满足的. 实际上

$$\delta(\partial_\mu A_\mu^3) = \Box a^3 - g\varepsilon^{abc}\partial_\mu(A_\mu^b a^c), \quad (17)$$

而 $\delta\varphi^{1,2}$ 由式(15)决定. 与规范相应的算符 M 为

$$M \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g\varphi^3+m_1 & -g\varphi^2 \\ -g\varphi^3-m_1 & 0 & g\varphi^1 \\ \partial_\mu A_\mu^2+A_\mu^2\partial_\mu & -A_\mu^1\partial_\mu-\partial_\mu A_\mu^1 & \Box \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

在 φ 小时,算符 M 的行列式是

$$\det M = m_1^2\det\Box + O(\varphi), \quad (19)$$

因为第一项不是零,所以在微扰论范围内成立,$\det M\neq0$,满足相容性条件. 决定质量谱的平方项可写成

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}(\partial_\gamma A_\mu^a-\partial_\mu A_\gamma^a)^2+\frac{m_1^2}{2}[(A'_\mu)^2+(A_\mu^2)] + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^3\partial_\mu\varphi^3-\frac{m_2^2}{2}(\varphi^3)^2, \quad (20)$$

上述理论在经典近似下,描述了两个有质量矢量场、一个无质量矢量场及一个有质量的标量粒子. 因而,确实是有两个矢量场获得了质量,而有两个标量场的量子消失了. 为建立使所有三个矢量场都得到非零质量的 SU(2)规范不变模型,需考察在二维表示中的复标量场多重态

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (\varphi_1^*, \varphi_2^*), \quad (21)$$

规范不变的拉格朗日函数是

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+(D_\mu\varphi)^+D_\mu\varphi-\lambda^2(\varphi^+\varphi-\mu^2)^2, \quad (22)$$

其中 $D_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi+\frac{i}{2}g\tau^aA_\mu^a\varphi$,而 φ 的规范变换为

$$\delta\varphi(x)=\frac{1}{2i}g\tau^a\alpha^a(x)\varphi(x). \tag{23}$$

稳定的极值点仍然对应于满足 $\varphi^+\varphi=\mu^2$ 的常数 φ. 此时,稳定极值点的集合形成一个三维球 S^3. 为消除简并,选择

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}0\\ \mu\end{pmatrix} \tag{24}$$

作为极小值. 可验证,条件

$$\varphi_1(x)=0,\ \mathrm{Im}\,\varphi_2(x)=0 \tag{25}$$

是一个容许的规范. 在此规范下,只留下了一个标量场

$$\mathrm{Re}\varphi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(x).$$

过渡到在无穷远渐近地趋于零的场

$$\sigma(x)\rightarrow\sqrt{2}\,\mu+\sigma(x), \tag{26}$$

所得到的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}F^a_{\mu\gamma}F^a_{\mu\gamma}+\frac{m_1^2}{2}A^a_\mu A^a_\mu+\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma\\&-\frac{1}{2}m_2^2\sigma^2+\frac{m_1g}{2}\sigma A^a_\mu A^a_\mu+\frac{g^2}{8}\sigma^2A^a_\mu A^a_\mu\\&-\frac{gm_2^2}{4m_1}\sigma^3-\frac{g^2m_2^2}{32m_1^2}\sigma^4,\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $m_1=\mu g/\sqrt{2}$, $m_2=2\lambda\mu$.

拉格朗日函数描述了三个有质量矢量场和一个有质量标量场的相互作用. 上述机制可进一步被用于建立弱作用和电磁作用统一的规范不变模型.

统一场论(unified field theories) 理论物理的研究内容之一. 统一地描述和揭示基本相互作用的共同本质和内在联系的理论. 弱相互作用、电磁相互作用、强相互作用及引力相互作用是迄今人类所知一切物理现象所表现的相互作用. 寻求建立以场论为基础的各种相互作用的统一理论是理论物理学的追求.

19 世纪中叶,英国科学家麦克斯韦(Maxwell, J. C.)的电磁理论统一了电与磁两种作用,成为历史上第一个描述几种相互作用的统一理论. 20 世纪初,美籍德国科学家爱因斯坦(Einstein, A.)破除牛顿引力论中超距作用观念,将场的观点引入引力理论而创立了广义相对论. 从而导致了以统一引力场和电磁场为目标的统一场论研究热潮. 在广义相对论中引力场被描述为时空的弯曲,因此,设法把电磁场也和时空的其他几何属性联系起来,便成为那时统一电磁作用和引力作用的理论方案的核心思想. 例如,德国数学家外尔(Weyl, (C. H.) H.)把电磁场和时空的尺度变换相联系;卡鲁查(Carocha, T. F. E.)和克莱因(Klein, A.)则把电磁势当做五维时空度规张量的部分分量;爱因斯坦则将时空的度规或联络从对称的推广为不对称的,再将不对称部分同电磁场联系起来. 这一时期研究的基本特点是:物理学的几何化;所有理论方案都只考虑经典场(即宏观引力和电磁现象)而未涉及场的量子效应. 尽管他们的方案都未获成功,但对于数学中微分几何的发展却起了很大推动作用.

伴随量子理论的兴起,在深入研究微观领域的过程中,人们认识到基本相互作用还应包括微观粒子之间的强相互作用和弱相互作用,从而扩大了统一场论的目标. 20 世纪 50 年代初,德国物理学家、数学家海森伯(Heisenberg, W. K.)提出一个统一场论方案:他给出一个非线性的旋量场方程,企图由它导出基本粒子的质量谱,并解释它们的相互作用性质,但未获得成功.

1954 年,杨振宁和米尔斯(Mills, R. L.)提出了规范场理论. 不但揭示出规范不变性可能是电磁作用和其他作用的共同本质,而且开辟了用规范原理来统一各种相互作用的新途径. 经过科学家们 20 余年的努力,得到了满意的将电磁相互作用和弱相互作用的统一理论模型——电弱统一理论. 它是由格拉肖(Glashow, S. L.)、温伯格(Weinberg, S.)和萨拉姆(Salam, A.)提出的电弱统一模型,是一种自发破缺的规范理论模型—— $SU(2)\times U(1)$ 模型.

从 20 世纪 70 年代中期起,人们又开始探索统一描述弱相互作用、电磁相互作用和强相互作用的规范理论 —— 大统一理论. 电弱统一理论的重大成功和 20 世纪 70 年代初强相互作用理论研究取得的重大进展 —— 量子色动力学,为大统一理论的研究提供了较坚实的基础. 大统一理论的基本思想是:通过把规范群由 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 扩大到某个合适的更大的单纯群例如 SU(5),把夸克和轻子纳入同一个大的表示,从而构造一个把强、电磁和弱三种相互作用统一起来的规范理论. 到目前为止,大统一理论得到了一系列重要结果和令人感兴趣的预言,但也存在着一些严重的困难和问题. 近来,这个理论在两个方向上有所发展. 一是与超对称理论结合以克服规范等级问题,同时设法使质子寿命的理论预言值变长;另一个是与夸克轻子的下一层次结构相联系,试图在更深一层次解决一些悬而未决的问题.

统一场论的研究正是目前大统一理论进一步发展的结果. 对于这一理论的许多探索和尝试均不成熟,距离建立一个满意的、完美的统一场论的理想相距甚远. 正因如此,这一关系到自然界核心奥秘之理论的研究,仍将是理论物理的重要课题之一.

孤立子理论

孤立子理论(soliton theory) 数学物理研究的

重要内容之一.处理力学及理论物理等许多领域中涉及孤立子的一些非线性波传播问题的重要数学物理方法.所谓孤立子,实际是非线性(含拟线性)方程的一类行波解.它又称为孤立子波,其本质上的特征是其波形和速度在相互碰撞后仍能保持不变或仅有微弱变化.

几十年来,人们在理论物理等许多领域内已广泛地认识到:非线性可以产生本质上全新的一些现象,而这些现象不可能由线性化方程出发的微扰理论得到.例如,一个标量场 $\varphi(x,t)$ 的 Fitzhugn-Nagumo 方程

$$\varphi_t=\frac{1}{2}\varphi_{xx}+(a-\varphi)(\varphi^2-1)\ (-1<a<0) \quad (1)$$

提供了一个富有启发的例子.它曾被建议作为神经脉冲传播的一个简单模型.虽然此方程的微分部分类似于扩散方程,但它有一个作为特解的孤立子波,即神经脉冲

$$\varphi=\tan h(x-at), \quad (2)$$

方程(1)的这个解可用一个力学模型——摩擦(即 φ_t)力所支配的一个弹性(即 φ_{xx})弦的运动来解释.可以看出,按照描述 $\varphi=\pm1$ 附近小振动的两个线性化方程的微扰不可能得到这个解.

自 1872 年由法国力学家、理论物理学家布森内斯克(Boussinesq,J.V.)先得到孤立子解(对液面长波解来说)以来,人们已经发现很多在应用中十分重要的含有孤立子解的非线性方程,例如,KdV (Korteweg-deVires)方程,正弦-戈登方程(Sine-Gordon 或 SG 方程),非线性薛定谔方程等.这些是典型的非线性波动方程,在某种意义上具有普适性质,就像经典的线性达朗贝尔方程那样,在很多物理现象问题中都可以遇到它们.例如,近些年来发现在等离子体光纤通信中都有孤立子现象,科学家还认为神经细胞轴上传导的冲动、木星上的红斑等都可看做是孤立子.孤立子不仅反映了自然界中一类广泛的非线性现象,而且它具有波和粒子双重特性,这引起物理学家极大兴趣,尝试用它来描述基本粒子.同时也促使数学家对研究孤立子的理论给予更大的关注.

逆散射方法(或散射反演方法)是求解具有孤立子解的特殊非线性方程的重要方法.这一方法的特征是将这类非线性问题的解转化为线性问题来求解,最初是伽德纳(Gardner,C.S.)等人于 1967 年首先对 KdV 方程提出的.他们发现 KdV 方程和微分算子的特征值问题

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}+u\right)\psi=\lambda\psi$$

有密切的关系.特别地,若微分算子

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}+u\right)$$

中所含 u(称为位势)取为 KdV 方程的解时,算子的特征值 λ 与时间 t 无关.于是求解 KdV 方程的初值问题可以转化为求解上述特征值问题的正问题和反问题.其正问题是指已知初值 $u(x,0)=f(x)$,求出与算子

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}+u\right)$$

的特征值等相关的一组量.这一组量称为散射量.其反问题是指已知 t 时刻的散射量来反求位势 $u(x,t)$.散射量本身随时间 t 的演化规律通常较简单,关键的过程是求解反问题,而这一步通常化归为求解一个线性积分方程.伽德纳等人用这种逆散射方法(又称 IST)成功地解出了 KdV 方程的单个孤立子解,以及由 N 个孤立子叠加起来的 N 重孤立子解.1968 年,拉克斯(Lax,P.D.)对伽德纳等人所采用的 IST 方法的基本思想从泛函分析的观点做出了更加明确的刻画,他指出 KdV 方程可以写成 $L_t=[A,L]$形式,其中$[A,L]=AL-LA$,L 和 A 为与 u 有关的线性常微分算子.由于它在孤立子理论中的重要作用,后人便将它称为拉克斯方程,并将其 L 和 A 称为拉克斯对.此后又有许多人考察了一类二阶矩阵常微分算子的特征值问题,导出了与之相连的一族广泛的非线性演化方程,并建立了与该特征值问题的反问题相关联的线性积分方程.从此,散射反演方法逐渐发展成一种精确求解非线性方程初值问题的重要方法.

另一种求解方法是应用贝克隆(Backlund,B.)变换,这是一种将方程的一个解变成另一个解的变换.利用它常可从方程的平凡解(如 $u=0$)出发,经简单积分或代数运算导出方程的一系列特解.一个典型例子是:$B_a:u_0\to u_1$,这里 u_1 是由

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_1-u_0}{2}\right)=a\sin\left(\frac{u_1+u_0}{2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1+u_0}{2}\right)=\frac{1}{a}\sin\left(\frac{u_1-u_0}{2}\right)$$

确定的.只要 u_0 是 SG 方程的解(参见"正弦-戈登方程(SG 方程)"),则由上式可解出 u_1,它也是 SG 方程的解.式中 a 为自由参数.特别地,取平凡解 $u_0=0$,可解得

$$u_1=4\tan^{-1}\left[\exp\left(\pm\frac{x-at}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right],$$

这是 SG 方程的一种孤立子解,称之为扭,解中的正负号分别代表两种相反的旋转方向(正扭与反扭).贝克隆变换的一个重要性质是它的可交换性 $B_aB_b=B_bB_a$,其中 B_a 表示参数为 a 的贝克隆变换.由此性质可以导出解的非线性叠加公式:

$$\tan\left(\frac{u_3-u_0}{4}\right)=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\tan\left(\frac{u_1-u_2}{4}\right),$$

其中 $u_1=B_{a_1}u_0$,$u_2=B_{a_2}u_0$,$u_3=B_{a_1}B_{a_2}u_0$.取 $u_0=0$ 时

的 u_1,u_2，即为上述的“扭”孤立子解，代入上面的叠加公式就得 SG 方程的两重孤立子解

$$\tan\left(\frac{u}{4}\right)=\frac{\sinh(at/\sqrt{1-a^2})}{\cosh(x/\sqrt{1-a^2})}.$$

令 $a=ib$，得

$$\tan\left(\frac{u}{4}\right)=\frac{\sin(bt/\sqrt{1+b^2})}{b\cosh(x/\sqrt{1+b^2})}.$$

图象为正扭与反扭周期地接近又离开，如一个鼻孔呼吸，故又称“呼吸子”. 应用贝克隆变换可有效地求出一些非线性方程的特解，其中有些用散射反演法难以得到. 20 世纪 70 年代以来已发展了一些新的方法.

散射反演方法之所以获得成功，是因为它所处理的这类方程都可以写成一对线性方程 $\psi_x=U\psi$ 与 $\psi_t=V\psi$ 的可积条件 $\psi_{xt}=\psi_{tx}$，亦即

$$U_t-V_x+[U,V]=0,$$

这里 U,V 是某些方阵. 凡是可以作为这样的关于 ψ 的线性方程组的可积条件的非线性方程，称为可积型的.

一个物理量 $u(x,t)$ 的非线性演化方程的守恒律可用散度形式的微分方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

来描述，其中守恒密度 U 与对应流量 F 都是依赖于未知函数 $u(x,t)$ 的. 从物理学上讲，积分 $\int U\mathrm{d}x$ 就是一个不因时间而变化的物理量. 具有孤立子解的非线性演化方程有无穷多个守恒律，因而也有无穷个守恒的物理量.

非线性物理学中一些基本方程诸如规范场论中的自对偶杨-米尔斯方程、引力场理论中的轴对称稳态爱因斯坦方程，还有一系列流体力学、非线性光学、等离子体物理中有重要应用的方程，都可应用孤立子波来解释某些物理现象. 与此同时，孤立子理论的研究大大丰富了数学物理方程的理论并促进了与之相关的如李群、辛流形、代数几何、函数论等数学分支的发展.

孤立子(soliton)　见“孤立子理论”.

孤立子波(solitary wave)　见“孤立子理论”.

拉克斯方程(Lax equation)　见“孤立子理论”.

拉克斯对(Lax pair)　见“孤立子理论”.

逆散射问题方法(the method of inverse scattering problem)　亦称散射反演法或反散射变换法(IST). 求解具有孤立子解的非线性方程的一种数学方法. 这方法的要点是应用微分算子的特征值问题并将非线性问题化为线性积分方程求解. 这个方法首先是由伽德纳(Gardner，C. S)等人于 1967 年针对 KdV 方程求解得到的. 他们发现 KdV 方程与微分算子的特征问题

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+u\right)\psi=\lambda\psi$$

密切相关. 当微分算子

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+u\right)$$

中所含 u(称为位势)取作 KdV 方程的解时，算子的特征值 λ 与时间 t 无关. 于是，求解 KdV 方程的初值问题可以转化为求解上述特征值问题的正问题和反问题. 其正问题是指已知初值 $u(x,0)=u_0(x)$ 求出与算子

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+u\right)$$

的特征值等相关的一组量. 这一组量称为散射量. 其反问题是已知 t 时刻的散射量来复原位势 $u(x,t)$. 散射量本身随着时间 t 的演化规律十分简单，关键的步骤是求解反问题，而这一步骤归结为求解一个线性积分方程. 这样，最后求得 KdV 方程的单个孤立子解，以及由 N 个孤立子叠加起来的 N 重孤立子解. 1968 年，拉克斯(Lax，P. D.)对前人的思想从泛函分析的角度作了更加明确的表述，指出 KdV 方程可以写成 $L_t=[A,L]$形式，其中$[A,L]=AL-LA$，L 和 A 为与 u 有关的线性常微分算子. 这个方程称为拉克斯方程，它在孤立子理论中具有重要作用. 此后又有许多人考察了一类二阶矩阵常微分算子的特征值问题，导出了与之相关的一族广泛的非线性演化方程，并建立了与该特征值问题的反问题相关联的线性积分方程组. 自此之后，逆散射问题方法逐渐发展成一种求解非线性方程初值问题的系统方法.

散射反演法(scattering inversion method)　即“逆散射问题方法”.

反散射变换法(the method of inverse scattering transformation)　即“逆散射问题方法”.

散射量(scattering quantity)　见“逆散射问题方法”.

贝克隆变换(Backlund transformation)　寻求某些含孤立子解的非线性方程特解的一种数学方法. 指将方程的一个解变为另一个解的一类未知函数与自变量的变换关系式. 贝克隆变换的一个典型例子是求解 SG 方程的 B 变换 $B_a:u_0\to u_1$，其中 u_1 是由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u_1-u_0}{2}\right)=a\sin\left(\dfrac{u_1+u_0}{2}\right),\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{u_1+u_0}{2}\right)=\dfrac{1}{a}\sin\left(\dfrac{u_1-u_0}{2}\right)\end{cases}$$

确定的，若 u_0 是 SG 的正弦-戈登方程解，则由上式可解出 u_1，它也是 SG 方程的解. 式中 a 为自由参

数. 特别地, 取平凡解 $u_0=0$, 可解得

$$u_1=4\tan^{-1}\left[\exp\left(\pm\frac{x-at}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right].$$

这是 SG 方程的一种孤立子解, 称之为扭, 解中的正负号分别代表两种相反的旋转方向(正扭与反扭). 贝克隆变换具有可交换性 $B_aB_b=B_bB_a$, 其中 B_a 表示参数为 a 的贝克隆变换. 由此性质可以导出解的非线性叠加公式:

$$\tan\left(\frac{u_3-u_0}{4}\right)=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\tan\left(\frac{u_1-u_2}{4}\right),$$

其中 $u_1=B_{a_1}u_0, u_2=B_{a_2}u_0, u_3=B_{a_1}B_{a_2}u_0$. 取 $u_0=0$ 时的 u_1, u_2, 即为此述的"扭"孤立子解, 代入上面的叠加公式就得 SG 方程的两重孤立子解

$$\tan\left(\frac{u}{4}\right)=\frac{\sin h(at/\sqrt{1-a^2})}{\cos h(x/\sqrt{1-a^2})}.$$

令 $a=ib$, 得

$$\tan\left(\frac{u}{4}\right)=\frac{\sin(bt/\sqrt{1+b^2})}{b\cos h(x/\sqrt{1+b^2})},$$

图象为正扭与反扭周期地接近又离开, 如一个鼻孔呼吸, 故又称呼吸子. 应用贝克隆变换可有效地求出一些非线性方程的特解, 自 20 世纪 70 年代以来已发展了不少新的贝克隆变换方法.

呼吸子(breather)　见"贝克隆变换".

KdV 方程(Korteweg-de Vries equation)　一个含孤立子波解的非线性方程. 其形如

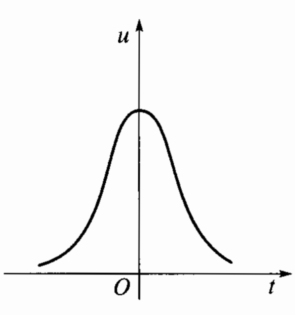
$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0\ (\text{或 } u_t-6uu_x+u_{xxx}=0).$$

它含有如下孤立子波解:

$$u(x,t)=2a^2\mathrm{sech}^2[a(x-4a^2t)].$$

它的图形如右图所示. 由图可见, 此解的图形像一个孤立的脉冲, 其波峰高 $2a^2$, 速度为 $4a^2$. 这种波解的特征是其波形和速度在相互碰撞后仍能保持不变.

KdV 方程的求解是应用逆散射问题方法的典型例子. 其解表示的孤立子波形与初始函数 $u_0(x)=u(x,0)$ 密切关联. 例如, 当取 $u_0(x)=2\mathrm{sech}^2x$ $(a=1)$ 时, 可得到解为 $u(x,t)=2\mathrm{sech}^2(x-4t)$, 这即是上述的单个孤立子波解. 当取 $u_0(x)=6\mathrm{sech}^2x$ $(a=1)$ 时, 可得方程的解为



KdV 方程孤立子波解的图形

$$u(x,t)=12\frac{3+4\cos h(2x-8t)+\cos h(4x-6t)}{[3\cos h(x-28t)+\cos h(3x-36t)]^2}.$$

当 $|t|$ 值很大时, 此解由分开很远的两个孤立子波组成, 其振幅分别是 8 和 2. KdV 方程与应用物理学, 特别是基本粒子物理学中的许多非线性问题密切相连, 因此它引起物理和数学家的高度重视.

正弦-戈登方程(**SG 方程**)(Sine-Gordon equation)　一个含孤立子波解的非线性方程. 其形如

$$u_{tt}-u_{xx}=\sin u \tag{1}$$

或者

$$u_{\xi\eta}=\sin u. \tag{2}$$

(方程(1)与(2)可通过可逆坐标变换

$$\xi=\frac{1}{2}(x+t),\quad \eta=\frac{1}{2}(x-t)$$

而互相转换).

SG 方程的孤立子解可应用贝克隆变换法获得(参见"孤立子理论"). 因它与近代物理学的非线性问题(特别是基本粒子的孤立子现象)的密切联系, 使得物理学家、数学家对它产生了很大的兴趣.

非线性薛定谔方程(nonlinear Schrödinger equation)　一个含有孤立子波解的非线性方程. 其形如

$$iu_t+u_{xx}+\alpha|u|^2u=0\quad(\alpha>0, i=\sqrt{-1})$$

它与诸如非线性光学、等离子体的离子声波等理论物理中的许多非线性问题密切相关. 它的解可应用与线性薛定谔方程的特征值问题相关的逆散射问题方法求得.

投达晶格方程(Toda lattice equations)　亦称投达链. 一个含有孤立子波解的方程组. 指描述基本粒子最近邻间具有指数相互作用的微分-差分方程组. 它的形式为

$$\frac{d^2x_n}{dt^2}=e^{x_{n+1}-x_n}-e^{x_n-x_{n-1}}\quad(-\infty<n<\infty), \tag{1}$$

其中 $x_n=x_n(t)$ 可理解为点阵中第 n 个原子的坐标. 式(1)还可表为如下形式

$$\dot{C}_n=C_n(v_n-v_{n-1}), \dot{v}_n=C_{n+1}-C_n, \tag{2}$$

其中 $v_n=\dot{x}, C_n=\exp(x_n-x_{n-1}), C_n>0$.

投达链的初值问题可用逆散射问题方法讨论, 它的解一般含有多个孤立子. 显然, 它们对于原子和粒子物理学的许多非线性问题的研究具有重要意义.

投达链(Toda chain)　即"投达晶格方程".

马尔齐考方程(Marchenko equation)　逆散射理论中的一个重要的积分方程. 它的形式为

$$\begin{cases} K(x,y)+M(s,y) \\ \qquad +\displaystyle\int_x^\infty K(x,s)M(s,y)\mathrm{d}s=0 & (y\geqslant x), \\ K(x,y)=0 & (y<x). \end{cases}$$

对于固定的 x, 这是一个关于未知函数 $K(x,y)$ 对称的 Fredholm 积分方程, 通常它有惟一解. 如果 $K(x,y)$ 为已知, 而看成是关于未知函数 $M(x,y)$ 的方程, 那么它就是对于任意固定的 y 是(关于 x) Volterra 型惟一可解的方程.

KP 方程(Kadomtsev-Petviashvili equation) 一个二维含孤立子波解的非线性方程.其形如

$$3\varphi_{yy} = \{\varphi_t + 3(\varphi^2)_x + \varphi_{xxx}\}_x, \tag{1}$$

这个方程的平面孤立子解(类似于多维波方程的平面波)可以从马尔齐考方程得到.但是,它们对垂直于其传播方向的扰动是不稳定的.还可证明,此方程有真正的二维孤立子解,这些孤立子彼此没有相互作用.KP 是至今多维且具有真孤立子解的惟一已知的方程.一般的单孤立子解具有形式

$$\varphi = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\{\frac{1}{a^2\sin\eta} + \sin\eta(x-3a^2t) + ae^{i\eta}[y+2at\cos(\eta)]l^2\}, \tag{2}$$

而且含有自由参数 a,η 以及一个自由选择的空间和时间变量的原点.不难看出,$|\varphi|$ 在各个方向上都随 $(x^2+y^2)^{-1}$ 而减小.

布森内斯克方程(Boussinesq equation) 一个含有孤立子波解的非线性方程.是法国力学家、理论物理学家布森内斯克(Boussinesq,J.V.)于 1872 年在浅水波的研究中导出的.其形式为

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} - (\varphi^2)_{xx} + \frac{1}{3}\varphi_{xxxx} = 0.$$

此方程代表了 KdV 方程的一种推广,它允许孤立子在两个方向上传播,对于它的 N 孤立子解已经找到.

焦斯特解(Jost solution) 薛定谔方程的一个解.若用 $f_l(k,r)$ 表示焦斯特解,则它满足薛定谔方程

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi_l(k,r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\psi_l(k,r) = V(r)\psi_l(k,r), \tag{1}$$

其中 $V(r)$ 是中心势,k 是波数,l 为非负整数.方程(1)的两个线性无关解表为 $u_l(k,r)$ 与 $w_l(k,r)$,它们满足

$$u_l(k,r) = \left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(k,r), \tag{2}$$

其中 J_ν 是 ν 阶贝塞尔函数,而

$$u_l \xrightarrow{r\to 0} \frac{(kr)^{l+1}}{(2l+1)!!}, \tag{3}$$

$$u_l \xrightarrow{r\to\infty} \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi), \tag{4}$$

$$W_l(k,r) = \mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\pi l)\left(\frac{\pi}{2}kr\right)^{1/2} H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(kr), \tag{5}$$

其中 $H^{(1)}_\nu$ 是 ν 阶第一类汉克尔函数.而

$$W_l(k,r) \xrightarrow{r\to 0} (-1)^l[(2l-1)!!](kr)^{-l}. \tag{6}$$

$$W_l(k,r) \xrightarrow{r\to\infty} e^{\mathrm{i}\pi l/2}\cdot e^{\mathrm{i}kr}. \tag{7}$$

焦斯特解 $f_l(k,r)$ 满足:

$$\lim_{r\to\infty}\{e^{-\mathrm{i}\pi l/2}\cdot e^{-\mathrm{i}kr}f_l(k,r)\} = 1. \tag{8}$$

这样,在自由运动情况下,f_l 就退化为 W_l.而在条件

$$\int_b^\infty |V(r)|r\mathrm{d}r < \infty \quad (b \geqslant 0) \tag{9}$$

之下,解 f_l 存在,且满足

$$\lim_{r\to\infty}\{f_l(k,r) - e^{\mathrm{i}\pi l/2}\cdot e^{\mathrm{i}kr}\} = 0, \tag{10}$$

$$\lim_{r\to\infty}\{f'_l(k,r) - \mathrm{i}ke^{\mathrm{i}\pi l/2}\cdot e^{\mathrm{i}kr}\} = 0. \tag{11}$$

焦斯特函数(Jost function) 孤立子理论的一个重要函数.它是与焦斯特解密切相关且在逆散射问题中起重要作用的一个函数.焦斯特函数 F_l 如下定义

$$F_l(k) = (-k)^l W\{f_l(k,r), \varphi_l(k,r)\}, \tag{1}$$

其中 $f_l(k,r)$ 为焦斯特解(参见"焦斯特解"),$\varphi_l(k,r)$ 为薛定谔方程的正则解,且满足

$$\lim_{r\to 0}(2l+1)!!\ r^{-(l+1)}\cdot\varphi_l(k,r) = 1 \tag{2}$$

及

$$\varphi_l = \frac{1}{2}\mathrm{i}k^{-l-1}\{F_l(k)f_l(-k,r) - (-1)^l F_l(-k)f_l(k,r)\}. \tag{3}$$

而 $W\{f_l(k,r),\varphi_l(k,r)\}$ 表示 $f_l(k,r),\varphi_l(k,r)$ 的朗斯基行列式.焦斯特函数 $F_l(k)$ 的一个重要性质是它满足关系

$$F_l(-k) = \{F_l(k)\}^* \quad (k\ 为实数). \tag{4}$$

其中 * 表示复共轭.对于正则势来说,薛定谔方程在原点取零值的解是存在惟一的.由散射理论中所知的物理原因,物理波函数 ψ_l 也必定在原点取零值.因而 ψ_l 是解 φ_l 的倍数,而 ψ_l 的渐近行为是

$$\psi_l \xrightarrow{r\to\infty} \exp(\mathrm{i}\delta_l)\sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right), \tag{5}$$

其中 δ_l(实数)是相移,它与能量或动量 k 相关.将 $F_l(k)$ 写作

$$F_l(k) = |F_l(k)|\exp[-\mathrm{i}\delta_l(k)], \tag{6}$$

由 φ_l 的性质得

$$\varphi_l \xrightarrow{r\to\infty} |F_l(k)|k^{-(l+1)}\sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right). \tag{7}$$

这表明,物理解为

$$\psi_l = k^{l+1}(F_l(k))^{-1}\varphi_l, \tag{8}$$

盖尔芳特-列维坦方程(Gel'fand-Levitanequation) 孤立子理论的重要方程之一.指逆散射理论中的一个重要积分方程.它的形式为

$$K(r,t) + G(r,t) + \int_0^r K(r,s)G(s,t)\mathrm{d}s = 0, \tag{1}$$

其中

$$G(r,t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin Kr}{K}\frac{\sin Kt}{K}\mathrm{d}\sigma(E). \tag{2}$$

而 σ 是谱测度 ρ 和自由谱测度 ρ_0 之差.对于每一固定的 r,方程(1)是 $K(r,t)$ 的第二个变量 t 的弗雷德霍姆方程,它的解的存在惟一性与 $\mathrm{d}\sigma(E)$ 有关.

SG 方程的简单(孤立子)解(simple solution of Sine-Gordon equation) 正弦-戈登方程的一些简

单的孤立子解. SG 方程可表为两种形式：

$$u_{\xi\eta} = \sin u, \quad (1)$$

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = 0, \quad (2)$$

其中

$$\xi = \frac{1}{2}(x+t), \ \eta = \frac{1}{2}(x-t),$$

$$\varphi(x,t) = u(\xi,\eta).$$

称方程(1)为 SG 方程的“几何”形式，称方程(2)为 SG 方程的“物理”形式. 它们的解与本征值问题

$$\left[-\mathrm{i}\sigma_3\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2 u_x(x,t)\right]\psi = k\psi \quad (3)$$

相关. 方程(1)(或(2))之典型的孤立子解主要是：

1. 单孤立子解：

$$u_{\xi\eta} = 4\tan^{-1}\left[s\exp\left(-2k\xi - \frac{\eta}{2k} - C\right)\right], \quad (4)$$

$$\varphi(x,t) = 4\tan^{-1}[s\exp(-r(x-x_0-vt))], \quad (5)$$

其中

$$v = \frac{1-4k^2}{1+4k^2}, \quad r = \frac{1+4k^2}{4k} = (1-v^2)^{-1/2}.$$

2. 小振幅振荡解：在小振幅振荡的情况下，方程(2)可近似表成

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi = 0, \quad (6)$$

其解为

$$\varphi(x,t) = \mathrm{Re}\{\varphi_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx-t)}\}. \quad (7)$$

3. 受约束的双孤立子即呼吸子：

$$\varphi(x,t) = 4\tan^{-1}\frac{q\sin wr(t-t_0-vx)}{w\cosh qr(x-x_0-vt)}, \quad (8)$$

其中 k, r, w, q 是适当参数，且

$$2k = \exp(-a+\mathrm{i}b),$$

$$r = (1-v^2)^{-1/2} = \cosh a,$$

$$w = \sin b, \quad r = \cos b > 0,$$

$$v = \frac{1-4|k|}{1+4|k|} = \tanh a.$$

通过洛仑兹变换和对时空原点的平移，由(8)式可得“标准呼吸子”

$$\varphi_B(x,t) = 4\tan^{-1}\frac{q}{w}\frac{\sin wt}{\cosh qx}, \quad (9)$$

其中 $q^2+w^2=1$. 这个解描述一种稳定的脉动式客体，它可以看成一种受约束的孤立子-反孤立子对.

4. 孤立子-反孤立子对(在质心坐标系中)：

$$\varphi_s(x,t) = 4\tan^{-1}\frac{s}{v}\frac{\sin rvt}{\cosh rx}, \quad (10)$$

它是由(9)式通过对 w 的解析延拓得到的. 考虑 $v>0, s=-1$ 的情况，并用 $v=\mathrm{e}^{-rx_0}$ 定义 x_0，于是可得：

对于 $vt \ll -1$，

$$\varphi_{-1}(x,t) \approx -4\tan^{-1}[\mathrm{e}^{-r(x+x_0+v|t|)}] + 4\tan^{-1}[\mathrm{e}^{-r(x-x_0-v|t|)}];$$

对于 $vt \gg 1$，

$$\varphi_{-1}(x,t) \approx 4\tan^{-1}[\mathrm{e}^{-r(x+x_0+vt)}] - 4\tan^{-1}[\mathrm{e}^{-r(x-x_0-vt)}].$$

孤立子和反孤立子毫不变化地互相穿过，但是各自沿其运动方向却受到一个平移，即

$$x_0 = r^{-1}\ln v^{-1} = \frac{4k}{4k^2+1}\ln\frac{1+4k^2}{1-4k^2}, \quad (11)$$

这个平移可以解释为吸引相互作用的结果.

5. 双孤立子：

$$\varphi = 4\tan^{-1}\frac{s\cos hrvt}{v\sin hrx},$$

对于 $|t| \gg 1$，取(11)式的 x_0，可得

$$\varphi \approx 4s\tan^{-1}[\mathrm{e}^{-r(x-x_0-v|t|)}] + 4s\tan^{-1}[\mathrm{e}^{-r(x+x_0+v|t|)}].$$

波格方程(Burgers equation)　孤立子理论的重要方程之一. 一种带有非线性项的扩散方程. 其形式为

$$\varphi_t = 2\varphi\varphi_x + \varphi_{xx}, \quad (1)$$

它可写成定域守恒律的形式

$$\varphi_t - [\varphi^2 + \varphi_x]_x = 0, \quad (2)$$

作变换

$$\psi = \exp\left(\int^x \varphi\,\mathrm{d}x\right), \ \varphi = \frac{\psi_x}{\psi}. \quad (3)$$

再应用(1)，(2)式可得

$$\psi_t = \psi_{xx}, \quad (4)$$

于是波格方程的初值问题可精确求解. 孤立子波可由试解 $\psi(x,t)=\psi(x-ct)$ 求得. Burger 方程的精确可解性诱导人们以此方程作为例子进行两孤立子波之间相互作用的研究. 从(4)式的解，能够得到如下形式的两个孤立子波：

$$\psi(x,t) = a\{1+\exp[-C_1(x-x_1-C_1t)] + \exp[-C_2(x-x_2-C_2t)]\},$$

其中 a, C_1, C_2, x_1 及 x_2 为适当的常数.

量 子 力 学

量子力学(quantum mechanic)　理论物理学的一个分支学科. 它是反映微观粒子运动规律的理论，是研究原子、分子、凝聚态物质以至原子核和基本粒子的结构和性质的基础理论. 它是 20 世纪 20 年代，在总结大量实验事实和旧量子论的基础上建立起来的. 量子力学不仅是近代物理学的基本理论之一，而且在化学等有关学科和许多近代技术中也得到了广泛的应用. 在人们认识到光具有波动和微粒的二象性之后，为了解释一些经典理论无法解释的新现象，法国物理学家德布罗意(de Broglie, L. V.)于 1923 年提出微观粒子具有波粒二象性的假说. 他认为：正如光具有波粒二象性一样，实体的微粒(如电子、原子等)也具有波粒二象性. 这一假说不久就为实验所证实. 由于微观粒子具有波粒二象性，微观粒子所遵循的运动规律就不同于宏观物体的运动规律，描述微观粒子运动规律的量子力学也就不同于描述宏观

物体运动规律的经典力学.当粒子的大小由微观过渡到宏观时,其所遵循的规律也由量子力学过渡到经典力学.经典力学是量子力学的极限情况.在量子力学中,粒子的状态用态矢量描述.选定特定的表象,如坐标表象后用波函数 $\Psi(r,t)$ 描述,它是坐标 r 和时间 t 的复函数.在坐标为 r 处的体积元 $d\tau$ 内粒子出现的概率为 $P(r,t)$,

$$P(r,t)=C|\Psi(r,t)|^2 d\tau,$$

式中 C 是一个常数.描述微观粒子的波函数 $\Psi(r,t)$ 所满足的方程是薛定谔方程,其形式为

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi+U(r,t)\Psi,$$

式中 μ 是粒子质量,$U(r,t)$ 是粒子所在力场的势函数.波函数除满足薛定谔方程外,还必须满足在变量变化的全部区域内是单值、除有限个点外是有限和连续的,称为波函数的标准条件.量子力学中力学量所取的形式也不同于经典力学中的力学量.当微观粒子处于某一状态时,它的力学量如坐标、动量、角动量、能量等,一般不具有确定的数值,而具有一系列可能值,每个可能值以一定的概率出现.当粒子所处的状态确定时,力学量具有某一可能值的几率也就完全确定.

量子力学是在旧量子论建立之后发展建立起来的.旧量子论对经典物理理论加以某种人为的修正或附加条件以便解释微观领域中的一些现象.由于旧量子论不能令人满意,人们在寻找微观领域的规律时,从三条不同的途径建立了量子力学.首先,1925 年,德国物理学家、数学家海森伯(Heisenberg,W. K.)、玻恩(Born,M.)、若尔当(Jordan,E. P.)等人从修改经典分析力学的途径建立了矩阵力学.其次,奥地利学者薛定谔(Schrödinger,E.)根据德布罗意的波粒二象性假说于 1926 年建立了波动力学.第三,弗曼(Feynman,R. P.)用泛函,从路径积分建立了量子力学.后来,薛定谔、英国物理学家狄喇克(Dirac,P. A. M.)等人证明了这些表述方式是完全等价的,是统一的量子力学的不同描述方式.

量子力学中的算符(operators in quantum mechanics) 描述量子力学中力学量的运算符号.在量子力学中,当微观粒子处于某一状态时,它的力学量(如坐标、动量、角动量、能量等)一般不具有确定的数值,而是具有一系列可能值,每个可能值以一定的概率出现.当粒子所处的状态确定时,力学量具有某一可能值的概率也就完全确定.如氢原子中的电子处于某一束缚态时,其坐标和动量均没有确定值,而坐标具有某一确定值 r_0 或动量具有某一确定值 P_0 的概率却是完全确定的.量子力学中力学量的这些特点是经典力学中的力学量所没有的.为了反映这些特点,在量子力学中引进算符来表示力学量.

算符是对波函数进行某种数学运算的符号.在代表力学量的文字上加“ˆ”号以表示这个力学量的算符.如坐标算符 $\hat{r}$、在直角坐标系中动量算符为 $\hat{P}$.当粒子的状态用波函数 $\Psi(r,t)$ 描写时,坐标算符 $\hat{r}$ 对波函数的作用就是 r 乘 $\Psi(r,t)$,动量算符 $\hat{P}$ 对波函数的作用则是微分

$$\hat{P}\Psi(r,t)=\frac{\hbar}{i}\nabla\Psi(r,t),$$

可简单写为

$$\hat{P}=\frac{\hbar}{i}\nabla.$$

其他有经典类比的力学量都是 r 和 P 的函数,在量子力学中也是算符 $\hat{r}$ 和 $\hat{P}$ 的相应的函数.例如粒子绕原点的角动量在经典力学中是 $L=r\times P$,因而在量子力学中角动量算符是 $\hat{L}=\hat{r}\times\hat{P}$.又如,在势为 $U(r,t)$ 的力场中运动的粒子能量算符(也称哈密顿算符)为

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2\mu}+U(r,t)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(r,t).$$

波函数(wave function) 量子力学中描写微观系统状态的函数.在坐标表象中,它是坐标 r 和时间 t 的复函数,用 $\Psi(r,t)$ 表示.$\Psi(r,t)$ 与粒子在 r 处体积元 $d\tau$ 内出现的概率 $P(r,t)$ 有如下关系:

$$P(r,t)=C|\Psi(r,t)|^2 d\tau,\tag{1}$$

其中 C 是常数.一个微观系统的波函数,满足薛定谔方程.处于具体条件下的微观系统的波函数,可由相应的薛定谔方程解出.例如,描写具有确定动量 P 和能量 E 的自由粒子状态的波函数是

$$\Psi=A\exp\left[\frac{i}{h}(P\cdot r-Et)\right],\tag{2}$$

由 $|\Psi(r,t)|^2=|A|^2=$ 常量,说明自由粒子在空间各点出现的概率相同.把波函数的绝对值二次方解释为与粒子在时刻 t、在单位体积内出现的概率成比例是玻恩(Born,M.)在奥地利学者薛定谔(Schrödinger,E.)建立波动力学后提出的,被称为是波函数的统计解释.波函数所表示的波也称为概率波.波函数对整个空间积分即为粒子在空间各点出现概率之和,其值应为 1,即

$$\int P(r,t)d\tau=C\int|\Psi(r,t)|^2 d\tau=1.$$

若令 $\Psi'(r,t)\equiv\sqrt{C}\Psi(r,t)$,那么

$$\int|\Psi'(r,t)|^2 d\tau=1,$$

这个条件称为波函数的归一化条件,满足此条件的波函数 $\Psi'(r,t)$ 称为归一化波函数.

归一化波函数(Normalizing wave function) 见“波函数”.

本征函数(eigenfunction) 一个特殊函数.指算符 $\hat{F}$ 作用于函数 $f(r)$ 上,得出的另一个函数.若

算符 $\hat{F}$ 作用于一些特定的函数 $u_i(r)$ 上($i=1,2,\cdots$),结果等于一常量乘同一函数,即

$$\hat{F}u_i(r) = F_i u_i(r),$$

则常数 F_i 称为算符 $\hat{F}$ 的本征值,$u_i(r)$ 称为属于这个本征值的本征函数.上式称为算符 $\hat{F}$ 的本征值方程.在量子力学中,一个力学量所可能取的数值,就是它的算符的全部本征值.本征函数所描写的状态称为这个算符的本征态.在自己的本征态中,这个力学量取确定值,即这个本征态所属的本征值.

本征值(eigenvalue) 量子力学的概念之一.指算符 $\hat{F}$ 作用于本征函数所得到的相应本征函数的常系数因子.(参见"本征函数").

力学量的期待值(expectation value of an observable) 量子力学的基本概念之一.指在量子力学中,力学量 F 作用于波函数上的算符 $\hat{F}$ 表示.在数学上,对于一个算符满足 $\hat{F}u_i = F_i u_i$ 的函数 $u_i(r)$ 称为 $\hat{F}$ 的本征函数,F_i 是与 r 无关的数,称为本征值.若 $u_i(r)$ 描写微观粒子的状态,则它必须满足单值、连续和有限的标准条件.在这种限制之下,上式中的本征值可以取一系列分立值,或取一定范围内的连续数值.在测量力学量 F 时,观察到的只能是它的本征值.若一个力学量的本征值具有分立谱,那么这个力学量是量子化的.

量子力学中假定力学量的全部本征函数组成一个完全系,这意思是说,描写体系的任一状态的波函数 Ψ 均可以用力学量算符 $\hat{F}$ 的本征函数 u_i 展开:

$$\Psi(r,t) = \sum_i C_i(t)u_i(r).$$

在 Ψ 和 u_i 都是归一化的情况下,上式中的展开系数 C_i 的物理意义是:在 Ψ 态中测量力学量 F 时,得到结果为 F_i 的概率是 $|C_i|^2$.因此,若微观粒子的定态波函数是某力学量算符 $\hat{F}$ 的本征函数 $u_i(r)$,则在这一状态中,力学量 F 取确定值 F_i.在 Ψ 态中对力学量 F 进行多次测量,把所得结果加以平均,就得出力学量 F 在 Ψ 态中的期待值,以 $\langle F\rangle$ 表示

$$\langle F\rangle = \sum_i |C_i|^2 F_i = \int \Psi^* \hat{F}\Psi \mathrm{d}\tau,$$

上式称为力学量的期待值公式.若 Ψ 不是归一化的,那么期待值公式应写为

$$\langle F\rangle = \frac{\int \Psi^* \hat{F}\Psi \mathrm{d}\tau}{\int \Psi^* \Psi \mathrm{d}\tau}.$$

力学量的期待值公式(Formula of expectation value for an observable) 见"力学量的期待值".

测不准关系(uncertainty relation) 亦称测不准原理.量子力学的基本规律之一.在同一个态中同时测量两个对易算符对应的力学量之间的不确定关系.例如对坐标和动量,其数学表达式为

$$\Delta x \Delta P_x \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

该式说明在同一个态中同时测量坐标和动量时,准确程度所受的限制.设粒子处于波函数 $\Psi(x)$ 所描写的状态,$\Psi(x)$ 是归一化的.在此状态中,粒子坐标 x 的期待值为

$$\langle x\rangle = \int \Psi^*(x)x\Psi(x)\mathrm{d}x,$$

$\langle x\rangle$ 是在 $\Psi(x)$ 状态中多次测量粒子的坐标 x 的平均结果.只有当 x 在 $\Psi(x)$ 态中有确定值时,每次测得的 x 值都一样,这个数值就是期待值 $\langle x\rangle$.在一般情况下,x 在 $\Psi(x)$ 中没有确定值,每次测得的 x 值并不相同,它们与期待值 $\langle x\rangle$ 之间有一偏差 $x-\langle x\rangle$.以下式定义的均方根偏差 Δx 表示多次测得 x 的值与期待值 $\langle x\rangle$ 偏差的程度:

$$\Delta x \equiv [\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle]^{\frac{1}{2}} = \left[\int \Psi^*(x-\langle x\rangle)^2\Psi \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

如坐标在 $\Psi(x)$ 中有确定值,则 Δx 等于零.同样,$\hat{P}_x$ 的期待值为

$$\langle P_x\rangle = \int \Psi^*(x)\hat{P}_x\Psi(x)\mathrm{d}x .$$

以

$$\Delta P_x \equiv [\langle (P_x-\langle P_x\rangle)^2\rangle]^{\frac{1}{2}} = \left[\int \Psi^*(P_x-\langle P_x\rangle)^2\Psi \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

表示在 $\Psi(x)$ 态中多次测得动量 P_x 的值与期待值 $\langle P_x\rangle$ 偏差的程度,量子力学中证明了

$$\Delta x \Delta P_x \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

这个关系就是坐标 x 和动量 P_x 之间的测不准关系.当表示两个力学量的算符 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 相互对易时,有共同本征态.在这些共同本征态中测量 F 和 G,它们都有确定值.

测不准原理(uncertainty principle) 即"测不准关系".

量子跃迁(quantum transition) 亦称能级跃迁.量子力学的基本概念之一.指任何一种量子力学体系状态在外界作用下发生跳跃式变化的过程.原子在光的照射下从高(低)能级跳到低(高)能级,就是一种典型的量子跃迁过程,通常称为能级跃迁.在原子状态发生跃迁的同时,将放出(吸收)一个光子,其能量 $h\nu$ 等于跃迁前后两状态的能量差.即使不受光的照射,处于激发状态的原子也能跃迁到较低能级,同时放出一个光子,这称为自发跃迁或自发辐射.量子跃迁的规律有明显的概率性,这是量子力学规律的根本特征.跃迁速率与外界作用势 V 以及跃迁前后状态(Ψ_1,Ψ_2)的性质有关,和跃迁矩阵元 $\langle\Psi_1|V|\Psi_2\rangle$ 的绝对值的幂次成比例.当做用势给定后,

一般仅当标志状态 Ψ_1,Ψ_2 的量子数之间满足一定关系时，跃迁矩阵元 $\langle\Psi_1|V|\Psi_2\rangle$ 才不等于 0，跃迁得以发生. 量子数之间的这种关系称为选择定则，不满足选择定则要求的两个状态之间不能发生跃迁，或者说相应的跃迁是禁戒的.

能级跃迁(energy level transition)　即"量子跃迁".

自发辐射(spontaneous radiation)　即"量子跃迁".

态叠加原理(superposition principle of states)　量子力学的基本原理之一. 如果 Φ_1 和 Φ_2 描述了粒子的可能状态，那么它们的线性叠加 Φ 也描述了系统的可能状态. 如果 Φ_1 和 Φ_2 都是薛定谔方程的解，那么 Φ_1 和 Φ_2 的线性叠加

$$\Phi = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2$$

也是薛定谔方程的解，式中 C_1,C_2 是复数.

定态(stationary state)　量子力学的基本概念之一. 指微观粒子所处状态的一种. 处于定态的微观粒子在空间各处出现的概率不随时间变化，而且具有确定的能量. 微观粒子的状态由波函数 $\Psi(r,t)$ 描写，$\Psi(r,t)$ 满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t)=-\frac{\hbar^2}{2u}\nabla^2\Psi(r,t)+U(r,t)\Psi(r,t).$$

当粒子所在的力场不随时间变化，即 $U(r,t)=U(r)$ 与时间无关时，上式的解可以写成

$$\Psi(r,t) = \Psi(r)e^{-\frac{iE}{\hbar}t}, \qquad (1)$$

式中 E 为常量. $\Psi(r)$ 所满足的方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2u}\nabla^2\Psi + U(r)\Psi = E\Psi. \qquad (2)$$

式(1)中的 $\Psi(r,t)$ 所描写的状态称为定态. 在定态中，粒子在空间一点 r 附近出现的概率与时间无关. 即有 $|\Psi(r,t)|^2=|\Psi(r)|^2$，因此，定态的波函数式(1)常简单地用 $\Psi(r)$ 来代替. 式(2)常被称为定态薛定谔方程. 在标准条件下解这个方程可以得出 E 的一组值. 对于 E 的一个值 E_i，可以解出相应的定态波函数 $\Psi_i(r)$. 当粒子处于 $\Psi_i(r)$ 所描写的状态时，粒子的能量为 E_i，E_i 的全部数值的集合，称为粒子的能谱. 能谱可以是分立的，也可以是连续分布的.

定态薛定谔方程(Stationary state Schrödinger equation)　见"定态".

粒子的能谱(energy spectrum of a particle)　见"定态".

薛定谔方程(Schrödinger equation)　量子力学的重要方程之一. 指量子力学中描述微观粒子状态随时间变化规律的偏微分方程. 它的形式为

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi+U(r,t)\Psi,$$

其中 $\Psi(r,t)$ 是描述微观系统状态的波函数，μ 是粒子的质量，$U(r,t)$ 是粒子所在力场的势函数，$i=\sqrt{-1}$，∇^2 为拉普拉斯算符，$\hbar$ 为普朗克常数.

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}.$$

薛定谔方程是奥地利数学家薛定谔(Schrödinger,E.)于 1926 年提出来的. 若给定初始边界条件，则问题的解 $\Psi(r,t)$ 原则上可求出. 量子力学要求波函数 $\Psi(r,t)$ 不但要满足薛定谔方程，还必须满足如下条件：波函数在变量变化的全部区域内是单值的，除有限个点外是有限的和连续的. 这个条件常被称为波函数的标准条件. 当势函数 $U(r,t)$ 与时间 t 无关时，方程的解可表为

$$\Psi(r,t) = \Psi(r)e^{-\frac{iEt}{\hbar}},$$

其中 $\Psi(r)$ 是定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi + U(r)\Psi = E\Psi \qquad (2)$$

的解，E 为系统的能量. 薛定谔方程的本征值问题在孤立子理论中具有重要的应用.

波函数的标准条件(Standard conditions of wave function)　见"薛定谔方程".

表象理论(representation theory)　量子力学的一个重要理论. 它是研究量子力学态矢量，算符的不同表示形式以及这些不同表示形式之间的变换的理论. 微观粒子系统的状态和力学量的具体函数表示形式称为表象. 例如，粒子体系的状态可用位置坐标为自变量、时间为参量的波函数 $\Psi(x,t)$ 来描述(仅考虑一维情况，多维情况本质相同)，$|\Psi(x,t)|^2$ 表示 t 时刻粒子在位置坐标 x 附近单位体积出现的概率. 但是 $\Psi(x,t)$ 可以用动量 $\hat{P}$ 的本征函数的完全、正交、归一系 $\{\Psi_P(x)\}$ 展开，即

$$\Psi(x,t) = \int C(P,t)\Psi_P(x)\mathrm{d}P, \qquad (1)$$

其中

$$\Psi_P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\exp\left(\frac{i}{h}Px\right),$$

展开系数为

$$C(P,t) = \int\Psi(x,t)\Psi_P^*(x)\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

可见，粒子体系的状态既可由已知的 $\Psi(x,t)$ 来描述，也可用 $C(P,t)$ 来描述. $\Psi(x,t)$ 和 $C(P,t)$ 是两种等价的不同形式的波函数. $\Psi(x,t)$ 称为坐标表象(或称 x 表象)波函数，$C(P,t)$ 称为动量表象(或称 P 表象)波函数.

类似地，$\Psi(x,t)$ 可用任一力学量的算符 $\hat{Q}$ 的本征函数完全系 $\{u_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 展开(为方便计，设 $\hat{Q}$ 的本征值具有分立谱)，即

$$\Psi(x,t) = \sum_n a_n(t)u_n(x). \qquad (3)$$

展开系数为

$$a_n(t) = \int \Psi(x,t) u_n^*(x) \mathrm{d}x. \tag{4}$$

因此，若已知 $\Psi(x,t)$，则同样可以通过式(4)算出 $a_n(t)$ 来，用集合 $\{a_n(t)\}$ 来描述这个状态，$\{a_n(t)\}$ 称为 Q 表象波函数. Q 表象中正交、归一的完全的本征函数系 $\{u_n(x)\}$ 是这一表象中的一组基，它相当于坐标系中的一组单位矢量，而波函数 $\{a_n(t)\}$ 是态矢量 Ψ 在 Q 表象中各基矢方向上的投影，这就是表象理论的几何图象. 表示力学量的算符，在不同表象中也有不同的表示形式. 在坐标表象中，各种力学量的算符形式是

$$\hat{F} = \hat{F}\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

其中 $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ 是动量算符. 算符 $\hat{F}$ 作用在 $\Psi(x,t)$ 上得到另一个新的波函数 $\Phi(x,t)$，即

$$\Phi(x,t) = \hat{F}\left(x, i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t). \tag{5}$$

在 Q 表象中可将 $\Psi(x,t)$ 和 $\Phi(x,t)$ 分别用算符 $\hat{Q}$ 的本征函数系 $\{u_n(x)\}$ 展开，展开系数的集合 $\{a_n(t)\}$ 和 $\{b_n(t)\}$ 就是 Q 表象中分别与 $\Psi(x,t)$ 和 $\Phi(x,t)$ 等价的波函数. 利用 $\{u_n(x)\}$ 正交、归一的性质，可得到

$$b_n(t) = \sum_m F_{nm} a_m(t), \tag{6}$$

其中

$$F_{nm} = \int u_n^*(x) \hat{F}\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) u_m(x) \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Q 表象中的式(6)和坐标表象中的式(5)相当，写成矩阵运算形式为

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1m} & \cdots \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nm} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{6'}$$

即在 Q 表象中，算符 $\hat{F}$ 的表示形式是把数字集合 $\{F_{nm}\}$ 排成如(6′)式右端的方形矩阵，而 F_{nm} 即为此矩阵中的第 n 行第 m 列的元素. 波函数 $\Psi(x,t)$ 和 $\Phi(x,t)$ 在 Q 表象中的表示形式，是把数字集合 $\{a_n(t)\}$ 和 $\{b_n(t)\}$ 分别排成一个列矩阵，即如(6′)式两端所表示的那样. 对于 $\hat{Q}$ 的本征值具有连续谱的情况，以上的论述仍然成立，只是 $\{u_n(t)\}$，$\{a_n(t)\}$ 和 $\{b_n(t)\}$ 等的角标 n 需换成连续变化的 λ，(7)式写成

$$F_{\lambda'\lambda} = \int u_{\lambda'}^*(x) \hat{F}\left(x, i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\lambda(x) \mathrm{d}x,$$

仍可把它看做矩阵元，$\{F_{\lambda'\lambda}\}$ 看成方矩阵，$\{a_\lambda(t)\}$ 和 $\{b_\lambda(t)\}$ 看做列矩阵，矩阵的行和列都是连续标号的.

一个特定的表象相当于在抽象的希耳伯特空间中选取的一个有一组完全基矢（本征函数系）的特定的坐标系，表象变换相当于坐标系基矢变换，从 A 表象变换到 B 表象，相当于由一组基矢 $\{\psi_n(x)\}$（$\hat{A}$ 的本征函数系）变换到另一组基矢 $\{\varphi_\alpha(x)\}$（$\hat{B}$ 的本征函数系），这种变换是通过一个变换矩阵 S 的作用来实现的. $\{\psi_n(x)\}$ 是完全系，B 表象中的每一基矢 $\{\varphi_\alpha(x)\}$ 都可按 $\{\psi_n(x)\}$ 展开：

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_n S_{n\alpha}\psi_n(x), \tag{8}$$

展开系数为

$$S_{n\alpha} = \int \psi_n^*(x)\varphi_\alpha(x)\mathrm{d}x.$$

它是 B 表象中基矢 $\varphi_\alpha(x)$ 在 A 表象中基矢 $\psi_n(x)$ 方向上的投影，$S_{n\alpha}$ 就是变换矩阵 S 的矩阵元.

根据本征函数正交、归一的性质知，

$$S^+S = SS^+ = 1.$$

从而 $S^+ = S^{-1}$，其中 S^+ 与 S^{-1} 分别为 S 的伴随矩阵和逆矩阵. 可见这个矩阵是一个幺正矩阵，式(8)中两种表象之间基矢的变换是一幺正变换.

量子力学中采用不同的表象在理论上是完全等价的，而在实际问题中选取什么表象要依具体情况而定，以使得问题简化为宜.

波动力学(wave mechanics)　见“表象理论”.

矩阵力学(matrix mechanics)　见“表象理论”.

坐标表象波函数(coordinate representation wave function)　见“表象理论”.

动量表象波函数(momentum representation wave function)　见“表象理论”.

旋量(spinor)　量子力学的基本概念之一. 指构成洛伦兹群的所有有限阶不可约表示的介于标量和矢量之间的一个量. 在量子力学中，用波函数 $\psi(x,y,z;\sigma)$ 描写粒子的定态，波函数是粒子在空间的位置 (x,y,z) 以及粒子自旋 σ 的函数. 若粒子的自旋为 1/2（即自旋角动量为 $\hbar/2$，$\hbar$ 为普朗克常数除以 2π），则描写这种粒子状态的波函数有两个分量：ψ_1 和 ψ_2. ψ_1 描写粒子自旋角动量为 $\hbar/2$ 的状态；ψ_2 描写粒子自旋角动量为 $-\hbar/2$ 的状态. 这时粒子的波函数可写成

$$\psi(x,y,z;\sigma) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y,z) \\ \psi_2(x,y,z) \end{pmatrix},$$

这个式子中的 ψ 称为旋量，ψ_1 和 ψ_2 是旋量的两个分量. 旋量在理论物理，特别在粒子物理学中有许多应用.

量子力学变分法(variational method in quantum mechanics)　在量子力学中求解薛定谔方程的一种近似方法. 它是基于定态（与时间无关）能量本征值方程与能量变分原理的等价性，通过求能量的极值得到能量本征值方程解的方法. 通常采用波函数某种特殊的变化去代替最普遍的任意变分，这样就可得到依赖于波函数特殊形式的近似解. 这种方

法称为变分法. 设 $\hat{H}$ 为体系的哈密顿量算符,其能量本征值方程为

$$\hat{H}\psi = E\psi. \tag{1}$$

体系的能量平均值为

$$\overline{E}[\varphi] = \frac{\int \varphi^* \hat{H}\varphi \, d\tau}{\int \varphi^* \varphi \, d\tau}. \tag{2}$$

它是波函数 φ 的泛函. 求 $\hat{H}$ 的本征值方程,等价于求解

$$\delta \overline{E}[\varphi] = 0, \tag{3}$$

即满足式(3)的 φ 为 $\hat{H}$ 的本征函数. $\overline{E}$ 的极值为所对应的本征值.

$$\hat{H}\varphi = \overline{E}[\varphi]\varphi \tag{4}$$

若 $\varphi=\psi$,则由式(2)可得 $\overline{E}[\varphi]$等于 E,否则必有 $\overline{E}[\varphi]>E$,即 $\overline{E}[\varphi]$为 $\overline{E}$ 的一个初始上限. 可以应用多次尝试的办法求得 $\overline{E}$ 的一个集合,选取其中的最小值作为 E 的一个近似值. 改善波函数通常是通过一个含连续参数的特殊形式的波函数 $\varphi(q,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$来实现的,这样 $\overline{E}$ 也就是这些参数的函数. 式中 q 代表体系的全部坐标,$\varphi(q,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$称为尝试波函数,变分参数($\alpha_1,\alpha_2,\cdots$)待定. 根据变分原理,由 $\overline{E}$ 取极值,可得

$$\frac{\partial \overline{E}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i=1,2,\cdots). \tag{5}$$

由上述方程组可解得 $\alpha_i=\alpha_i^0(i=1,2,\cdots)$,于是 $\varphi(q,\alpha_1^0,\alpha_2^0,\cdots)$和 $E(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\cdots)$分别是 ψ 和 E 在 $\varphi(q,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$形式下最好的近似. 它的近似性来源于用参数的变化代替了普遍形式的任意变分. 参数愈多,尝试波函数的变化愈普遍,所得结果愈好. 在选取尝试波函数时,要注意使其与 ψ 满足相同的边界条件. 若尝试波函数 φ 与精确解的差为 Δ 量级,则 $\overline{E}$ 与精确解的差为 $|\Delta|^2$ 量级,因而即使用粗糙的尝试波函数也可得近似性很好的能量本征值. 考虑到不同能量的本征函数彼此正交,也可以由低至高逐级求激发态能量的近似值,其近似性较基态为差. 变分法的优点在于运用它求解不受什么限制,但是由于结果的好坏完全取决于尝试波函数的选择,致使结果的任意性大.

量子力学微扰论(perturbation theory in quantum mechanics)　求解薛定谔方程的一种近似方法. 对具体的物理问题的薛定谔方程,由于体系的哈密顿算符比较复杂,往往很难求出方程的精确解. 这时可以通过量级分析忽略次要因素的办法获得简化的方程,对它可求得精确解,再由此出发把略去的次要部分对系统的影响逐级考虑进去,从而得出逐步接近于原问题精确解的各级近似解,这就是微扰论的思想. 对于哈密顿量 H 不显含时间的体系,其不含时间的薛定谔方程为

$$\hat{H}\psi = E\psi. \tag{1}$$

若

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}, \tag{2}$$

其中 $\hat{H}_0$ 是未受微扰的哈密顿算符(主要部分),$\hat{H}'$ 为微扰项(次要部分),$|\lambda|\ll 1$,λ 为表示微扰强度特征的小参数. 当 $\hat{H}_0$ 的本征方程

$$\hat{H}_0\psi_k^{(0)} = E_k^{(0)}\psi_k^{(0)} \tag{3}$$

已解出,且 $E_k^{(0)}$ 是未受微扰体系的能量,$\psi_k^{(0)}$ 是与之相应的不简单的波函数. 则当考虑到 $\hat{H}'$的作用后,体系的能量和波函数可按 λ 的幂次作微扰展开:

$$E=E^{(0)}+\lambda E^{(1)}+\lambda^2 E^{(2)}+\cdots, \tag{4}$$

$$\psi=\psi^{(0)}+\lambda\psi^{(1)}+\lambda^2\psi^{(2)}+\cdots, \tag{5}$$

当 $\lambda=0$ 时,有 $\hat{H}=\hat{H}_0,E=E^{(0)},\psi=\psi^{(0)}$. 将(4),(5)代入(1),按 λ 幂次可得一系列确定 $E^{(0)},\psi^{(0)},E^{(1)},\psi^{(1)},\cdots$的等式. λ 的幂次标志着数量级的大小,而 $E^{(0)},\psi^{(0)}$分别是 E,ψ 的零级近似能量和波函数,它们已由式(3)求出,由零级近似解及 $\hat{H}'$,可得到一级修正值 $E_1,\psi^{(1)}$,也即求得一级近似解 $E^{(0)}+E^{(1)}$,$\psi^{(0)}+\psi^{(1)}$,以此类推,可逐步求出高级近似解. 可验证 n 级近似的能量等于 $\hat{H}$ 对于归一化的$(n-1)$级近似波函数下的平均值.

当体系的哈密顿量显含时间时,代替求解定态的薛定谔方程,这时要求解含时间的薛定谔方程. 这种微扰论称为含时间的微扰论. 微扰论的特点是:微扰项对未受微扰体系的解影响很小,可通过逐级近似求解.

量子力学自洽场近似方法(self-consistent field approximation in quantum mechanics)　关于全同多粒子系统定态薛定谔方程的一种近似解法. 它是通过引入自洽场,将多粒子系的薛定谔方程简化成单粒子波函数所满足的非线性方程组,然后逐次迭代求得近似解. 此时得到的平均场称自洽场. 设 N 个全同粒子相互作用的哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} V(x_i,x_j), \tag{1}$$

其中

$$H_i=\frac{1}{2\mu}P_i^2+V(x_i).$$

多粒子系的定态薛定谔方程为

$$\hat{H}\psi(x_1,x_2,\cdots,x_N)=E\psi(x_1,x_2,\cdots,x_N), \tag{2}$$

若对单粒子近似,各单粒子态为 $\psi_i(x_i)$,总波函数为

$$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_N) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\cdots\psi_N(x_N), \tag{3}$$

其他粒子作用于第 i 个单粒子态上的粒子的平均场为

$$\overline{V}_i = \sum_{j\neq i}\int d^3x_j |\psi_j(x_j)|^2 V(x_i,x_j), \tag{4}$$

则单粒子波函数满足的方程为

$$\left[\hat{H}_i + \sum_{j\neq i}\int d^3x_j \left|\psi_j(x_j)\right|^2 V(x_i,x_j)\right]\psi_i(x_i) = \epsilon_i\psi_i(x_i) \quad (i=1,2,\cdots,N). \tag{5}$$

这微分积分方程组称为哈特里方程. 它比(2)简单些,但仍须用数值逼近法求解. 由于两粒子间相互作用对二者来说,应各占一半,所以多粒子系的能量为

$$E = \sum_{i=1}^{N}\epsilon_i - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\int d^3x_i\int d^3x_j\left|\psi_j(x_j)\right|^2 \cdot V(x_i,x_j)\left|\psi_i(x_i)\right|^2, \tag{6}$$

全同粒子(identical particles) 量子力学的基本概念之一. 指内禀属性(质量、电荷、自旋等)完全相同的粒子. 它们可以是基本粒子,也可以是由基本粒子构成的复合粒子(如 α 粒子).

一个由若干个全同粒子组成的物理体系,其运动状态的全部性质原则上应该可以由外部的"观测者"(如其他基本粒子)通过同这个体系的相互作用而一一查明. 假如交换体系中任意两个粒子(第 i 个和第 j 个),因为实行交换的粒子是全同的,外界"观测者"的观测结果显然不会受到任何影响,所以必须认为粒子 i 和粒子 j 实行交换后不改变体系的运动状态. 这个观点以及下面说的波函数具有交换对称性或反对称性通常称为全同性原理. 如以 Ψ 表示交换前描述体系状态的波函数,$P_{ij}\Psi$ 表示交换后体系的波函数,Ψ 和 $P_{ij}\Psi$ 既然描述同一状态,它们最多相差一个常数因子. 由于接连交换两次波函数必须还原,这个常数因子如取为实数,只能是±1. 当$P_{ij}\Psi=+\Psi$ 时,称体系状态为交换对称的;若$P_{ij}\Psi=-\Psi$ 时,则称为交换反对称的.

实验表明,全同粒子体系状态的交换对称性,取决于粒子的自旋,凡是自旋等于 $\hbar$ 整数倍($0,\hbar,2\hbar,\cdots$)的全同粒子系,波函数是交换对称的,并遵守玻色-爱因斯坦统计法则. 这类粒子称为玻色子. 凡自旋等于 $\hbar$ 的半整数倍($\hbar/2,3\hbar/2,\cdots$)的全同粒子系,波函数是交换反对称的,并遵守费密-狄喇克统计法则,这类粒子称为费密子. 光子(自旋为 $\hbar$),α 粒子 π 介子(自旋为 0)则是玻色子;电子、质子、中子(自旋为 $\hbar/2$)则是费密子. 对于全同费密子体系,体系中不能有两个或两个以上粒子同时处于相同的单粒子态. 即每一个单粒子态最多只能容纳一个粒子. 这个结论称为泡利不相容原理. 玻色子体系不受泡利原理的限制,而且,由于粒子总是自发地向低能级跃迁,玻色子有向基态能级凝聚的倾向,这是产生低温超导和超流现象的基本原因.

全同性原理(identical principle) 见"全同粒子".

费密子(fermion) 见"全同粒子".

玻色子(Boson) 见"全同粒子".

量子力学基本假定(basic supposition of quantum mechanics) 量子力学理论的重要内容之一. 主要有下面五个假定:

1. 微观体系的状态被波函数完全描述,从这个波函数可以得出体系的所有性质. 波函数一般应满足连续性、有限性和单值性三个条件.

2. 力学量用线性厄密算符表示. 若在经典力学中有相应的力学量,则在量子力学中表示这个力学量的算符,由经典表示式中将动量 P 换为算符 $-i\hbar\nabla$ 得出. 表示力学量的算符有组成完全系的本征函数.

3. 若体系的归一化的状态波函数 Ψ 用算符 $\hat{F}$ 的归一的本征函数 Φ 展开($\hat{F}\Phi_n=\lambda_n\Phi_n$,$\hat{F}\Phi_\lambda=\lambda\Phi_\lambda$):

$$\Psi = \sum_n C_n\Phi_n + \int C_\lambda\Phi_\lambda d_\lambda,$$

则在 Ψ 态中测量力学量 F 得到结果为 λ_n 的概率是 $|C_n|^2$,得到结果在 $\lambda\to\lambda+d\lambda$ 范围内的概率是 $|C_\lambda|^2$;

4. 体系的状态波函数满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi,$$

$\hat{H}$ 是体系的哈密顿算符;

5. 在全同粒子所组成的体系中,两全同粒子相互调换不改变体系的状态(全同性原理).

在上面的基本假定中,没有列出波函数的统计解释,因为它已包含在基本假定(3)内. 这可由以下的讨论看出. 坐标 r 的本征值方程是

$$r\delta(r-r') = r'\delta(r-r'),$$

将 Ψ 按 r 的本征函数展开,得

$$\Psi(r) = \int\Psi(r')\delta(r-r')d\tau',$$

由此可见,$|\Psi(r')|^2$ 是概率密度,这就是波函数的统计解释.

狄喇克方程(Dirac equation) 量子力学的重要方程之一. 其形如

$$\sum_{\mu=1}^{4}r_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + ik\psi = 0, \tag{1}$$

其中 ψ 表示电子的波函数,r_μ 是 4×4 阶矩阵,满足

$$r_\mu r_\nu + r_\nu r_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu,\nu=1,2,3,4)$$

的交换关系. 把这些矩阵和单位矩阵及 r_1,r_2,r_3,r_4 四个矩阵反复相乘,就可以得到 16 个线性无关的矩阵,任意四行四列矩阵都可以用这 16 个矩阵的适当的线性组合来表示.

在克莱因-戈登方程($\Box-K^2$)$\psi=0$ 中,由于含有关于时间的二阶导数,对于自由粒子的波函数 ψ 而言,可能出现概率密度为负值的情况. 为了使概率密度取正值. 英国物理学家狄喇克(Dirac, P. A. M.)认为自由电子的波函数 ψ 可以用具有四个分量的旋量(被称为 undor 的量)给出. 为了避免概率密度为负值的困难,方程中关于时间的导数必须是一

阶的. 根据相对论知道,时间、空间、坐标是等价的,于是得到关于所有坐标的一阶偏微分方程(1). 狄喇克方程(1)具有平面波的解,即

$$\psi(r,t)=u\exp\left(\frac{i}{\hbar}\cdot P\cdot r-\frac{i}{\hbar}\cdot Et\right).$$

能量有两个本征值,即 $E=\pm\sqrt{m^2c^2+P^2c^2}$. u 有 4 个分量,方程有 4 个独立的本征解 $u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},u^{(4)}$,其中有两个属于正的本征值,另外两个为负的本征值. 出现负能状态在物理上难以理解. 但在数学上为了构成完全系又不能舍去负值. 为克服此困难,狄喇克假定负能是由无限多的电子充满的真空. 按照此想法,在构成真空的负能电子中,如果缺少了某一个就出现空穴,这种空穴有粒子的性质,其电荷与电子的电荷相反,能够作为正电子观测出来. 另外,若把克莱因-戈登方程也看做是经典的物质波的波动方程而进行量子化,则可以避免负概率的矛盾. 自旋为零的粒子,例如 π 介子等,都遵照这个方程运动. 将狄喇克方程改写为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi,\quad H=C\alpha\cdot P+mC^2\beta,$$

其中 $r_k=-i\beta\alpha_k(k=1,2,3)$, $r_4=\beta$. 这里的 H 和电子的轨道角动量算符

$$L=r\times P=-i\hbar r\times\nabla$$

不对易,所以 L 不是守恒量,但是

$$J=L+\frac{\hbar}{2}\sigma$$

是守恒量. 其中 σ 是矢量,它的各分量可以用

$$\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}$$

给出,σ_k 是泡利自旋矩阵,即

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$S=\hbar\sigma/2$ 是电子的固有角动量,称为自旋. $\hbar/2$ 称为自旋的绝对值,电子是自旋为 1/2 的粒子. 从光谱的精细结构可以证实自旋的存在. 如果电子的速度不很大,小于 $(v/c)^2$ 的量都可忽视,那么就可以把电子的状态用具有两个分量的量来表示,这称为泡利近似,这两个分量就成为独立的,分别满足薛定谔方程.

自旋(spin) 见"狄喇克方程".

泡利近似(Pauli approximation) 见"狄喇克方程".

量 子 光 学

量子光学(quantum optics) 理论物理学的分支学科. 是应用辐射的量子理论研究光辐射的产生相干统计性质、传输检测以及光与物质相互作用中的基础物理问题的一门学科.

生理光学(physiological optics) 一门研究眼睛和视觉的科学. 是生理学和光学边缘上的一个分支学科. 它所涉及的学科还有解剖学、生物化学、物理学和心理学.

光度学(photometry) 应用光学的一个分支. 光学辐射是指波长为 1 纳米到 1 毫米范围的电磁辐射,它包括真空紫外辐射、紫外辐射、可见辐射和红外辐射等部分. 辐射度学就是对光学辐射进行定量评价的一门实验科学.

辐射度学(radiometry) 见"光度学".

光谱学(spectroscopy) 光学的一个分支学科. 研究各种物质的光谱的产生及其同物质之间相互作用. 而光谱是电磁辐射按照波长的有序排列.

光谱(spectrum) 见"光谱学".

集成光学(integrated optics) 研究媒质薄膜中的光学现象以及光学元件集成化的一门学科. 它是在激光技术发展过程中,由于光通信、光学信息处理等的需要,而逐步形成和发展起来的. 它要解决的实质问题是获得具有不同功能、不同集成度的集成光路、实现光学信息处理系统的集成化和微小型化.

几何光学(geometrical optics) 光学的一个分支学科. 是以光线为基础研究光的传播和成像规律的一个重要的实用性分支.

金属光学(optics of metals) 光学的一个分支学科. 是研究金属的光学性质及其与金属物质结构关系的学科.

晶体光学(crystal optics) 研究光在单晶体中传播及其伴生现象的分支学科. 立方晶体中光的传播是各向同性的,与均匀非晶体没有差别. 在其他六个晶系的晶体中,光的传播的共同特点是各向异性. 因此晶体光学研究的对象实质上是各向异性光学媒质,包括液晶在内.

量子声学(quantum acoustics) 声学的一个分支. 声学所研究的对象一般是宏观的,因此可以不考虑传播媒质的微观结构,也就是说媒质是连续的;声波的能量一般也是连续的. 量子声学的研究则考虑了上述两者的不连续性.

热力学与统计物理

热力学(thermodynamics) 研究热学理论的一门学科. 在热学理论中有两种不同的理论,即热力学和统计物理. 这两门学科都是研究与热有关的各种现象,但二者采取的方法不同. 热力学从由实验总结出的宏观规律出发,作演绎和推论,再把得出的结论与实验相比较. 而统计物理则从物质的微观结构出发,用统计的方法求出物质的宏观性质. 热力学中的

基本实验定律有热力学第零、第一、第二和第三定律,基本热力学函数有内能熵、自由能和吉布斯函数等.将它们和热容量及物态方程结合起来,再作一定的数学推演,就构成了热力学方法的基本内容.迄今为止,人们还没有发现与热力学推论不符的情况,所以热力学的推论有着高度的可靠性.

热力学是由现象总结而得到的普遍性理论,对一切物质都适用.但该理论也有着它的局限性.它最大的缺点是因为忽略了物质的原子结构,因而很多与物质的微观结构有关的现象不能解释(如涨落现象).热力学目前已经能很好的解决物质平衡态时的性质,而对非平衡态还有很多问题不能解决.而非平衡态问题在实际中又是大量的,因而研究非平衡态物理就成为了当今的热点.

热力学第零定律(zeroth law of thermodyn amics) 亦称热平衡定律.热力学中的一个基本规律.由此定律可以确定热力学中最重要物理量之一——温度.该定律表明,若两个热力学系统分别与第三个热力学系统同时处于热平衡,则它们彼此也处于热平衡.可以认为,处于热平衡的两个系统的冷热程度相同.由热力学第零定律可以证明,互为热平衡的系统具有一个数值相等的状态函数,这个决定系统热平衡的状态函数定义为温度.热力学第零定律是引入温度概念的实验基础.

热平衡定律(the law of thermal equilibrium) 即“热力学第零定律”.

温度(temperature) 热力学名词.是表征物体冷热程度的物理量.但严格的温度定义必须由热力学第零定律给出,该定律指出,当两个物体达到热平衡时,其状态参量不能任意取值,而要受一定数学关系的约束,这一个相等的态函数就是温度.

热平衡(thermal equilibrium) 见“热力学第零定律”.

气体的状态方程(gas equation of state) 热力学的重要方程之一.指热力学参量(如温度 T、体积 V、压强 P 等)在平衡态下满足的方程.其形如 $F(T,P,V)=0$.理想气体的状态方程为 $PV=\gamma RT$,式中 R 为气体常数,

$$\gamma=\frac{M_1}{\mu_1}+\frac{M_2}{\mu_2}+\cdots+\frac{M_n}{\mu_n}$$

为混合气体的摩尔数.对实际气体,其状态方程可用昂尼斯方程来表示.这是一个用级数表示的状态方程,其形式为

$$PV=A+BP+CP^2+DP^3+\cdots,$$

式中 P 为压强,A,B,C 称为第一、第二、第三维里系数,它们都是温度的函数,且与气体性质有关.维里系数通常由实验来确定.

维里系数(Virial coefficients) 见“气体的状态方程”.

气体分子的速率分布函数(distribution function of speed for gases molecule) 关于热力学的一个重要函数.它描述分布在速率 v 附近单位速率间隔内的分子数占总分子数的比率.它可写为

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v},$$

式中 v 为速率,$\mathrm{d}v$ 为速率间隔,N 为分子数.$f(v)$就是气体分子的速率分布函数,显然它满足归一化条件

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v=1.$$

英国科学家麦克斯韦(Maxwell,J.C.)已从理论上给出了气体的速率分布的规律.他指出,在平衡态下,当气体分子间的相互作用可以忽略时,分布在任一速率区间 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 内的分子的比率为

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v,$$

即速率分布函数为

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2,$$

式中 T 是气体的热力学温度,m 是分子质量,k 是玻尔兹曼常数.由此分布律,可求得气体的最可几速率

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}};$$

平均速率

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}};$$

方均根速率

$$\sqrt{\bar{v}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

热力学第一定律(first law of thermodynamics) 热力学的一个基本规律.该定律实质上就是包含热量的能量守恒定律.其数学表达式为 $\mathrm{d}U=\text{đ}Q+\text{đ}W$,式中 $\mathrm{d}U$ 为内能的微分,$\text{đ}Q$,$\text{đ}W$ 是热量和外界所做的功,该式的物理意义为:系统能量的改变等于外界以功和热的方式供给系统的能量.当系统经过一个循环过程回到原来状态时,应有

$$\oint\text{đ}Q+\oint\text{đ}W=0 \text{ 或 } Q=-W,$$

即系统经过循环过程时,对外做的功等于它吸取的热量.若外界不供应系统能量,则该系统就不能对外作功.因此,热力学第一定律的另一种表述方法说明第一类永动机是不可能实现的.该定律还引进了热力学中一个重要的态函数——内能.

热力学第二定律(second law of thermodynamics) 热力学的一个基本规律.它是独立于热力学第一定律的一个关于各种形式能量互相转化的基

本规律.它是由研究如何提高热机效率的过程中发现的.它可以解决与热现象有关过程自发进行方向的问题.热力学第一定律和第二定律就构成了热力学的主要理论基础.热力学第二定律有多种表述方式.最常用的有以下两种:

1.德国籍波兰学者克劳休斯(Clausius,R.)表述:不可能把热从低温物体传到高温物体而不产生其他影响.

2.开尔文(Kelvin,L.)表述:不可能从单一热源吸热使之完全变为有用的功而不产生其他影响.它又可表述为:第二类永动机是不可能造成的.这两种说法可以证明是完全等效的.它们实质上是反映了热传导过程是不可逆的.

由热力学第二定律的定性表述可证明系统存在一个态函数——熵,从而可以得到第二定律的数学表述为

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\text{đ}Q}{T},$$

式中 $\mathrm{d}S$ 为熵的增量,是全微分.等号对应可逆过程,不等号对应不可逆过程.在绝热系统或孤立系统进行的一微小过程,有 $\mathrm{d}S \geqslant 0$,此式就是熵增加原理的数学表达式.它表示孤立系统中,过程进行的方向是使熵的数值增大的方向.熵增加原理包括了上面的两种表述.

熵增加原理(principle of entropy increase) 见“热力学第二定律”.

熵(entropy) 现代数学概念之一.这里是用来描述热力学系统状态的一个态函数.1854年,德国籍波兰学者克劳休斯(Clausius,R.)由研究卡诺循环,首先发现了态函数熵.根据公式,在可逆过程中,

$$\oint \frac{\text{đ}Q}{T} = 0.$$

存在一个态函数,它就是熵,由热力学第一定律,可以得到

$$S - S_0 = \int_{(x_0)}^{(x)} \frac{\mathrm{d}U + P\mathrm{d}V}{T},$$

式中 S 就是熵,S_0 为任意常数,x, x_0 表示任意给定的两个平衡态.U 为内能,由此式可知,熵的量纲是能量被温度除,单位为 J/K.

熵是一个较抽象的物理概念,它的物理意义可通过它的统计表达式来理解.$S = k\ln W$.式中 W 为一宏观态所对应的微观态的数目(或称热力学概率),k 为玻耳兹曼常数.此式称为玻耳兹曼关系.由此可以将熵理解为与系统状态无序程度相关的量,即系统无序程度愈高,则系统“混乱”程度也愈高.其对应的微观状态数目越多,此时熵也就愈大.利用熵的性质可以判断自发过程的进行方向,判断系统所处状态的稳定情况.熵不仅在热力学、统计物理有着重要应用,它还在信息论、控制论、概率论、数论、天体物理中有着应用.

热力学第三定律(third law of thermodynamics) 亦称能斯脱定理.热力学的一个基本规律.它是研究当温度趋于绝对零度时物质性质的热力学定律.当用热力学第二定律对于可逆过程的公式 $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$ 确定熵时,留下一个常数无法确定,而热力学第三定律解决了确定常数问题.1960年,能斯脱(Nenstor,W.)在总结了大量低温各种化学反应性质时,得到了一个普遍规律,称为能斯脱定理.它可表述为:凝聚系的熵在等温过程中的改变,随绝对温度趋于零而趋于零.即

$$\lim_{T\to 0}(\Delta S)_T = 0$$

这就是热力学第三定律.它的另一种表述是“不可能用有限的手续达到绝对零度”.可以证明这两种说法是完全等价的.

能斯脱定理(Nenstor theorem) 即“热力学第三定律”.

基本热力学关系(basic relation of thermodynamics) 亦称麦克斯韦关系.热力学的一个基本规律.指热力学中关于热学参量温度、熵和力学参量压力、体积之间的微分关系.对于粒子数不变的热力学系统,在只考虑膨胀作功时,可以给出四个热力学函数 U, H, F 和 G,它们分别表示内能、焓、自由能和吉布斯函数.由它们的定义可得到其微分形式为:

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V, \qquad \mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P,$$
$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - P\mathrm{d}V, \qquad \mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P.$$

由全微分,可得到如下关系

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P,$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

这些关系有助于热力学量之间的运算.

麦克斯韦关系(Maxwell relation) 即“基本热力学关系”.

相变(phase transition) 热力学的基本概念之一.指系统从一个相变化到另一个相的现象.它是近些年来研究的热点,所谓相,指的是系统中物理性质均匀的部分,它和其他部分之间有确定的分界面,相变通常在等温等压下进行,而且要满足两相化学热相等的相平衡条件.为了阐明相变的机理,需要用到统计物理知识,但目前也仅限于用到一些简单的物理模型.例如,非理想气体凝聚为液体时,物态方程要出现某种不连续性.如在等温线上比容会出现突变现象.应用统计物理理论,可以证明在有限体积内不可能发生凝聚现象,只有当 $V\to\infty$ 时,才可得到巨配分函数 Ξ 在热力学极限下的表示式:

$$\frac{P}{kT}=\lim_{V\to\infty}\frac{P_V}{kT}=\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln\Xi,$$

$$\rho=\lim_{V\to\infty}\frac{\partial}{\partial\ln Y}\left(\frac{1}{V}\ln\Xi\right),$$

式中 P 为压强，T 为温度，V 为体积，k 为玻尔兹曼常数，ρ 为密度，

$$Y=\frac{e^{\mu/(KT)}}{\lambda^3},\lambda=\sqrt{\frac{1}{2\pi mkT}}.$$

λ 称为热波长．李政道和杨振宁于 1952 年提出了两条定理，论证了相变发生的可能性和条件．目前常用的存在相变的模型有：

1．铁磁模型．

2．点阵气体模型．

3．伊辛模型等．

对它们求解的方法主要有平均场近似、高温展开和低温展开、解析法、数值法以及重正化群方法等．

热波长(thermal wavelength)　见“相变”．

统计力学(statistical mechanics)　亦称统计物理学．理论物理学的一个重要分支．它是把微观力学和概率论结合起来的理论体系．它的任务是：从物质微观结构、粒子间的相互作用及力学规律，并结合概率的理论、推导与说明由大量粒子组成的宏观物体的物理法则和性质．它作为由微观到宏观的桥梁，为各种宏观理论提供根据，与量子力学、经典电动力学一起成为现代气体、液体、固体和等离子体理论的基础，并在化学和生物过程的研究中发挥作用．

统计力学所包含的基本概念和理论是：相空间、刘维尔方程、系综、吉布斯统计、庞加来定理、玻尔兹曼统计、量子统计法、非平衡态统计物理学、玻耳兹曼输运方程、H 定理、朗之万方程、福克尔-普朗克方程及涨落耗散定理等．

统计力学涉及的数学问题介于动力系统(多自由度甚而无穷自由度的力学)理论和概率论与随机过程理论之间．对于非平衡统计物理学的主要方法，正是基于这样的理论，它可以划分为两大类：

第一类方法，是从微观力学出发的统计理论，可以概括为“刘维尔方程加统计假定”．刘维尔方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_i}\frac{\partial\rho}{\partial q_i}-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_i}\frac{\partial\rho}{\partial p_i}\right)=0,\qquad(1)$$

其中 ρ 为密度函数，$\mathscr{H}$ 为力学系统的哈密顿函数，$q_i,p_i(i=1,2,\cdots,N)$ 分别为广义坐标和广义动量．以算符形式写为

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t}=\hat{L}\rho,\qquad(2)$$

其中刘维尔算符 $\hat{L}$ 在经典情形下就是泊松括号：

$$\hat{L}\rho\equiv i[\mathscr{H},\rho]=i\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_j}\frac{\partial\rho}{\partial p_j}-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_j}\frac{\partial\rho}{\partial q_j}\right].\qquad(3)$$

而在量子情形下则是哈密顿算符 $\mathscr{H}$ 和密度矩阵 $\hat{\rho}$ 的对易子．量子力学中有时称(2)式为冯・诺伊曼方程．通称之为刘维尔方程．把 N 点分布函数 ρ 对 $N-1,N-2,\cdots$ 个变量积分之后，定义单点、两点等约化分布函数

$$\left.\begin{aligned}f\equiv\rho_1&=\int\rho\mathrm{d}\Gamma_{N-1}\\ \rho_2&=\int\rho\mathrm{d}\Gamma_{N-2}\\ &\cdots\end{aligned}\right\},\qquad(4)$$

其中 $\mathrm{d}\Gamma_{N-i}=\mathrm{d}q_{N-i}\cdot\mathrm{d}p_{N-i}(i=1,2,\cdots)$．由刘维尔方程出发，可推得这些约化分布函数满足的无穷个耦合方程，其中 ρ_k 的方程中出现 ρ_{k+1} 等．此即经典或量子的 BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) 方程链．任何较为实际的讨论，都需把这个方程链截断，将 ρ_k 通过前面的 ρ_{k-1},ρ_{k-2} 等表示出来，以获得一个封闭的方程组．这类“截断近似”通常隐含地对应某种统计假定，其意义往往不很清楚．比较成功的例子是博戈留博夫(Bogaliubov)于 1946 年在两条假定下比较严格地推得了经典的玻耳兹曼输运方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0\qquad(5)$$

其中 $f=f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ 为坐标 $\boldsymbol{r}$，速度 $\boldsymbol{v}$ 和时间 t 的函数，$\boldsymbol{F}$ 是作用在分子上的力，而 $\boldsymbol{F}/m$ 为加速度，$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0$ 表示(分子)碰撞项．他的两条假定是：

1．两点分布函数可以表示为单点函数的泛函

$$\rho_2=\rho_2[\rho_1];$$

2．在 $t\to\infty$，并取热力学极限($N\to\infty,V\to\infty$，N/V 有限)之后二体关联衰减而有

$$\lim_{t\to\infty}\rho_2(1,2)=\rho_1(1)\rho_2(2)\qquad(6)$$

玻耳兹曼方程还可在其他一些本质上相同的假定下推导出来．对于量子情形，泡利(Pauli，W.) 1928 年就为密度矩阵 $\hat{\rho}$ 的对角元素推导出如下的主方程：

$$\frac{\partial\rho_{nn}}{\partial t}=2\pi g^2\sum_m\delta(E_n-E_m)|V_{n,m}|^2\cdot(\rho_{mm}-\rho_{nn}),\qquad(7)$$

其中 g 是耦合常数，E_n(或 E_m)为能量本征值，$V_{n,m}$ 是相互作用势的矩阵元，δ 是 δ 函数．这个方程可以描述趋近平衡的不可逆过程，但推导中每一步都要使用无规相位近似，即舍去密度矩阵的非对角元素．后来范霍甫等人只在初始时刻使用一次无规相位近似，推得了形式有所不同的主方程，并且讨论了趋向平衡的条件，说明不可逆性与热力学极限中的无穷体积有关．

第二类方法，直接从随机方程出发，因而不需要统计假定，却带上了更多的半唯象描述的成分．20 世纪初期，朗之万(Langevin，P.)在布朗粒子的牛顿

运动方程中加上了随机力 $\xi(t)$，

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\alpha v+\xi(t) \tag{8}$$

用来反映没有归纳到摩擦力 αv 中去的其他运动自由度的影响. 这是首次在物理学中使用随机微分方程，因此，这一类方程以后统称为朗之万方程. 现代非平衡统计物理中的朗之万方程可以表述如下. 选择宏观变量的集合 $\{Q_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 来描述某一类非平衡现象，它们遵从广义的朗之万方程组

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}=-\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial Q_i}+K_i(Q)+\xi_i(t) \tag{9}$$

$$(i=1,2,\cdots,n),$$

其中势函数 $\mathscr{F}$ 在平衡态附近就是自由能，而在某些远离平衡的定常态附近也可以从微观运动方程的时间反演对称性出发，证明存在着类似的势函数. 对称矩阵描述宏观变量 Q_i 的耗散和扩散运动，保证系统能够趋向平衡. $K_i(Q)$ 反映不能通过势函数表示出来的宏观变量之间的耦合，例如，当 Q_i 代表平均磁矩时，磁矩的进动项就包含在 $K_i(Q)$ 之中. 这一项通常称为模模耦合，每个 Q_i 就是一个运动模. 关于随机力 $\xi_i(t)$，通常假定它遵从高斯分布，且

$$\overline{\xi_i(t)}=0,\overline{\xi_i(t)\xi_j(t)}=2\Gamma_{ij}\delta(t-t'). \tag{10}$$

(10)，(9)二式中的 Γ_{ij} 相同，这样可保证 $t\to\infty$ 时 Q_i 趋于由势函数 $\mathscr{F}$ 最小值决定的定常态. 式(10)是另一种意义下的涨落耗散定理.

朗之万方程可以看做从随机过程 $\{\xi_i(t)\}$ 到随机过程 $\{Q_i(t)\}$ 的变换. 对于 Q_i 的概率分布函数 $P(Q,t)$ 可从朗之万方程(9)推导出如下的福克尔-普朗克方程：

$$\frac{\partial P(Q)}{\partial t}=-\sum\frac{\partial}{\partial Q_i}[K_i(Q)P(Q)]+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial Q_i\partial Q_j}[K_{ij}(Q)P(Q)]. \tag{11}$$

这是 $\{Q_i\}$ 空间中的推广的扩散方程，等号右端第一项是漂移项，第二项是扩散项. 相反，从每一个福克尔-普朗克方程，可以推导出一批随机等价的，即遵从同一种随机分布的朗之万方程. 上述处理非平衡统计问题的两类方法，并非互相对立或无关的. 事实上，线性不可逆过程的统计理论，可以同样好地应用这两套方法来建立.

统计物理学(statistical physics)　即“统计力学”.

刘维尔方程(Liouville equation)　力学系统变化的偏微分方程. 其形式为

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial D}{\partial t}+\{D,H\}=0,$$

式中

$$\{D,H\}=\sum_i P\left(\frac{\partial D}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial D}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)$$

称为泊松括号.

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ (i=1,2,3,\cdots,s);$$

H 为该系统的哈密顿量，由于该系统为保守力系统，故服从哈密顿的正则方程. 式中 $D(p,q,t)$ 为系统代表点的密度，它是相空间(p,q 为相空间的坐标，$i=1,2,3,\cdots$)和时间的函数. 刘维尔方程(或称刘维尔定理)描述一个保守力学系统的代表点密度在相空间中随时间变化的规律. 式中 $\{D,H\}$ 表示在同一时刻代表点密度随相空间中不同地点的变化. $\partial D/\partial t$ 表示相空间中同一地点代表点密度随时间的变化；二项之和为零表示代表点的密度在运动过程中是守恒的.

朗之万方程(Langevin equation)　见“统计力学”.

福克尔-普朗克方程(Fokker-Planck equation)　亦称柯尔莫哥洛夫方程. 热力学的重要方程之一. 它是研究布朗运动所采用的一种扩散方程. 可以证明，颗粒的位移的概率分布函数和颗粒的数密度都满足扩散方程. 如果再加上初始条件和边界条件，还可以从扩散方程解得分布函数. 扩散方程最早由美籍德国科学家爱因斯坦(Einstein, A.)得到，后经过福克尔(Fokker, A. D.)和普朗克(Planck, M.)的推广，所以称为福克尔-普朗克方程. 它的严格证明是由俄国数学家柯尔莫哥洛夫(Колмгоров, А. Н.)给出的. 方程的形式为

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(aW)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bW)=0.$$

式中，$W=W(x,t;\ x_0,t_0)$ 代表概率. 如 $W(x,t;x_0,t_0)\mathrm{d}x$ 是代表颗粒在初始时刻 t_0，地点 x_0 转变到时刻 t，地点 x 与 $x+\mathrm{d}x$ 之间的概率. 当 W 满足下列条件时：

1. $W(x,t;x_0,t_0)\geqslant 0$；
2. $\int_{-\infty}^{\infty}W(x,t;x_0,t_0)\mathrm{d}x=1$；
3. $\lim\limits_{t\to t_0}\int_{|x-x_0|\geqslant\delta}W(x,t;x_0,t_0)\mathrm{d}x=0$ (δ 是任意正数)；
4. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|<\delta}(x'-x)W(x',t+\Delta t;x,t)\mathrm{d}x'=a(x,t)$；
5. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|<\delta}(x'-x)^2W(x',t+\Delta t;x,t)\mathrm{d}x'=b(x,t)$；
6. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x'-x|<\delta}(x'-x)^nW(x',t+\Delta t;x,t)\mathrm{d}x'=0\quad(n>2)$.

凡 W 满足马尔科夫过程，就可证明 W 满足福

克尔-普朗克方程.

柯尔莫哥洛夫方程(Kolmogorov's equation) 即"福克尔-普朗克方程".

玻耳兹曼积分微分方程(Boltzmann integral-differential equation) 亦称玻耳兹曼输运方程. 热力学的重要方程之一. 它是描述粒子分布函数随着时间、坐标和运动速度变化的非线性积分微分方程. 为说明分子的运动,玻耳兹曼(Boltzmann, L. E.)引入分布函数 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$,以 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 代表速度在 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$,坐标在 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 范围内的分子数目,令 N 为分子的总数,则

$$\iint f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = N \tag{1}$$

$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ 随时间的变化由两部分原因引起:一是分子的坐标和速度按力学运动方程的变化,即

$$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\delta t,\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\delta t$$

($\boldsymbol{F}$ 是作用在分子上的力,$\boldsymbol{F}/m$ 是加速度);二是分子间相互作用(碰撞)引起的改变. 前者是运动状态的连续变化,经过 δt 时间之后,原处在 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 范围内的分子,全部进入对应 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{v}'$ 的状态,数目并没有增减. 后者(碰撞)则使得一些分子进入 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$,而另一些分子离开这一范围,其净效果用碰撞项 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0$ 表示. 于是

$$f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\delta t,\boldsymbol{v}+\frac{F}{m}\delta t,t+\delta t)=f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0\mathrm{d}t.$$

或对 δt 展开,得到

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{m}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 \tag{2}$$

具体的碰撞项只有根据分子间相互作用的具体模型和一些补充假定才能推导出来. 在只计入二体碰撞和认为分子的速度与位置没有关联("分子混沌性"假设)的条件下,玻耳兹曼求得如下的碰撞积分:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0=\int\mathrm{d}\Omega\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}'_2\sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_2|\,[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}'_2,t)\cdot f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}',t)-f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_2,t)f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)] \tag{3}$$

其中 $\sigma(\Omega)$ 是在立体角 Ω 内的碰撞截面,$\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}'$,$\boldsymbol{v}'_2$ 是两个分子在碰撞前后所具有的速度. 式(2)与(3)合在一起,构成了玻耳兹曼输运方程,即关于函数 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ 的玻耳兹曼积分微分方程. 它的一个均匀(不含 $\boldsymbol{r}$)定常态(与 t 无关)解是

$$f(v_x,v_y,v_z)=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left[-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right]. \tag{4}$$

这就是著名的麦克斯韦速度分布律.

玻耳兹曼输运方程(Boltzmann's transport equation) 即"玻耳兹曼积分微分方程".

玻耳兹曼统计(Boltzmann statistics) 亦称麦克斯韦-玻耳兹曼统计. 相同粒子的经典统计方法. 考查同种分子构成的气体. 把每个分子视为近独立的子系统,它可能 K_i 个能量为 ε_i 的状态. 若有 N_i 个分子处于这组状态中. 经典统计中不限制状态的占有方式,且每个分子均可识别. 把 N_i 个分子放到 K_i 个状态中的方式共有 $W_i=K_i^{N_i}/N_i!$ 种,则气体的熵是

$$S=k\ln\prod_i W_i.$$

在总分子数

$$N=\sum_i N_i$$

和总能量

$$E=\sum_i\varepsilon_i N_i$$

一定的条件下,要求熵达到最大值,即可求得状态 i 的平均占有率或分布函数 $n_i=N_i/K_i$. 引入拉格朗日乘子 α,β,通过极值条件

$$\frac{\partial}{\partial n_i}(S+\alpha N+\beta E)=0,$$

求解(利用近似公式 $\ln N!=N\ln N-N$)可得

$$n_i=\exp(\alpha+\beta\varepsilon_i). \tag{1}$$

并且有

$$\alpha=\frac{\mu}{kT},\quad \beta=-\frac{1}{kT},$$

μ 是化学势,T 是温度,而(1)式即为玻耳兹曼分布.

麦克斯韦-玻耳兹曼统计(Maxwell-Boltzmann statistics) 即"玻耳兹曼统计".

经典统计(classical statistics) 一种统计方法. 是建立在经典力学基础上的统计. 包括玻耳兹曼统计和经典的吉布斯系统统计等.

***H* 定理**(*H*-theorem) 热力学的重要定理之一. 指有关系统的熵随时间变化的定理. 玻耳兹曼(Boltzmann, L. E.)从输运方程的解出发,定义了 H 函数

$$H=H(t)=\iint\mathrm{d}r\mathrm{d}vf(r,v,t)\ln f(r,v,t), \tag{1}$$

并且证明了它是一个不随时间增加的量,即

$$\frac{\mathrm{dH}(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0. \tag{2}$$

这就称为 H 定理(参见"玻耳兹曼积分微分方程"). (2)式中等号成立的条件,是输运方程中的碰撞积分式等于零,即碰撞前后的分布函数满足

$$f(v)f(v_2)=f(v')f(v'_2), \tag{3}$$

这称为细致平衡条件. 这个条件成立时,分布函数不因分子碰撞发生改变,气体达到热平衡. 可以证明,满足细致平衡条件的 $f(v)$ 就是麦克斯韦速度分布率. 易知,细致平衡是维持总平衡的条件. 在 H 定理成立的前提下,细致平衡也是维持总平衡的充分和必要条件. 除了平衡分布以外,其他情形下 H(t) 都

随时间下降. 因此,H 具有热力学熵的基本性质. H 定理在历史上对于理解宏观系统中不可逆性的来源和趋近平衡的过程,起过重要作用.

细致平衡条件(meticulous equilibrium condition) 见“H 定理”.

密度矩阵(density matrix) 亦称统计算符. 统计物理中的一个矩阵. 指描述统计系统中力学体系的量子运动状态的分布的矩阵. 用 tr(求迹符号)表示取后面矩阵所有对角元之和,则任意力学量 $\hat{A}$ 的统计平均值 $\overline{A}$ 可用该力学量的矩阵 A 与统计系统的密度矩阵 ρ 表示成

$$\overline{A} = \frac{\mathrm{tr}(A\rho)}{\mathrm{tr}(\rho)}.$$

若密度矩阵按概率归一化,则有 $\mathrm{tr}(\rho)=1$,而 $\overline{A}=\mathrm{tr}(A\rho)$. 设 q 代表力学体系所有自由度的坐标,k 代表该体系量子运动状态的完全描述. 引入完备的正交归一化基本函数系$\{\psi_k(q)\}$,将系统中每个量子力学体系的薛定谔波函数对基本函数系展开,如

$$\psi^{(s)}(q,t) = \sum_k C_K^{(s)}\psi_k(q) \quad (s = 1,2,\cdots,N),$$

其中上标 s 表示各力学体系,总共有 N 个. 展开系数 $C_k^{(s)}$ 为时间 t 的函数,满足与(s)无关的同样的按概率归一化的条件

$$\int \Psi^{(s)*}\Psi^{(s)}\mathrm{d}q = \sum_k C_k^{(s)*}C_k^{(s)} = 1$$
$$(s = 1,2,\cdots,N),$$

这里 $*$ 号表示共轭. 从展开系数依下式定义的所有矩阵元 ρ_{kl}即构成按概率归一化的密度矩阵

$$\rho = [(\rho_{kl})], \quad \rho_{kl} = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} C_k^{(s)}C_l^{(s)*},$$

有

$$\mathrm{tr}(\rho) = \sum_k \rho_{xk} = 1,$$

ρ_{kk}是系统中力学体系处在运动状态 k 上的概率. 任意力学量 $\hat{A}$ 对力学体系(s)的量子平均值为

$$\overline{A}^{(s)} = \int \Psi^{(s)*}\hat{A}\Psi^{(s)}\mathrm{d}q = \sum_k\sum_l A_{kl}C_l^{(s)}C_k^{(s)*},$$

其中矩阵元 $A_{kl} = \int \Psi_k^* \hat{A}\Psi_l \mathrm{d}q$ 构成该力学量的矩阵. 所以该力学量对系统的统计平均值为

$$\overline{A} = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\overline{A}^{(s)} = \sum_k\sum_l A_{kl}\rho_{kl} = \mathrm{tr}(A\rho),$$

这里 $A\rho$ 表示矩阵乘积.

统计算符(operator of statistics) 即“密度矩阵”.

量子统计法(quantum statistics) 量子统计物理的重要方法. 以量子力学为基础建立的统计物理学称为量子统计物理学. 经典统计与量子统计的不同不在于统计原理,而在于对微观状态的描写. 在量子统计物理中,必须考虑相同质点的交换不引起新的量子态这一事实,这样的粒子称为全同粒子. 量子统计指玻色统计和费米统计. 全同粒子也可分为两类. 波函数具有交换对称的系统称为玻色系统. 玻色系统的每一个量子态上占据的粒子数不限,这种粒子遵循玻色统计,或称玻色-爱因斯坦统计. 波函数具有交换呈反对称性的系统称为费米系统. 每个量子态上的粒子数不多于 1 个这样的粒子称为费米子,它遵从费米统计.

1. 玻色统计:对于玻色系统,由于粒子的不可分辨和每一个态上所占的粒子数不限,则对给定的 N_i 个粒子分布,在 g_i 个量子态的方式数等于 N_i+g_i-1 个元素中选取 g_i-1 个元素的组合数

$$\frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!},$$

考虑到各个能级的贡献,就得到对应粒子数分布$\{N_i\}$的系统微观状态数

$$W_{B,E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!}.$$

2. 费米系统:对于费米系统,N_i 个不可分辨的全同粒子分布在 g_i 个状态上(每个状态上至多只能有一个粒子)的可能方式数为

$$\frac{g_i}{N_i!(g_i - N_i)!};$$

而对应粒子数分布$\{N_i\}$的系统微观状态数为

$$W_{F,D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!(g_i - N_i)!}.$$

当 $N_i/g_i \ll 1$ 时,

$$W_{B,E} \approx W_{F,D} \approx \frac{1}{\prod_i N_i!}\prod_i g_i^{N_i}.$$

这就过渡到了玻耳兹曼系统的微观状态数. 利用条件

$$N = \sum_i N_i, \quad E = \sum_i N_i\varepsilon_i,$$

可以得到

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/kT} \pm 1},$$

式中的正负号分别对应于费米和玻色系统,μ 为化学势. 对玻色子,$\mu<0$,对光子气体 $\mu=0$,在费米统计中,μ 可正可负. 当 $e^{\mu/KT} \ll 1$ 时,费米统计和玻色统计都过渡到玻耳兹曼分布.

玻色系统(Bose system) 见“量子统计法”.

玻色统计(Bose statistics) 见“量子统计法”.

费米系统(Fermi system) 见“量子统计法”.

费米统计(Fermi statistics) 见“量子统计法”.

分析力学

分析力学(analytical mechanics) 理论力学的

一个分支.它是以广义坐标和广义动量描述运动状态为主要手段的一门经典力学.它以牛顿运动定律为基础,运用数学分析的方法研究宏观现象中的力学问题.分析力学以虚功原理和达朗贝尔原理作为其基本原理,由此可导出动力学普遍方程和分析力学各种系统的动力方程.分析力学研究的对象是质点系.质点系可视为一切宏观物理组成的力学系统的理想模型.例如,太阳系可看做自由质点系.研究太阳系中行星和卫星运动的天体力学同分析力学密切相关,在方法上互相促进.分析力学对于具有约束的质点系的求解更为优越,因为有了约束方程,系统的自由度就减少,运动微分方程组的阶数随之降低,更易于求解.

分析力学研究的主要内容是:

1.导出各种力学系统的动力方程,如完整系统的拉格朗日方程、正则方程、非完整系统的阿佩尔方程等.

2.研究力学的变分原理,如哈密顿原理、最小作用量原理等.

3.寻求各种力学定理和积分,如对应于广义坐标的广义动量积分等.

4.探讨各种动力方程的求解方法以及一切与这个目标靠近的理论,例如研究正则变换以求解正则方程,研究相空间代表点的轨迹,以判别系统的稳定性等.

分析力学在解题方法上和牛顿力学的经典解题方法不同,后者是把物体系拆开成分离体,按牛顿定律列出运动方程.对于质点系的每一质点,依据牛顿第二定律列出沿三个坐标轴的运动方程,这样得到 n 个质点系共 $3n$ 个二阶微分方程,然后再求解.分析力学方法是考虑整个力学系统的能量函数,对于保守系统用动能 T 和势能 V 构成标量函数,例如,拉格朗日函数 $L=T-V$,哈密顿函数 $H=T+V$ 等,然后利用它导出运动方程.这样的方程不再包括不做功的约束力.对于具有 n 个质点和 h 个约束方程的质点系,运动微分方程的总阶数为 $2(3n-h)$,比牛顿法的总阶数 $6n$ 要小,容易求解.分析力学中也可用变分原理(如哈密顿原理)导出运动微分方程.它的优点是可以推广到新领域(如电动力学)和应用变分学中的近似法来解题.

弹性力学复变函数方法(complex variable method in theory of elasticity) 分析力学的重要方法之一.指用于求解弹性力学问题的复变函数方法.主要用来求解平面问题.在弹性力学平面问题中,基本方程是双调和方程:$\Delta^2\varphi=0$ (Δ 为拉普拉斯算符),其复变函数形式为

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}=0,$$

式中 $z=x+iy$;$\bar{z}=x-iy$,二者为共轭复变量.方程的通解为 $\varphi=\mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z)+\chi(z)]$,$\psi(z)$,$\chi(z)$ 为任意解析复变函数,Re 表示取实部.问题归结为求解复数边界条件问题的待定函数 $\psi(z)$ 和 $\chi(z)$.对各向同性材料,可得应力位移关系为

$$\sigma_x+\sigma_y=4\ \mathrm{Re}\psi'(z),$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)],$$
$$2G(-u+iv)=k\psi(z)-z\overline{\psi'(z)}-\overline{\chi'(z)},$$

其中 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 为应力分量;u,v 是位移分量;G 是剪切模量;k 为常数.用复变函数方法求解的弹性力学问题通常可具有一般性且求解过程较简单.同时,对多连通区域可以获得一些问题的解析解.此外,可利用保角变换和柯西型积分求出边界形状复杂的问题的解析解.所有这些,对于实函数方法来说都是十分困难的.

阿佩尔方程(Appell equation) 一组动力学方程.指适用于非完整系统的重要动力学方程.其形式为

$$\frac{\partial G}{\partial\ddot{\pi}_s}=\Pi_s\quad(s=1,2,\cdots,N),\tag{1}$$

式中 G 为吉布斯函数,此函数式是用准加速度 $\ddot{\pi}_s$ 表示的加速度动能式

$$\sum_{i=1}^{3n}\frac{1}{2}m_i\ddot{x}_i^2.$$

π_s 是准坐标,N 是自由度,Π_s 是对应于准坐标 π_s 的广义力.由于完整系统是非完整系统的特例,因此,凡是适用于非完整系统的动力学方程,亦适用于完整系统.

准坐标的来源及其意义是:设有一个含 n 个质点的非完整系统,它具有 l 个有限约束

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_{3n};t)=0\quad(k=1,2,\cdots,l)$$

和 r 个微分约束

$$\sum_{i=1}^{3n}a_{\rho i}\dot{x}_i+a_\rho=0\quad(\rho=1,2,\cdots,r).\tag{2}$$

可先利用有限约束,将 $3n$ 个 x 用 $m=3n-l$ 个广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 表示,r 个微分约束用 q_i 和 $\dot{q}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 表示.由此可将式(2)化为

$$\sum_{j=1}^{m}A_{\rho j}\dot{q}_j+A_\rho=0\quad(\rho=1,2,\cdots,r).\tag{3}$$

式中 m 个 $\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 只有 $N(=m-r)$ 个是独立的.为了更一般化,采用 m 个 $\dot{q}$ 的线性式组成 N 个准速度 $\dot{\pi}_s$ 来描述该系统,即

$$\dot{\pi}_s=\sum_{j=1}^{m}B_{sj}\dot{q}_j\quad(s=1,2,\cdots,N).$$

由于非完整系统的微分约束(3)是不可积的,所以坐标 π_s 不一定存在,这就是 π_s 准坐标名称的由来.$\dot{\pi}_s$ 的时间导数 $\ddot{\pi}_s$ 称为准加速度.由于式(1)左端是对 $\ddot{\pi}_s$ 的偏导数,所以 G 中一切不含 $\ddot{\pi}_s$ 的项都可以舍去

不写，从而使计算 G 函数的工作量大为减少.

准加速度(quasi-acceleration)　见"阿佩尔方程".

哈密顿原理(Hamilton principle)　一条重要的变分原理. 指英国数学家、物理学家哈密顿(Hamilton，W. R.)提出的适用于完整系统的原理. 该原理表明：对于完整、保守系统，在具有相同的时间间隔，从起始至终了的一切可能运动中，真实运动的哈密顿作用量取极值，即在 $N+1$ 维空间$(q_1,q_2,\cdots,q_N;t)$中，任意两点之间连线上动势(拉格朗日函数)的时间积分以真实运动路线上的值为驻值. 其变分形式为

$$\delta W=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=0,$$

其中 L 是动势，为广义坐标 q 与时间 t 的函数. W 称为哈密顿作用量. 应用变分法可将上式化为拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,N).$$

哈密顿作用量(Hamilton action quantity)　见"哈密顿原理".

哈密顿方程(Hamilton equation)　亦称哈密顿正则方程或正则方程. 一组动力学方程. 指经典力学中描写系统运动的一阶微分方程组. 是英国数学家、物理学家哈密顿(Hamilton，W. R.)于 1834 年提出的，其形式为

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad\frac{\partial p_i}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad(i=1,2,\cdots,N).\quad(1)$$

其中，H 为广义动量 p_i、广义坐标 q_i 及时间 t 的函数，称为哈密顿函数. H 表为

$$H\equiv(-L+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i)_{\dot{q}\to p},\quad(2)$$

这里，$\dot{q}\to p$ 表示应该用 N 个方程 $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$，解出 N 个 $\dot{q}_i(i=1,2,\cdots,N)$为$(p_1,p_2,\cdots,p_N;q_1,q_2,\cdots,q_N;t)$的 N 个函数，然后代入式(2)即可得哈密顿函数 H. 正则方程(1)是 $2N$ 个一阶微分方程的方程组，而拉格朗日方程是 N 个二阶微分方程的方程组，都是只适用于完整系统的动力学方程组. 由于(1)式的左边不再含 q 和 p 的导数，故此方程可写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_i(x_1,x_2,\cdots,x_{2N})\quad(i=1,2,\cdots,2N).$$

保守系统的正则方程在天体力学和经典统计力学中有重要的应用.

正则方程(canonical equation)　即"哈密顿方程".

哈密顿函数(Hamilton function)　见"哈密顿方程".

正则变换(canonical transformation)　经典动力学的重要变换之一. 指描述经典动力学系统状态的坐标和动量之间的一种变换. 它保持了哈密顿运动方程的形式不变. 对于一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\quad(i=1,2,\cdots,N),\end{cases}\quad(1)$$

施行变换

$$\begin{cases}Q_i=Q_i(q_1,q_2,\cdots,q_N;p_1,p_2,\cdots,p_N;t)\\P_i=P_i(q_1,q_2,\cdots,q_N;p_1,p_2,\cdots,p_N;t)\\\qquad(i=1,2,\cdots,N),\end{cases}\quad(2)$$

使得新的动力学方程组仍保持原有的正则形式，即有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial K}{\partial P_i},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial K}{\partial Q_i}\quad(i=1,2,\cdots,N).\end{cases}\quad(3)$$

则式(2)称为正则变换，其中 K 为该体系用新变量$(Q_1,Q_2,\cdots,Q_N;P_1,P_2,\cdots,P_N;t)$所表示的新哈密顿函数，而 $q_i,p_i(i=1,2,\cdots,N)$分别为广义坐标和广义动量. 为了保证变换(2)的逆变换存在，必须满足

$$\frac{\partial(Q_1,Q_2,\cdots,Q_N;P_1,P_2,\cdots,P_N)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_N;p_1,p_2,\cdots,p_N)}\neq0.$$

可用正则变换简化原来的系统，使之更易求解. 正则变换在理论物理中有广泛的应用.

哈密顿-雅可比方程(Hamilton-Jacobi equation)　分析力学中的动力学偏微分方程. 其形如

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,q_2,\cdots,q_N;\frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_N};t\right)=0,\quad(1)$$

其中哈密顿函数 $H=T_2-T_0+V$，T_2 是广义动量$(p_1,p_2,\cdots,p_N)$的二次齐次式，而方程(1)是由代换

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}\quad(i=1,2,\cdots,N)$$

后得到的，因此方程(1)为 S 的一阶二次偏微分方程. 若方程(1)解可表为：

$$S=S(q_1,q_2,\cdots,q_N;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N;t),\quad(2)$$

其中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,N)$为 N 个互相独立的任意常数，则称方程(2)所表示的 S 为方程(1)完全积分或全解.

德国数学家雅可比(Jacobi，C. G. J.)曾证明：若 $S(q,\alpha,t)$为(1)之全解，那么

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}=\beta_i(\text{常数}),\quad\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i\quad(i=1,2,\cdots,N)$$

就是其原正则方程的解. 有了这个定理，偏微分方程(1)才具实用价值. 对于 H 中不显含 t 的情况，系统有能量积分. 此时上述方程可简化为

$$H\left(q_1,q_2,\cdots,q_N;\frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_N}\right)=E,\quad(3)$$

其中 E 为运动中守恒的系统能量.由于摩擦力不能用势函数表示,所以方程(1)不适用于非保守系统.在天体力学中此方程对行星的运动有重要应用.

拉格朗日方程(Lagrange equation) 对于完整系统用广义坐标表示的动力学普遍方程.通常系指第二类拉格朗日方程,是法国数学家、力学家拉格朗日(Lagrange,J.L.)首先导出的,其表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\ (j=1,2,\cdots,N), \quad (1)$$

其中 T 是系统用广义坐标 q_j 与广义速度 $\dot{q}_j(=\mathrm{d}q_j/\mathrm{d}t)$ 表示的动能;Q_j 为对应于 q_j 的广义力.对于保守系统,还存在着势函数 $V(q_1,q_2,\cdots,q_N)$,因为有

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}\ 和\ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0,$$

所以令 $L=T-V$ 后,式(1)即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad (2)$$

式中 $L(q_1,q_2,\cdots,q_N;\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N;t)$ 称为拉格朗日函数.L 的量纲同能量,即为 L^2MT^{-2}.从式(2)中可以导出下面两种特殊情况下的一次积分:

1.广义动量积分:若在动势 L 的表示式中不包含属于系统的广义坐标 q_k,则这种坐标称为循环坐标或称可遗坐标.根据这个定义,成立 $\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$,于是由式(2)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_k}=0.$$

积分上式可得 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=$ 常量.$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ 称为对应于 q_k 的广义动量,用 p_k 表示且为常量,于是对应于循环坐标的广义动量是守恒的.

2.广义能量积分:亦称雅可比积分.当一个完整系统的动势 L 不显含时间 t 时,即可求得雅可比积分

$$T_2-T_0+V=H\ (常量), \quad (3)$$

式中 T_2 表示动能 T 用广义速度 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N$ 和广义坐标表示时,对于 T 中含广义速度的二次齐次式的部分;T_0 表示 T 中不含广义速度的部分;V 是势函数.当一个完整系统的约束方程都不显含时间 t 时,这种系统称为自然系统.对这样的系统,动量是广义速度的二次齐次式,即 $T=T_2$.这样,雅可比积分化为能量积分 $T+V=H$,因此称式(3)为广义能量积分.

第一类拉格朗日方程是用直角坐标表示的动力学普遍方程与用 k 个未定乘子和直角坐标表示的 k 个约束方程(包括微分约束)相结合而成的方程.这组方程可以解决用直角坐标描述的动力学问题和非完整系统的动力学问题.拉格朗日方程具有下述三个特点:

1.拉格朗日方程是用广义坐标表示的,对于实际问题可根据问题的特点选取适宜的广义坐标来建立动力学方程,从而便于求解;

2.对于具有 n 个质点和 h 个有限约束的完整系统,拉格朗日方程 $N=3n-h$ 个二阶微分方程.但是用直角坐标表示的牛顿方程有 $3n$ 个二阶微分方程,加 h 个有限约束方程,共有 $3n+h$ 个方程.二者比较,拉格朗日方程较便于求解;

3.应用拉格朗日方程可导出力学中的变分原理——哈密顿原理和另一组重要的运动微分方程——哈密顿正则方程.

第一类拉格朗日方程(Lagrange's equations of first kind) 见"拉格朗日方程".

第二类拉格朗日方程(Lagrange's equations of second kind) 见"拉格朗日方程".

拉格朗日函数(Lagrange's function) 见"拉格朗日方程".

广义动量积分(generalized momentum integral) 见"拉格朗日方程".

可遗坐标(ignorable coordinates) 见"拉格朗日方程".

循环坐标(cyclic coordinates) 见"拉格朗日方程".

广义能量积分(generalized energy integral) 见"拉格朗日方程".

劳思方程(Routh equation) 一种拉格朗日方程形式的动力学方程.指加拿大数学家劳思(Routh,E.J.)应用广义动量积分把拉格朗日方程降阶,导出了新的且仍保持拉格朗日方程形式的动力学方程.一个有 N 个自由度的保守系统,它有 N 个广义坐标 $q_i\ (i=1,2,\cdots,N)$.但在这个系统的拉格朗日函数 L 中,通常缺少某些坐标,设为 $q_1,q_2,\cdots,q_k(k<N)$,这些坐标称为循环坐标.对应于循环坐标有广义动量积分

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\beta_i(常量)\ (i=1,2,\cdots,k),$$

引入劳思函数

$$R(q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_N;\ \dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots,\dot{q}_N;\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=L-\sum_{i=1}^{k}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

就可导出劳思方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=0\ (j=k+1,\cdots,N).$$

上式的形式同保守系统的拉格朗日方程一样,但是式中只有 $2(N-k)$ 阶,已降低 $2k$ 阶,达到了降阶的目的.缺少的循环坐标可用下列积分求出

$$q_i=-\int\frac{\partial R}{\partial \beta_i}\mathrm{d}t\quad (i=1,2,\cdots,k).$$

例如，用平面极坐标(r,θ)求解平面中质点的辏力的运动问题时，力心选作原点，

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)$$

式中L不显含θ，所以θ是循环坐标. 循环积分为

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\beta, \quad (1)$$

劳思函数为

$$R=L-\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{\beta^2}{2mr^2}-V(r).$$

代入劳思方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial R}{\partial r}=0,$$

得

$$m\ddot{r}-\frac{\beta^2}{mr^3}+\frac{\partial V_r}{\partial r}=0. \quad (2)$$

从上式解出$r(t)$后，利用(1)式得

$$\theta=\int\frac{\beta}{mr^2}\mathrm{d}t.$$

于是可得r与θ关于时间的解函数.

劳思函数(Routh function)　见“劳思方程”.

最小作用量原理(principle of least action)　动力学中的一个变分原理. 是机械能守恒系统在位形空间真实轨道上运动时遵循的一个基本原理. 即对于定常保守系统，作用量$T\mathrm{d}t$积分的全变分为零：

$$\Delta\int T\mathrm{d}t=0, \quad (1)$$

其中T为动能，t为时间，Δ为一变分符号. Δ与δ不同，作用同一变量时，有关系式$\Delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\Delta t$，从而有

$$\Delta=\delta+\Delta t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

最小作用量原理还可表为：对定常保守系统，在广义坐标和时间t的$N+1$维位形空间$(q_1,q_2,\cdots,q_N;t)$中，限制机械能E保持不变的各路径$(\delta E=0)$中，若路径的始点和终点的全变分为零，则积分$\int T\mathrm{d}t$对于真实运动的路径和邻近的旁路比较，真实路径积分是驻值. 在通常情况下，式(1)确定的积分是极小值. 对于一个质点，

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

式(1)化为$\Delta\int mv\mathrm{d}s=0$. 这是马保梯(Maupertuis, P. L. de)于1744年最先提出的一个最小作用量原理. 瑞士数学家欧拉(Euler, L.)证明了此原理对一个质点在有心力场中的运动也是成立的. 法国数学家、力学家拉格朗日(Lagrange, J.-L.)又把这原理推广到N个自由度的保守系统并给出严格证明，故此原理又称马保梯-拉格朗日最小作用量原理.

最小作用量原理与哈密顿原理的共同点是：

1. 二者均为作用量的积分的变分原理，两者对时间间隔不长的运动都取极小值；

2. 两者都是$(q_1,q_2,\cdots,q_N;t)$ $N+1$维空间真实路线与旁路线积分的比较；

3. 两者都与保守系统的动力方程等效.

最小作用量原理与哈密顿原理的区别在于：

1. 前者以$\int T\mathrm{d}t$为作用量，后者以$\int L\mathrm{d}t$ (L为动势)为作用量；

2. 后者的两个端点在$N+1$维空间中为两定点，变分为等时的，即$\delta t=0$；而前者的始点与终点的全变分为零，即$\Delta q_0=\Delta q_1=0$，且机械能E在各条路线上相同，即$\delta E=0$. 两种作用量有关系式

$$\int_{t_1}^{t_2}2T\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t+H(t_2-t_1),$$

其中H是哈密顿函数.

马保梯-拉格朗日最小作用量原理(Mauperuis-Lagrange's principle of least action)　即“最小作用量原理”.

连续方程(equation of continuity)　流体力学的基本方程之一. 指流体力学中描述质量守恒定律的方程. 建立它的条件是考虑流体是连续介质，速度和密度均为空间及时间变量的连续可微函数. 对密度不变的流体，若流速$U(s)$与通过的横截面积$A(s)$都与时间t无关而仅是空间坐标s的函数，则一维定常流的连续方程为$AU=$常数. 当密度ρ变化时，方程变为$A\rho U=$常数. 对于ρ变化的一维非定常流，考虑两个横截面之间流体变化的情况，连续性方程是

$$\frac{\partial}{\partial s}(A\rho U)+A\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

对三维不定常流，连续性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0,$$

其中x,y,z为空间坐标，u,v,w是质点速度U的分量. 这方程可写成矢量形式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{U}=0.$$

当通过激波或在两种不同密度的流体的交界面处，因为ρ和$\boldsymbol{U}$都不连续，上述方程不再适用，质量守恒定律的形式也将改变.

欧拉方程(Euler's equation)　无粘流体力学的基本方程. 是连续介质的流体运动方程. 其一维不定常流动的方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial s}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s},$$

式中t为时间，u为沿坐标s方向流体质点的速度，ρ为密度，p为压力. u,p,ρ分别表示速度场、压力场

与密度场，它们都是 s 和 t 的二元函数.

在三维不定常流动情况下，若再考虑重力加速度 g 的作用，并选坐标 z 轴沿 g 的作用方向，则欧拉方程组对于速度的三个分量 u,v,w 具有下列形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g,$$

这里方程只有三个，但未知量有 u,v,w,p,ρ 五个. 要解这个适用于各种不同类型流体的方程组，还需添加其他方程，使未知量的数目等于方程的数目. 添加什么方程要根据具体的流体类型和运动类型而定. 若考虑密度均匀且不变化的液体，则 ρ 不再是未知量，只需添加一个连续方程；若要考虑 ρ 的变化，则还要添加状态方程；若实际情况不满足 $p=p(\rho)$ 的关系，例如 $p=\rho RT$（T 为热力学温度），则又多出来未知量 T，因此又要引用能量守恒定律，导出涉及动能、功、内能和化学反应所释放出的能量等因素的流体动力学的能量方程. 对于简单的密度不变的定常一维流，可以积分得到这种特殊情形的伯努利方程：

$$\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}=\text{常数}.$$

这个式子的含意是单位质量流体的动能改变是由压力作功引起的. 处理欧拉方程时总要加边界条件，通常还须加初始条件.

伯努利方程(Bernoulli's equation)　分析力学的重要方程之一. 对密度均匀的无粘流体的定常流，沿流线表述能量守恒定律而得到的方程. 它建立起质点速度 v 同压力 p，密度 ρ 和其他量之间的关系. 此关系是由瑞士数学家丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli，Daniel Ⅰ)在 1738 年得到的. 对于密度均匀的水沿着高度 h 有变化的管道中的定常流(即 v,p,ρ 都只随位置变，而在同一位置这些量不随时间 t 变的流动)的伯努利方程是

$$\frac{v^2}{2}+gh+\frac{p}{\rho}=C(\psi) \tag{1}$$

或

$$\frac{v^2}{2g}+h+\frac{p}{g\rho}=C_1(\psi), \tag{2}$$

其中 C(或 C_1)为仅与流线号码 ψ 有关的常数，它代表不同流线上的总能量. 左端三项分别表示单位质量流体的动能、势能和压力能，而三项之和为单位质量流体的总能量，它沿流线是守恒的.

纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes equation)　简称 NS 方程. 流体力学的基本方程之一. 指描述粘性流体动量守恒的运动方程. 它的不可压缩情况下的矢量形式为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p+\rho\boldsymbol{F}+\mu\Delta\boldsymbol{V}. \tag{1}$$

在直角坐标系下，其分量方程为

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X+\mu\Delta u,$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho Y+\mu\Delta\boldsymbol{V},$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho Z+\mu\Delta w,$$

其中 ρ 为流体密度，$\boldsymbol{V}$ 为流体速度矢量，在直角坐标中，其分量为$(u,\boldsymbol{V},w)$，p 为流体各向同性压力，$\boldsymbol{F}$ 为体积力，在直角坐标中，其分量为(X,Y,Z)，μ 是动力粘性系数.

从理论上讲，有了包括纳维-斯托克斯方程在内的基本方程组，再加上一定的初始条件和边界条件，就可确定流体的流动. 但实际上，由于这个方程比欧拉方程多了一个二阶导数项 $\mu\Delta\boldsymbol{V}$，因此，除在一些特殊条件下，很难求出方程的精确解. 通常是对方程各项作量级分析，从中确定出解的特性并进一步获得方程的近似解，或者利用电子计算机获取方程的数值解.

约束(constraint)　分析力学术语. 指对物体运动的限制. 物体由于被约束而受到的力称为约束力. 约束力是被动的，其大小和方向是依据物体所受的主动力、约束性质和运动情况来确定. 但是某些约束力的部分特性是可以根据约束性质判断的. 例如，用柔索悬挂物体，这物体所受的约束力的方向是沿索的，而且是拉力.

在分析力学中需要用到的典型约束是理想约束或称不做功的约束，这时质点系的各约束力在其作用点的虚位移上所做的功之和为零. 若一质点系具有 n 个质点，在质点 m_i 上作用着约束力 N_i，约束力 N_i 作用点的位移为 δr_i，则理想约束的定义为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_r=\sum_{j=1}^{3n}N_j\delta x_j=0, \tag{1}$$

其中 N_j 和 δx_j 是各矢量 $\boldsymbol{N}_i$ 和 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 在直角坐标轴上的分量$(j=1,2,\cdots,3n)$. 属于理想约束的例子有：

1. 质点约束在光滑曲面或光滑曲线上；
2. 刚体在粗糙面上滚动而不滑动；
3. 光滑铰链连结两个物体；
4. 任意两个质点间的距离保持不变的质点系.

约束通常可用质点坐标所构成的不等式或者是等式来描述，后者称为约束方程. 例如，由一细刚杆构成的单摆，其约束方程可写为

$$x^2+y^2+z^2=l^2\ (l\text{ 为杆长}). \tag{2}$$

约束方程含各质点的坐标的约束称为几何约束. 在 n 个质点的质点系中，质点坐标共有 $3n$ 个，以 $\boldsymbol{x}$ 表示 $3n$ 维空间矢量$(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})$，则几何约束方程

可写为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})=0\text{ 或 }f(\boldsymbol{x})=0. \tag{3}$$

若约束方程不仅含坐标而且还含时间，则称这种约束为时变几何约束，其通式为

$$f(\boldsymbol{x},t)=0. \tag{4}$$

若约束方程不显含时间，则称为定常约束或平稳约束，反之称为非定常约束或非平稳约束. 更一般的约束方程还包含质点的速度

$$f(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)=0. \tag{5}$$

通常只研究速度分量的一次式

$$\sum_{j=1}^{3n}a_j\dot{x}_j+a_0=0 \tag{6}$$

或表为微分形式

$$\sum_{j=1}^{3n}a_j\mathrm{d}x_j+a_0\mathrm{d}t=0, \tag{7}$$

其中 a_0,a_j 是 x_j 与 t 的函数或常数. 称含速度的约束为微分约束，而式(4)则称有限约束. 若式(7)中各系数满足：

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\ \frac{\partial a_0}{\partial x_i}=\frac{\partial a_i}{\partial t}\quad(i,j=1,2,\cdots,3n). \tag{8}$$

则式(7)可积分成有限约束.

若一个力学系统只含有限或可积的微分约束，这种系统称为完整系统；若力学系统包含了不能事先求积的微分约束，则这种系统称为非完整系统. 都是定常约束的力学系统称为定常系统或称为自然系统；含有非定常约束的系统称为非定常系统. 不同性质的力学系统具有不同的力学方程.

约束力(constraint force)　见“约束”.

理想约束(ideal constraint)　见“约束”.

约束方程(constraint equation)　见“约束”.

几何约束(geometrical constraint)　见“约束”.

平稳约束(stationary constraint)　见“约束”.

非平稳约束(non-stationary constraint)　见“约束”.

微分约束(differential constraint)　见“约束”.

完整系统(complete system)　见“约束”.

非完整系统(non-complete system)　见“约束”.

自然系统(natural system)　见“约束”.

虚功原理(principle of virtual work)　亦称虚位移原理. 分析力学的一个重要原理. 它指出：对于双面约束的定常系统，维持静止平衡的充分必要条件是作用于质点系的所有主动力沿作用点的虚位移所做的虚功之和为零. 它可表为如下形式

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\delta\boldsymbol{r}_i=0,$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 为第 i 个质点上的主动力；$\delta\boldsymbol{r}_i$ 为其虚位移. 此式称为虚功方程. 虚功原理是法国数学家、力学家拉格朗日(Lagrange，J.-L.)于1764年提出的.

虚位移原理(principle of virtual displacement)　即“虚功原理”.

达朗贝尔原理(d'Alembert principle)　动力学的基本原理之一. 它是有约束质点系动力学的一个普遍原理. 是法国数学家、力学家达朗贝尔(d'Alembert，J. le R.)于1743年最先提出的，因此得名. 对一个质点，该原理的数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i-m_i\boldsymbol{\alpha}_i=0,$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 为加于质量为 m_i 的质点的主动力；$\boldsymbol{N}_i$ 为限制该质点的约束力(参见“约束”)；$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为该质点的加速度.

虚功方程(equation of virtual work)　见“虚功原理”.

保守系统(conservative system)　一种力学系统. 指机械能守恒的力学系统. 若质点在空间内任何位置都受到确定的力的作用，而该力的大小和方向仅决定于质点的位置，则这种力称为场力. 若作用于质点的场力所做的功只同质点的起始和终了位置有关，而与质点运动的路径无关，则该场力称为保守力或有势力. 在保守力和定常约束作用下的力学系统称为保守系统；在保守力和非定常约束作用下的力学系统，以及在保守力和非保守力作用下的力学系统称为非保守系统.

保守力(conservative force)　见“保守系统”.

非保守系统(non-conservative system)　见“保守系统”.

动力学普遍方程(general equation of dynamics)　亦称拉格朗日-达朗贝尔方程. 分析力学的基本方程之一. 它可表达为：质点系中各质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和惯性力 $-m_i\boldsymbol{\alpha}_i$ 对于其虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 所作的虚功之总和为零，即

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{\alpha}_i)\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

它是根据达朗贝尔原理和理想约束而得到的.

拉格朗日-达朗贝尔方程(Lagrange-d'Alembert equation)　即“动力学普遍方程”.

边界层方程(boundary layer equations)　流体力学的基本方程之一. 指描述边界层中流体运动所遵循的物理规律的数学方程式. 它包括边界层微分方程和边界层动量积分方程.

1. 边界层微分方程：德国学者普朗特(Prandt，L.)于1904年从纳维-斯托克斯方程出发，经略去高级无穷小量而简化得到边界层方程. 例如，对于二维定常不可压缩流的边界层方程组，由一个连续性方程和两个运动方程组成，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \qquad (3)$$

其中 u,v 为沿着 x,y 方向上的速度分量；p,ρ 和 ν 分别表示压力、密度和运动粘性系数. 边界条件要求在不渗透的固体表面上，两个速度分量为零. 在边界层外缘，u 渐近地等于外缘速度 $u_0(x)$，所以有

$$\left.\begin{array}{ll} y=0: & u=v=0 \\ y\to\infty: & u(x,y)\to u_0(x) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

另外，还要给定压力梯度 $\partial p/\partial x$. 由于(3)式中的压力 p 只是 x 的函数，它与外缘速度之间的关系为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\rho u_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}, \qquad (5)$$

方程组(1)到(3)是拟线性偏微分方程组，求解很困难，通常采用数值方法求其近似解.

2. 边界层动量积分方程：是美籍匈牙利学者卡门(Kármán，T. von)于 1921 年所提出的积分方程，又称卡门积分关系式. 它是工程上常用的近似法，对定常、二维不可压缩层流和湍流边界层都能应用. 这个方程是在边界层内取一个控制微元，用动量定理，在 x 方向的总动量增加率等于单位时间内流出动量与流进动量之差. 求动量是从壁面 $y=0$ 到 $y=\delta$ 求积分，因此得出的是平均值. 此积分关系式为

$$\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}\left[u(u_0-u)\right]\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta(u_0-u)\mathrm{d}y=\frac{\tau_0}{\rho}, \qquad (6)$$

其中 τ_0 为物面上的剪应力.

边界层微分方程(boundary layer differential equations)　见“边界层方程”.

边界层动量积分方程(boundary layer momentum integral equations)　见“边界层方程”.

纳维法(Navier method)　弹性力学中的一种求解方法. 指应用三角级数求解弹性力学中薄板弯曲边值问题的一种精确解法. 它是法国力学家纳维(Navier，C. (-L. -M. -H.))于 1820 年提出的. 此法适用于求解四边简支的矩形薄板的弯曲边值问题，板上作用的载荷可以是分布的或集中的.

坎托罗维奇法(Kantorovich method)　弹性力学中的一种求解方法. 指求解弹性力学平板边值问题的一种近似数学方法. 它是俄国数学家坎托罗维奇(Канторович，Л. В.)于 1933 年提出来的. 此法之要点是：先假定位移分量沿一些方向的变化模式，然后利用弹性力学虚功原理，求出位移分量沿另一些方向的变化.

莱维法(Lévy method)　弹性力学中的一种求解方法. 指求解弹性力学中矩形薄板边值问题的一种数学方法. 它是法国数学家、工程师莱维(Lévy，M.)于 1900 年提出的. 此法的要点是：假定板的挠度在一个方向上为三角级数，而在另一个方向上为待求函数，通过求解待求函数得到挠度. 这个方法适用于求解一组对边为简支边，另一组相对边为任意边的矩形薄板.

瑞利-里茨法(Rayleigh-Ritz method)　弹性力学中一种求解方法. 指应用泛函驻值条件求未知函数的一种近似方法. 它是英国学者瑞利(Rayleigh，J. W.)于 1877 年在《声学理论》一书中首先采用，后来由瑞士物理学家、数学家里茨(Ritz，W.)于 1908 年作为一个有效方法提出. 这一方法的要点包含于“里茨法”中. 它在力学、物理学问题中得到广泛应用.

电 动 力 学

电动力学(electrodynamics)　电磁现象的动力学理论. 它研究电磁场的基本属性、运动规律以及电磁场与带电物质的相互作用. 电动力学是在人类对电磁现象的长期观察和生产活动的基础上发展起来的. 在电磁学发展的早期(18 世纪末)，人们认识到带电体之间以及磁极之间存在作用力. 以后，进一步研究了静电、静磁和电流等现象，总结出一些实验定律. 1822 年，丹麦物理学家奥斯特(Oersted，H. C.)发现电流的磁效应；1831 年，法拉第(Faraday，M.)发现电磁感应定律，并提出场的思想. 至此，电磁现象的基本实验定律已全部建立. 电现象和磁现象不是孤立的，而是作为矛盾统一的整体开始被人们认识. 在此基础上，1864 年，英国数学、物理学家麦克斯韦(Maxwell，J. C.)把电磁规律总结为麦克斯韦方程组，并预言了电磁波的存在. 1888 年，德国物理学家赫兹(Hertz，H. R.)在实验中发现了电磁波，证实了麦克斯韦理论的正确性. 至此，经典电动力学的基本理论已达到完整境地. 1905 年，美籍德国科学家爱因斯坦(Einstein，A.)否定了人们把电磁场理解为“‘以太’的运动形态”的错误理论，建立了狭义相对论，使电动力学在新的时空理论基础上发展为完整的适用于任何惯性系的理论.

20 世纪 20 年代，量子力学建立以后，电动力学又和量子理论结合起来，产生量子电动力学，成为研究微观世界电磁现象的有力工具. 电动力学的任务就是阐述电磁场及其物质相互作用的各个特殊范围内的实验定律，并在此基础上阐明电磁现象的本质和它的一般规律，以及用这些规律定量地处理各种电磁问题，研究各种电磁现象.

库仑定律(Coulomb's law)　静电学的理论基础. 它是关于点电荷相互作用的定律. 该定律于 1875 年为法国物理学家库仑(Coulomb，A. de C.)发现. 库仑定律的内容是：相对于惯性参考系处于静止状态的两个点电荷(相互之间的距离远大于本身

线度的带电体)在真空中的相互作用力大小同每一个点电荷的电量成正比,同两点电荷的距离的二次方成反比;作用力的方向是沿这两点电荷的连线;当这两个点电荷带同号电荷时,它们之间的作用力是排斥力;带异号电荷时,它们之间的作用力是吸引力.设 q_1 和 q_2 分别为两点电荷的电量,$\boldsymbol{r}$ 是由 q_1 指向 q_2 的矢径,则 q_1 作用于 q_2 的静电力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 为

$$\boldsymbol{F}_{12}=K\frac{q_1q_2}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

在 SI 单位制中,

$$K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8.98755179\times10^9\text{米/法},$$

其中 ε_0 称为真空介电常数,$\varepsilon_0=8.85418782\times10^{-12}$ 法/米.在 CGS 静电系单位制中 K 等于 1,没有量纲.

真空介电常数(vacuum dielectric contant) 见"库仑定律".

高斯定理(Gauss theorem) 静电场的基本定理之一.它给出了电场强度在任意封闭曲面上的面积分和包围在封闭曲面内的总电量之间的关系.高斯定理的内容是:静电场中任意一闭合曲面 S 的电通量 ϕ_e,等于该曲面内所包围的电荷的代数和 $\sum q_i$ 除以 ε_0.用公式表示为

$$\phi_e=\oint_S\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i.$$

高斯定理反映了静电场是有源场.凡是有正电荷的地方,必有电力线发生;凡是有负电荷的地方,必有电力线会聚.正电荷是静电场的源头;负电荷是静电场的尾间.高斯定理的微分形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

当存在电介质并用电位移 $\boldsymbol{D}$ 描写电场时,高斯定理可表为

$$\oint_S\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q_0.$$

式中 $\oint_S\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为电位移 $\boldsymbol{D}$ 对任意封闭曲面的通量,$\sum q_0$ 为曲面内的自由电荷代数和.$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$,$\varepsilon_r$ 称为介质的相对介电常数.

有介质存在时的高斯定理微分形式为 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0$.静电场的高斯定理可以推广到非静电场中,不论对于随时间变化的电场还是静电场,高斯定理都是成立的.

相对介电常数(relative dielectric constant) 见"高斯定理".

电荷守恒定律(law of conservation of charge) 物理学的一个基本定律.其内容是:一个孤立系统的总电荷量不变,即在任何时刻,系统中的正电荷与负电荷的代数和保持不变.用公式表示为

$$\oint_S\boldsymbol{j}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

式中 $\oint_S\boldsymbol{j}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为单位时间内通过任一封闭曲面 S 流出的电荷量,$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 为 S 面内总电荷量的变化率.这一关系式又称为电流的连续性方程.电荷守恒定律的微分形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

$\boldsymbol{J}$ 为电流密度,ρ 为电荷的体密度.在稳恒条件下,$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$,于是有 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$,它表示稳恒电流没有源头.

比奥-沙伐尔定律(Biot-Savart law) 电动力学的基本规律之一.指稳恒电流激发磁场的基本规律.真空中稳恒电流元矢量 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在空间一点 P 所引起的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3},\tag{1}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为载流导线上的线元矢量,方向沿其中电流的方向,$\boldsymbol{r}$ 为电流元到 P 点的矢径.$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m(亨利/米)是真空磁导率.磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的大小 $\mathrm{d}B$ 为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2},\tag{2}$$

式中 θ 为电流元矢量 $i\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和矢径 $\boldsymbol{r}$ 间的夹角.若 I 的单位为安培,$\mathrm{d}l$ 和 r 的单位为米,则 $\mathrm{d}B$ 的单位为特斯拉.$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于电流元和矢径的平面,其指向由右手螺旋定则确定.整个稳恒电流回路 L 在 P 点引起的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 等于其中各个电流元所引起的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的矢量叠加,即

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}.\tag{3}$$

运动电荷也激发磁场,当匀速运动电荷的速度远小于光速 c 时,其相应的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3},\tag{4}$$

式中 q 是电荷的电量,$\boldsymbol{v}$ 是电荷的速度,$\boldsymbol{r}$ 是电荷所在处到场点的矢径.式(1)是比奥-沙伐尔定律的微分形式;式(3)是比奥-沙伐尔定律的积分形式.式(4)与上两式形式相同,表明比奥-沙伐尔定律是对低速运动电荷才成立的近似定律.这个定律是讨论稳恒电流的磁场性质和计算其磁场分布的基础.

电磁感应定律(electromagnetic induction law) 电动力学的基本规律之一.指穿过闭合回路的磁通量发生变化时,回路中产生感应电动势的规律.它给出了感应电动势的大小正比于磁通量的变化率,其方向可由楞次定律确定,用公式表示为

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

式中 ε 为感应电动势，ϕ 为穿过以回路为周界的曲面上的磁通量. 回路的绕行方向与曲面的法线方向规定为右手螺旋关系. 式中的负号指示了感应电动势的方向. 它表明，在上述回路绕行方向的规定下，感应电动势的方向与回路绕行方向相同或者相反.

感应电动势按其产生的原因不同可分为动生电动势和感生电动势. 组成回路的导体（整体或部分）在恒定磁场中运动时，可使回路中磁通量发生变化，这样产生的电动势称为动生电动势，它是由磁场作用于运动导体中带电粒子的洛伦兹力引起的. 沿回路 l 的动生电动势为

$$\varepsilon_{动} = \oint_l (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为导体线元 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}$ 的运动速度，$\boldsymbol{B}$ 为 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}$ 所在处的磁感应强度. 固定回路所包围的磁场发生变化，引起回路所包围面积上磁通量变化时，回路中产生的电动势称为感生电动势：

$$\varepsilon_{感} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{3}$$

这类电动势由变化的磁场所激发的“涡旋电场”引起. 当导体运动和磁场变化同时存在时，总的感应电动势为式(2)与式(3)之和

$$\varepsilon = \varepsilon_{动} + \varepsilon_{感} = \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

它可以从(1)式中导出.

需指明的是，从参照系变换的观点看，动生电动势和感生电动势在一定程度上只有相对意义. 在某些情况下，例如磁棒插入线圈产生感应电动势，在以线圈为参照物的参照系中，电动势是感生的；在以磁棒为参照物的参照系中，电动势则是动生的. 但在一般情况下，不可能通过坐标变换，将感生电动势归结为动生电动势，反之亦然.

动生电动势(motional electromotive force) 见“电磁感应定律”.

感生电动势(induced electromotive force) 见“电磁感应定律”.

涡旋电场(vortex electric field) 亦称感应电场. 电动力学的基本概念之一. 指电磁感应现象中的有旋电场. 该电场是由英国数学家、物理学家麦克斯韦(Maxwell, J. C.)首先提出的. 麦克斯韦受到19世纪的其他几位物理学家和数学家关于电磁感应现象研究的影响，同时又借鉴了法拉第(Faraday, M.)关于电磁感应现象的直觉推测，着手对电磁现象进行数学概括. 麦克斯韦分析了一些电磁感应现象之后，敏锐地感觉到感生电动势现象预示着有关电磁场的新效应. 感生电动势完全与导体的种类和性质无关的实验事实使他相信，即使不存在导体回路、变化的磁场，在其周围也会激发一种电场，称为涡旋电场. 产生感生电动势的非静电力正是这一涡旋电场 $\boldsymbol{E}_{旋}$，由此，他写出电磁现象的一个基本方程式：

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E}_{旋}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1}$$

应用斯托克斯公式，其微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{旋} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{2}$$

涡旋电场与库仑电场的相同之处是对电荷都有力的作用，它与库仑电场不同之处在于，库仑电场由静止电荷产生，遵从静电场的高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{库}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

和环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{库}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0,$$

说明库仑电场是有源场、有势场. 而涡旋电场由变化的磁场激发，遵从

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{旋}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

和

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{旋}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

说明涡旋电场是无源场、有旋场.

感应电场(induction electric field) 即“涡旋电场”.

位移电流(displacement electric current) 电动力学的基本概念之一. 指由变化的电场所产生的、能够激发磁场的电流. 稳恒电流是闭合的，有 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$. 在非稳恒情况下，电流分布由电荷守恒定律制约：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0. \tag{1}$$

它说明非稳恒电流不再是闭合的. 现在考察电流激发磁场的规律

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}. \tag{2}$$

上式是稳恒磁场的一个基本方程，可由安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

运用斯托克斯公式导出. 对式(2)两边取散度，由于 $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} \equiv 0$，因此式(2)只有当 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ 时才可能成立. 在稳恒情况下，电流 $\boldsymbol{J}$ 是闭合的，$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$，式(2)在理论上没有矛盾. 但是在非稳恒情况下，$\nabla \cdot \boldsymbol{J} \neq 0$，因而式(2)与电荷守恒定律发生矛盾. 为了将式(2)推广到普遍情形，英国数学家、物理学家麦克斯韦(Maxwell, J. C.)引入了一个非常重要的概念，即位移电流密度 $\boldsymbol{J}_D$，它和电流 $\boldsymbol{J}$ 合起来构成闭合的量

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_D) = 0. \tag{3}$$

并假设位移电流 $\boldsymbol{J}_D$ 与电流 $\boldsymbol{J}$ 一样产生磁效应,即把式(2)修改为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_D). \tag{4}$$

此式两边的散度都等于零,因而理论上就不再有矛盾. 由式(3)可导出 $\boldsymbol{J}_D$ 的可能表示式. 由电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

及电场散度与电荷密度 ρ 的关系式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

两式合起来得

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = 0. \tag{5}$$

与式(3)比较即得 $\boldsymbol{J}_D$ 的一个可能表示式

$$\boldsymbol{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{6}$$

已知位移电流密度 $\boldsymbol{J}_D$,则可进一步表示出位移电流

$$I_D = \int_S \boldsymbol{J}_D \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

式中 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 为真空电位移矢量. 式(6)揭示了位移电流的实质是变化的电场.

位移电流与传导电流相同之处是它们都能激发磁场. 不同之处是,位移电流由变化的电场产生,而传导电流由电荷定向移动产生;位移电流不能产生焦耳热,而传导电流能产生焦耳热.

麦克斯韦方程组(Maxwell equations)　电动力学的基本方程组. 是描述电磁场变化基本规律的偏微分方程组. 1864 年,英国数学家、物理学家麦克斯韦(Maxwell, J. C.)继承和发展了前人在电磁理论方面的大量工作,用数学语言将当时已发现的电磁场基本规律库仑定律、安培定律、高斯定理、法拉第定律等,用 20 个变量列出 20 个方程,成为电磁场的一般方程组. 后经过麦克斯韦、德国物理学家赫兹(Hertz, H. R.)、洛伦兹(Lorenz, E. N.)等人的加工,得出形式上比较对称的四个矢量方程. 这些方程在 SI 单位制中可以写成:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}=\rho, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 为电位移,$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度,$\boldsymbol{E}$ 为电场强度,$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度,$\boldsymbol{J}$ 为传导电流密度,ρ 为自由电荷密度. 式(1)就是高斯定理,它说明电荷是电场的源. 式(2)是磁场的高斯定理,它说明磁场是无源场,描述了没有发现磁单极这个物理事实. 式(3)是微分形式的法拉第电磁感应定律. 它说明变化的磁场激发变化的涡旋电场. 式(4)是微分形式的安培环路定理. 式中的$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$是位移电流密度,其实质是随时间变化的电场. 引入位移电流概念是麦克斯韦对电磁理论的重要发展. 整个方程(4)说明传导电流和变化的电场能激发磁场. 在不考虑各向异性的简单情况下,场方程组的三个辅助关系式可表示为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{7}$$

式中 ε,μ,σ 分别为介电常数、磁导率和电导率.

麦克斯韦方程组和洛仑兹力合起来构成说明宏观电磁现象的理论基础,它反映一般情况下电荷电流激发电磁场以及电磁场内部运动的规律. 在 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 为零的区域,电场和磁场通过本身的互相激发而运动传播. 由此预言了电磁波的存在,并指出光波就是一种电磁波. 以后的赫兹实验和近代的无线电的广泛实践完全证实了麦克斯韦方程组的正确性.

洛仑兹力(Lorentz force)　电动力学的基本概念之一. 指运动点电荷在磁场中受到的作用力. 运动点电荷所受的洛仑兹力 $\boldsymbol{F}$ 同它的电量 q、点电荷的速度 $\boldsymbol{V}$ 以及点电荷所在处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的关系如下式

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

洛仑兹力的大小 $\boldsymbol{F}$ 为

$$F = |q| vB \sin\theta, \tag{2}$$

式中 θ 为速度 $\boldsymbol{V}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角. 洛仑兹力的方向垂直于 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 方向所确定的平面,q 为正电荷时 $\boldsymbol{F}$ 的指向由右手螺旋定则确定;q 为负电荷时 $\boldsymbol{F}$ 的方向相反. 在 SI 单位制中,力的单位是牛顿.

洛仑兹力始终垂直于电荷的运动方向,所以它对电荷不做功. 它只改变电荷运动的方向,不改变电荷的速率和动能. 在电场和磁场同时存在的一般情况下,运动电荷受到的总的作用力是电场力和磁场力之和,该合力一般也称为洛仑兹力,表示为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}), \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 是运动电荷所在点的电场强度,单位是伏/米.

近代物理学证实了洛仑兹力公式对任意运动速度的带电粒子都是适用的. 粒子加速器、电子光学设备等许多科学仪器和工业设备都应用了洛仑兹力. 麦克斯韦方程组和洛仑兹力公式,正确地反映了电磁场的运动规律以及它和带电物质的相互作用规律,成为电动力学的理论基础.

电磁势(electromagnetic potentials)　电动力学的基本概念之一. 它是描述电磁场的物理量. 它包括标势 φ 和矢势 $\boldsymbol{A}$ 两部分. 在一般情况下,磁场 $\boldsymbol{B}$

仍保持无源性，所以可引进矢势 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{1}$$

电场可以表示为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{2}$$

因为现在的电场在一般情况下不再是保守力场，不存在势能的概念，所以标势 φ 失去作为电场中势能的意义. 在变化电场中，电场和磁场是相互作用的整体，故需把矢势和标势作为一个整体来描述电磁场. 引进电磁势后可以将电磁场所满足的麦克斯韦方程组化为电磁势所满足的一组微分方程，未知量个数和方程个数都减少了，并且，电磁势与电荷密度 ρ 及电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的依赖关系比较简单、直接，易于求解. 设 ψ 为任意时空函数，当矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ 作如下变换：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} + \nabla\psi, \\ \varphi \to \varphi' &= \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3}$$

时，则有

$$\nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

$$-\nabla\varphi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E}.$$

即 $(\boldsymbol{A}', \varphi')$ 与 $(\boldsymbol{A}, \varphi)$ 描述同一电磁场，变换(3)式称为势的规范变换. 由于 $(\boldsymbol{A}, \varphi)$ 这种任意性，为了使基本方程和计算简化，在不同问题中可以采用不同的规范条件来选定 $\boldsymbol{A}$ 和 φ. 常用的有库仑规范 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，洛仑兹规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

等. 利用洛仑兹规范，在真空情形下，可从麦克斯韦方程组得到达朗贝尔方程如下：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

上两式的解为推迟势.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \mathrm{d}v',$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \mathrm{d}v'.$$

上两式说明，空间某点 $\boldsymbol{x}$ 在某时刻 t 的场值不是依赖于同一时刻位于 $\boldsymbol{x}'$ 的电荷、电流的分布，而是决定于较早时刻 $t-r/c$ 的电荷电流分布. 也就是说，电荷、电流激发的场不能够立刻传到观察点，而是在较晚的时刻，所推迟的时间 r/c 正是电磁作用从电荷、电流所在点 $\boldsymbol{x}'$ 传至观察点 $\boldsymbol{x}$ 所需的时间. 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 称为推迟势. ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 给定后就可算出推迟势，再由电磁势和电磁场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的关系就可求得空间任意点的电磁场.

泊松方程(Poisson equation)　电动力学的重要方程之一. 指静电势所满足的势函数的一种二阶偏微分方程. 在均匀各向同性线性介质中，$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，将静电场强与电势梯度的关系 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ 代入高斯定理微分式 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$，则可导出静电场的泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{1}$$

式中 ρ 为自由电荷密度，$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$，其中 ε_r 为各分区媒质的相对介电常数，ε_0 为真空介电常数. 在没有自由电荷的区域里，$\rho = 0$，泊松方程就简化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0. \tag{2}$$

上述方程，给出边界条件就可以确定电势 φ 的解. 在两介质界面上，电势 φ 必须满足边值关系

$$\varphi_1 = \varphi_2, \tag{3}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma, \tag{4}$$

式中 φ_1，φ_2 分别为界面两侧的电势，ε_1，ε_2 为相应介质的介电常数，n 为电介质 1 指向介质 2 的法线，σ 为界面上的自由电荷面密度.

泊松方程(或拉普拉斯方程)以及边值关系(3)，(4)是电势所必须满足的方程. 除此之外，要完全确定区域 V 内的电场，还必须给出 V 的边界面上的一些条件，这些条件由惟一性定理给出：设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$，在 V 的边界面上给定方程(1)电势 $\varphi|_S$，或方程(2)电势的法向导数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S,$$

则 V 内的电场惟一确定. 除了静电势满足泊松方程或拉普拉斯方程，磁场矢势 $\boldsymbol{A}$ 也满足泊松方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}, \tag{5}$$

式中 $\mu = \mu_r \mu_0$ 为磁导率，其中 μ_r 为相对磁导率，μ_0 为真空磁导率，$\boldsymbol{J}$ 为传导电流密度. 在 $\boldsymbol{J} = 0$ 的空间，上式化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0. \tag{6}$$

静磁场的泊松方程和拉普拉斯方程是矢量方程，它的三个直角坐标分量满足的方程与静电势满足的方程有相同的形式，因此由静电势的解，可得矢势方程的解.

拉普拉斯方程(Laplace's equation)　见"泊松方程".

镜像法(method of images)　一种计算静电场或稳定磁场的方法. 该方法是：若求解电场的区域内只有一个或几个点电荷，区域边界是导体或介质面，则可以在界面的另一侧适当位置，设置适当量的假想电荷(称为电荷的像或像电荷)，导体面上的感应电荷或介质界面上的激化电荷对空间中电场的影响

能用假想电荷代替.若这种代换能满足边界条件,则源电荷与像电荷产生的电场就是要求解的实际电场.

镜像法不仅可以解决一些静电问题,也可用于计算稳恒磁场、稳恒电源场和天线的辐射场等重要的电磁场问题.镜像法可以很简便地求解电场,但只有在空间只有一个或几个点电荷,并且界面的几何形状很简单的情形下,才能成功的设置电像,因此不是普遍适用的方法.

运动带电粒子的电磁场(electromagnetic field of moving charged particle)　电动力学的基本概念之一.指微观带电粒子在运动中所产生的电磁场.在微观领域中,经典电动力学已不适用,必须用量子理论.电磁场除了具有波动性以外,还具有粒子性.因此用经典麦克斯韦方程组来研究微观电磁作用问题必定是不完备的.但是,经典电动力学的一些结果在一定条件下还是近似正确的,而且对一些物理概念也比较容易建立.在经典理论中,为了计算带电粒子激发的势,可以把粒子看做小体积内电荷连续分布的极限.考虑到高速运动粒子的相对论效应,可以将粒子在辐射时刻相对其静止的参考系中的电磁势

$$\bar{\varphi} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \bar{r}}, \quad \boldsymbol{A} = 0, \tag{1}$$

经洛仑兹变换用实验室系中的电磁势表示出来

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \dfrac{q\boldsymbol{V}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left(r - \dfrac{\boldsymbol{V}}{c}\cdot\boldsymbol{r}\right)}, \\ \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(r - \dfrac{\boldsymbol{V}}{c}\cdot\boldsymbol{r}\right)}. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)称为李纳-维谢尔势.注意上式右边各量都是在时刻 $t' = t - r/c$ 所取的值.$\boldsymbol{V}$ 为带电粒子速度.从李纳-维谢尔势,可以计算出任意运动的带电粒子的电磁场,对于匀速运动粒子结果为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{r}}{r^3\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}, \tag{3}$$

式中 θ 是观察点坐标矢径 $\boldsymbol{r}$ 与粒子速度 $\boldsymbol{V}$ 的夹角,$\boldsymbol{E}$ 代表总电场,既有电荷 q 按库仑定律激发的场,也有磁场变化引起的感生电场.但总场却永远与坐标矢径 $\boldsymbol{r}$ 平行,即仍然呈辐射状.由电场强度 $\boldsymbol{E}$ 并考虑 $1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0$ 可求出磁场

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{V}}{c^2} \times \boldsymbol{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\,\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{r}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{r^3\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{4}$$

式(3),(4)便是匀高速运动电荷的电磁场分布,分三种情况讨论:

1. 当电荷速度较低 $v \ll c$ 时,则式(3),(4)退化为:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

2. 当 $\theta = 0$ 或 π 时,由式(3),(4)得:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(1 - \frac{v^2}{c_2}\right) < \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},\ B = 0.$$

这表明在运动电荷的正前方和正后方不存在磁场,电场也比静电场小,电荷运动速度越快,这种效应越显著.

3. 当 $\theta = \pi/2$,即 $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{V}$ 时电磁场分布由式(3),(4)可得:

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{r^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma E', \\ B = \dfrac{v}{c^2}E = \gamma\,\dfrac{v}{c^2}E', \end{cases} \tag{5}$$

式中

$$\gamma = \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right]^{-1},$$

E' 为电荷 q 的库仑场.(5)式说明在与电荷运动方向垂直的平面内,运动电荷的电场和磁场分别大于库仑场和毕-沙场,都是它们的 γ 倍,速度越快,γ 值越大.

电磁场的边界条件(boundary conditions for electromagnetic field)　电动力学的基本概念之一.指电磁场的场矢量在不同介质的交界面上应满足的关系.电磁场在两种不同介质分界面上,从一侧过渡到另一侧时,由于界面上一般出现面电荷电流分布,使场矢量 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ 发生跃变.电磁场的边界条件就是指场矢量跃变所遵从的条件,即边界两侧场矢量的切向分量之间以及法向分量之间的关系.这些关系可由积分形式的麦克斯韦方程组求出.这些边界条件是:

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0, \tag{2}$$

$$n\cdot(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S, \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为两介质分界面法线方向的单位矢量.$\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{H}_2$ 分别为介质 1 和介质 2 内紧靠分界面的场矢量,ρ_S 为分界面上的自由电荷面密度,$\boldsymbol{J}_S$ 为分界面上的传导电流面密度.式(1)表示界面上有自由电荷分布时,界面两侧电位移矢量的法向分量跃变;式(2)表示界面两侧电场强度的切向分量连续;式(3)表示界面两侧磁通密度的法向分量连续;式(4)表示在界面上有传导电流分布时界面两侧磁场强度的切向分量发生跃变.

在某些书籍中,为了与另一种边界条件(在区域的边界上给定的有关矢量的值)相区别,将本条所解

释的电磁场的边界条件称为电磁场的边值关系.

电磁场的边值关系(boundary value relations of electromagnetic field) 见"电磁场的边界条件".

电磁场的边值问题(boundary-value problems of electromagnetic field) 关于电磁场的一个基本问题.由区域内的已知场源和边界上的物理状况,通过麦克斯韦方程组求解区域内的电磁场问题.对于静电场,基本方程为静电势的泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{1}$$

式中 ρ 为(已知)电荷密度,ε 为介电常数.在场源电荷分布的区域内 $\rho=0$,方程(1)化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{2}$$

静电场的边值问题就是泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题.边界条件基本有两种情形:

1.边界面是两电介质 1,2 的分界面,通常界面上无自由电荷,电位移 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量连续,且 $D_{1n}=D_{2n}$;电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量连续,$E_{1t}=E_{2t}$.

2.边界是导体面,往往是给定导体面的电势或其上的总电荷.对于变化电磁场,常用电磁势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 表示:

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{3}$$

在洛仑兹规范

$$(\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot A = 0)$$

条件下,由麦克斯韦方程组可推导出势 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 所满足的基本方程,称为达朗贝尔方程:

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon},\end{cases} \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 分别为电流密度和电荷密度,是电磁场的激励源.若区域中无激励源,可直接用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 描述电磁场:

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{E} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0\\ \nabla^2\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0,\end{cases} \tag{5}$$

式中 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为波速.对于单色电磁波,由(5)式可得到亥姆霍兹方程

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{E} + K^2\boldsymbol{E} = 0,\\ \nabla^2\boldsymbol{B} + K^2\boldsymbol{B} = 0,\end{cases} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{K}=\omega/v$ 为波矢值.于是,变化电磁场问题就是亥姆霍兹方程的边值问题.电磁场传播过程中若把波导或谐振腔的器壁看做是理想导体,则边界条件是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量为零,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量为零.

达朗贝尔方程(D'Alembert equation) 见"电磁场的边值问题".

电磁能(electromagnetic energy) 电动力学的基本概念之一.它是电场能与磁场能的总和.它可表示为

$$W = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 分别为电场强度、电位移、磁场强度、磁感应强度,$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})/2$ 为电场能量密度,$(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})/2$ 为磁场能量密度,则$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})/2$ 为电磁场能量密度.式(1)中的积分遍及场所在的空间,这说明电磁能分布在电磁场所在的空间.场能的分布具有一定方式,并且随着场的运动而在空间中传播.当电磁场与其他带电物体相互作用时,电磁能一部分转化为其他形式的能,一部分以能流的形式转移.

坡印亭矢量(Poynting vector) 电动力学的基本概念之一.指电磁场能流密度矢量.它等于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的矢积,表示为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}. \tag{1}$$

其大小等于单位时间内通过垂直于能量传递方向上单位截面的电磁能量,单位是瓦/米^2,方向是能量传输的方向.式(1)不仅描述电磁能传输的状态,也说明电磁能是存贮于电磁场中的.即使在直流电路中,电能也不是通过电路中的电流传到负载的,而是以电路周围电磁场能流的形式传输的.任何电磁能的传输,都是以电磁场能流的形式在电磁场中进行的.

电磁动量(electromagnetic momentum) 电动力学的基本概念之一.指电磁场与带电物体相互作用时,使物体受到(一定)的总力.物体受力后其动量会发生变化,这是入射电磁场的动量转移到物体上的结果.因此,电磁场也和其他物体一样具有动量.辐射压力是电磁场带有动量的实验证据.设带电体在磁场中运动,根据它所受的洛仑兹力和麦克斯韦方程组可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\boldsymbol{g}\mathrm{d}v = -\oint_S\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}S, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{G}_m$ 为带电体系的动量,

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{\phi}=-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}J(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2),$$

$$J=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}\text{(单位张量)}.$$

$\boldsymbol{g}$ 为电磁场的动量密度,S 为任意包面,V 为体积.

$$\int_V\boldsymbol{g}\mathrm{d}v = \boldsymbol{G}_{em}$$

即为体积 V 中的电磁场动量,$\boldsymbol{\phi}$称为电磁场的动量流密度张量.式(1)的意义是,在闭合面 S 包围的体积 V 中,带电体系的动量和电磁场的动量的变化率(增加或减少率)之和等于通过 S 面(流入或流出)

的电磁场的动量. 以上就是电磁场存在时的动量守恒定律的定量表述.

电磁波(electromagnetic wave) 电动力学的基本概念之一. 它是电磁场的一种运动形态，这种运动以光速在空间中进行. 电磁波的产生机制和运动规律可由麦克斯韦方程组描述. 在没有电荷、电流分布的空间，方程组中的两个旋度方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{2}$$

上面两个式子表明，变化的磁场产生变化的电场，而变化的电场又产生变化的磁场，电场与磁场之间如此不断反复激发，便在空间形成电磁波. 无线电波、红外线、可见光、紫外线、X 射线及 γ 射线都是电磁波，不过它们产生方式不同，波长也不同. 在没有电荷、电流分布的自由空间中，电场和磁场相互激发，它们所满足的波动方程是

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 是电磁波在真空中传播的速度.

以一定频率作正弦振荡的电磁波称为定态电磁波(单色波). 对于角频率为 ω 的定态电磁波其波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} + k^2 \boldsymbol{B} = 0, \tag{5}$$

以上两式称为亥姆霍兹方程. 式中 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 称为圆波数. μ,ε 为介质的磁导率和介电常数. 亥姆霍兹方程(4)的每一个满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0$ 的解代表一种可能存在的波形. 解出 $\boldsymbol{E}$ 后，磁场 $\boldsymbol{B}$ 可由

$$\boldsymbol{B} = -\omega \nabla \times \boldsymbol{E}$$

求出. 类似地，也可以由方程(5)先求 $\boldsymbol{B}$，再求 $\boldsymbol{E}$.

亥姆霍兹方程(Helmholtz equation) 见“电磁波”.

圆波数(circle wave number) 见“电磁波”.

平面电磁波(plane electromagnetic wave) 一种特殊的电磁波. 指波阵面(等位相点组成的面)为一平面的电磁波. 平面电磁波的表示式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 是波矢量，其大小为 $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，称为圆波数，方向为电磁波的传播方向. $\boldsymbol{x}$ 为 t 时刻电场 $\boldsymbol{E}$ 的位矢，ω 为电磁波的圆频率，$\omega=2\pi f$，f 为电磁波的频率.

平面电磁波有如下性质：

1. 电磁波为横波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都与传播方向垂直.
2. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 互相垂直，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 沿波矢 $\boldsymbol{K}$ 的方向，即电磁波传播方向.
3. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同位相，振幅比为相速 v.
4. 波的相速 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$，在真空中

$$v = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = c = 3.0\times 10^8\ \mathrm{m/s},$$

即电磁波在真空中的传播速度与光速相同，这说明光是电磁波.

平面电磁波的反射(reflection of plane electromagnetic waves) 电动力学的基本概念之一. 指平面电磁波在介质面上发生的现象. 电磁波由一种均匀各向同性介质中传播到与另一种均匀各向同性介质的分界平面上，就分别向两种介质中传播. 向第一种介质中传播的是反射波，向第二种介质中传播的是折射波. 利用电磁场在介质界面上的边值关系可以求得入射、反射和折射波的振幅关系：

$$\frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = -\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)},$$

$$\frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i+\theta_t)},$$

$$\frac{E_{r/\!/}}{E_{i/\!/}} = \frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)},$$

$$\frac{E_{t/\!/}}{E_{i/\!/}} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}.$$

以上四式合称为菲涅耳公式，式中 $\boldsymbol{E}$ 为复振幅，下标 r 表示反射，t 表示折射，i 表示入射. $\perp$ 表示垂直于入射面的分量，$/\!/$ 表示平行于入射面的分量. 在入射角 θ_i 等于某一特定角 θ_0(布儒斯特角)时，恰使反射波与折射波垂直，即 $\theta_0+\theta_t=\pi/2$，此时 $E_{r/\!/}=0$，即 $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面的分量没有反射波，这种现象称为全偏振现象.

平面电磁波的折射(refraction of plane electromagnetic waves) 见“平面电磁波的反射”.

全偏振现象(completely polarized phenomenon) 见“平面电磁波的反射”.

电磁辐射(electromagnetic radiation) 电动力学的基本概念之一. 指振荡的电荷或电流系统以及任意加速的带电粒子向外辐射电磁波的过程. 根据麦克斯韦的电磁理论，变化的电场和磁场将互相交替激发，因此，在空间某处变化的电荷或电流所产生的电磁扰动将会向四周传播出去，形成交变电磁场. 在靠近辐射源的区域，准稳场较强，电场或磁场有不等于零的径向分量，场强随距离的变化正比于 $1/r^2$，且与场源的分布有关. 在远离辐射源的区域，电场和磁场强度均与矢径垂直，且与 $1/r$ 成正比. 电磁能量和电磁动量都沿矢径方向流动，其值与 $1/r^2$ 成正比，这部分交变电磁场称为辐射场.

计算辐射场的基础是推迟势公式，若电流 $\boldsymbol{J}$ 是频率一定的交变电流，即 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')e^{-i\omega t}$，若令

矢势

$$A(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V',\qquad(1)$$

则有

$$A(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(x')e^{i(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}V'.\qquad(2)$$

令

$$A(x,t)=A(x)e^{-i\omega t},\qquad(3)$$

有

$$A(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(x')e^{ikr}}{r}\mathrm{d}V'.\qquad(4)$$

上式中 e^{ikr} 是推迟作用因子，它表示电磁波传至观察点时有位相滞后 kr. 电荷密度 ρ 与电流密度 J 的关系为 $i\omega\rho=\nabla\cdot J$，由此，只要 J 给定，则 ρ 也自然确定. 由式

$$\varphi(x,t)=\int\frac{\rho\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V',\qquad(5)$$

可确定标势 φ. 因此，由矢势 A 就可以完全确定电磁场. 磁场 B 可直接由 A 求出

$$B=\nabla\times A.\qquad(6)$$

E 可由麦克斯韦方程求出，在真空中

$$E=\frac{ic}{k}\nabla\times B.$$

辐射场(radiation field)　见“电磁辐射”.

电偶极辐射(radiation of electric dipole)　电动力学的基本概念之一. 指运动电荷的辐射形式. 当两个大小相等、符号相反的电荷 $+q$ 与 $-q$ 相隔一个小距离 a（这里，$a\ll\lambda$，λ 是振荡电磁波波长）时，定义电偶极矩 $P=qa$. P 随时间 t 呈周期性变化时，电偶极子成为偶极振子辐射电磁波，这就是电偶极辐射. 计算辐射场用推迟势公式

$$A(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(x')e^{ikr}}{r}\mathrm{d}V'.\qquad(1)$$

现在研究远离辐射源的小区域内电流（线度为 a）所产生的辐射，即 $a\ll\lambda$（波长），$a\ll r$（电流到观察点的距离）对于远区的场 $r\approx R-n\cdot x'$，式中 R 是由原点（选在电荷分布区域内）到观察点 x 的距离，$R=|x|$，n 为沿 R 方向的单位矢量. 将(1)式中的 A 对小参数 x'/R 和 x'/λ 展开得：

$$A(x)=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int J(x')(1-ikn x'+\cdots)\mathrm{d}V'.\qquad(2)$$

对于矢势展开式(2)中的第一项

$$A(x)=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int J(x')\mathrm{d}V',$$

因为电流是由运动带电粒子组成的，

$$\int J(x')\mathrm{d}V'=\sum eV=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum(ex')$$

$$=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\dot{P},\qquad(3)$$

式中 e 是带电粒子所带的电量，V 是粒子的速度，P 是电荷系统的电偶极矩. 因此

$$A(x)=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{P}\qquad(4)$$

代表振荡电偶极矩产生的辐射. 由此可求得辐射电磁场为

$$B=\nabla\times A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}e^{ikR}\ddot{P}\times n,\qquad(5)$$

$$E=\frac{ic}{R}\nabla\times B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}e^{ikR}(\ddot{P}\times n)\times n.\qquad(6)$$

若取坐标原点在电荷分布区域内，并以 P 为极轴，则：

$$B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}|P|e^{ikR}\sin\theta e_\varphi,\qquad(7)$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}|P|e^{ikR}\sin\theta e_\theta,\qquad(8)$$

式中 e_φ，e_θ 为纬线上与经线上的单位矢量. 电偶极辐射的平均能流密度为

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E^*\times H)\\&=\frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(B^*\times n)\times B]\\&=\frac{|\ddot{P}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^3}\sin^2\theta n,\end{aligned}\qquad(9)$$

因子 $\sin^2\theta$ 表示电偶极辐射的角分布，即辐射的方向性. 在 $\theta=90°$ 的平面上辐射最强，而沿电偶极矩轴线方向（$\theta=0$ 或 π）没有辐射. 总辐射功率

$$P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{P}|^2}{3c^3}.\qquad(10)$$

由此看出，若保持电偶极矩振幅不变，则辐射正比于频率的四次方，频率变高时，辐射功率迅速增大.

场方程(field equation)　描述场运动规律的方程. 麦克斯韦方程组是人们所发现的第一组用以描述场（电场与磁场）的场方程. 相对论性粒子的方程由英国物理学家狄喇克(Dirac，P. A. M.)发现，它也视为场方程. 另外，还有许多描述不同自旋的相对论性方程. 例如，克莱因-戈登方程（描述自旋为零的粒子的场方程）等. 场和粒子是统一的物质的两种不同表现形式. 场反映物质的连续性，粒子反映物质的断续特性. 由于场和粒子的统一联系，不论场和粒子都由同一的相对论的方程所描述，相对论的粒子方程就又是场方程.

撰　稿　尹启媛　石广元　田德恒　刘　卓　李正顺　李自强　杨世庥　辛玉梅　谢鸿伟　谢鸿政

审　阅　苏汝铿　陆全康　陆振球　陈文熙　郭柏灵　韩汝琦

模　糊　数　学

模糊数学(fuzzy mathematics)　一门新兴的数学分支.它是研究和处理模糊性现象的数学.所谓模糊性,主要是指客观事物的差异存在中介过渡时,所呈现的一种划分上的不确定性.模糊数学始于美国控制论专家扎德(Zadeh, L. A.)的开创性论文"Fuzzy Sets".

20世纪60年代,模糊数学产生的直接动力是系统科学的发展以及模糊性对于系统影响的深入研究.所研究的系统越复杂,人们对其精密而有意义的描述能力越低,以至使精密性与有意义成为两个几乎相互排斥的特征.模糊数学正是对那些由于系统的复杂性而产生的不确定性的模糊现象做出合乎实际的有效处理的数学方法.由于它在概念上反映出客观事物的差异及中间过渡性,被广泛地应用于各种系统科学,例如知识描述、语言加工、图象识别、信息复制、故障诊断以及经济管理中.同时,由于模糊集合拓广了经典集合论,使经典数学也得到了新的发展,特别是推动了格论、测度论与拓扑学的发展.

模糊数学虽然只有40多年的历史,但已得到国内外数学界以及信息、系统、计算机科学人员的普遍重视.它不是一门完备的学科,而是一门发展中的学科,它在现代科学技术的应用中产生,也将在现代科学技术的发展中发展.

模糊集合论

模糊子集(fuzzy subset)　简称模糊集.经典子集的一种推广.它是具有不分明边界的集合.给定一个非空的基本集合 X(称为论域),X 上的模糊子集 A 是指 X 到单位区间$[0,1]$的映射 $A: X\to[0,1]$. 对给定的 $x\in X$, $A(x)$称为 x 相对于模糊子集 A 的隶属度,$A(x)$越接近于1,表示 x 隶属于 A 的程度越高;$A(x)$越接近于0,表示 x 隶属于 A 的程度越低.表征模糊子集 A 的映射 $A(\cdot)$称为该模糊子集的隶属函数.模糊子集 A 可记为

$$\sum A(x)/x \text{ 或 } \int A(x)/x.$$

经典子集是模糊子集的特殊情况.经典子集 A 可以用一个 X 到$[0,1]$的映射,即用 A 的特征函数 $A(\cdot)$来表征.$A(x)=1$ 表示 x 属于 A,$A(x)=0$ 表示 x 不属于 A.经典子集只能刻画"非此即彼"的确定性现象,而模糊子集的隶属函数可取$[0,1]$中的一切值,它可以刻画"亦此亦彼"的模糊性现象.

有限论域上的模糊子集称为模糊向量,可记为 $A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$ 或 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.模糊子集的概念是1965年由美国控制论专家扎德(Zadeh,L. A.)首先引入的.

模糊集(fuzzy set)　模糊子集的简称.

模糊向量(fuzzy vector)　见"模糊子集".

隶属函数(membership functions)　经典子集特征函数概念的推广.它是刻画模糊子集本质特征的映射.给定一个非空集合 X,X 上的一个模糊子集 A 是由一个映射 $A: X\to[0,1]$来定义的,该映射称为 A 的隶属函数.它可反映 X 中的每个元素 x 对于模糊子集 A 的隶属程度.在实数集 R 上的隶属函数通常有三种模型,即偏小型、偏大型和中间型.偏大型取函数

$$S(x;a,b)=\begin{cases}0 & (x<a),\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & \left(a\leqslant x<\dfrac{a+b}{2}\right),\\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \left(\dfrac{a+b}{2}\leqslant x<b\right),\\ 1 & (x\geqslant b),\end{cases}$$

$S(x;a,b)$是 x 的连续不减函数.偏小型取函数

$$Z(x;a,b)=1-S(x;a,b),$$

$Z(x;a,b)$是 x 的连续不增函数.中间型可取函数

$$\pi(x;a,b)=\begin{cases}S(x;b-a,b) & (x\leqslant b),\\ Z(x;b,b+a) & (x>b),\end{cases}$$

$\pi(x;a,b)$是关于 $x=b$ 对称的连续函数.参数 a 和 b 根据实际问题来确定.

模糊集的包含(inclusion of fuzzy sets)　模糊集之间的一种关系.对于论域 X 上的两个模糊集 A 和 B,如果它们相应的隶属函数有关系

$$A(x)\leqslant B(x)\quad(\forall x\in X),$$

则称 A 包含于 B,或 B 包含 A,此时记为 $A\subset B$.模糊集的包含关系是偏序关系,即具有性质:

1. $A\subset A$.
2. $A\subset B, B\subset A$ 时,$A=B$.
3. $A\subset B, B\subset C$ 时,$A\subset C$.

特别地,当 $A\subset B, B\subset A$ 同时成立时,称 A 和 B 相等,记为 $A=B$. $A=B$ 意味着

$$A(x)=B(x)\ (\forall x\in X).$$

模糊集的相等(equality of fuzzy sets)　见"模糊集的包含".

模糊集的运算(operations of fuzzy sets)　经典集合运算的直接推广.指模糊集的并、交、补运算的总称.给定论域 X 上的两个模糊集 A 和 B,则 A 与 B 的并集 $A\cup B$,A 与 B 的交集 $A\cap B$ 以及 A 的伪

补集 $\complement_X A$ 均是 X 上的模糊集，它们的隶属函数分别为：

$$(A\cup B)(x)=\max(A(x),B(x))\quad(\forall x\in X),$$
$$(A\cap B)(x)=\min(A(x),B(x))\quad(\forall x\in X),$$
$$\complement_X A(x)=1-A(x)\quad(\forall x\in X),$$

其中 $A(x)$，$B(x)$ 分别为 A 和 B 的隶属函数.

模糊集的运算保留了普通集合运算的许多重要性质. 例如：

1. 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.
2. 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
3. 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
4. 对偶律：$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$，$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$.

其他还有吸收律、幂等律、对合律、两极律等. 但经典集合运算所满足的互补律，即 $A\cup\complement_X A=X$，$A\cap\complement_X A=\varnothing$，对模糊集一般不成立. 虽然互补律的不成立使得对模糊集在数学研究上带来不少困难，然而它更符合许多客观实际情况.

模糊集的并、交运算可推广到任意多个模糊集的情形. 设 $\{A^{(t)};\ t\in T\}$ 为 X 上的一族模糊集，则它们的并 $\bigcup_{t\in T}A^{(t)}$ 与交 $\bigcap_{t\in T}A^{(t)}$ 分别定义为：

$$(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})(x)=\sup_{t\in T}A^{(t)}(x)\quad(\forall x\in X),$$
$$(\bigcap_{t\in T}A^{(t)})(x)=\inf_{t\in T}A^{(t)}(x)\quad(\forall x\in X).$$

于是分配律和对偶律有更一般的形式：

3′. $A\cup(\bigcap_{t\in T}B^{(t)})=\bigcap_{t\in T}(A\cup B^{(t)})$，$A\cap(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(A\cap B^{(t)})$.

4′. $\complement(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})=\bigcap_{t\in T}\complement(A^{(t)})$，$\complement(\bigcap_{t\in T}A^{(t)})=\bigcup_{t\in T}\complement(A^{(t)})$.

模糊集的伪补集（pseudo-complement of fuzzy sets） 见“模糊集的运算”.

模糊集的并集（union of fuzzy sets） 见“模糊集的运算”.

模糊集的交集（intersection of fuzzy sets） 见“模糊集的运算”.

模糊点（fuzzy point） 经典集合论中的点概念的推广. 它是一类特殊的模糊子集. 设 A 是论域 X 上的一个模糊集，若对某个 $x\in X$，$A(x)=\lambda>0$，且对任何 $y\in X$，$y\neq x$ 有 $A(y)=0$，则称 A 为 X 上的模糊点，简记为 x_λ. 设 B 是 X 上的另一模糊集，如果 $B(x)\geqslant\lambda$，则称模糊点 x_λ 属于 B，记为 $x_\lambda\in B$，$B=\bigcup\{x_\lambda:\ x_\lambda\in B\}$. 模糊点概念最早是黄（Wong，C. K.）于 1974 年引入的. 但他在定义中假定了 $\lambda\neq 1$，即不包含经典集合论中的点作为特款.

模糊集合论中的属于关系（membership relation in fuzzy set theory） 经典集合论中点与集合之间属于关系的推广. 是模糊点与模糊集之间的一种邻属关系. 设 A 是论域 X 上的一个模糊集，x_λ 是 X 上的一个模糊点，如果 $A(x)\geqslant\lambda$，则称 x_λ 属于 A，记为 $x_\lambda\in A$.

对 X 上的一族模糊集 $A^{(t)}\ (t\in T)$，$x_\lambda\in\bigcap_{t\in T}A^{(t)}$，当且仅当对每一 $t\in T$，有 $x_\lambda\in A^{(t)}$. 但是，由 $x_\lambda\in\bigcup_{t\in T}A^{(t)}$，一般不能推得存在某个 $t_0\in T$，使得 $x\in A^{(t_0)}$，即在模糊集合论中，择一原则不成立. 这与经典集合论有本质的区别. 此外，在经典集合论中，$x\in A$ 等价于 $x\notin\complement A$. 但在模糊集合论中，$x_\lambda\in A$ 与 $x_\lambda\notin\complement A$ 是不等价的，这里 $\complement A$ 是 A 的伪补集. 例如，$A(x)=0.6$，则 $\complement A(x)=0.4$. 显然 $x_{0.3}\in A$，同时有 $x_{0.3}\in\complement A$. 因此在模糊集合论中，模糊点与模糊集之间的邻属关系，除了有“属于”关系外，还有另一种反映“$x_\lambda\notin\complement A$”的邻属关系——“重于”关系（参见“模糊集合论中的重于关系”）.

模糊集合论中的重于关系（quasi-coincidence relation in fuzzy set theory） 经典集合论中点与集合之间属于关系的推广. 它是模糊点与模糊集之间的一种邻属关系. 设 A 是论域 X 上的模糊集，x_λ 是 X 上的模糊点，若 $A(x)+\lambda>1$，则称 x_λ 重于 A，记为 $x_\lambda\tilde{\in}A$. 对于 X 上的一族模糊集 $A^{(t)}(t\in T)$，$x_\lambda\tilde{\in}\bigcup_{t\in T}A^{(t)}$，当且仅当 x_λ 重于其中某一 $A^{(t)}$.

重于关系是由蒲保明、刘应明于 1977 年引入的. 1984 年，刘应明证明了在邻属关系的四条自然原则下，这种重于关系是惟一的.

模糊集的水平集（level sets of fuzzy set） 亦称模糊集的截集. 一族经典子集. 它是由给定的模糊子集所限定的一族经典子集. 模糊子集不同于经典子集，它没有确定的边界. 一个元素 x 是否属于模糊子集 A，回答是不确定的. 对于选定的 $\alpha\in[0,1]$，当 $A(x)\geqslant\alpha$ 时，便认为在 α 水平下 x 隶属于模糊子集 A. 称

$$A_\alpha=\{x:\ A(x)\geqslant\alpha\}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

为模糊子集 A 的 α 水平集或 α 截集，α 称为置信水平. α 水平集具有以下性质：

$$(A\cup B)_\alpha=A_\alpha\cup B_\alpha,$$
$$(A\cap B)_\alpha=A_\alpha\cap B_\alpha,$$

并且 $A\subset B$，当且仅当 $A_\alpha\subset B_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$. 同样，称

$$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\{x:\ A(x)>\alpha\}\quad(0\leqslant\alpha<1)$$

为模糊子集 A 的弱 α 水平集或 α 强截集. 特别地，称 $\sup A=\{x:\ A(x)>0\}$ 为模糊子集 A 的支集.

模糊集的截集（cut sets of fuzzy set） 即“模糊集的水平集”.

模糊集分解定理（decomposition theorem of fuzzy sets） 模糊集合论中的一个基本定理. 它揭示了模糊集与水平集之间的内在联系. 一个模糊集

可以分解为一套(弱)水平集，并可用这套(弱)水平集来表示. 模糊集的分解定理有以下三种形式：

1. 设 A 是 X 上的模糊集，则

$$A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha^{*}\cap A_{\alpha}),$$

其中 A_α 是 A 的 α 水平集，α^* 表示 X 上取常值 α 的模糊集.

2. 设 A 是 X 上的模糊集，则

$$A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha^{*}\cap A_{\underset{\cdot}{\alpha}}),$$

其中 $A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$ 是 A 的弱 α 水平集，α^* 的意义同上.

3. 设 A 是 X 上的模糊集，$\mathscr{P}(X)$ 表示 X 的所有分明子集组成的集合，如果映射 H：$[0,1]\to\mathscr{P}(X)$ 满足 $A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subset H(\alpha)\subset A_\alpha\ (\forall\alpha\in[0,1])$，则

$$A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha^{*}\cap H(\alpha)),$$

且 $A_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)$，$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)$. 其中，$A_\alpha$，$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$ 及 α^* 的意义同上.

由于水平集具有保持模糊集的并、交等性质，所以模糊集的分解定理是研究模糊集性质的有力工具.

模糊集表现定理(representation theorem of fuzzy sets)　模糊集合论中的一个基本定理. 它与模糊集的分解定理从不同的角度揭示了模糊集与经典集的关系. 分解定理表明，任一模糊集 A 可由集合套 $H(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda,\ \lambda\in[0,1])$ 来表示；而表现定理指出，每个集合套都可以表示一个模糊集.

设映射 H：$[0,1]\to\mathscr{P}(X)$，$\lambda\to H(\lambda)$ 满足：$\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$，则称 H 为 X 上的一个集合套. 所有 X 上的集合套组成的集合记为 $\mathscr{H}(X)$，在 $\mathscr{H}(X)$ 中定义运算 $\cup$，$\cap$，$\complement$ 如下：

$$(\bigcup_{i\in I}H_i)(\lambda)=\bigcup_{i\in I}H_i(\lambda);$$

$$(\bigcap_{i\in I}H_i)(\lambda)=\bigcap_{i\in I}H_i(\lambda);$$

$$\complement H(\lambda)=\complement(H(1-\lambda)).$$

模糊集的表现定理为：设 $\mathscr{F}(X)$ 为 X 上所有模糊集组成的集合. 令

$$T:\ \mathscr{H}(X)\to\mathscr{F}(X),$$

$$H\to T(H)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda),$$

则 T 是 $(\mathscr{H}(X),\ \cup,\ \cap,\ \complement)$ 到 $(\mathscr{F}(X),\ \cup,\ \cap,\ \complement)$ 上的同态满射，且满足：

$$T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq T(H)_\lambda\quad(\lambda\in[0,1]);$$

$$T(H)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\quad(\lambda\in(0,1]);$$

$$T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)\quad(\lambda\in[0,1)).$$

其中 $T(H)_\lambda$，$T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 分别表示模糊集 $T(H)$ 的 λ 水平集和弱 λ 水平集.

L 模糊集(L fuzzy sets)　模糊集的一种推广. 设 L 是半序集，则称映射 A：$X\to L$ 为 L 模糊集. 当 $L=\{0,1\}$ 时，L 模糊集即为经典子集. 当 $L=[0,1]$ 时，L 模糊集即为模糊集，而当 L 表示 $[0,1]$ 上所有模糊子集构成的格时，称 L 模糊集为二型模糊集. 特别地，当 L 是格时，可以定义两个 L 模糊子集 A 与 B 的并、交运算如下：

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)\ (\forall x\in X);$$

$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)\ (\forall x\in X).$$

如果 L 是完备格，则并、交运算可推广到任意多个 L 模糊子集的情形

$$(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})(x)=\bigvee\{A(t):\ t\in T\}\ (\forall x\in X);$$

$$(\bigcap_{t\in T}A^{(t)})(x)=\bigwedge\{A(t):\ t\in T\}\ (\forall x\in X).$$

若 N：$L\to L$ 满足当 $a\leqslant b$ 时，$N(b)\leqslant N(a)$ 且 $N(N(a))=a$，则称 N 是 L 上的伪补. 当 L 有伪补时，定义 L 模糊子集 A 的伪补集为

$$\complement A(x)=N(A(x))\ (\forall x\in X).$$

如果 L 是完备格，仍有 L 模糊集的分解定理：设 A 是 X 上的 L 模糊集，则

$$A=\bigcup_{\alpha\in L}(\alpha^{*}\cap A_\alpha),$$

其中 $A_\alpha=\{x:\ A(x)\geqslant\alpha\}$ 为 A 的 α 水平集，α^* 表示 X 上取常值 α 的 L 模糊集.

L 模糊集的概念是高云(Goguen, J. A.)于1967年提出的. 这一概念的提出不仅统一了若干种模糊集概念，而且使人们充分认识到半序(格)结构在模糊集理论研究中的作用.

二型模糊集(type Ⅱ fuzzy sets)　见“L 模糊集”.

伪补(pseudo-complement)　见“L 模糊集”.

概率模糊集(probabilistic fuzzy sets)　模糊集合论概念之一. 指隶属函数具有随机性的模糊集. 设 X 是论域，Ω 是基本事件空间. X 上的概率模糊集 A 是乘积空间 $X\otimes\Omega=\{(x,\omega):\ x\in X,\ \omega\in\Omega\}$ 到 $[0,1]$ 的一个映射，且对每一固定的 $x\in X$，$A(x,\cdot)$ 是定义在 Ω 上取值于 $[0,1]$ 中的随机变量. 因此，概率模糊集是一个取值于 $[0,1]$ 的概率场，而 $P\{\omega:\ A(x,\omega)\geqslant\alpha\}$ 表示对 x 而言隶属度不小于 α 的概率.

模糊集的模系结构(structure of norm system on fuzzy sets)　模糊集合论概念之一. 指带有序结构的一类代数系统. 利用它可以统一地描述模糊集的各种运算. 设 L 为具有最小元 0 和最大元 1 的格，若映射 T：$L\times L\to L$ 满足以下条件：

1. $T(0,0)=0$，$T(1,1)=1$；

2. $T(a,b)=T(b,a)$；

3. 若 $a\leqslant c$，$b\leqslant d$，则有 $T(a,b)\leqslant T(c,d)$；

4. $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$；

则称 T 为三角模. 若三角模 T 满足 $T(a,1)=a$，则称其为 T 模；若三角模 T 满足 $T(a,0)=a$，则称其为 S 模. 设 N 为 L 上的伪补(参见“模糊集”)，如果 T 模 T 和 S 模 S 满足 $N(T(a,b))=S(N(a),$

$N(b))$，则称 T 与 S 为 N 对偶的，并称 (L,S,T,N) 为模系. 对于 L 模糊集 A 与 B 可定义模并、模交与补运算为：

$$(A\cup_S B)(x)=S(A(x),B(x)) \quad (\forall x\in X);$$
$$(A\cap_T B)(x)=T(A(x),B(x)) \quad (\forall x\in X);$$
$$\complement A(x)=N(A(x)) \quad (\forall x\in X).$$

模糊子集的并与交运算是特殊的模并与模交运算.

设 $\mathscr{F}_L(X)$ 为 X 上所有 L 模糊集组成的集合，如果 (L,S,T,N) 是模系，则 $(\mathscr{F}_L(X), \cup_S, \cap_T, \complement)$ 也是模系.

三角模(triangular norms)　见"模糊集的模系结构".

***T* 模**(t-norms)　见"模糊集的模系结构".

***S* 模**(s-norms)　见"模糊集的模系结构".

模系(norm system)　见"模糊集的模系结构".

模糊度(measures of fuzziness)　模糊程度的一种度量. 对模糊子集，给出一个数值表征其总体的模糊程度，称该数值为相应模糊子集的模糊度. 它符合以下原则：经典子集模糊度为 0，若 $A(x)\equiv 0.5$，则 A 的模糊度为 1. 若 $B\subset C\subset A$，或 $A\subset C\subset B$，则 B 的模糊度不超过 C 的模糊度. 熵函数可以用来作为一种模糊度.

模糊度的概念是路卡-特米(Luca-Termini)于 1972 年引入的.

模糊集的直接映射(direct mapping of fuzzy sets)　亦称扎德型函数. 模糊集的一种映射. 指由普通映射直接扩张成的映模糊集为模糊集的映射. 设 $\mathscr{F}(X)$ 和 $\mathscr{F}(Y)$ 分别表示 X 和 Y 上所有模糊集组成的集合. 若 $f: X\to Y$ 是一普通映射，则由 f 可诱导出一个从 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 的映射(仍记为 f) $f: A\to f(A)$，其中 $f(A)$ 的隶属函数定义为

$$f(A)(y)=\begin{cases}\sup\{A(x):x\in f^{-1}(y)\} & (f^{-1}(y)\neq\varnothing),\\ 0 & (f^{-1}(y)=\varnothing).\end{cases}$$

由上式定义的映射 $f:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$，称为模糊集的直接映射. $f(A)$ 称为 A 在 f 下的像. 由于 X 上的二元运算是从 $X\times X$ 到 X 的映射，因此由模糊集的直接映射可以定义 X 上模糊集的二元运算，即

$$f(A,B)(z)=\begin{cases}\sup\{(A\otimes B)(x,y): \\ \quad (x,y)\in f^{-1}(z)\} & (f^{-1}(z)\neq\varnothing),\\ 0 & (f^{-1}(z)=\varnothing).\end{cases}$$

此处 $A\otimes B$ 是 X 上两模糊集的直积，是 $X\times X$ 上的模糊集，它的隶属函数定义为

$$(A\otimes B)(x,y)=\min\{A(x),B(y)\}.$$

模糊集的直接映射是由美国控制论专家扎德(Zadeh，L. A.)提出的. 它提供了将经典数学的概念与方法转化为模糊数学的概念与方法的一般原则，也称为扩张原理.

扎德型函数(functions of Zadeh's type)　即"模糊集的直接映射".

扩张原理(extension principle)　见"模糊集的直接映射".

模糊集的二元运算(binary operation of fuzzy sets)　见"模糊集的直接映射".

模糊集的直积(product of fuzzy sets)　见"模糊集的直接映射".

直接映射的逆映射(inverse mapping of direct mapping)　一种模糊集的映射. 它是由普通映射按某种特定的方式诱导出的把模糊集映成模糊集的映射. 设 $f: X\to Y$ 为普通映射，$\mathscr{F}(X)$ 与 $\mathscr{F}(Y)$ 分别表示 X 与 Y 上所有模糊集组成的集合，则由 f 可诱导出一个从 $\mathscr{F}(Y)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的映射，记为

$$f^{-1}: \mathscr{F}(Y)\to\mathscr{F}(X), \quad B\to f^{-1}(B).$$

其中 $f^{-1}(B)$ 的隶属函数定义为

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x)) \quad (\forall x\in X).$$

按上述方式确定的映射 $f^{-1}: \mathscr{F}(Y)\to\mathscr{F}(X)$ 称为直接映射 $f: \mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$ 的逆映射. $f^{-1}(B)$ 称为 B 在 f 下的原像. 模糊集的直接映射及其逆映射有以下性质：

1. $f(f^{-1}(B))\subset B$, $A\subset f^{-1}(f(A))$.
2. $f(\varnothing)=\varnothing$.
3. $f(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})=\bigcup_{t\in T}f(A^{(t)})$,
   $f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B^{(t)})=\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B^{(t)})$.
4. $f^{-1}(\complement B)=\complement[f^{-1}(B)]$.

凸模糊集(convex fuzzy set)　经典凸集的推广. 它是实线性空间上的一类特殊的模糊集. 设 A 是实线性空间 X 上的模糊集，若对任何 $\lambda\in[0,1]$，有 $\lambda A+(1-\lambda)A\subset A$，则称 A 为 X 上的凸模糊集. 利用水平集、隶属函数和模糊点等，均可以给出凸模糊集的等价定义.

凸模糊集的概念最早是在 1965 年，由美国控制论专家扎德(Zadeh，L. A.)的开创性论文《Fuzzy Sets》中提出的，目前，凸模糊集概念已得到了广泛的应用.

模糊数(fuzzy number)　区间数概念的推广. 它是实数域 R 上的一类特殊模糊集. 设 A 是 R 上的模糊集，如果它是正规的，即存在 $x_0\in R$，使 $A(x_0)=1$，且对任何 $\alpha\in[0,1]$，A 的 α 水平集 A_α 均是有限闭区间，则称 A 为模糊数. 由于模糊数是 R 上的模糊集，则由 R 的四则运算可扩张定义模糊数的四则运算. 对两模糊数 A 与 B 及四则运算 $*$，$A*B$ 仍为模糊集，且它的隶属函数为

$$(A*B)(z)=\sup\{\min(A(x),B(y)):z=x*y\}.$$

特别地，$A\pm B$，AB 仍为模糊数.

模糊数的四则运算(four arithmetic operations

of fuzzy numbers) 见“模糊数”.

模糊真数(fuzzy truth numbers) 亦称[0,1]上的模糊数. 论域[0,1]上的一类特殊的模糊集. 设 A 是[0,1]上的模糊集,如果对任何 $\alpha\in[0,1]$, A 的 α 水平集 A_α 是闭区间,则称 A 为一个模糊真数. 如果 T 是[0,1]上的三角模, A,B 是[0,1]上的模糊集,定义运算 $\tilde{T}(A,B)$ 如下:

$$\tilde{T}(A,B)(z) = \sup\{\min(A(x),B(y)): z = T(x,y)\} \quad (z \in [0,1]).$$

称 $\tilde{T}$ 为模 T 的扩张运算. 若 T 是连续的三角模, A 与 B 是模糊真数,则 $\tilde{T}(A,B)$ 也是模糊真数. 当 T 是 T 模时, $\tilde{T}$ 也是 T 模;当 T 是 S 模时, $\tilde{T}$ 也是 S 模. 若 N 是[0,1]上的伪补,则模糊真数 A 的补由 $A(N(x))$ 定义.

[0,1]上的模糊数(fuzzy numbers on [0,1]) 即“模糊真数”.

模糊函数(fuzzy functions) 普通实值函数的一种推广. 设 $\mathscr{F}^*(R)$ 表示全体模糊数,则论域 X 到 $\mathscr{F}^*(R)$ 的映射 $\tilde{f}$ 称为模糊函数. $\tilde{f}$ 的 α 水平集为

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \{y;\ \tilde{f}_\alpha(x)(y) \geqslant \alpha\}.$$

模糊关系与模糊优化

模糊关系(fuzzy relations) 经典关系的一种推广. 它是两组事物之间某种模糊相关性的刻画. 设 X 与 Y 是两个论域, $X\otimes Y$ 表示 X 与 Y 的乘积,即

$$X\otimes Y=\{(x,y):\ x\in X,\ y\in Y\}.$$

$X\otimes Y$ 上的模糊集 R 称为 X 到 Y 的模糊关系. 对给定的 $(x,y)\in X\otimes Y$, $R(x,y)$ 表示 x 与 y 具有关系 R 的程度. 若 $X=Y$,则称 R 为 X 上的模糊关系. 由于模糊关系是乘积集上的模糊集,因此,模糊关系也有并、交、补三种运算. 对 X 上的模糊关系 R,若 $R(x,x)=1\ (\forall x\in X)$,则称 R 为自反的;若 $R(x,y)=R(y,x)\ (\forall x,y\in X)$,则称 R 为对称的. 设 R 与 S 是 X 上的两个模糊关系,其复合运算定义为

$$(R\circ S)(x,z) =\sup\{\min(R(x,y),S(y,z)),y\in X\},$$

它仍是 X 上的一个模糊关系. 记 $R^2=R\circ R$,若 $R^2\subset R$,则称 R 为可传递的. X 上自反、对称的模糊关系称为模糊相似关系. 自反、对称、可传递的模糊关系称为模糊等价关系. R 是模糊等价关系,当且仅当对任何 $\alpha\in[0,1]$, R 的 α 水平集

$$R_\alpha = \{(x,y):\ R(x,y) \geqslant \alpha\}$$

均是等价关系.

自反模糊关系(reflexive fuzzy relations) 见“模糊关系”.

对称模糊关系(symmetric fuzzy relations) 见“模糊关系”.

模糊相似关系(fuzzy similar relations) 见“模糊关系”.

模糊等价关系(fuzzy equivalent relations) 见“模糊关系”.

模糊偏序关系(fuzzy partially ordered relations) 论域 X 上的一个模糊关系. 它满足自反性、可传递性以及完全反对称性,即当 $x\neq y$, $R(x,y)>0$ 时,必有 $R(y,x)=0$.

模糊值模糊关系(fuzzy relation taking fuzzy number as values) 经典关系的进一步推广. 设 X 与 Y 是两个论域, $\mathscr{F}^*([0,1])$ 表示[0,1]上的模糊数(即模糊真数)的全体,则映射 R: $X\otimes Y\to\mathscr{F}^*([0,1])$ 称为 X 到 Y 的模糊值模糊关系. 它可视为 $X\otimes Y\otimes[0,1]$ 上的一类模糊集. 特别地,若对任何 $(x,y)\in X\otimes Y$, $R(x,y)$ 为区间数,则称 R 为区间值模糊关系.

区间值模糊关系(interval valued fuzzy relations) 见“模糊值模糊关系”.

模糊矩阵(fuzzy matrix) 经典矩阵的一种特例. 它是有限论域 X 到有限论域 Y 上的模糊关系的表征. 其元素只取[0,1]中的数. 如果记 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,则 X 到 Y 的模糊关系可表为

$$R=(r_{ij})_{n\times m}\quad(0\leqslant r_{ij}\leqslant 1;1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m).$$

其中 $r_{ij}=R(x_i,y_j)$. 并称 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 为模糊矩阵. 若对 X 上的模糊矩阵 R,存在 X 上的模糊矩阵 Q,使得 $Q\circ R\circ Q=Q$,则称 Q 为 R 的逆模糊矩阵. 若 $R\circ Q\circ R=Q$,则称 R 是正则的,且称 Q 为 R 的广义逆模糊矩阵.

逆模糊矩阵(inverse fuzzy matrix) 见“模糊矩阵”.

正则模糊矩阵(regular fuzzy matrix) 见“模糊矩阵”.

广义逆模糊矩阵(generalized inverse fuzzy matrix) 见“模糊矩阵”.

模糊矩阵的传递闭包(transitive closure of fuzzy matrix) 一种模糊矩阵. 它是包含给定模糊矩阵的最小传递的模糊矩阵. 设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 X 上的模糊矩阵称 $t(R)$ 为 R 的传递闭包,如果 X 上的模糊矩阵 $t(R)$ 满足:

1. $t(R)\circ t(R)\subset t(R)$.

2. $t(R)\supset R$.

3. 对 X 上任一包含 R 的模糊传递矩阵 S(即 $S\supset R$,且 $S^2\subset S$),都有 $S\supset t(R)$.

如果 R 为 X 上的模糊相似矩阵(即 R 是自反、

对称的),则 R 的传递闭包 $t(R)$ 是模糊等价矩阵,且存在一个最小的自然数 k $(k\leqslant n)$,使得 $t(R)=R^k$. 该结论是模糊聚类分析中从模糊相似矩阵出发,用"平方法"求模糊等价矩阵的理论依据.

最大隶属原则(maximum membership principle) 模糊数学的基本原则之一. 它是用模糊集理论进行模型识别的一种直接方法. 对于 n 个实际模型,可以表示为论域 X 上的 n 个模糊子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. $x_0\in X$ 为一具体识别对象,如果有 $i_0\leqslant n$,使

$$A_{i_0}(x_0)=\max(A_1(x_0),A_2(x_0),\cdots,A_n(x_0)),$$

则称 x_0 相对隶属于 A_{i_0}. 这即是最大隶属原则. 在实际应用中,可以用来进行疾病诊断、机器故障诊断或进行癌细胞的识别等.

模糊聚类(fuzzy classifications) 一种分类方法. 它是利用事物之间存在的模糊关系将事物进行动态分类的一种数学方法. 设有 n 个不同的事物,记为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,若已知 X 上的模糊等价关系为 $R=(r_{ij})_{n\times n}$,则相应于不同的 α 水平,由等价关系 R_α(R 的 α 水平集)可使 X 分为不同的类. α 越小,分类越粗;α 越大,分类越细. 由于分类是随水平 α 动态的,就可以选择恰当的 α,使得分类效果达到最佳. 在实际问题中,直接建立 X 上的模糊等价关系往往是比较困难的. 一般是先不考虑传递性,建立 X 上的一个模糊相似关系,然后再求它的传递闭包(参见"模糊矩阵的传递闭包"),即得一个模糊等价关系,并利用所得的模糊等价关系进行分类. 这种方法称为传递闭包法. 基于模糊关系进行模糊聚类的具体方法,还有最大树聚类法和编网聚类法.

模糊目标聚类(fuzzy cluster with objective function) 一种聚类方法. 它是利用建立在软划分空间上的目标函数进行聚类的一种数学方法. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是有限集,$x_i=(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_p})$,对任何 $2\leqslant c\leqslant n$,以及 X 的 c 个子集 $\{A_i: i=1,2,\cdots,c\}$ 满足

$$A_i\cap A_j=\varnothing\quad(i\neq j),\quad \bigcup_{i=1}^{c}A_i=X,$$

则 $\{A_i\}$ 成为 X 的一个硬划分. 考虑硬划分的特征函数表达,则

$$M_c=\Big\{U: U=(u_{ik})_{c\times n},\ u_{ik}\in\{0,1\},\ \forall i,k,\ \sum_{i=1}^{c}u_{ik}=1\Big\}$$

称为硬划分空间;而

$$M_{fc}=\Big\{U: U=(u_{ik})_{c\times n},\ u_{ik}\in[0,1],\ \forall i,k,\ \sum_{i=1}^{c}u_{ik}=1\Big\}$$

称为软划分空间.

由 x_i 的特征数据值,便可根据密度、最小平方等,建立软(硬)划分空间上的泛函(目标函数),而这些泛函的极小点即为在该目标下的最佳软(硬)分类. 常用的泛函有:

1. 密度泛函

$J_R: M_{fc}\to R^+$;

$$J_R(U)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{c}\sigma(u_{ij}-u_{ik})^2-d_{jk}^2\Big)^2$$
$$(2\leqslant c<n)$$

是固定数,σ 是实常数,$d_{jk}=d(x_j,x_k)$ 是 R^p 中的度量.

2. 最小平方泛函

$$J_m: M_{fc}\times R^{cp}\to R^+;$$

$$J_m(U,V)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(u_{ik})^m d_{ik}^2,$$
$$(d_{ik}^2=d^2(x_k,v_i),\ v\in M_{fc})$$

是一软划分,$V\in R^{cp}$ 是聚类中心.

硬划分空间(hard classification space) 见"模糊目标聚类".

软划分空间(soft classification space) 见"模糊目标聚类".

模糊综合评判(fuzzy synthesis decision-making) 亦称模糊综合决策. 一种模糊决策方法. 指对各种因素及它们与各种决策方案之间的关系进行综合考虑后做出优化判决的一种数学方法. 一个模糊综合评判模型,包含因素集 $X=\{x_i;\ 1\leqslant i\leqslant n\}$,决策集 $Y=\{y_j:\ 1\leqslant j\leqslant m\}$,以及 X 到 Y 的模糊关系 $R=\{r_{ij}:\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\}$. 如果 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 X 上的模糊向量,通过 a 与 R 的复合运算得到 Y 上的模糊向量 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,其中

$$b_j=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}(\min(a_i,r_{ij})).$$

若 $b_{j_0}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}b_j$,则决策为 y_{j_0}. 在实际问题中 a 与 R 可通过评分或统计方法得到.

模糊综合决策(fuzzy synthesis policy-making) 即"模糊综合评判".

贴近度(nearness degree) 模糊数学的一个概念. 它表示两个模糊子集间相似程度的一种度量. 它可以用于进行模式识别与情报检索,也可以用于优化综合判决中的权重. 设 $\mathscr{F}(X)$ 表示论域 X 上的所有模糊集组成的集合,如果映射 $\sigma: \mathscr{F}(X)\times\mathscr{F}(X)\to[0,1]$ 具有以下性质:

1. $\sigma(A,A)=1$;
2. $\sigma(A,B)=\sigma(B,A)$;
3. 当 $A\subset B\subset C$ 时,有 $\sigma(A,C)\leqslant\sigma(B,C)$;

则称 σ 为贴近度. 符合上述条件的贴近度有各种不同的形式,可根据具体情况加以选用. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个不同的模型,对于给定的 B,若

$$\sigma(B,A_{i_0})=\max_{i\leqslant n}\sigma(B,A_i),$$

则认为 B 与模型 A_{i_0} 最贴近. 这称为择近原则,它用于模式识别中.

择近原则(nearest principle) 见"贴近度".

模糊关系方程(fuzzy relation equations) 含有未知模糊关系的一类等式. 设 X 与 Y 为有限论域,A 是 X 上的模糊子集,R 为 X 到 Y 的模糊关系,则可通过复合运算得到 Y 上的模糊子集 $B=A\circ R$. 若已知 B 与 R,欲求 A;或已知 B 与 A,求 R,使满足 $A\circ R=B$. 则称该等式为模糊关系方程. 所求出的 A 或 R 称为该模糊关系方程的解. 一般地,模糊关系方程的解不是惟一的. 桑切斯(Sanchez, E.)首先研究了模糊关系方程,指出模糊关系方程存在最大解和极小解,但一般不存在最小解.

模糊关系方程的解(solutions of fuzzy relation equations) 见"模糊关系方程".

模糊关系方程的冢本宪甫解法(Y. Tsukamoto algorithms of fuzzy relation equations) 解模糊关系方程的一种方法. 已知 R,B 为求模糊关系方程 $A\circ R=B$ 关于 A 的解. 日本数学家冢本宪甫(Y. Tsukamoto)定义了两个算符,一个是

$$b\varepsilon a=\begin{cases}\{b\} & (a>b),\\ [b,1] & (a=b),\\ \phi & (a<b);\end{cases}$$

另一个为

$$b\hat{\varepsilon} a=\begin{cases}[0,b] & (a>b),\\ [0,1] & (a\leqslant b).\end{cases}$$

记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$, $R=(r_{ij};1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$. 令

$$Y_j=(b_i\varepsilon r_{ij};\ 1\leqslant i\leqslant n),$$
$$\hat{Y}_j=(b_i\hat{\varepsilon} r_{ij};\ 1\leqslant i\leqslant n).$$

将 $\hat{Y}_j$ 的第 i 个分量换为 Y_j 的第 i 个分量得到 W_{ij},则 $A\circ R=B$ 关于 A 的解集为

$$\overline{W}=\bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}W_{ij}.$$

模糊图(fuzzy graphs) 普通图的一种模糊化. 设 V 是顶点集,E 是联系集,$G=(V,E)$是普通图. 若给出 V 上的模糊子集 A 及 V 上的模糊关系 R,使得对于任意两个顶点 $x,y\in V$,满足

$$R(x,y)\leqslant\min(A(x),A(y)),$$

则称 $\tilde{G}=(G,A,R)$为模糊图. 对于任意 $\alpha\in[0,1]$,$\tilde{G}$ 的 α 截图定义为 $G_\alpha=(A_\alpha,R_\alpha)$,是一个普通图,其中 A_α,R_α 分别是 A,R 的 α 水平集. 两个模糊图相等,当且仅当所有 α 截图相等.

模糊图概念是 1975 年由罗森菲尔德(Rosenfeld, A.)最先提出的.

模糊条件下的最优化(optimization under fuzzy condition) 一类极值问题. 它是在模糊子集的约束下求一个函数的极值问题. 目前,人们认为在模糊条件下,目标和约束在形式上具有相同的特征,并且均可以由给定的多判据最优化问题可能解集合中的模糊子集表出. 设目标函数为模糊子集 A,如果模糊约束为模糊子集 B,则当目标和约束具有同样的重要性时,它们的最大判决集合是使

$$(A\cap B)(x_0)=\sup_x(A\cap B)(x)$$

成立的 x_0 的全体之集. 而且

$$\sup_x(A\cap B)(x)=\sup_\alpha\{\min(\alpha,\sup_{x\in B_\alpha}A(x))\}.$$

这样,模糊条件下的最优化,可表为一列经典集合上的优化问题. 它在不同水平下给出不同的优化值,使人们可以灵活地处理各种条件,以期望有比较满意的结果.

模糊线性规划(fuzzy linear programming) 经典线性规划的一种推广. 它是将线性约束的边界模糊化,从而使人们能在较宽松的条件下求得优化的条件与优化的极值. 对于通常的线性规划问题,即在约束条件 $Ax\leqslant b$, $x\geqslant 0$ 下,求目标函数 $Z=gx$ 的极值 $\min Z$. 考虑约束条件的软化 $Ax\lesssim b, x\geqslant 0$,这里"$\lesssim$"表示对"$\leqslant$"的一种放宽,并确定它的隶属函数为

$$\mu_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)=\begin{cases}1 & \Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\Big),\\ 1-\dfrac{1}{d_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\Big) & \Big(b_i<\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i+d_i\Big),\\ 0 & \Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j>b_i+d_i\Big).\end{cases}$$

这即是模糊线性规划问题.

模 糊 结 构

模糊群(fuzzy group) 普通子群的一种推广. 它是群上的一类特殊的模糊子集. 设 G 是群,H 是 G 的模糊子集,满足:

1. 对任何 $x,y\in G$,有
$$H(x,y)\geqslant\min(H(x),H(y));$$
2. $H(x)\geqslant H(x^{-1})$;

则称 H 为 G 的模糊子群,简称模糊群. 若 H 是 G 的模糊子群,且对任何 $x,y\in G$,有 $H(xyx^{-1})\geqslant H(y)$,则称 H 为正规模糊子群.

模糊群的概念是 1971 年由罗森菲尔德(Rosenfeld, A.)引入的.

正规模糊子群(normal fuzzy subgroup) 见"模糊群".

T 模糊群(T-fuzzy group) 模糊群的一种推广. 设 G 是群,H 是 G 的模糊子集,T 是 T 模(参见

“模糊集的模系结构”)，满足：

1. 对任何 $x,y\in G$，有
$$H(x,y)\geqslant T(H(x),H(y));$$
2. $H(x)\geqslant H(x^{-1})$；

则称 H 为 G 的 T 模糊子群，简称 T 模糊群. 当 $T=\min$ 时，T 模糊群即为模糊群.

T 模糊群的概念是 1979 年由安东尼(Authony, J. M.)和舍伍德(Sherwood, J. M.)引入的.

模糊线性子空间(fuzzy linear subspace)　线性子空间的一种推广. 它是线性空间上的一类特殊的模糊子集. 设 X 是数域 K 上的线性空间，E 是 X 上的模糊子集，若满足条件：

1. $E+E\subset E$；
2. 对任何 $k\in K$，若 $kE\subset E$；

则称 E 是线性空间 X 的模糊线性子空间. 此处加法和数乘定义为：

$$(E+E)(x)=\sup_{s+t=x}\min\{E(s),E(t)\};$$
$$(kE)(x)=E(x/k)\qquad (k\neq 0);$$
$$(0E)(x)=\begin{cases}\sup_{x\in X}E(x) & (x=0),\\ 0 & (x\neq 0).\end{cases}$$

模糊线性子空间这一概念是 1977 年由凯兹拉斯(Katsaras, A. K.)和刘(Liu, D. B.)引入的，后来又有人将这一概念作了推广，引入了 T 模糊线性子空间. 如果 E 满足：

1. $E(x+y)\geqslant T(E(x),E(y))$，$\forall x,y\in X$，其中 T 为 T 模(参见“模糊集的模系结构”)；
2. $E(kx)\geqslant E(x)$，$\forall x\in X,k\in K$；

则称 E 为 X 的 T 模糊线性子空间. 特别地，$T=\min$ 时，T 模糊线性子空间即为模糊线性子空间.

T 模糊线性子空间(T-fuzzy linear subspace)　见“模糊线性子空间”.

模糊博弈(fuzzy game)　一种博弈. 它是将策略集或赢得函数模糊化的一种博弈. 以模糊策略情形为例，设 X_1 与 X_2 是两个策略集合，甲乙双方分别以它们的某个模糊子集 D_1 和 D_2 为自己的模糊策略. 并各有普通的赢得函数 $\varphi_i(x_1,x_2)$ $(1\leqslant i\leqslant 2)$，并按冒险原则对弈，求博弈的平衡解. 若 $D_{11}(x_1,x_2)$ 表示固定 x_2，在 D_1 下 $\varphi_1(x_1,x_2)$ 的模糊优化解，$D_{22}(x_1,x_2)$ 表示固定 x_1，在 D_2 下 $\varphi_2(x_1,x_2)$ 的模糊优化解，则它们的模糊平衡解为 $X_1\times X_2$ 上的一个模糊集 E，它的隶属函数

$$E(x_1,x_2)=\min(D_{11}(x_1,x_2),D_{22}(x_1,x_2));$$

使 $E(x_1,x_2)$ 最大的 (x_1^*,x_2^*) 称为确定的平衡解.

模糊测度(fuzzy measure)　一种特殊的非可加测度. 设 (X,σ) 是可测空间，如果映射 μ: $\sigma\to[0,1]$ 满足：

1. $\mu(\varnothing)=0$，$\mu(X)=1$；
2. $\forall A,B\in\sigma$，若 $A\subseteq B$，有 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$；
3. 若 $\forall i\in N$，$A_i\in\sigma$，且 $\{A_i\}$ 单调，有
$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\lim_{n\to\infty}A_n);$$

则称 μ 为模糊测度，(X,μ) 称为模糊测度空间.

模糊测度是由菅野道夫(Sugeno, M.)于 1974 年提出的. 它的研究是与具有主观性复杂系统的评价问题紧密相关的. 目前，也有人将建立在模糊子集族构成的 σ 代数上的测度称为模糊测度. 设 Σ 是 X 的模糊子集族，称 Σ 为由模糊子集构成的 σ 代数. 如果 Σ 满足条件：

1. 任何 X 的经典子集属于 Σ.
2. $A\ominus B$，$A\cdot B\in\Sigma$，此处
$$(A\ominus B)(x)=\max\{0,A(x)-B(x)\},$$
$$(A\cdot B)(x)=A(x)B(x).$$
3. 若 $A_n\in\Sigma$，$A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$，有 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n\in\Sigma$，此处 $(\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n)(x)=\min\{1,\Sigma_{n=1}^{\infty}A_n(x)\}$.

而从 Σ 到 $R\cup\{\pm\infty\}$ 满足条件：

1. $\mu(\varnothing)=0$；
2. $\mu(\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\ (A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j)$

的映射称为模糊测度. 这与第一种定义的模糊测度是根本不同的.

模糊测度空间(fuzzy measure space)　见“模糊测度”.

λ 模糊测度(λ-fuzzy measure)　一种模糊测度. 它是带参数 λ 的一种重要的模糊测度. 设 (X,σ) 是可测空间，如果映射 g_λ: $\sigma\to[0,1]$ 满足以下条件：

1. $g_\lambda(X)=1$；
2. 对于 σ 中不相交的集合 A 与 B，
$$g_\lambda(A\cup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B);$$
3. 对 σ 中的单调集合列 $\{A_n\}$，有
$$\lim_{n\to\infty}g_\lambda(A_n)=g_\lambda(\lim_{n\to\infty}A_n);$$

则称 g_λ 为 λ 模糊测度. 这里一般假设参数 $\lambda>-1$. 当 $\lambda=0$ 时，λ 模糊测度为概率测度. 若论域 X 是有限集，则当 $\lambda\geqslant 0$ 时，λ 模糊测度为信任测度；当 $-1<\lambda\leqslant 0$ 时，λ 模糊测度为似然测度.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，模糊分布函数 $H(x)$ 满足 $H(x_1)\leqslant H(x_2)\leqslant\cdots\leqslant H(x_n)=1$. 记

$$g_1=H(x_1),$$
$$g_i=\frac{H(x_i)-H(x_{i-1})}{1+\lambda H(x_{i-1})}\quad(2\leqslant i\leqslant n).$$

对任何 $A\subset X$，定义

$$g_\lambda(A)=\frac{1}{\lambda}\Big[\prod_{x_i\in A}(1+\lambda g_i)-1\Big],$$

则 g_λ 是 λ 模糊测度. 若 $H(x_i)$ 表示系统对 x_i 的满意度，则 H 关于 g_λ 的模糊积分表示系统整体的满意度.

模糊积分(fuzzy integral)　模糊结构理论中的一种积分. 它是建立在模糊测度基础上的一种积分.

设(X,σ)是可测空间，μ: $\sigma\to[0,1]$是模糊测度，$A\in\sigma$，函数h: $X\to[0,1]$是可测的，则h关于模糊测度μ在集合A上的模糊积分定义为

$$\int_A h(x)\circ\mu(\cdot)=\sup_{F\in\sigma}[\inf_{x\in F}h(x)\vee\mu(A\cap F)].$$

有下述结论：

1. $\int_A h(x)\circ\mu(\cdot)=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge\mu(A\cap H_\alpha)]$，

其中$H_\alpha=\{x: h(x)\geqslant\alpha\}$；

2. $\int_A h(x)\circ\mu(\cdot)=\int_0^1\mu(H_\alpha\cap A)\mathrm{d}\alpha$，

其中右边的测度α为$[0,1]$上的勒贝格测度.

模糊积分是由菅野道夫(Sugeno，M.)于1972年提出的.

模糊数测度(measures taking fuzzy number) 一类集值测度的推广.它是取值为m维欧氏空间R^m上的模糊数的一种可加集函数.设$(\Omega,\mathscr{A})$为可测空间，$\mathscr{F}^*$为R^m上全体模糊数(即其任意α水平集为R^m中非空紧凸集的模糊集).对于$B_n\in\mathscr{F}^*(n\geqslant1)$，记

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\Big)(x)=\sup\{\inf_{n\geqslant1}B_n(x_n)\,|\,x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty\}.$$

如果映射μ: $\mathscr{A}\to\mathscr{F}^*$对于$\mathscr{A}$中任意不交集列$A_n(n\geqslant1)$，有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

则称μ为模糊数测度.若μ是模糊数测度，则

$$\mu_\alpha(A)=\{x\,|\,\mu(A)(x)\geqslant\alpha\}$$

为紧凸集值测度.

模糊数测度是张文修于1986年引进的，现已广泛应用于经济系统理论研究中.

模糊事件(fuzzy event) 一类特殊的模糊集.是带有模糊性的事件.给定概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$，如果Ω的模糊子集A的隶属函数是可测的，则称A为模糊事件.模糊事件A的概率定义为

$$P(A)=\int_\Omega A(\omega)\mathrm{d}P.$$

有关模糊事件的最早研究是于1968年由美国控制论专家扎德(Zadeh，L. A.)完成的.

模糊拓扑空间(fuzzy topological space) 拓扑空间的一种重要推广.指具有由模糊子集族构成的拓扑结构的空间.设$\mathscr{T}$是论域X上的一模糊子集族，若$\mathscr{T}$满足条件：

1. $\varnothing,X\in\mathscr{T}$；

2. 对任何$U,V\in\mathscr{T}$，有$U\cap V\in\mathscr{T}$；

3. 对任何$\{U^{(\alpha)}\}\subset\mathscr{T}$，有$\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}U^{(\alpha)}\in\mathscr{T}$；

则称$\mathscr{T}$为X上的一个模糊拓扑，并称$(X,\mathscr{T})$为模糊拓扑空间.$\mathscr{T}$中的元称为模糊开集，简称开集.

模糊拓扑空间这一概念是由张(Zhang，C. L.)在1968年引入的.1976年，罗温(Lowen，R.)将上述模糊拓扑定义中的条件1加强为

1′. 对任何$r\in[0,1]$，$r^*\in\mathscr{T}$，r^*表示X上隶属函数取常值r的模糊子集.

这种罗温意义下的模糊拓扑空间也称为满层模糊拓扑空间，它不以分明拓扑空间为特款.

模糊拓扑(fuzzy topology) 见“模糊拓扑空间”.

模糊开集(fuzzy open set) 见“模糊拓扑空间”.

满层模糊拓扑空间(fully stratified fuzzy topological space) 见“模糊拓扑空间”.

诱出模糊拓扑(induced fuzzy topology) 一类特殊的模糊拓扑.它是由给定分明拓扑诱导出的模糊拓扑.设(X,T)是普通的拓扑空间，以$\omega(T)$记从(X,T)到$[0,1]$上所有下半连续函数的全体，则$\omega(T)$形成X上的一个模糊拓扑，称为T的诱出模糊拓扑.并非所有的模糊拓扑都是诱出模糊拓扑.

诱出模糊拓扑是1975年威斯(Weiss，M. D.)引入的，它是联系分明拓扑与模糊拓扑的一条纽带.

邻域(neighborhood) 模糊拓扑空间的一种邻近结构.设$(X,\mathscr{T})$是模糊拓扑空间，x_λ是X上的模糊点，A是X的模糊子集.如果存在$B\in\mathscr{T}$，使得$x_\lambda\in B\subset A$，则称A为x_λ的邻域.特别地，当A本身是开集时，称A为x_λ的开邻域.x_λ的所有邻域组成的集族称为x_λ的邻域系.值得注意的是，在模糊拓扑空间中，邻域所起的作用是相当有限的.利用它虽然可以定义模糊集的内点、内部等概念，但在许多问题的研究中，这一工具已经失效，取代邻域在模糊拓扑中发挥重要作用的，是重域这一邻近结构(参见“重域”).

邻域系(neighborhood system) 见“邻域”.

重域(quasi-coincident neighborhood) 模糊拓扑空间的一种邻近结构.设$(X,\mathscr{T})$是模糊拓扑空间，x_λ是X中的模糊点，A是X的模糊子集.若有开集$B\in\mathscr{T}$，使得$B\subset A$且x_λ重于B，则称A是x_λ的重域.特别地，当A是开集时称之为开重域.x_λ的重域全体称之为x_λ的重域系.对于模糊拓扑空间，重域系与模糊拓扑相互惟一确定.

重域理论是由蒲保明与刘应明于1977年建立的.这一理论使模糊拓扑空间的有点化研究得以迅速发展.

重域系(quasi-coincident neighborhood system) 见“重域”.

乘积模糊拓扑空间(product of fuzzy topological spaces) 一种模糊拓扑空间.指由一族模糊拓

扑空间按特定的方式构造出的新的模糊拓扑空间. 设$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ $(\alpha\in\mathscr{A})$是一族模糊拓扑空间,$X=\times_{\alpha\in\mathscr{A}}X_\alpha$ 为$\{X_\alpha\}$ $(\alpha\in\mathscr{A})$的笛卡儿乘积,P_α:$\times_{\alpha\in\mathscr{A}X_\alpha}\to X_\alpha$ 为相应的投影映射,称 X 上以 $\mathscr{B}=\{\bigcap_{\alpha\in F}P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$为基的模糊拓扑 $\mathscr{T}$ 为$\{\mathscr{T}_\alpha\}$的乘积模糊拓扑,并称$(X,\mathscr{T})$为$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ $(\alpha\in\mathscr{A})$的乘积模糊拓扑空间,此处U_α为$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$中的任意开集,$F$为 $\mathscr{A}$ 的任意有限子集.

乘积模糊拓扑(product of fuzzy topological) 见“乘积模糊拓扑空间”.

映射的模糊连续性(fuzzy continuity of mappings) 普通映射连续性的一种自然推广. 设$(X,\mathscr{T}_1)$,$(Y,\mathscr{T}_2)$是两模糊拓扑空间,f:$(X,\mathscr{T}_1)\to(Y,\mathscr{T}_2)$是一映射. 若对任何 $B\in\mathscr{T}_2$ 有 $f^{-1}(B)\in\mathscr{T}_1$,则称映射 f 是模糊连续的. 特别地,当 f 是一一对应,且 f,f^{-1}同时模糊连续时,称 f 是模糊同胚映射,亦称$(X,\mathscr{T}_1)$与$(Y,\mathscr{T}_2)$模糊同胚.

模糊同胚映射(fuzzy homeomorphisms) 见“映射的模糊连续性”.

模糊同胚(fuzzy homeomorphism) 见“映射的模糊连续性”.

模糊格(fuzzy lattice) 一类特殊的完全分配格. 由于这种格与模糊数学的结构有紧密的联系,所以人们称其为模糊格. 设 L 是格,$a\in L$ 称为并既约元,若对 L 的任意元 x 和 y,当 $a=x\vee y$ 时,有 $a=x$ 或 $a=y$. L 的非零并既约元称为分子. 由于完全分配格具有充分多的分子,因此,常称完全分配格为分子格. 若 L 是分子格且带有逆序对合对应,即存在映射 N: $L\to L$ 满足:

1. 若 $a\leqslant b$,则 $N(a)\geqslant N(b)$,
2. $N(N(a))=a$;

则称 L 是模糊格. 若:

1. f 是保并映射;
2. f^{-1}是保逆合映射,即对$\forall b\in L_2$,有

$$f^{-1}(N(b))=N(f^{-1}(b)),$$
$$f^{-1}(b)=\vee\{x\in L_1;\ f(x)\leqslant b\};$$

则从模糊格 L_1 到模糊格 L_2 的映射 f 称为序同态.

序同态(order-homomorphism) 见“模糊格”.

***L* 模糊拓扑空间**(L-fuzzy topological space) 拓扑空间和模糊拓扑空间的一种推广. 它的模糊拓扑结构是建立在模糊格上的. 设 L 是模糊格,X 是非空集,$\delta\subset L^X$. 如果:

1. $0,1\in\delta$, 即 δ 含有 L^X 的最大元和最小元;
2. 对任何 $A,B\in\delta$,有 $A\wedge B\in\delta$;
3. 对任何 $A_t\in\delta$ $(t\in T)$,有 $\vee_{t\in T}A_t\in\delta$;

则称 δ 为 X 上的 L 模糊拓扑,称(L^X,δ)为 L 模糊拓扑空间. 特别地,当 $L=\{0,1\}$时,L 模糊拓扑空间就是普通拓扑空间;当 $L=[0,1]$时,L 模糊拓扑空间就是通常的模糊拓扑空间.

L 模糊拓扑(L-fuzzy topology) 见“L 模糊拓扑空间”.

拓扑分子格(topological molecular lattice) 特殊的拓扑格. 它是 L 模糊拓扑空间的一种推广,设 L 是分子格,若 $\delta\subset L$ 满足条件:

1. $0,1\in\delta$;
2. 对任何 $a,b\in\delta$,有 $a\wedge b\in\delta$;
3. 对任何 $t\in T$, $a_t\in\delta$,有 $\vee_{t\in T}a_t\in\delta$;

则称(L,δ)为拓扑分子格. 分子、远域与序同态是拓扑分子格的三个理论支柱.

拓扑分子格概念是 1979 年由王国俊引入的.

远 域(remote neighborhood) 拓扑分子格中的一种邻近结构. 设(L,δ)是拓扑分子格,e 是 L 中的分子,若存在 $B\in\delta$,使得 $B\leqslant A$ 且 $e\overline{\in}B$. 称 A 是 e 的远域. 分子 e 的一切远域构成它的远域系.

远域系(remote neighborhood system) 见“远域”.

模糊拓扑群(fuzzy topological group) 拓扑群的一种推广. 它既是一个群,又是一个模糊拓扑空间,而且该模糊拓扑与群的运算是相容的. 设 G 是一个群,$(G,\mathscr{T})$是模糊拓扑空间,若映射

$$f: G\otimes G\to G\quad((x,y)\to xy),$$
$$g: G\to G\quad(x\to x^{-1})$$

均是模糊连续的,则称$(G,\mathscr{T})$为模糊拓扑群.

模糊拓扑群的概念最早是 1979 年由福斯特(Foster, D. H.)引入的. 后来由于模糊拓扑空间理论的发展,特别是模糊拓扑空间重域理论的创立,人们又给出了模糊拓扑群的第二种定义:设 G 是群,$(G,\mathscr{T})$是模糊拓扑空间,称$(G,\mathscr{T})$为模糊拓扑群. 如果满足:

1. 对任何 $a,b\in G$ 及$(ab)_\lambda$的任一重域 W,均有 a_λ 的重域 U 及 b_λ 的重域 V,使得 $f(U\times V)\subset W$.

2. 对任何 $a\in G$ 及 a_λ^{-1} 的任一重域 W,有 a_λ 的重域 U,使得 $g(U)\subset W$.

模糊拓扑群的第二种定义是第一种定义的加强. 特别地,当$(G,\mathscr{T})$是满层模糊拓扑空间时,这两种定义是等价的.

模糊拓扑线性空间(fuzzy topological vector space) 拓扑线性空间的一种推广. 它是一种带有与线性结构相适应的模糊拓扑的线性空间. 设 X 是数域 K 上的线性空间,$(X,\mathscr{T})$是模糊拓扑空间,若映射:

$$f: X\otimes X\to X\quad((x,y)\to x+y);$$
$$g: K\otimes X\to X\quad((k,x)\to kx)$$

均是模糊连续的,则称$(X,\mathscr{T})$为模糊拓扑线性空间.

模糊拓扑线性空间的概念是 1977 年凯兹拉斯(Katsaras, A. K.)和刘(Liu, D. B.)引入的. 后来,人们对模糊拓扑线性空间的工作,绝大多数是基于$(X,\mathscr{J})$为满层模糊拓扑空间这一前提,因此,一般当提及模糊拓扑线性空间时,均指$(X,\mathscr{J})$是满层模糊拓扑空间的情形.

模糊赋范空间(fuzzy normed space) 赋范空间的一种推广. 它是一类特殊的模糊拓扑线性空间. 设 X 是数域 K 上的线性空间, $I=(0,1]$, 若映射 $\|\cdot\|(\cdot): X\otimes I\to R^+\cup\{0\}$; $(x,\lambda)\to\|x\|(\lambda)$ 满足:

1. $\|x\|(\lambda)=0$, 当且仅当 $x=\theta,\lambda\in I$;
2. $\|kx\|(\lambda)=|k|\,\|x\|(\lambda)$;
3. $\|x+y\|(\lambda)\leqslant\|x\|(\lambda)+\|y\|(\lambda)$;
4. 若 $0<\lambda\leqslant\mu\leqslant1$, 则 $\|x\|(\mu)\leqslant\|x\|(\lambda)$, 且对任何 $(x,\lambda)\in X\times I$, 有 $0<\lambda_n<\lambda$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x\|(\lambda_n)=\|x\|(\lambda);$$

则称$(X,\|\cdot\|(\cdot))$为模糊赋范空间, $\|\cdot\|(\cdot)$称为模糊范数.

模糊赋范空间的概念是吴从炘、方锦暄于 1984 年给出的. 同年, 凯兹拉斯(Katsaras, A. K.)又给出了另一种定义.

若 X 是数域 K 上的线性空间, 则称 X 的平衡凸吸收的模糊子集 ρ 为模糊半范, 这里 ρ 为平衡的是指, 当 $|k|\leqslant1$ 时, $k\rho\subset\rho$. ρ 为吸收的是指对任何 $x\in X$, $\sup_{t>0}(t\rho)(x)=1$ 成立. 特别地, 当

$$\inf_{t>0}(t\rho)(x)=0,$$

对任何 $x\neq0$ 成立时, 称 ρ 为模糊范数.

虽然模糊范数的这两种定义在形式上有很大的差异, 但第二种定义的范数与存在映射

$$\|\cdot\|(\cdot): X\otimes I\to R^+\cup\{0\}$$

满足条件 2,3,4 及 1′:

1′. $\|x\|(\lambda)=0$, 当且仅当 $x=0,\lambda\in(0,1)$相互惟一确定.

模糊范数(fuzzy norms) 见"模糊赋范空间".

概率度量空间(probabilistic metric space) 亦称门杰概率度量空间. 度量空间的一种重要推广. 通常的度量取值于非负实数集, 而概率度量取值于分布函数集. 如果实数域 R 上的模糊集 F 是单调不减、右连续的, 且 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, 则称 F 为分布函数. Δ^+表示满足 $F(0)=0$ 的所有分布函数组成的集合, 如果映射τ: $\Delta^+\otimes\Delta^+\to\Delta^+$满足:

1. $\tau(F,G)=\tau(G,F)$;
2. 若 $F\leqslant H$, $G\leqslant K$, 有 $\tau(F,G)\leqslant\tau(H,K)$;
3. $\tau(F,\varepsilon_0)=F$, 其中 $\varepsilon_0\in\Delta^+$定义为: 当 $t\leqslant0$ 时, $\varepsilon_0(t)=0$, 当 $t>0$ 时, $\varepsilon_0(t)=1$;
4. $\tau(\tau(F,G),H)=\tau(F,\tau(G,H))$;

则称 τ 为三角函数.

设 X 是数域 K 上的线性空间, τ 是三角函数, 映射 $\mathscr{F}$: $X\times X\to\Delta^+$满足:

1. $\mathscr{F}(x,y)=\varepsilon_0$, 当且仅当 $x=y$;
2. $\mathscr{F}(x,y)=\mathscr{F}(y,x)$;
3. $\mathscr{F}(x,y)\geqslant\tau(\mathscr{F}(x,y),\mathscr{F}(y,z))$;

则称三元组$(X,\mathscr{F},\tau)$为在三角函数 τ 下的概率度量空间, 简称概率度量空间, $\mathscr{F}$ 称为概率度量.

概率度量空间的概念最早是由门杰(Menger, K.)于 1942 年引入的. 上述定义是门杰概率度量空间的推广, 是由塞斯特内夫(Šerstnev, A. N.)给出的. 若 T 是右连续的 T 模, 定义 τ_T 如下:

$$\tau_T(F,G)(t)=\sup\{T(F(u),G(v)):\ u+v=t\},$$

则 τ_T 是一个三角函数. 此时概率度量空间$(X,\mathscr{F},\tau_T)$即为门杰概率度量空间.

门杰概率度量空间(Menger's probabilistic metric space) 即"概率度量空间".

概率度量(probabilistic metric) 见"概率度量空间".

概率赋范空间(probabilistic normed space) 赋范空间概念的一种推广. 通常的范数取值于非负实数集, 概率范数取值于分布函数集, 即实数域 R 上一类特殊的模糊集所成之集. R 上的模糊集 F 称为分布函数, 如果 F 在 R 上是单调不减、右连续的, 且满足 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$. Δ^+表示满足 $F(0)=0$ 的所有分布函数组成的集合. 设 X 是数域 K 上的线性空间, τ 是三角函数(参见"概率度量空间"), 映射 ν: $X\to\Delta^+$满足以下条件:

1. $\nu(x)=\varepsilon_0$, 当且仅当 $x=0$;
2. $\nu(kx)(t)=\nu(x)\left(\dfrac{t}{|k|}\right)$ $(\forall k>0)$;
3. $\nu(x+y)\geqslant\tau(\nu(x),\nu(y))$;

则称三元组(X,ν,τ)为在三角函数 τ 下的概率赋范空间, 简称赋范空间, ν 称为概率范数. 若(X,ν,τ)是概率赋范空间, 定义 $\mathscr{F}$: $X\otimes X\to\Delta^+$为 $\mathscr{F}(x,y)=\nu(x-y)$, 则$(X,\mathscr{F},\tau)$为概率度量空间.

概率赋范空间的概念是 1962 年由塞斯特内夫(Šerstnev, A. N.)引入的.

概率范数(probabilistic norm) 见"概率赋范空间".

模糊映射不动点(fixed points of fuzzy mapping) 集值映射不动点概念的一种推广. 设$\mathscr{F}(X)$表示 X 上的所有模糊集组成的集合, 映射 F: $X\to\mathscr{F}(X)$称为模糊映射. 若 $x\in X$ 满足 $x\in F(x)$, 即 $F(x)(x)=1$, 则称 x 是模糊映射 F 的不动点.

模糊映射不动点理论的研究, 最早开始于 1981 年海尔泼恩(Heilpern)的工作.

模糊映射(fuzzy mappings)　见"模糊映射不动点".

模糊映射不动度(fixed degree for fuzzy mapping)　集值映射的不动点和模糊映射不动点概念的一种推广.设 F 为 X 上的一个模糊映射,即从 X 到 $\mathscr{F}(X)$ 的映射,$\mathscr{F}(X)$ 表示 X 上所有模糊集组成的集合,记 $F(x)=F_x$.如果 $F_x(x)=\alpha$.则称 x 关于模糊映射 F 的不动度为 α,记为 $D_{\text{fix}}(x,F)=\alpha$.特别地,当 $D_{\text{fix}}(x,F)=1$ 时,则称 x 为模糊映射 F 的不动点;若存在 $x_*\in X$,使得

$$F_{x_*}(x_*)=\max_{x\in X}F_{x_*}(x),$$

则称 F 在 x_* 处有极大的不动度.

极大不动度(maximal fixed degree)　见"模糊映射不动度".

随机集落影(project of random sets)　联系模糊集与随机集的一种理论.模糊集可以看做变动的普通集.基于这一思想,汪培庄建立了集值统计的初步理论,进而将模糊集视为随机集的落影,将论域 U 上的模糊集理论与幂集 $\mathscr{P}(U)$ 上的随机集理论联系起来,对随机集给出了纯测度论式的定义及超可测结构,推广了肖凯(Choquet, G.)的容度定理.这一理论还突出了集值映射的重要性,特别研究了各种数学结构向幂集上的提升.随机集落影理论的意义在于,它在概率论与模糊集之间架设了桥梁,并为概念描述、知识表示提供了理论工具,它已经在人工智能及软科学决策两方面得到了应用.

随机集落影理论的研究始于 1982 年.同年,古德曼(Goodman, I. R.)也正式发表了关于模糊集与随机集联系起来的论文,彼此独立、平行的发展,而中国学者所建立的理论,更具有明确的直观背景和严谨的数学内容.

模糊系统与模糊控制

模糊系统(fuzzy system)　输入、输出状态具有模糊性的系统.设在系统 A 中 u_t,y_t 及 x_t 分别为时刻 t 的输入、输出及状态,则当系统 A 用下面的状态方程:

$$x_{t+1}=f(x_t,u_t),\quad y_t=g(x_t,u_t)$$

表示其特征时,称其为模糊系统,这里 f,g 分别称为状态转移函数和输出函数,它们分别是从 $\mathscr{F}(X)\otimes\mathscr{F}(U)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 和 $\mathscr{F}(Y)$ 的映射;X,U 与 Y 分别称为状态空间、输入空间与输出空间,$\mathscr{F}(X)$,$\mathscr{F}(Y)$,$\mathscr{F}(U)$ 依次表示 X,Y,U 上所有模糊子集的全体之集.

模糊自动机(fuzzy automata)　一类特殊的模糊系统.指由有限输入集合 U、有限状态集合 X 和有限输出集合 Y 构成的模糊系统.它可以表示为

$$\mathscr{A}=\{U,X,Y,\delta,\beta\}.$$

其中,δ 是 $X\otimes U\otimes X$ 上的模糊子集,β 是 $X\otimes Y$ 上的模糊子集,初始状态可以是 X 上的模糊子集.给出输入状态序列即得输出结果.它可看做一种学习机,用学习的方法不断改进模糊自动机的结构,它也可作为控制器用于特性未知系统的最佳控制与系统识别.

模糊语言(fuzzy language)　一种特殊语言.它是以模糊集合论为工具对自然语言的一种数学描述.模糊语言 L 是用四元组 $L=(U,T,E,N)$ 表示的系统.这里:

1.U 是论域,即对象、作用、关系、概念的集合.

2.T 是表现 U 中模糊子集名称的言词、单词或本语的模糊子集,T 称为是术语集合.

3.E 是 T 的嵌入集,是符号及其组合的汇集.术语是由它得出的,即 T 是 E 上的模糊子集.

4.N 是命名关系,它是$(\sup T)\otimes U$ 上的模糊关系.

而所谓构造模糊语言 L 是

$$L=(U,S_T,E,S_N),$$

其中 U 是论域;E 是对于术语集合 T 的嵌入集合;S_T 是 L 的语法规则所组成的集合,是为计算 T 中隶属函数 μ_T 提供算法的;S_N 是 L 的语义规则所组成的集合,是为计算命名关系 N 的隶属函数 μ_N 提供算法的.

构造模糊语言(constructed fuzzy language)　见"模糊语言".

语气算子(mood operator)　模糊数学术语.它是表示自然语言中的一些副词.如很、极、相当、比较、稍许、略微等的一种算子.把它们放在一个单词或词组前面,便可调整该词词义的肯定程度,从而构成一个新词.语气算子通常用映射 H_λ: $\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$ (λ 是正实数),

$$H_\lambda(A)(x)=[A(x)]^\lambda$$

来表示.当 $\lambda>1$ 时,H_λ 称为集中化算子(如"很"$=H_2$,"极"$=H_4$);当 $\lambda<1$ 时,H_λ 称为松散化算子("略少许"$=H_{\frac{1}{2}}$,"略微"$=H_{\frac{1}{4}}$).

集中化算子(concentration operator)　见"语气算子".

松散化算子(dilation operator)　见"语气算子".

模糊化算子(operator for fuzziness)　一种算子.是改变单词的模糊程度的一种算子.它是这样一个词,放在某个单词前面可使这个单词的意义更加模糊,比如"大概"、"近似"等.一般可用一个模糊相似关系(即自反、对称的模糊关系)来表示.若 A 是

论域 X 上的一个单词，E 为 X 上的模糊化算子，由

$$(EA)(x) = (E \circ A)(x)$$

可得到更加模糊化的单词.

判定化算子(operator for determinacy)　一种算子. 它是将意义模糊的单词转化为意义较为确定的单词的一种算子. 如"偏向"、"倾向于"、"多半是"等词. 设 F 为分布函数，且 $F(0)=0$，$F(1)=1$. 当 $x<1/2$ 时，$F(x)<x$；当 $x\geqslant 1/2$ 时，$F(x)>x$. 若 A 是单词，是 X 上的模糊集，映射 $\hat{F}: \mathscr{F}(X)\rightarrow\mathscr{F}(X)$，则 $(\hat{F}A)(x)=F(A(x))$ 可使单词 A 的意义更加确定. 因此，$\hat{F}$ 是一种判定化算子.

模糊算法(fuzzy algorithms)　一种特殊算法. 它是由模糊指令组成的有序集根据执行指令的结果，产生出指定问题近似解的一种算法. 这里的模糊指令是指语句中出现了模糊集的指令，它主要有三种类型：

1. 赋值语句. 把可能的模糊值指派给一个变量，例如"x 近似地等于 5".

2. 模糊条件语句. 假若模糊条件成立，则将可能的模糊值赋给变量或执行动作，例如"若 x 远远小于 8，则停".

3. 无条件语句. 执行可能的模糊数学的运算或动作，例如"x 略微减少些".

一般地，模糊算法可以看成一个模糊系统. 模糊算法最早是由美国控制论专家扎德(Zadeh, L. A.)提出的.

模糊指令(fuzzy orders)　见"模糊算法".

模糊逻辑(fuzzy logics)　从语义角度对二值逻辑的一种推广. 指命题真值可取[0,1]中一切值的逻辑. 它是由模糊逻辑公式形成的. 模糊逻辑公式在[0,1]上取值，通过递归方法定义. 它有基本变量，取值在[0,1]上. 基本变量本身以及通过[0,1]上的并、交、补运算所得到的公式仍然是模糊逻辑公式. 若变量在[0,1]中变化时，模糊逻辑公式取值总不小于 0.5，称为模糊真的. 模糊逻辑公式是模糊真的，当且仅当该公式在二值逻辑中是恒真的.

模糊语言逻辑(fuzzy language logics)　一种自然语言逻辑. 它是逻辑变量与逻辑公式取值为模糊真值，并得到可能性结论的逻辑. 模糊真值是[0,1]上的模糊数. 例如，"真的"隶属函数可规定为 $A(x)=x\,(x\in[0,1])$，"假的"隶属函数可规定 $B(x)=1-x\,(x\in[0,1])$. 再通过模糊化算子、判定性算子构成新的模糊真值，并通过模糊真值的演算得到复合命题的模糊真值. 通过命题的模糊真值给出命题合理的真实程度与可靠性.

模糊推理(fuzzy inference)　一种推理方法. 是通过模糊命题或模糊命题的模糊真值演算，得到一种可能性结论的近似推理. 设 A 和 B 分别为 X 和 Y 上的两个模糊子集，通常规定

$$(A\rightarrow B)(x,y)=(A(x)\wedge B(y))\vee(1-A(x)),$$

则得 $X\times Y$ 上的模糊关系. 若给出 X 上的另一模糊集 A'，则通过 $(A\rightarrow B)$ 可得 Y 上的模糊集

$$B'=A'\circ(A\rightarrow B).$$

由于"$(A\rightarrow B)$"可以看做一个模糊转换器，因此，模糊推理可以用来对某些复杂系统进行模糊控制.

模糊控制(fuzzy control)　一种智能化的控制. 它是利用模糊集理论、模糊逻辑和模糊推理方法把人的直觉、经验形式化、模型化，由计算机来实现有效控制. 它的数学模型为：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 U 上的 n 个模糊集，称为观测量；$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 V 上的 n 个模糊集，称为控制量. 根据人的经验，有 $A_i\rightarrow B_i\,(i\leqslant n)$，于是得到 $U\times V$ 上的模糊关系 R(作为模糊控制器)

$$R(u,v)=\sup_{i\leqslant n}(A_i(u)\wedge B_i(v)).$$

任给一个观测结果 e，e 是 U 上的模糊集，作为输入，则由

$$B'(v) = \sup_{u\in U}(e(u)\wedge R(u,v))$$

即得输出，即模糊控制量 B'.

模糊统计决策(fuzzy statistical decision making)　一种统计决策方法. 它是在模糊状态与模糊行为场合下的一种统计决策. 它给出了在大致某一状态下，大致应当采取的行为. 设 S 与 D 分别为状态集与行为集，$\mathscr{A}=\{A_i;\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 表示 n 个模糊状态，$\mathscr{F}=\{F_j;\ 1\leqslant j\leqslant m\}$ 表示 m 个模糊行为，A_i 与 F_j 分别为 S 与 D 上的模糊子集，u 是 $\mathscr{A}\otimes\mathscr{F}$ 上的效应函数，P 为 S 上的先验概率. 对 F_j 的行为效应为

$$U(F_j) = \sum_i u(A_i,F_j)\int A_i\mathrm{d}P.$$

使 $U(F_j)$ 最大的 F_j 为最佳模糊行为.

撰　稿　马　明　方锦暄　吴从炘　张文修　林源渠
审　阅　王国俊　吴从炘

数 学 符 号 表

数学符号表编写说明

《数学辞海》第一至五卷正文之后，均附有数学符号表，提供读者查阅之用. 本表所收符号比较齐全，除包含“中国数学物理名词委员会”审定的《数学物理符号表》中的全部数学符号外，还收入了国内外数学界已普遍使用的数学符号，总共列入数学符号 1158 个.

一些新兴学科，如小波分析、分形几何、数理语言学、机器证明等，都是 20 世纪中叶以后发展起来的，这些学科的数学符号在国际国内还不统一，《数学辞海》将其收入，仅供读者参考.

本表所收数学符号并非仅限于《数学辞海》的正文，有的符号虽然在本辞书的正文中(如模糊数学中的一些专用数学符号)未曾出现，但由于这些符号已经广泛应用于国内外的教学、科研、工程技术中，因此亦作了适当的搜集，以飨读者.

数学符号表的体例：数学符号表共设五个横栏，依次为符号栏、中文名称栏、英文名称栏、意义或举例栏、备注栏.

数学符号的编排分类：《数学辞海》共六卷，包含数学科学的 100 多个分支学科或专题项目，所涉及的数学符号种类繁多. 为便于读者查找而采取分类编排. 因此，本表将数学符号按学科类型分为以下 7 类：

1. 算术与数论：算术中包括最常用的数学符号，如＋，－，×，÷，＝，≠等，它的应用范围遍及所有分支学科. 数论则包括初等数论、代数数论、解析数论、几何数论等.

2. 逻辑与集合：包括数学基础、形式逻辑、数理逻辑、集合论、公理集合论、序与格等.

3. 几何与拓扑：包括平面几何、立体几何、平面三角、球面三角、解析几何、高等几何、微分几何、凸集几何、距离几何、一般拓扑学、代数拓扑学与流形拓扑学等.

4. 代数学：包括初等代数、高等代数、布尔代数、线性代数与多重线性代数、环与代数、模与同调代数、群及其推广、域与伽罗瓦理论、李群与李代数、范畴论与代数 K 理论、代数几何、奇点理论与突变理论等.

5. 分析学：包括数学分析、实变函数论、复变函数论、多复变与复空间、测度论、泛函分析、变分法、函数逼近论、调和分析、流形上的分析、位势论、凸分析、非标准分析、小波分析、分形几何、常微分方程、偏微分方程、积分方程与函数方程、动力系统、特殊函数等.

6. 概率统计：包括组合学、概率论、随机过程、统计学等.

7. 应用数学：包括计算数学、模糊数学、生物数学、经济数学、数学物理与理论物理、运筹学、系统理论、控制理论、通信与信息理论、测绘学、力学、天文学、数理语言学等.

数学符号表的编排顺序：本表所列数学符号，大体上按它们在《数学辞海》中出现的先后顺序编排. 由于很多数学符号的含义及使用范围比较复杂，若要准确地归入哪一类，实际上是很困难的，因而制订下列编排原则：

1. 多学科共用符号，将其编入最先出现的分支学科中. 例如，运算符号＋，－，×，÷等，是所有学科共用的，就编入本表最前面的学科——算术中.

2. 同形同义的符号，就只在某一分支学科符号表内出现一次. 例如，符号“R”在集合论中表示实数集，而在代数学和分析学中也表示实数集，其意义是相同的，就将符号“R”只列入集合论的符号表，而在代数学和分析学的符号表中不再出现.

3. 同形而不同义的符号，则分别列入相应分支学科. 如“Im”在初等代数中表示复数的虚部，而在集合论和代数学中则表示映射的像，就将其分别列入各个学科的符号表中；又如“k”在应用数学中表示高斯常数，在微分几何中表示曲率，而在特殊函数中则表示贝克函数，这样便分别将其列入应用数学、微分几何、特殊函数的符号表中.

4. 异形同义的符号，首先将《数学物理符号表》中核定的符号列入符号栏，而将其异形符号列入备注栏，如几何中将 Rt∠列于符号栏，而将曾用符号 rt∠和 R∠列入备注栏；其次，凡目前国际国内用法尚未统一的异形同义符号，如代数中的“A^T”，“A'”都表示矩阵 A 的转置矩阵，则一同列于符号栏.

5. 过去用过，而现在少用或不用的数学符号，本表将其列入备注栏，以利读者阅读古旧数学资料时参考.

算术和数论(Arithmetic & Number theory)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$+$	加号;正号	plus ;positive	例如,$+2$ 即正 2;$a+b$ 即 a 与 b 相加	正号常可略去不写
$-$	减号;负号	minus ;negative	例如,-1 即负 1;$a-b$ 即 a 与 b 的差	
$\pm$	正或负;加或减	positive or negative;plus or minus	例如,± 2,即正 2 或负 2;$a \pm b$ 即 a 加或减 b	
$\mp$	负或正;减或加	negative or positive;minus or plus	例如,∓ 2 即负 2 或正 2;$a \mp b$ 即 a 减或加 b	
$\times$, $\cdot$	乘号	multiple sign	例如,2×3 即 2 乘 3;$a \cdot b$ 即 a 乘 b	乘号在括号前或字母间常可略去
$\div$, —, /	除号;分数(式)线	sign of division, fraction stroke	$a \div b$, $\frac{a}{b}$, a/b,即 a 除以 b, b 分之 a	
$:$	比	ration	$a:b$ 即 a 比 b	
$\mid$	整除	exact division	$a \mid b$ 即整数 a 整除整数 b	
$\nmid$	不能整除	nonaliquot	$a \nmid b$ 即整数 a 不能整除整数 b	
$\parallel$	限界整除	bound exact division	$a^k \parallel b$ 即 a^k 能整除 b,但 a^{k+1} 不能整除 b	$a^k \mid b$,且 $a^{k+1} \nmid b$
$[,\cdots,]$	最小公倍数	least common multiple	$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数	亦可用 LCM 表示
$(,\cdots,)$	最大公约数	greatest common divisor	$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数	亦可用 GCD 表示
a^n	a 的 n 次方(幂)	a to the power n	例如,5^4 即 5 的 4 次方(幂)	当 $n=2,3$ 时,分别称平方、立方
$\sqrt{\ }$	平方根号	square root sign	$\sqrt{a}$ 即 a 开平方	
$\sqrt[n]{\ }$	n 次根号	n-th root sign	$\sqrt[n]{a}$ $(n \geqslant 2)$即 a 开 n 次方	当 $n=3$ 时,称 a 开立方
$\mid\ \mid$	绝对值;模	absolute value;modules	$\lvert a \rvert$表示 a 的绝对值或模	亦可用 abs a 表示
$=$	等号	equal sign	$2+3=5$	
$\neq$	不等号	inequality sign	$2+3 \neq 4$	
$\equiv$	恒等号	identity symbol	$a \equiv b$ 即 a 恒等于 b	
$<$	小于	less than	$a<b$ 即 a 小于 b	
$>$	大于	greater than	$a>b$ 即 a 大于 b	
$\gtrless$	大于或小于	greater than or less than	$a \gtrless b$ 即 $a>b$ 或 $a<b$	
$\lessgtr$	小于或大于	less than or greater than	$a \lessgtr b$ 即 $a<b$ 或 $a>b$	
$\leqslant$	小于或等于;不大于	less than or equal to	$a \leqslant b$ 即 a 小于或等于 b,或 a 不大于 b	一般不用符号"$\leqq$"
$\geqslant$	大于或等于;不小于	greater than or equal to	$a \geqslant b$ 即 a 大于或等于 b,或 a 不小于 b	一般不用符号"$\geqq$"
$\ll$	远小于	much less than	$a \ll b$ 即 a 远小于 b	
$\gg$	远大于	much greater than	$a \gg b$ 即 a 远大于 b	
$\approx$	约等于	approximately equal	$a \approx b$ 即 a 约等于 b	曾用$\doteq$,现已不用
$\triangleq$	相当于	equivalent to	1 cm$\triangleq$10 km 表示图上 1 cm 相当于实际距离 10 km	曾用$\Leftrightarrow$,现已不用
$\propto$	成正比	is direct ratio to	$a \propto b$ 表示 a 与 b 成正比	
$\sim$	数值范围	numerical range	例如,5～10 即由 5 至 10	现已不用"—"
.	小数点	decimal point	例如,8.59 即 8 又 100 分之 59	小数点记于个位数字后的下足
$\dot{}\ \dot{}$	循环小数	recurring decimal	$2.4\dot{2}3\dot{1}$ 即 2.423 123 123 1…	记于循环节的首末位数字上方

符 号	中文名称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
%	百分号	sign of percent	例如，5%即百分之五，亦即 5/100	
‰	千分号	sign of permillage	例如，5‰即千分之五，亦即 5/1000	
( )	圆括号	parenthesis	例如，5−(2+1)	亦称小括号
[ ]	方括号	square brackets	例如，3[5−(2+1)]	亦称中括号
{ }	花括号	brace	例如，2{3[5−(2+1)]−2}	亦称大括号
——	括线	vinculum	例如，$(\overline{8-2}\times 3)\div 2$，以 8−2 的差乘 3…	相当于小括号
∞	无穷大	infinity	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ 即函数 $\frac{1}{x}$ 当 x 趋近于 0 时无限地增大	亦称无限或无限大
$a\overset{\text{def}}{=}b$	a 以 b 为定义	a is definition equal to b	例如，$a\overset{\text{def}}{=}b^n$ 即用 b^n 代表 a	亦可用 $a\overset{\text{d}}{=}b$ 或 $a:=b$ 表示
d	公差	common difference	等差数列任相邻两项之差（后项减前项）均相等，这个共同的差 d 称为此数列的公差	
q	公比	common ratio	等比数列任相邻两项之比（后项比前项）均相等，这个共同的比 q 称为此数列的公比	
S_n	数列前 n 项和	sum of the first n terms	例如，等差数列 $a,a+d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$，前 n 项之和 $S_n=na+\frac{n(n-1)}{2}d$	
Δ	判别式	discriminant	例如，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$	利用 Δ 可判别该方程根的状况
$E(x),[x]$	整数部分记号	symbol of integral part	表示不超过 x 的最大整数.例如，$[1.2]=1$，$[-1.2]=-2$	亦记为 ent(x)，来自法文 entier
$\{x\}$	小数部分记号	symbol of decimal part	$\{x\}$只能是 0 或正的纯小数，它满足：$0\leqslant\{x\}<1$，例如，$\{1.2\}=0.2$，$\{-1.2\}=0.8$	亦称分数部分记号，亦记为$\{x\}$
$\sum\limits_{n\leqslant x}$	整数求和号	sign of integers summation	对不超过 x 的正整数 n 求和.例如，$\sum\limits_{n\leqslant 6}n=1+2+3+4+5+6=21$	
$\sum\limits_{n<x}$	整数求和号	sign of integers summation	对小于 x 的正整数 n 求和.例如，$\sum\limits_{n<6}n=1+2+3+4+5=15$	
$\sum\limits_{p\leqslant x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对不超过 x 的素数 p 求和.例如，$\sum\limits_{p\leqslant 7}p=2+3+5+7=17$	
$\sum\limits_{p<x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对小于 x 的素数 p 求和.例如，$\sum\limits_{p<7}p=2+3+5=10$	
$\sum\limits_{d\mid n}$	除数求和号	sign of divisor summation	对 n 的所有不同因子 d 求和.例如，$\sum\limits_{d\mid 6}d=1+2+3+6=12$	
$\prod\limits_{d\mid n}$	除数求积号	sign of divisor mensuration	对 n 的所有不同因子 d 求积.例如，$\prod\limits_{d\mid 6}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$	
$\sum\limits_{p\mid n}$	素除数求和号	sign of prime divisor summation	对 n 的所有不同素因子 p 求和.例如，$\sum\limits_{p\mid 6}=2+3=5$	
$\prod\limits_{p\mid n}$	素除数求积号	sign of prime divisor mensuration	对 n 的所有不同素因子 p 求积.例如，$\prod\limits_{p\mid 6}=2\cdot 3=6$	
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	总和号	sign of grand sum	求对 x_i 从 x_1 连加到 x_n 的总和，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$	
$\prod\limits_{i=1}^{n}$	连乘号	sign of continued product	求对 x_i 从 x_1 连乘到 x_n 的积，即 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1x_2\cdots x_n$	
$a\equiv b(\bmod n)$	模 n 同余	congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数相同	
$a\not\equiv b(\bmod n)$	模 n 不同余	non-congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数不同	
≣	恒等同余	identity congruence	$f(x)$ ≣ $g(x)$ $(\bmod p)$，即整系数多项式 f 与 g 的对应系数均模 p 同余	亦可记为 $f(x)\equiv_x g(x)(\bmod p)$
$\not$≣	不恒等同余	non-identity congruence	$f(x)$ $\not$≣ $g(x)$ $(\bmod p)$，即 $f(x)$与 $g(x)$的对应系数均模 p 不同余的	亦可记为 $f(x)\not\equiv_x g(x)(\bmod p)$

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$a^{-1}(\bmod n)$	模 n 的逆	inverse of modulo-n	与 a 相乘后用 n 除余数是 1 的整数. 例如, $2^{-1}(\bmod 5)=3,\ 3^{-1}(\bmod 4)=3$	这是一个同余类
$r \bmod n$	模 n 的同余类	congruence class of modulo-n	包含 r 的模 n 的同余类. 例如, $2(\bmod 5)=\{\cdots,-8,-3,2,7,12,\cdots\}$	亦称剩余类
$\mathbf{Z}_n$	剩余类环	residue class ring	模 n 的全体剩余类对类的加法和乘法组成的环	
$\left(\frac{a}{p}\right)$	勒让德符号	Legendre's symbol	$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次剩余}(\bmod p)\\ -1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次非剩余}(\bmod p)\\ 0, & p\mid a\end{cases}$	p 为奇素数,a 为整数
$\left(\frac{a}{m}\right)$	雅可比符号	Jacobi's symbol	$\left(\frac{a}{m}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a}{p_i}\right)$ ($m=p_1p_2\cdots p_k$, p_i 为素数, $(m,a)=1$)	当 m 为奇素数时即勒让德符号
$\left(\frac{d}{m}\right)$	克罗内克符号	Kronecker's symbol	$\left(\frac{d}{m}\right)=\prod_{r=1}^{v}\left(\frac{d}{p_r}\right)$ (d 为非平方数, p_r 为素数, $m=\prod_{r=1}^{v}p_r$)	
$d(n)$	除数函数	divisor function	$d(n)$ 表示 n 的正因子的个数. 例如, $d(12)=6$	亦可用 $\tau(n)$ 或 $T(n)$ 表示
$d_k(n)$	广义除数函数	generalized divisor function	$d_k(n)=\sum_{n_1n_2\cdots n_k=n}1=\sum_{m\mid n}d_{k-1}(m)$	
$\sigma(n)$	除数和	sum of divisor	表示正整数 n 的所有正因数的和. 例如, $\sigma(6)=1+2+3+6=12$	亦可用 $S(n)$ 表示
$\sigma_\lambda(n)$	广义除数和	generalized sum of divisor	$\sigma_\lambda(n)=\sum_{d\mid n}d^\lambda$. 例如, $\sigma_3(4)=1^3+2^3+4^3$	$\sigma_0(n)=d(n)$ 为除数函数; $\sigma_1(n)=\sigma(n)$ 为除数和
$P(n)$	正因数之积	product of positive divisors	$P(n)=\prod_{d\mid n}d$. 例如, $P(6)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$	
$\Phi(n)$	欧拉函数	Euler's function	表示小于正整数 n,且与 n 互素的正整数的个数. 例如, $\Phi(6)=2$	亦可记为 $\varphi(n)$
$\mu(n)$	默比乌斯函数	Möbius function	$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n \text{ 能被素数的平方整除时},\\ (-1)^r, & \text{当 } n \text{ 为 } r \text{ 个相异素数之积时}\end{cases}$	
$\Lambda(n)$	曼戈尔特函数	Von Mangoldt function	$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n \text{ 为素数 } p \text{ 的正乘方};\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\Lambda_1(n)$	曼戈尔特函数 1	Von Mangoldt function I	$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{若 } n \text{ 是一素数的 } m(>0)\text{次乘方},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\omega(n)$	相异素因数个数	different prime factor numbers	例如, $\omega(24)=\omega(2^3\cdot 3)=1+1=2$, 即 24 有 2 个不同的素因数	
$\Omega(n)$	素因数个数	prime factor numbers	表示正整数 n 的所有素因数的个数. 例如, $\Omega(24)=\Omega(2^3\cdot 3)=3+1=4$	
$\lambda(n)$	刘维尔函数	Liouville's function	$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$	
$\pi(x)$	素数个数符号	symbol of the prime numbers	表示不超过正实数 x 的素数个数. 例如, $\pi(10)=4$	
$\chi(n)$	特征函数	characteristic function	对模 m 之一特征 $\chi(n)$ 仅在 $(n,m)=1$ 时有定义,且 $\chi(1)\neq 0$; 若 $a\equiv b(\bmod m)$, 则 $\chi(a)=\chi(b)$; $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$	若 $(n,m)>1$ 时,则 $\chi(n)=0$
$p(n)$	整数分拆函数	integral partition function	把正整数 n 分成若干个正整数的和,称为 n 的一种分拆,以 $p(n)$ 表示分拆的种数. 例如, $p(4)=5$. 若限定分拆中的加数不超过 r,则这类分拆数以 $p_r(n)$ 表示	
$U(n)$	奇分拆	odd partition	$U(n)$ 为把 n 分为奇数个互异数之和的分拆数	
$E(n)$	偶分拆	even partition	$E(n)$ 为把 n 分为偶数个互异数之和的分拆数	
$N(\mathfrak{m})$	模 $\mathfrak{m}$ 的矩	moment of module $\mathfrak{m}$	将所有线性型依 mod$\mathfrak{m}$ 分类,则分类的个数称为模 $\mathfrak{m}$ 的矩. 若模 $\mathfrak{m}$ 对应于方阵 A,则 $N(\mathfrak{m})=\det A$	
$\vartheta(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\vartheta(x)$表示对不大于 x 的素数的对数求和	
$\psi(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p$, 而 $\Lambda(n)$ 为曼戈尔特函数	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\zeta(s)$	黎曼ζ函数	Riemann ζ-function	$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$,其中 s 为实部大于1的复数	
∂°	多项式的次数	degree of a polynomial	$\partial^{\circ}f=n$,表示多项式 $f(x)$ 的次数为 n	亦可表示成 $\deg f=n$
max( )	最大数	maximum number	$\max(a,b,\cdots,c)$ 即 $a,b,\cdots,c$ 中的最大数	
min( )	最小数	minimum number	$\min(a,b,\cdots,c)$ 即 $a,b,\cdots,c$ 中的最小数	
$\stackrel{L}{=\!=}$	左结合	left association	$A\stackrel{L}{=\!=}B$ 表示存在模方阵 U,使 $A=UB$,并称方阵 B 左结合于方阵 A	
$[,\cdots,]$	有限连分数	finite continued fraction	$[a_0,a_1,\cdots,a_N]=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_N}$,即有理数化成的连分数	无理数化成的连分数为无限连分数
Δ	判别式	discriminant	$\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 表示 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的判别式; $\Delta=\Delta(R(\theta))$ 表示代数数域 $R(\theta)$ 的判别式	
ind n	指数	index	如果 $n\equiv g^a(\mathrm{mod}\ m)$,则称 a 为 n 对于模 m 且以 g 为底的指数,记为 $a=\mathrm{ind}_g n$,简记为 ind n	亦可用 $\delta_m(a)$ 表示 a 对模 m 的指数
$x^k\equiv n(\mathrm{mod}\ p)$	k 次剩余	residue of degree-k	$x^k\equiv n(\mathrm{mod}\ p)(p\times n)$ 有解,则 n 称为 p 的 k 次剩余	
$d(A)$	A 的密率	density of A	$d(A)=\inf_{n\geqslant1}\frac{A(n)}{n}$,即集 A 的密率为 $A(n)/n$(一切 $n\geqslant1$)的下确界	$A(n)$ 表示 A 中不大于 n 的正整数的个数
$\delta^*(A)$	A 的渐近密率	asymptotic density of A	$\delta^*(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$,即集 A 的渐近密率为 $A(n)/n$ 当 $n\to\infty$ 的极限值	
$\left(\frac{a,b}{m}\right)$	和数符号	sum symbol	设 $m>1,a,b$ 都是整数,令 $\left(\frac{a,b}{m}\right)=\sum_x e^{2\pi i\frac{ax+bx'}{m}}\left(x'\equiv\frac{1}{x}(\mathrm{mod}\ m)\right)$,其中 x 是通过与模 m 简化的剩余系	
$(a,b)=\pm1$	希尔伯特符号	Hilbert symbol	设 k^* 表示域 k 的单位群,又 $a,b\in k^*$,则 $(a,b)=\begin{cases}1, & 若\ z^2-ax^2-by^2=0\ 在\ k^3\ 中有非零解,\\ -1, & 其他情形\end{cases}$	
$\{a,b,c\}$	二元二次型	2-ary quadratic form	用 $\{a,b,c\}$ 表示二元二次型 $ax^2+bxy+cy^2$,其中 a,b,c 为整数	
$g(k)$	小 $g(k)$	small $g(k)$	设 k 为一固定正整数,对任意正整数 n,不定方程 $n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$ 总有解的最小正整数 s	
$G(k)$	大 $G(k)$	large $G(k)$	设 k 为一固定正整数,对充分大的正整数 n,不定方程 $n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$ 总有解的最小正整数 s	
$S(\alpha)$	α 的迹	trace of α	设 $R(\theta)$ 为 n 次代数域,$\alpha^{(1)}=\alpha\in R(\theta)$,$\alpha^{(k)}(k=2,3,\cdots,n)$ 为 α 的共轭数,则 $S(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$ 称为 α 的迹	
$N(\alpha)$	α 的范数	norm of α	$N(\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$ 为 α 的范数	亦称矩
$N(k)$	等幂和	sum of equal powers	使 $x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$ 的最小正整数 s 记为 $N(k)$,其中 $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 不是 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 的重组	
$M(k)$	强等幂和	strong sum of equal powers	使 $x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$,并使 $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_s^{k+1}\neq y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\cdots+y_s^{k+1}$ 的最小正整数 s 用 $M(k)$ 表示	
$S(a,\chi)$	特征和	character sum	$S(a,\chi)=\sum_{n=1}^{m}\chi(n)e^{2\pi ian/m}$	
$S(n,m)$	高斯和	Gauss sum	$S(n,m)=\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi ix^2n/m}$,其中 $(n,m)=1$	
$F(s)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$	亦称 $F(s)$ 为 $f(n)$ 的演成函数
M_p	梅森数	Mersenne number	形如 2^p-1(p 为素数)的素数称为梅森数,记为 M_p。例如,$M_2=3,M_3=7$	
F_n	费马数	Fermat number	形如 $2^{2^n}+1$ 的数称为费马数,例如,$F_2=17$	F_5 不是素数

符号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备　注
$\equiv$	重模同余式	double module congruence expression	$f(x)\equiv g(x)\ (\mathrm{modd}\ p,\varphi(x))$ 表示系数以素数 p 为模，又 $\varphi(x)$ 整除 $f(x)-g(x)$，称为重模同余式	亦称重模为双模
$Q(x)$	无平方因子数	number of noninclusion square divisor	不超过 x 的无平方因子数的个数. 例如，$Q(10)=6$	
$V(n)$	同余式的解数	number of solutions of congruence expression	同余式 $x^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ n)$ 之解数	
$R(x)$	圆内整点数	number of circle lattice point	表示圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 内的整点数	
$F(x)$	朗伯级数	lambert series	$F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\dfrac{x^n}{1-x^n}$ 称为朗伯级数	
$[\alpha_1,\cdots,\alpha_q]$	理想数	ideal number	$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数，$R(\vartheta)$ 中形如 $\eta_1\alpha_1+\eta_2\alpha_2+\cdots+\eta_q\alpha_q$($\eta_i$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数）的整数所成之集合为理想数	
$[1]$	单位理想数	unit ideal number	表示单扩域 $R(\vartheta)$ 中全体整数组成之集合	
$\tau(n)$	拉马努金函数	Ramanujan function	表示 cusp 型 $F(s)=(2\pi)^{-12}\triangle(Z)$ 的第 n 个系数. 称 $n\mapsto\tau(n)$ 为拉马努金函数	
$L(s,\chi)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	表示狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi(m)n^{-s}$，其中 $m\geqslant 1$ 为整数，χ 为 mod m 特征	
$G_k(\Gamma)$	艾森斯坦级数	Eisenstein series	设 Γ 是 C 格，则称 $G_k(\Gamma)=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}{}'\dfrac{1}{\gamma^{2k}}$ 为指标是 k 的艾森斯坦级数，其中 $\sum'$ 表示对 Γ 的非零元素求和	
$\theta_\Gamma(Z)$	塞他函数	theta function	$\theta_\Gamma(Z)=\sum\limits_{x\in\Gamma}\mathrm{e}^{\pi i Z(x\cdot x)}$ 称为二次模 Γ 的塞他函数	

逻辑与集合(Logic & Sets)

符号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备　注
$\forall$	全称量词	universal quantifier	$\forall x\in A$，$p(x)$，表示命题 $p(x)$ 对于每一个属于 A 的 x 为真	亦可简记为 $\forall x$，$p(x)$
$\exists$	存在量词	existential quantifier	$\exists x\in A$，$p(x)$，表示存在 A 中的元素 x 使 $p(x)$ 为真	$\exists^!$（或 $\exists!$）表示存在一个且只有一个元素使 $p(x)$ 为真
$\wedge$	合取符号	conjunction sign	$p\wedge q$ 即 p 和 q	
$\vee$	析取符号	disjunction sign	$p\vee q$ 即 p 或 q	
$\neg$	否定符号	negation sign	$\neg p$ 即 p 的否定，非 p	
$\rightarrow,\Rightarrow$	推断符号	implication sign	$p\rightarrow q$，$p\Rightarrow q$ 表示：若 p 则 q，p 蕴含 q	亦可用 $q\leftarrow p$，$q\Leftarrow p$
$\leftrightarrow,\Leftrightarrow$	等价符号	equivalence sign	$p\leftrightarrow q$，$p\Leftrightarrow q$ 表示 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，即 p 等价于 q	亦称充分必要条件
$\models$	真值符号	truth sign	$\models A\rightarrow B$ 表示由命题 A 推出命题 B 为真	
$\Dashv\vDash$	可逆真值符号	invertible truth sign	$A\Dashv\vDash B$（或 $\models A\leftrightarrow B$）表示 $A\models B$，且 $B\models A$，意即 A 真则 B 真，且 B 真则 A 真	亦即 A，B 具有相同的真值
$\vdash$	断定符号	predicative sign	$p\vdash q$ 表示 q 随 p 来，p 是或从一公理而来，或 p 是同语反复	
$\in$	属于	belongs to	$x\in A$ 表示 x 属于 A，即 x 是集 A 的一个元（素）	集合 A 可简称为集 A
$\not\ni$	不包含	noninclusion	$A\not\ni x$ 表示集合 A 不包含元素 x	
$\bar{\in}$，$\notin$	不属于	nonmembership	$y\notin A$，$y\bar{\in}A$ 表示 y 不属于 A，y 不是集 A 的一个元（素）	亦可记为 $A\bar{\ni}y$，或 $A\not\ni y$
$\{,\cdots,\}$	集合号	sign of set	$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示由诸元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的集	亦可用 $\{x_i,\ i\in I\}$，这里 I 表示指标集
$\{\mid\}$	集合号	sign of set	$\{x\in A\mid p(x)\}$ 即使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元（素）组成的集	亦可用 $\{x\in A:p(x)\}$ 表示集

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\varnothing$	空集	the empty set	$\varnothing$表示没有元(素)的集	$\varnothing$是丹麦文字母，读“欧”
N	非负整数集	nonnegative integers set	$N=\{0,1,2,\cdots\}$	$N_t=\{1,2,3,\cdots\}$
Z	整数集	integers set	$Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$	Z_+表示正整数集合
Q	有理数集	rational numbers set	由全体有理数组成的集合	Q_+表示正有理数集合
R	实数集	real numbers set	由全体实数组成的集合	R^n表示n维实空间
C	复数集	complex numbers set	由全体复数组成的集合	C^n表示n维复空间
R^+	正实数集	positive real numbers set	由全体正实数组成的集合	R^-表示负实数集
R^*	扩张的实数集	expanding system of the real numbers	把两个理想点$+\infty,-\infty$加进实数系所得的集	亦称扩张的实数系
$\subsetneqq$	真包含于	proper inclusion	$B\subsetneqq A$表示A的子集B真包含于A	亦可用$\subset$表示
$\subseteq$	包含于	inclusion	$B\subseteq A$表示B是A的子集，即B的每一个元素均属于A	
$\not\subset$	不包含于	noninclusion	$C\not\subset A$表示C不是A的子集	亦可用$\nsubseteq$表示
$\supsetneqq$	真包含	proper inclusion	$A\supsetneqq B$表示A真包含B	
$\supseteq$	包含	inclusion	$A\supseteq B$表示B是A的子集	亦可用$\supset$表示
$\not\supset$	不包含	noninclusion	$A\not\supset C$表示A不包含C	亦可用$\nsupseteq$表示
$\cup$	并集，和集	union	$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$，称为$A$与$B$的并集，或称为$A$与$B$的和集	
$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$	诸并集	unions	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，即诸集$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并集	亦可用$\cup_{i=1}^{n}$，$\bigcup\limits_{i\in I}$或$\cup_{i\in I}$等记法，其中I表示指标集
$\cap$	交集	intersection	$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$，称为$A$与$B$的交集	
$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	诸交集	intersections	$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，即诸集$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交集	亦可用$\cap_{i=1}^{n}$，$\cap_{i\in I}$或$\bigcap\limits_{i\in I}$等记法，其中I为指标集
$\dot{+}$	集合的直和	direct sum of sets	若集合A与B不相交，则A与B的并集$A\cup B$称为A与B的直和，记为$A\dot{+}B$	亦称不交并
$\dot{\Sigma}$	广义直和	generalized direct sum	若f是标号集A到集族$\{X\}$的一一对应$(f:a\to X_a)$，且当$a\neq b$时，总有$X_a\cap X_b=\varnothing$，则记为$\dot{\sum\limits_{a\in A}}X_a$，并称为集族$\{X\}$的广义直和	
$\backslash$	差集	difference	$A\backslash B$表示所有属于A但不属于B的元的集，称为A与B的差集	
$\triangle$	对称差	symmetric difference	$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$称为$A,B$的对称差	亦可记为$A\dot{-}B$或$A\ominus B$
U	全集	total set	$A=U$表示A为全集，即全集中所有元素x都属于A	亦可用IΩV表示
$\complement$	余集，补集	complementary set	$\complement_U A=\{x\mid x\in U\wedge x\notin A\}$，即全集$U$中子集$A$的余集或补集	亦可用$\complement A$表示．曾用A^c表示
$\langle\ ,\ \rangle$	有序偶，偶	ordered pair	$\langle a,b\rangle$表示a,b的有序偶	亦可记为(a,b)
$\langle,\cdots,\rangle$	有序元组	elements of ordered	$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$称为有序$n$元组	亦可记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
$\times$	笛卡儿积	Cartesian product	$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$称为$A$与$B$的笛卡儿积或卡氏积，	$\overbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}^{n个}$记为$A^n$．亦称直积
card	基数，势	cardinal number	card(A)表示集A中诸元的个数，称为A的基数或势	亦可记为$\overline{\overline{A}}$或$\|A\|$
$\aleph_0$	基数，势	cardinal number	$\aleph_0$表示无限可数集的基数	是希伯来文第一个字母，读Alef
$\sim$	对等	equivalent	$A\sim B$表示集A与集B对等	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\mapsto$	元素间的对应	correspond between to elements	在映射下元素间的对应符号，例如，整数集的映射 $\varphi(x)=x^2$ 可表示成 $\varphi: x\mapsto x^2$	
$\to$	映射	mapping	$f: A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$ 表示 f 是集 A 到集 B 的映射	
f^{-1}	逆映射	inverse mapping	设 f 是集 A 到 B 的一个双射，则用 f^{-1} 表示 B 到 A 的 f 的逆映射. $f^{-1}f$ 是 A 的恒等映射	亦可用 f_l^{-1}，f_r^{-1} 表示左、右逆映射
R	关系	relation	aRb 表示 a 与 b 有关系 R	
$\not R$	无关系	non-relation	$a\not R b$ 表示 a 与 b 没有关系 R	亦称关系补
$\overline{R}$	反关系	anti-relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $\overline{R}=X\times Y-R$ 为 R 的反关系	亦称否定关系、补关系
R^{-1}	逆关系	inverse relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $R^{-1}\subseteq Y\times X$ 为 R 的逆关系	当且仅当 xRy 时有 $yR^{-1}x$
[ ]	等价类	equivalent class	设 R 是集合 A 上的等价关系，$x\in A$，则称 $[x]_R$ 为 R 的等价类，它是由 A 中那些能使 xRy 成立的所有元素 y 组成的子集	
/	商集	quotient set	设 R 为集 A 的一个等价关系，则商集 A/R 即由一切等价类组成的集合	
$\mathscr{P}$ 或 $\mathfrak{B}$	幂集	power set	用 $\mathscr{P}A$ 或 $\mathfrak{B}A$ 表示集 A 的所有子集组成的集，称为 A 的幂集	
$f\|_B$	收缩，限制	restriction	设 f 是集合 A 上的一个映射，$B\subseteq A$，则 f 也可看成 B 上的一个映射称为 f 在 B 上的限制或收缩	
$\circ$	合成，复合	composite	$g\circ f$ 表示映射 f 和 g 的合成或复合	
limsup	上极限	superior limit	limsup A_n 表示序列 A_n 的上极限	亦可记为 $\overline{\lim}$
liminf	下极限	inferior limit	liminf A_n 表示序列 A_n 的下极限	亦可记为 $\underline{\lim}$
lim	极限	limit	$\lim A_n$ 表示序列 A_n 的极限	
$\varinjlim$	归纳极限	inductive limit	$\varinjlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的归纳极限	
$\varprojlim$	射影极限	projective limit	$\varprojlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的射影极限	
dom	定义域	domain of definition	若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则称 A 为映射 f 的定义域，记为 dom f	亦可记为 D(f)
ran f	值域	range	$f(A)=\mathrm{ran}f$. 若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则 $f(A)$ 为映射 f 的值域	亦可记为 R(f)或记为 ran(f)
fld	关系域	domain of a relation	$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$，即关系 R 的域等于 R 的定义域和值域的并集	
codom	陪域	co-domain	若 f 是从集 A 到集 B 的一个映射，则称集 B 是映射 f 的陪域，记为 $B=\mathrm{codom}f$	亦称上域
lmf	像	image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，用 Imf 表示 A 中所有元素的像构成的集，称为 f 的像集	
$f^{-1}(\ )$	全原像	all inverse image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，B 中元素 b 的全体逆像组成的集合 $f^{-1}(b)$，称为 b 的全原像	亦称原像
$\leqslant$	弱序关系	weak order relation	$a\leqslant b$，$a,b\in A$ 即集 A 存在弱序关系	
$<$	强序关系	strong order relation	$a<b$，$a,b\in A$ 即集 A 存在强序关系	
I_A	恒等映射	identity mapping	表示集 A 的每个元素都对应到自身的映射，称为恒等映射	亦称恒等对应. 亦可记为 e_A 或 id A
$\hookrightarrow$；em	嵌入映射	embedding	$A\hookrightarrow B$ 或 emAB 表示 $A\to B$ 的嵌入映射	
n_R	自然映射	natural mapping	n_R 把 A 的一个元素 a 映射成它的等价类 $[a]_R$	亦称正规映射，典则映射
$ub_R(B)$	B 的上界	upper bound of B	$a=ub_R(B)$ 表示 a 是 B 的上界，B 是半序集的子集	
$Lb_R(B)$	B 的下界	lower bound of B	$a=Lb_R(B)$ 表示 a 是 B 的下界，B 是半序集的子集	
ord	一切序数的类	class of every ordinals	表示一切序数构成的类	
cf	共尾度	cofinality	cf α 表示 α 的共尾度	
$K^{<k}$	强极限基数	strong cardinal number of the limit	$K^{<k}=\lim\limits_{\alpha\to K}K^{\alpha}$，其中 K 为正则的强极限基数	

几何与拓扑(Geometry & Topology)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\overline{AB}$、AB	[直]线段 AB	segment	表示自点 A 到点 B 的直线段	“直”常略去不写
$\angle$	角	angle	$\angle AOB$ 表示角 AOB	
$\measuredangle$	有向角	directed angle	$\measuredangle AOB$ 表示有向角 AOB	
$^\circ$	度	degree	21°表示 21 度	
$'$	分	minute	$21^\circ 13'$表示 21 度 13 分	
$''$	秒	second	$21^\circ 13' 23''$表示 21 度 13 分 23 秒	
$\frown$	弧	arc	$\overset{\frown}{AB}$表示弧 AB. 当$\overset{\frown}{AB}$ 为圆弧时,可用$\overset{\frown}{AB}^\circ$ 表示圆弧 AB 对应的度数	
rad	弧度	radian	rad1, radπ 分别表示 1 弧度、π 弧度	$\text{rad}1 \approx 57^\circ 17' 45''$; $\text{rad}\pi = 180^\circ$
$-$	密位	mil	例如,25^-, 274^-表示 25 密位,274 密位	常用在军事数学中度量角的单位符号
π	圆周率	ratio of the circumference of a circle to its diameter	$\pi \approx 3.141\,592\,6\cdots$表示圆周长与直径的比	英文名称亦可简记为 number π
Rt$\angle$	直角	right angle	等于 90°的角称为直角,记为 Rt$\angle = 90^\circ$	曾经记为 rt$\angle$或R$\angle$
$\triangle$	三角形	triangle	$\triangle ABC$ 表示 A,B,C 三点连线构成的三角形	
⊿	直角三角形	right angle triangle	⊿ ABC 表示直角三角形 ABC	亦可记为 Rt$\triangle ABC$
▱	平行四边形	parallelogram	▱$ABCD$ 表示平行四边形 $ABCD$	
▭	矩形	rectangle	▭$ABCD$ 表示矩形 $ABCD$	
□	正方形	square	□$ABCD$ 表示正方形 $ABCD$	
⏢	四边形	tetragon	⏢ $ABCD$ 表示任意四边形 $ABCD$	任意二字常略去
◇	菱形	rhombus	◇$ABCD$ 表示菱形 $ABCD$	又名 diamond
$\odot$	圆	circle	$\odot O$ 表示圆 O	
r,R	半径	radius	从圆心到圆周上任一点的线段称圆的半径,常用 r 或 R 表示	
d,D	直径	diameter	过圆心作任意一条直线,圆内部分的线段称该圆的直径,常用 d 或 D 表示	
C	周长	perimeter	若圆的半径为 r,则周长 $C = 2\pi r$	
$/\!/$	平行	parallel	$AB/\!/CD$ 表示线段 AB 平行于 CD	
$\nparallel$	不平行	non-parallel	$AB \nparallel CD$ 表示直线 AB 与 CD 不平行	
$\underline{\underline{/\!/}}$	平行且相等	parallel and equal	$AB\underline{\underline{/\!/}}CD$ 表示线段 AB 与 CD 平行且相等	
$\perp$	垂直	perpendicular	$AB \perp CD$ 表示线段 AB 垂直于 CD	
$\cong$	全等	congruence	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 表示$\triangle ABC$ 全等于$\triangle DEF$	
$\backsim$	相似	similar	$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ 表示$\triangle ABC$ 相似于$\triangle DEF$	
$\because$	因为	because	$\because$代表“因为”二字	
$\therefore$	所以	therefore	$\therefore$代表“所以”二字	
$\veebar$	等角多边形	equiangular polygon	$\veebar AB\cdots E$ 表示等角多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
$\perp$	等边多边形	equilateral polygon	$\perp AB\cdots E$ 表示等边多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
α-MN-β	二面角	dihedral angle	平面 α 和平面 β 相交于直线 MN 所成的角	
P-$AB\cdots E$	棱锥	pyramid	顶点是 P、底面多边形是 $AB\cdots E$ 的棱锥	
$AB\cdots E$-$A'B'\cdots E'$	棱柱	prism	上底面是多边形 $AB\cdots E$,下底面是多边形 $A'B'\cdots E'$ 的棱柱	长方体、棱台的记法和此记法类似

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
S	面积	area	$S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积；$S_{球冠}$ 表示某个球冠的面积	
V	体积	volume	$V_{P\text{-}ABC}$ 表示三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积；$V_{拟柱体}$ 表示某个拟柱体的体积	
$\|\ \ \|$	距离	distance	$\|AB\|$ 表示 A,B 两点间的距离或 AB 线段的长	亦可用 AB 或小写的拉丁字母表示
sin	正弦	sine	$\sin x$ 为 x 的正弦函数	
cos	余弦	cosine	$\cos x$ 为 x 的余弦函数	
tan	正切	tangent	$\tan x$ 为 x 的正切函数	亦可用 $\mathrm{tg}\, x$ 表示
cot	余切	cotangent	$\cot x$ 为 x 的余切函数	亦可用 $\mathrm{ctg}\, x$ 表示
sec	正割	secant	$\sec x$ 为 x 的正割函数	
csc	余割	cosecant	$\csc x$ 为 x 的余割函数	曾用 $\mathrm{cosec}\, x$ 表示
vers	正矢	versedsine	$\mathrm{vers}\, x$ 为 x 的正矢函数	$\mathrm{vers}\, x=1-\cos x$，现已不用
covers	余矢	coversedsine, versedcosine	$\mathrm{covers}\, x$ 为 x 的余矢函数	$\mathrm{covers}\, x=1-\sin x$，现已不用
$\sin^m x$	正弦函数的 m 次方	sine function to the m-th power	$\sin^3 x$ 为 $\sin x$ 的立方	其他三角函数和双曲函数的 m 次方的表示法类似
$\arcsin x$	反正弦主值	principal value of inverse sine	$y=\arcsin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arcsin}x$
$\arccos x$	反余弦主值	principal value of inverse cosine	$y=\arccos x\ (0\leqslant y\leqslant\pi)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccos}\ x$
$\arctan x$	反正切主值	principal value of inverse tangent	$y=\arctan x\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arctan}x$
$\mathrm{arccot}\ x$	反余切主值	principal value of inverse cotangent	$y=\mathrm{arccot}\ x\ (0<y<\pi)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccot}x$
$\mathrm{arcsec}\ x$	反正割主值	principal value of inverse secant	$y=\mathrm{arcsec}\ x\left(0\leqslant y\leqslant\pi，且\ y\neq\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arcsec}x$
$\mathrm{arccsc}\ x$	反余割主值	principal value of inverse cosecant	$y=\mathrm{arccsc}\ x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}，且\ y\neq 0\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccsc}x$
T	周期	periodic	$f(x+T)=f(x)$，T 为最小正周期. $T=\pi$ 表示以 π 为周期	
x,y,z	笛卡儿坐标	Cartesian coordinates	$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 与 $\boldsymbol{e}_z$ 及 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 组成范化正交右手坐标系	
ρ,φ,z	圆柱坐标	cylindrical coordinates	圆柱坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, z=z$	
r,θ,φ	球面坐标	spherical coordinates	球面坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$	
$\boldsymbol{a},\vec{a}$	向量或矢量 $\boldsymbol{a}$	vector $\boldsymbol{a}$	常用 x,y,z 或 x_1,x_2,x_3 表示笛卡儿坐标，则 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，简记为 $\boldsymbol{a}=x_i\boldsymbol{e}_i$	印刷常用黑体 $\boldsymbol{a}$，书写常用 $\vec{a}$ 表示
$\|\boldsymbol{a}\|$	向量的模（绝对值，长度）	module of a vector (absolute value, length)	向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$ 的模依次记为 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$，$\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\vec{a}\|$. 向量的大小称为向量的模	
$\overrightarrow{AB}$	向量 AB	vector AB	表示始点为 A，终点为 B 的向量或有向线段	
$\boldsymbol{e}_a$	单位向量	unit vector	$\boldsymbol{e}_a=a/\|a\|$ 表示 a 方向的单位向量	亦称幺向量
$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$	在笛卡儿坐标轴方向的单位向量	unit vector on the Cartesian axial coordinates	$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 表示直角标架；$[O;\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z]$ 表示仿射标架，其中 O 为坐标原点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为基向量	
$\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y, \boldsymbol{a}_z$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	Cartesian component of a vector $\boldsymbol{a}$	设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$，其中 $\boldsymbol{a}_x=x\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{a}_y=y\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{a}_z=z\boldsymbol{e}_z$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$	标量积或数量积、内积、点积	scalar product, inner product, dot product	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum a_ib_i$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=\|\boldsymbol{a}\|^2$	亦可表示成 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	向量积、外积、叉积	vector product, exterior product, cross product	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所决定平面的向量，且 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ 三矢量成右手系. $\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，其中 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角	
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$	混合积	mixed product	向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积定义为由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量为邻边组成的平行六面体的有向体积	亦可表示成 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
k	斜率	gradient	直线 $y=kx+b$ 中，k 称为斜率	
e	离心率	eccentricity	在圆锥曲线的极坐标方程中，$r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$，$e$ 称为离心率	亦称偏心率.
a	半长轴	semimajor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，a 称为半长轴	
b	半短轴	semiminor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，b 称为半短轴	
$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$	向量空间的张量积	tensor product of vector spaces	若 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量空间，$\boldsymbol{W}$ 是 m 维向量空间，则 $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$ 是 $n\times m$ 维向量空间的二阶张量	
$\boldsymbol{T}_s^r$	张量	tensor	设 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量空间，其对偶空间的二阶张量为 $\boldsymbol{V}^*$，张量积 $\boldsymbol{V}_s^r=\underbrace{\boldsymbol{V}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{V}}_{r个}\otimes\underbrace{\boldsymbol{V}^*\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{V}^*}_{s个}$ 的元素称为 (r,s) 型张量	
$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$	群的张量积	tensor product of groups	设 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 是群，$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}=F(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})/R(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ 称为 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 的张量积	
$T_{xx},T_{xy},\cdots,T_{zz};T_{ij}$	二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的笛卡儿分量	Cartesian component of tensor $\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}=T_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+T_{xy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y+\cdots,T_{zz}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$ 为分张量，	
$\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$	二阶张量积或并矢积	tensor product dyadic product	两个二阶张量 T 与 S 的张量积 $T\otimes S$ 是具有分量 $T_{ij}S_{kl}$ 的四阶张量	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$	两个二阶张量的内积	inner product	$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$ 表示两个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的内积. 它是具有分量 $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S})_{ik}\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}S_{jk}$ 的二阶张量	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$	矢量对张量的内积	inner product	$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$ 表示二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的内积. 它是具有分量 $(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a})_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}a_j$ 的矢量	
$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$	标量积	scalar product	$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$ 表示两个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的标量积. 它具有标量 $(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S})\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_i\sum\limits_j T_{ij}S_{ji}$	
$\overline{\overline{\wedge}}$	透视对应	perspective correspondence	点列 $s(A,B,C,\cdots)$ 与线束 $S(a,b,c,\cdots)$ 是透视的，记为 $s(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}S(a,b,c,\cdots)$	
$\overline{\wedge}$	射影对应	projective correspondence	若 $[\pi]$ 与 $[\pi']$ 是两个一维基本形，则它们之间的射影对应记为 $[\pi]\overline{\wedge}[\pi']$	
$\div$	分离	separation	点 A,B 与点 C,D 是分离的，记为 $A,B\div C,D$	
$\overline{\cdot\cdot}$	不分离	nonseparation	点 A,B 与点 C,D 是不分离的，记为 $A,B\ \overline{\cdot\cdot}\ C,D$	
$J,*$	联	join	设 $s=v_0\cdots v_m$ 是 K 的生成复形，$t=w_0\cdots w_n$ 是 L 的生成复形，令 $s*t=v_0\cdots v_mw_0\cdots w_n$，则所有单形 $s*t$ 和它们的面组成的集合是一个单纯复形，称为 K 和 L 的联，记为 $K*L$	亦可记为 $J(K,L)$ 或 KJL
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$	向量函数	vector function	曲线或曲面的参数方程写成向量的形式.	亦称矢函数
$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t)$	导向量	derived vector	$\boldsymbol{r}'(t)=(\boldsymbol{x}'(t),\boldsymbol{y}'(t),\boldsymbol{z}'(t))$ 是向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导向量，有时以弧长 s 为参数的导向量表示成 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$	亦称微商或导矢
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	微分	differential	设 $\boldsymbol{r}(t)$ 同上，若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 处的改变量 $\Delta r=A\Delta t+o(\Delta t)$（$A$ 为固定向量），则称 A 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点的微分	
$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$	n 阶导向量	n-th derivative	$\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)$ 在 t 点的导向量称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点的 n 阶导向量	
$\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}$	n 阶微分	n-th differential	$\mathrm{d}^{n-1}r$ 在 t 点的微分称为 $r(t)$ 在 t 点的 n 阶微分	
$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x_i}$	偏导向量	partial derived vector	若 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$，则 $\boldsymbol{r}_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{u}},\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{u}},\dfrac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 的偏导向量	亦称偏导矢

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\boldsymbol{T}(s)$	单位切向量	unit tangent vector	$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$表示曲线$C$在一点处的单位切向量，其中$s$为曲线$C$的弧长参数	亦可表示成$\alpha(s)$
$\boldsymbol{N}(s)$	主法向量	principal normal vector	$\boldsymbol{N}(s)=\dfrac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\rvert}$表示曲线$C$在一点处的主法向量，$\boldsymbol{N}(s)$指向曲线$C$凹入的方向	亦可表示成$\beta(s)$
$\boldsymbol{B}(s)$	副法向量	binormal vector	$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$表示曲线$C$在一点处的副法向量	亦称从法向量．表示成$\gamma(s)$
$\{P;\boldsymbol{T};\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$	活动标架	Frenet frame	$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$依次构成右手系，它们构成一个标架，称为曲线$C$在$P$点的活动标架或弗雷内标架	
k	曲率	curvature	曲率k是表示曲线弯曲程度的量．曲率k越大，曲线弯曲程度越大，曲率小，曲线弯曲程度小	直线的曲率为0
τ	挠率	torsion	挠率是表示空间曲线扭翘程度的量．挠率的绝对值大，曲线扭翘程度大，挠率的绝对值小，曲线扭翘程度小．平面曲线的挠率为0	
$k_r(s)$	相对曲率	relative curvature	表示平面曲线弯曲程度和弯曲方向的量	
i_r	旋转指标	rotation index	$i_r=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$表示平面闭曲线$C$的旋转指标，它是曲线$C$的切线像($r=\boldsymbol{T}(s)$)在单位圆周上环绕的圈数	若C是平面简单闭曲线，则$i_r=\pm1$
$\boldsymbol{n}$	单位法向量	unit normal vector	曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,v)$上一点$P(u,v)$处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$	式中各量均在(u,v)取值．$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$依序构成右手系
E,F,G,g_{ij}	曲面的第一类基本量	fundamental quantities of first kind for surfaces	对曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第一类基本量分别为 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$. $g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\quad(i,j=1,2)$	$E>0,\ G>0,$ $EG-F^2>0$
Ⅰ	曲面的第一基本形式	first fundamental form of a surface	$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$	第一基本形式是正定的，它决定曲面的内蕴性质
L,M,N,L_{ij}	曲面的第二类基本量	fundamental quantities of second kind for surfaces	对曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第二类基本量分别为 $L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},N=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}$. $L_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}\ (i,j=1,2)$	
Ⅱ	曲面的第二基本形式	second fundamental form of a surface	$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$	
k_n	法曲率	normal curvature	曲面S在P点沿方向$\boldsymbol{a}$的法截线曲率可作为曲面在该点的法曲率k_n	其绝对值相等
K_c	全曲率	total curvature	$K_c=\int_0^l k(s)\mathrm{d}s$表示曲线$C$的全曲率	
K_r	相对全曲率	relative total curvature	$K_r=\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$表示曲线$C$的相对全曲率	
K	总曲率	Gaussian curvature	$K=k_1k_2$表示曲面S在点P的弯曲情况．曲面上的点可按总曲率的符号进行分类．$K>0$的点是椭圆点，$K<0$的点是双曲点，$K=0$的点是抛物点	亦称高斯曲率．式中k_1,k_2为其对应的主曲率
H	平均曲率	mean curvature	表示曲面S在点P的平均曲率	亦称中曲率
e,f,g	曲面的第三类基本量	fundamental quantities of third kind for surfaces	对曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第三类基本量分别为 $e=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,f=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,g=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$	
Ⅲ	曲面的第三基本形式	third fundamental form of a surface	$\mathrm{III}=\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=e\mathrm{d}u^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g\mathrm{d}v^2$	
$[jk,i]$	第一类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the lst kind	$[jk,i]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$	亦可表示成Γ_{jki}
$\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}$	第二类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the 2nd kind	$\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}=\dfrac{1}{2}g^{kl}\left(\dfrac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\dfrac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$	亦可表示成$\Gamma^k_{ij}=g^{kl}\Gamma_{ijl}\Gamma^k_{ij}$，也称为联络系数
k_g	测地曲率	geodesic curvature	曲面S上的曲线C在某一点P的切平面上的投影线的曲率可作为曲线C的测地曲率	其绝对值相等
exp	指数映射	exponential map	指数映射$\exp:T_P\to S$是曲面S上P的切平面T_P的切向量与曲面S上点的对应关系．若$\boldsymbol{v}\in T_P$，过P沿$\boldsymbol{v}$的方向作测地线C，在C上取点M，使$\overset{\frown}{PM}=\lvert\boldsymbol{v}\rvert$，则$\exp\boldsymbol{v}=M$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
τ_g	测地挠率	geodesic torsion	在曲面S上过一点P作以单位切向量α为初始方向的测地线$C: u=u(s), v=v(s)$，测地线C在P点的挠率称为曲面S在P点关于α方向的测地挠率	$\tau_g=\left(\alpha, n, \frac{dn}{ds}\right)$
$\mathscr{N}$	高斯映射	Gauss map	以曲面S的单位法向量$\boldsymbol{n}(u,v)$作为向量函数，表示单位球面S^2，高斯映射$\mathscr{N}: S\to S^2$是曲面S与相应的球面S^2之间的对应关系	亦称曲面的球面表示
$\deg \mathscr{N}$	高斯映射度	Gauss mapping degree	$\deg\mathscr{N}=\frac{1}{2}\chi(S)$表示高斯映射度，它由曲面拓扑所决定，其中$\chi(S)$表示欧拉示性数	
$\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$	坐标邻域	coordinate neighborhoods	U_α是微分流形M的开集，φ_α是微分流形U_α到R^n的开子集的同胚	
C^∞	C^∞相容	C^∞ compatible	$U\cap V\neq\varnothing$，$\varphi\circ\psi^{-1}$和$\psi\circ\varphi^{-1}$是R^n的开子集$\varphi(U\cap V)$和$\psi(U\cap V)$的C^∞微分同胚. 称(U,φ)和(V,ψ)是C^∞相容的	
L_XY	李导数	Lie derivative	$(L_XY)_p=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}((\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p)$ $=\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}\mid_{t=0}$	
R^l_{ijk}	黎曼曲率张量	Riemannian curvature tensor	$R^l_{ijk}=\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk}-\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik}+\Gamma^l_{ih}\Gamma^h_{jk}-\Gamma^l_{jh}\Gamma^h_{ik}$和$R_{ijkl}=R^h_{ikl}g_{hj}$均称为黎曼曲率张量	亦称第二类克里斯托费尔符号
Ric	里奇曲率张量	Ricci curvature tensor	$\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum\limits_i R(e_i,X,Y,e_i)$，即里奇曲率张量是一个(0,2)型张量场. 由对称性知 $\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Ric}(Y,X)$	
C_{ijkl}	共形曲率张量	conformal curvature tensor	$C_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}\{R_{ik}g_{jl}-R_{il}g_{jl}+R_{jl}g_{ik}-R_{jk}g_{il}\}+\frac{s}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$	亦称外尔张量
P^l_{ijk}	射影曲率张量	projective curvature tensor	$P^l_{ijk}=R^l_{ijk}-\frac{1}{n-1}(\delta^l_kR_{ij}-\delta^l_jR_{ik})$称为射影曲率张量	
d	外微分算子	exterior differential operator	对于任意$\omega_1,\omega_2\in A^p(M)$：1. $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$；2. $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2$；3. 若$f\in A^0(M)$. 则$d(df)=0$	若$f\in A^0(M)$，则df恰是f的微分
$Z^p(M,R)$	光滑p次闭形式空间	space of smooth p-closed differential form	$Z^p(M,R)=\{\omega\mid\omega$是流形$M$上的光滑$p$次闭形式$\}$表示光滑$p$次闭形式空间	
$B^p(M,R)$	光滑p次恰当形式空间	space of smooth p-exact differential form	$B^p(M,R)=\{\omega\mid\omega$是流形$M$上的光滑$p$次恰当形式$\}$表示光滑$p$次恰当形式空间	
$H^p(M,R)$	德·拉姆上同调群	de Rham cohomology group	表示流形M的第p个德·拉姆上同调群. $H^p(M,R)$中的元素称为同调类	亦称第p个德·拉姆上同调空间
$\int_M\omega$	形式积分	integral of forms	$\int_M\omega=\sum\limits_i\int_M f_i\circ\omega$	
∇	仿射联络	affine connection	设M是n维C^∞流形，$\Gamma(TM)$为M上的C^∞向量场空间. M上的仿射联络是指映射$\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$，满足四条公理	
$\nabla_{X_p}Y$	共变导数	covariant derivative	令$P\in M, X_P\in T_P(M)$. Y为M上的C^∞向量场. 定义$\nabla_{X_p}Y=(\nabla_XY)_P$	亦称协变微商
$K(X,Y)$	截面曲率	sectional curvature	对任意两个不共线的切向量$X,Y\in T_PM$，$K(X,Y)=-\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-[g(X,Y)]^2}$	当$\dim M=2$时，$K(X,Y)$恰好是M在P点的高斯曲率
$R(X,Y)$	曲率算子	curvature operator	$R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_YZ)-\nabla_Y(\nabla_XZ)-\nabla_{[X,Y]}Z\ (X,Y,Z\in\Gamma(TM))$	
$\triangle$	拉普拉斯-贝尔脱拉米算子	Laplace-Bertrami operator	$\triangle f=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$	
$S_p(2n)$	辛群	symplectic group	设(V,ω)是一个辛空间，(V,ω)的自同构的全体构成群$\mathrm{GL}(V)$的一个子群记为$\mathrm{SP}(V,\omega)$，特别地，标准辛空间(K^{2n},ω)的自同构群记为$S_p(2n,K)$. 若$K=R$，则把$S_p(2n,K)$简记为$S_p(2n)$，并称为$2n$维辛群	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$E(f)$	能量	energy	设 M,N 为黎曼流形，$f:M\to N$ 为光滑映射，f 的能量定义为：$E(f)=\frac{1}{2}\int_M \lvert df\rvert^2 *1$，其中 $*1$ 为 M 的体积元	
$e(f)$	能量密度	energy density	符号条件同上，$e(f)=\frac{1}{2}\lvert df\rvert^2$	
∂M	流形的边界	boundary of a manifold	带边流形 M 中全体边界点的集	
T_PM	切空间	tangent space	微分流形 M 在 P 点处的全体切向量的集记为 T_PM，称为 M 在 P 处的切空间	T_PM 是实 $\dim M$ 维向量空间
f_{*P},T_Pf	在一点处的切映射	tangent map at a point	$f:M\to N$ 是可微映射，$f_{*P}:T_PM\to T_{f(P)}N$ 称为可微映射 f 在 $P\in M$ 处的切映射	若 f 是微分同胚，则 $\forall P\in M,f_{*P}$ 是同构
TM	流形的切丛	tangent bundle of manifold	(TM,π,M) 称为微分流形 M 的切丛，简称 TM 为 M 的切丛	
Tf	切映射	tangent map	设 $f:M\to N$ 是流形 M 到 N 的可微映射，$Tf:TM\to TN$ 称为 f 的切映射	若 $f:M\to N$ 是微分同胚，则 $Tf:TM\to TN$ 亦然
$\xi\oplus\eta$	向量丛的惠特尼和	Whitney sum of vector bundles	ξ,η 分别是 n 维，k 维向量丛，$\tilde{\pi}:E(\xi)\oplus E(\eta)\to B$ 为自然投射.$(E(\xi)\oplus E(\eta),\tilde{\pi},B)$ 是 $n+k$ 维向量丛，称为 ξ 与 η 的惠特尼和	亦可看成积丛 $\xi\times\eta$ 由对角映射 $f:B\to B\times B$ 决定的诱导丛
$\chi(\xi)$	欧拉数	Euler number	设 $\xi=(E,\pi,M)$ 是 n 维定向向量丛，则零截面的自交数称为向量丛 ξ 的欧拉数	当 $\xi=TM$ 时，$\chi(\xi)$ 就是 M 的欧拉示性数
$\overline{U}^{\perp}(t)$	正交分量	orthogonal component	表示分向量场 $U(t)$ 与测地线 γ 正交的分量	
$T_x^{\perp}M$	法空间	normal space	表示 M 在 x 处的法空间，正交于切空间 T_xM	
$\nabla^{\perp}$	法联络	normal connection	若 M 是黎曼流形，则 $\nabla^{\perp}$ 表示 M 上的法联络	
$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$	正交投影	orthogonal projection	表示 $\tilde{R}(X,Y)Z$ 在 M 的法丛 $N(M)$ 上的投影.式中 $\tilde{R}$ 是 $\tilde{M}$ 的曲率张量	
(X,d)	度量空间	metric space	赋予度量 d 的集合 X 称为度量空间	亦称距离空间
$(X,\mathscr{T})$	拓扑空间	topological space	确定了拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合 X 称为拓扑空间	
$\overline{A}$, $\mathrm{cl}A$	闭包	closure	包含 A 的所有闭集的交集称为 A 的闭包，它是包含 A 的最小闭集	
$b(A)$，$\mathrm{Bd}A$	边界	boundary	A 的全体边界点组成的集合称为 A 的边界	亦可记为 A^b，∂A
$\mathrm{Int}\,A,A^i$	内部	interior	集 A 的全部内点组成的集合称为 A 的内部	亦可记为 $\mathring{A}$ 或 A°
$U(a,\delta)$	邻域	neighborhood	$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径	
$\mathring{U}(a,\delta)$	去心邻域	deleted neighborhood	$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$ 称为点 a 的去心的 δ 邻域	
$\mathscr{U}(x)$	邻域系	neighborhood system	点 x 的邻域的全体称为 x 的邻域系	
$X\vee Y$	拓扑空间的楔和	wedge sum of topological spaces	设 X,Y 为两个带有基点的拓扑空间.x_0,y_0 分别为 X,Y 的基点.子空间 $X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y\subset X\times Y$ 称为 X 和 Y 的楔和	
$X\wedge Y$	拓扑空间的碎积	smash product of topological spaces	商空间 $X\times Y/X\vee Y$ 称为 X,Y 的碎积	
$V_{n,k}$	斯蒂弗尔流形	Stiefel manifold	$V_{n,k}=\{(e_1,e_2,\cdots,e_k)\mid e_i\in R^n,e_i\cdot e_j=\delta_{ij}.1\leqslant i,j\leqslant k\}$ 在 $R^n\times\cdots\times R^n$（$k$ 个）的诱导拓扑之下，$V_{n,k}$ 为一个紧致流形，称为斯蒂弗尔流形	
$B_\varepsilon(a)$	开球	open ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0,B_\varepsilon(a)=\{x\in X\mid d(a,x)<\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 开球	亦可记为 $B(a,\varepsilon)$
$\overline{B}_\varepsilon(a)$	闭球	closed ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0,\overline{B}_\varepsilon(a)=\{x\in X\mid d(a,x)\leqslant\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 闭球	亦可记为 $B(a,\varepsilon)$
$\delta(M)$	直径	diameter	设 M 为度量空间 (X,d) 的子集，定义 $\delta(M)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in M\}$，称为集 M 的直径	亦可记为 $\mathrm{diam}M$
$A^d,d(A)$	导集	derived set	集 A 的一切聚点的集称为 A 的导集	
$A^e,\mathrm{ext}(A)$	外部	exterior	集 A 的全体外点组成的集合称为 A 的外部，记为 A^e 或 $\mathrm{ext}(A)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Ind$X$	大归纳维数	large inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间 X,Y 同胚，则 Ind$X$ = Ind$Y$	亦称布劳威尔-切赫维数
ind X	小归纳维数	small inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间 X,Y 同胚，则 ind$X$ = ind$Y$	亦称门杰-乌雷松维数
$\varprojlim\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$	逆极限	inverse limit	逆系 $\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$ 的逆极限	亦可记为 $\varprojlim X_\alpha$
$\varepsilon(A)$	凸包络	convex envelope	X 内所有包含 A 的凸集之交称为 A 的凸包络	
$\simeq$	同伦	homotopy	若 $f,g:X\to Y$ 都是连续映射，$I=[0,1]$，且存在连续映射 $H:X\times I\to Y$，使得对所有 $x\in X$，$H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$，则 f,g 称为同伦映射，记为 $f\simeq g:X\to Y$	这里 H 称为从 f 到 g 的一个同伦或伦移
$\approx$	同胚	homeomorphism	$f:X\to Y$ 是连续映射，且 f 的逆映射连续，则称 f 为同胚，亦称空间 X 与 Y 同胚，记为 $X\approx Y$	亦称拓扑映射、拓扑变换
$\Vert\ \Vert$	范数	norm	$\Vert x\Vert$ 表示赋范空间中 x 的范数或实空间中向量 α 的赋值. 记为 $\Vert\alpha\Vert$	欧氏空间的向量 x 的长度概念的推广
E^n	n 维欧氏空间	n-dimensional Euclidean space	$E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathrm{R}\}$，规定度量 $d=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	亦可记为 R^n
P^n	n 维射影空间	n-dimensional projective space	域 F 上的 n 维射影空间常记为 FP^n，简记为 P^n，当 F 是实数域时记为 $\mathrm{R}P^n$；当 F 是复数域时记为 $\mathrm{C}P^n$. 若 F 是四元数域 H. 记为 $\mathrm{H}P^n$	
S^n	n 维球面	n-dimensional sphere	$S^n=\{x\in\mathrm{R}^{n+1}:\lvert x\rvert=r\}$	
T^n	n 维环面	n-dimensional torus	圆 S^1 自身的 n 次拓扑乘积. 记为 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$	
$C_q(\ ,\ )$	链群	chain group	K 是复形，$C_q(K,Z)$ 称为 K 的 q 维链群	亦可简记为 $C_q(K)$
H_n	n 维同调群	n-dimensional homology group	$H_n(K,A)=Z_n(K,A)/B_n(K,A)$ 表示复形 K 的以 A 为系数群的 n 维同调群	
H^n	n 维上同调群	n-dimensional cohomology group	$H^n(X,A)=Z^n(K,A)/B^n(K,A)$ 表示复形 K 以 A 为系数群的 n 维上同调群	
$\check{H}^n$	n 维切赫上同调群	n-dimensional Čech cohomology group	$\check{H}^n(X)=\varinjlim H^n(N_\lambda)$ 表示 X 的 n 维切赫上同调群	
$\check{H}_n$	n 维切赫同调群	n-dimensional Čech homology group	$\check{H}_n(X)=\varprojlim H_n(N_\lambda)$ 表示 X 的 n 维切赫同调群	
π_n	n 维同伦群	n-dimensional homotopy group	$\pi_n(X)$ 是映射 $(S^n,s_0)\to(X,x_0)$ 的同伦类集合	
$\pi_{n+k}(S^n)$	稳定同伦群	stable homotopy group	悬垂同态 $E:\pi_{n+k}(S^n)\to\pi_{n+k+1}(S^{n+1})$，当 $n>k+1$ 时为同构，称为球面的第 k 个稳定同伦群	悬垂同态亦称同纬像同态
∂	边缘算子	boundary operator	∂c 表示 c 的边缘	
δ	上边缘算子	coboundary operator	δf 表示 f 的上边缘	
sq	斯廷罗德方形运算	Steenrod square	$Sq^i(x,y)=\sum_{j+k=i}Sq^j(x)Sq^k(y)$ 即 x 的斯廷罗德方形运算	
$\mathscr{P}$	斯廷罗德幂运算	Steenrod power	$\mathscr{P}_p^r(xy)=\sum_{i+j=r}\mathscr{P}_p^i(x)\mathscr{P}_p^j(y)$ 即 x 的斯廷罗德 p 次幂运算	亦可记为 St_p^r
$\smile$	上积	cup product	$z_1\smile z_2$ 表示 z_1 和 z_2 的上积	
$\frown$	卡积	cap product	$z_1\frown z_2$ 表示 z_1 和 z_2 的卡积	
$\omega\wedge\eta$	外积	exterior product	表示微分形式 ω,η 的外积. $\omega\wedge\eta=A_{k+l}(\omega\otimes\eta)$. 其中 A_{k+1} 是反对称化算子，ω 是 k 次矢量，η 是 l 次矢量，$\omega\wedge\eta$ 是 $(k+l)$ 次外矢量	
mesh	复形的网径	mesh diameter of a complex	单纯复形 K 中诸单形直径的最大值称为复形的网径，即 mesh$=\max_{\sigma\in K}\{\Vert x-y\Vert\mid x,\ y\in\sigma\}$	
deg	映射度	degree of mapping	设 $f:S^n\to S^n$ 是映射，α 是 $H_n(S^n)$ 的生成元，则 $f.(\alpha)=\rho\alpha$. 其中整数 ρ 称为 f 的映射度. 记为 $\rho=\deg(f)$	亦称拓扑度，又称布劳威尔度
rel	相对于	relative	rel A 表示相对于 A	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
C	连续函数空间	continuous function space	$C[a,b]$表示$[a,b]$上连续函数的全体	
L^p	p次可积函数空间	integrable function space of order p	$L^p(\Omega,\mathscr{B},\mu)(\infty>p\geqslant1)$是测度空间$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$上可测而且$p$次可积函数的全体	
C^n	C^n类函数空间	C^n class function space	$C^n[a,b](\infty>n\geqslant1)$是$[a,b]$上$n$阶连续可微函数的全体	
C^∞	C^∞类函数	function of class C^∞	对于所有r,函数f是C^r类的.亦称f是光滑的	
C^∞	C^∞映射	C^∞ mapping	W,N是微分流形,$F:W\to N,\psi\circ F\circ\varphi^{-1}P:\varphi(U)\to\psi(V)$是$C^\infty$的.$U,V$分别是$W,N$的坐标邻域	
L^∞	本性有界可测函数	essentially bounded function space	$L^\infty(\Omega,\mathscr{B},\mu)$表示$\Omega$上(关于$\mu$)本性有界可测函数全体	
T_2	豪斯多夫空间	Hausdorff space	设X为拓扑空间,若X的任意两个不相同的点都有不相交的开邻域则称X为豪斯多夫空间	亦称T_2空间
R^∞	希尔伯特空间	Hilbert space	设$x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots).x,y\in R^\infty$,定义$d=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$,则$(R^\infty,d)$称为希尔伯特空间	
Y^X	函数空间	functional space	表示所有连续函数$f:X\to Y$的集合	
$N_{K,U}$	紧致开拓扑	compact open topology	$N_{K,U}=\{f:f(K)\subset U\}$,其中$K\subset X$紧致,$U\subset Y$为开集	
e_α^n	n维胞腔	cell of dimension n	e_α^n是空间X的子集	
CW	CW复形	CW-complex	一个空间X中的CW复形是满足闭包有限和诱导弱拓扑两项条件的胞腔复形	
$L(p,q)$	透镜空间	lens spaces	$L(p,q)=s^3/Zp$	
WHE	弱同伦等价公理	weak homotopy equivalence axiom	若$f:X\to Y$是弱同伦等价关系,则$f_*:k_n(X,x_0)\to k_n(Y,f(x_0))$是同构	
$\widetilde{KO}(X)$	$\widetilde{KO}$群	$\widetilde{KO}$-group	表示X上实向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{K}(X)$	$\widetilde{K}$群	$\widetilde{K}$-group	表示X上复向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{KS}_p(X)$	$\widetilde{KS}_p$群	$\widetilde{KS}_p$-group	表示X上四元向量丛的所有稳定等价类集合	
$K(s)$	K群	K-group	表示由半群的同态$\varnothing:S\to K(s)$诱导的 abelian 群	
$KO(X)$	KO群	KO-group	$KO(X)\cong\widetilde{KO}(X)\oplus KO(\{x_0\})$	
$K(X)$	K群	K-group	$K(X)\cong\widetilde{K}(X)\oplus K(\{x_0\})$	
$KS_p(X)$	KS_p群	KS_p-group	$KS_p(X)\cong\widetilde{KS}_p(X)\oplus KS_p(\{x_0\})$	
$M_1\sim M_2$	流形的协边	cobordism of manifolds	设M_1,M_2都是紧致(无边)微分流形,若存在紧致带边流形W与微分同胚$\partial W\cong M_1\times(0)\cup M_2\times(1)$,则称$M_1$与$M_2$协边	
MSO_n	定向协边群	oriented bordism group	表示所有定向协边类的集合	亦称 Thom 群
MO_n	非定向协边群	unoriented bordism group	表示所有非定向协边类的集合	亦称 Thom 群
MSO_*	分次交换环	graded commutative ring	$MSO_*=\sum MSO_n$	
MO_*	分次交换代数	graded commutative algebra	$MO_*=\sum MO_n$	
$MSO_n(X,A)$	定向奇异协边群	oriented singular bordism group	表示(X,A)中定向奇异协边类的集合	
$MSO_*(X,A)$	分次右模	graded right module	$MSO_*(X,A)=\sum MSO_n(X,A)$	
$MSO_n(Pt)$	一点的协边群	bordism group of a point	$MSO_n(Pt)=MSO_n$	
$\widetilde{MSO}_n(X)$	约化群	reduced group	表示增广同态$\varepsilon_*:MSO_n(X)\to MSO_n(pt)$的核	
$MO_n(X,A)$	非定向奇异协边群	unoriented bordism group	表示(X,A)中非定向奇异协边类的集合	
$MO_*(X,A)$	分次模	graded module	$MO_*(X,A)=\sum MO_n(X,A)$	

代数学(Algebra)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
max	最大或极大	maximum	$y_{max}=a$ 表示 y 的最大(极大)值等于 a	
min	最小或极小	minimum	$y_{min}=b$ 表示 y 的最小(极小)值等于 b	
!	阶乘	factorial	$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$	规定 $0!=1$
!!	双阶乘	double factorial	$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$; $(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)$	
$(a)_n$	始于 a 的 n 个实数之积	product of the n-real numbers by the beginning at a	例如, $(\sqrt{2})_4=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)$	a 为实数,n 为自然数
C_n^p 或 $\binom{n}{p}$	二项式系数,组合数	binomial coefficient, combinatorial numbers	表示从 n 个元素中每次取出 p 个元素的所有不同组合的总数	
P_m^n 或 A_m^n	选排列	selections permutation	$P_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}=m(m-1)\cdots(m-n+1)$	
P_m 或 A_m	全排列	all permutation	$P_m=m!$	
H_m^n	重复组合	combination with repetition	$H_m^n=C_{m+n-1}^n=\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$	
U_m^n	有重复的排列	permutation with repetition	$U_m^n=m^n$,即从 m 个相异元素中每次取出 n 个元素允许重复排列的排列总数	亦可记为 $\Pi_m^n=m^n$
R_m^n	环排列	circular permutation	$R_m^n=\dfrac{P_m^n}{n}=C_m^n(n-1)!\ (m\leqslant n)$. 当 $m=n$ 时,$R_m^m=(m-1)!$	亦可用 $R_{m平}^n$ 和 $R_{m立}^n$ 分别表示平面环排列与空间环排列
i	虚数单位	imaginary unit	$i=\sqrt{-1}\ (i^2=-1)$	电工技术中常用 j
z	复数记号	symbol of complex number	$z=a+bi$ 即实部为 a,虚部为 b 的复数	
Re z	z 的实部	real part of z	$z=a+bi\ (\mathrm{Re}\,z=a)$	
Im z	z 的虚部	imaginary part of z	$z=a+bi\ (\mathrm{Im}\,z=b)$	
$\|z\|$	z 的模	modulus of z	$z=a+bi\ (\|z\|=\sqrt{a^2+b^2})$	亦可用 mod z 表示
arg z	z 的辐角	argument of z	$\varphi=\arg z$ 即复数 z 的辐角为 φ,$0<\varphi\leqslant2\pi$	
$\bar{z}$	z 的共轭复数	conjugate complex number of z	设 $z=a+bi$,则 $\bar{z}=a-bi$ 称为 z 的共轭复数	亦可用 z^* 表示
sgn z	z 的单位模函数	signum z	$\mathrm{sgn}\,z=\begin{cases}z/\|z\| & (z\neq0),\\0 & (z=0)\end{cases}$	
det A	方阵的行列式	determinant of a square matrix	设 A 为方阵,则 $\det A$ 表示 A 的行列式	A 的行列式亦可用 $\|A\|$ 表示
$\\|A\\|$	范数	norm	矩阵 A 的范数为 $\\|A\\|=(\mathrm{Tr}(AA^{\dagger}))^{\frac{1}{2}}$	范数有各种定义
$A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$	矩阵	matrix	$A_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列的矩阵,$(a_{ij})_{m\times n}$ 表示 (i,j) 元素是 a_{ij} 的 m 行 n 列矩阵	
diag{…} 或[…]	对角矩阵	diagonal matrix	表示主对角线上元素为 $d_{11},d_{12},\cdots,d_{nn}$,其余元素全为零的方阵	
I 或 E	单位矩阵	unit matrix	表示主对角线上的元素都是 1,其他元素都是零的方阵,用 I 或 E 表示,称为单位矩阵	
A^{-1}	方阵 A 的逆	inverse of the square matrix A	设方阵 A 的行列式 $\|A\|\neq0$,则 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$,其中 I 为单位方阵	
A^T 或 A'	A 的转置矩阵	transposed matrix of A	把矩阵 A 的行换成同序数的列,得到的新矩阵,称为 A 的转置矩阵	亦可表示成 $\tilde{A}$
$A\geqslant0$	非负矩阵	nonnegative matrix	实矩阵 A 中每个元素都是非负的	
$A>0$	正矩阵	positive matrix	实矩阵 A 中每个元素都是正的	
α^*	不增向量	nonincreasing vector	设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个实向量. 若 $a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列且满足 $a_1^*\geqslant a_2^*\geqslant\cdots\geqslant a_n^*$,则称 $\alpha\doteq(a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*)$ 是 α 的不增向量	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\prec$	优于	major than	设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是两个非负实向量，如果 $a_1^*\leqslant b_1^*,\cdots,a_1^*+a_2^*+\cdots+a_{n-1}^*\leqslant b_1^*+b_2^*+\cdots+b_{n-1}^*$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，则称 β 优于 α，记为 $\alpha\prec\beta$	
Per A	积和式	formula of sum of products	A 是 $m\times n$ 复矩阵，$m\leqslant n$，$\mathrm{Per}\,A=\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{m}a_i\sigma(i)$ 称为 A 的积和式，其中 $\sum$ 是对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一切映射 σ 求和	
$\sigma(A)$	A 的元素的和	sum of elements of A	表示矩阵 A 的所有元素之和	
$\rho(A)$	谱半径	spectral radius	设 A 为 n 阶复矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为其全部特征根，则 $\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lvert\lambda_i\rvert$ 称为 A 的谱半径	
(i,j)	(i,j) 元素	(i,j) element	表示矩阵或行列式第 i 行第 j 列交叉位置上的元素	亦称 (i,j) 分量
A_{ij}	代数余子式	algebraic complement minor	在一个行列式中，(i,j) 元素的代数余子式	
A^*	伴随矩阵	adjoint matrix	由 n 阶方阵 A 的所有元素的代数余子式 A_{ij} 为元素所构成的 n 阶方阵（A_{ij} 置于第 j 行第 i 列交叉位置上）	亦可用 $\tilde{A}$ 或 adj A 表示
$\bar{A}$	增广矩阵	augmented matrix	在一个线性方程组的系数矩阵中，再在最后增加由常数项构成的列，所得到的矩阵	亦可用 $\tilde{A}$ 表示
E_{ij}	矩阵单位	matrix unit	(i,j) 元素是 1，其余元素全是零的矩阵．其中，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$	多指方阵
TrA	方阵的迹	trace of a square matrix	方阵 A 的主对角线上所有元素之和	亦称追迹
rank (A)	矩阵的秩	rank of matrix	矩阵（不一定是方阵）A 中不等于零的子式的最大阶数称为 A 的秩，零矩阵的秩规定是零	亦可用 $r(A)$、"秩 A"或"A 秩"表示
$M_n(F)$，$F^{n\times n}$ $F_{n\times n}$，F_n	n 阶全阵环	total matrix ring of order n	域 F 上全体 n 阶方阵对方阵的加法和乘法组成的环	更一般地，可把域 F 换成任意环 R
$A\otimes B$	矩阵的直积	direct product of matrices	设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{r\times s}$，则 $mr\times ns$ 矩阵称为 A 与 B 的直积，记为 $A\otimes B$	亦称 Kronecker 积．
$\dotplus$	方阵的直和	direct sum of a square matrix	设 A 为 nk 阶方阵．若 A 中表示成主对角线是 k 个 n 阶方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，而其余块全为零的分块，则称 A 为 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的直和，记为 $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_k$	
$\bar{A}$	A 的复共轭矩阵	complex conjugate matrix of A	将复矩阵 A 的每个元素换成共轭复数所得矩阵记为 $\bar{A}$，称为矩阵 A 的复共轭矩阵	
$\overline{A^{+}}$，$\overline{A^H}$	埃尔米特共轭矩阵	Hermitian conjugate matrix	矩阵 A 的复共轭矩阵 $\bar{A}$ 的转置矩阵 $\overline{A'}$，称为 A 的埃尔米特共轭矩阵	
A^{+}，A^H	埃尔米特矩阵	Hermitian matrix	若 n 阶矩阵 A 与它的转置共轭矩阵 $\overline{A'}$ 相等，则 A 称为埃尔米特矩阵	
δ_{ik}	克罗内克 δ	Kronecker's delta	$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k),\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}\quad(i,k=1,2,\cdots,n)$	
$R[x]$	多项式环	polynomial ring	系数属于环 R、未知量（不定元）为 x 的全体多项式，对于多项式的普通加法和乘法组成的环	如果 R 有单位元 1，则规定 $x^0=1$
$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	n 元多项式环	n-ary polynomial ring	系数属于环 R，未知量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$（不相关不定元）的全体多项式，对于多元多项式的普通加法和乘法组成的环	如果环 R 有单位元 1，则规定 $x_i^0=1$，且 $x_ix_j=x_jx_i$
deg $f(x)$	多项式的次数	degree of a polynomial	表示多项式 $f(x)\neq 0$ 中系数不为零的项中最高次项的次数	亦可用 $\partial^\circ f(x)$ 表示
$\Phi_n(x)$	分圆多项式	cyclotomic polynomial	$\Phi_n(x)=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\xi_i)$ 称为 n 次分圆多项式，其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{\varphi(n)}$ 为 n 次原根	
$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$	初等对称多项式	elementary symmetrical polynomials	例如，x_1,x_2,x_3 的初等对称多项式为：$\sigma_1=x_1+x_2+x_3$，$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$，$\sigma_3=x_1x_2x_3$	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))$	最高公因式	highest common factor	首系数为 1 且次数最高的公因式	亦称最大公因式
$[f_1(x),\cdots,f_n(x)]$	最低公倍式	least common multiple	首系数为 1 且次数最低的公倍式	亦称最小公倍式

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(f(x),g(x))=1$	互素	coprime	多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式是 1	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$	两两互素	mutually prime	多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 中每两个都是互素的	
$F(x)$	有理分式域	rational traction field	域 F 上所有有理分式 $f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$ 关于有理分式的加法和乘法所组成的域	
$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	行向量	row vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一横行的 n 元向量	
$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$	列向量	column vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一纵列的 n 元向量	
$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$	反序数	inverted sequence number	n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中反序个数的总和. 例如 $\tau(231)=2,\tau(321)=3$	亦称逆序数
$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$	k 循环	k-cyclic(permutation)	即将 i_1 变为 i_2,i_2 变为 i_3,$\cdots$,i_k 变为 i_1,而别的元素不动的置换	
$\operatorname{sgn}\sigma$	置换的符号数	symbol number of permutation	设 σ 是一个置换,令 $\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases}+1 & (\sigma \text{是偶置换}),\\-1 & (\sigma \text{是奇置换})\end{cases}$	
(i,j)	对换	transposition	即将数码 i 变为 j,j 变为 i,而别的数码不动的置换	
K^n	向量空间	vector space	以 K 为基域的 n 元向量的集合 K^n. 称为 K 上的向量空间或线性空间	当 $K=R$ 时记为 R^n,当 $K=\mathrm{C}$ 时记为 C^n,有时表示成 V
$\alpha\perp\beta$	正交向量	orthogonal vectors	内积为零的两个向量	
$\alpha\perp W$	向量与子空间正交	a vector cut a subspace orthogonally	欧氏空间中向量 α 与子空间 W 中每个向量都正交	亦可表示成 $(\alpha,W)=0$
$V_1\perp V_2$	正交子空间	orthogonal subspaces	V_1 与 V_2 是欧氏空间的两个子空间,若 V_1 中每个向量与 V_2 中每个向量都正交,则称 V_1 与 V_2 为正交子空间	
$W^{\perp}$	正交补	orthogonal complement	W 是欧氏空间 V 的一个子空间,$W^{\perp}$ 表示 V 中与 W 正交的一切向量所构成的子空间	
$\varphi\|W$	诱导变换	induced transformation	φ 是线性空间 V 的一个线性变换,子空间 W 对 φ 不变,则 φ 在 W 上的限制称为 φ 在 W 中的诱导变换	
$\leqslant$	子群	subgroup	$H\leqslant G$ 即 H 是群 G 的子群	亦可用 $<$ 表示子群或真子群
$\trianglelefteq$	正规子群	normal subgroup	$N\trianglelefteq G$ 即 N 是群 G 的正规子群	亦可用 $\triangleleft$ 表示正规子群或正规真子群
$\exp(G)$	有限群的指数	exponent of a finite group	设 G 是有限群,使 $a^n=1\ (\forall\ a\in G)$ 的最小正整数 n,称为 G 的方次数	
$O_p(G)$	极大正规 p 子群	maximal normal p-subgroup	群 G 的极大正规子群且为 p 子群	
M^G	正规闭包	normal closure	群 G 的包含子集 M 的最小正规子群	
M_G	子集的核	core of subset	设 M 是群 G 的子集,则 G 的包含在 M 中的所有正规子群生成的子群称为 M 的核	
$H\operatorname{char}G$	特征子群	characteristic subgroup	群 G 的在 G 的任意自同构下不变的子群	
$\operatorname{Syl}_p(G)$	西洛 p 子群	sylow p-subgroup	表示有限群 G 的一个西洛 p 子群,其中 p 是素数	
$S(G)$	基座	socle	群 G 的所有极小正规子群之积	
$\operatorname{Fit}(G)$	菲廷子群	Fitting subgroup	群 G 的所有幂零正规子群之积	
$R_u(G)$	幂幺根基	unipotent radical	代数群 G 的最大连通正规幂幺子群	
$R(G)$	代数群的根基	radical of an algebraic group	代数群 G 的最大连通正规可解子群	
$\otimes,\times$	群的直积	direct product of groups	$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 或 $G=G_1\otimes G_2\otimes\cdots\otimes G_n$ 表示群 G 是群 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的直积	群的直积有内外之分. 但在同构意义下可互相转化
$[X,Y]$	李括号	Lie bracket	$[X,Y]_p(f)=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H \ltimes K$	半直积	semidirect product	$G/\overline{N}\cong F$,其中$\overline{N}$是与N同构的正规子群,$G=\overline{F}\overline{N}$,其中$\overline{F}$是与$F$同构的子群.$\overline{F}\cap\overline{N}=\{e\}$此时$G$称为$N$与$F$的半直积	
$\mathrm{N}_G(H)$	正规化子	normalizer	群G中所有可与子群H交换的元素组成的集合	定义子集S的正规化子为$\mathrm{N}_G(S)$
$\mathrm{C}_G(H)$	中心化子	centralizer	群G中所有与子群H的每个元素可交换的元素组成的集合	亦可表成$\mathrm{Z}_G(H)$
C_a	元素的中心化子	centralizer of an element	设a是群G的一个元素,则G中所有与a可交换的元素组成的集合	亦可记为$\mathrm{C}(a)$
$C(G)$	群的中心	center of a group	群G中与G的每个元素都可换的元素组成的集合	$C(G)$即$\mathrm{C}_G(G)$.亦可用$Z(G)$表示
$[a,b]$	换位子	commutator	群G中二元素a与b的换位子是指G中元素$a^{-1}b^{-1}ab$,即$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$	换位子亦可定义为$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$
G',(G,G)	换位子群	commutator group	由群G的一切换位子所生成的子群	亦称G的导出群或导群,并记为$D(G)$
$[A,B]$	A与B的换位子群	commutator subgroup of A and B	A,B是群G的两个子集.由所有换位子$[a,b]$($a\in A$,$b\in B$)所生成的子群	
$(G:H)$,$[G:H]$或$\|G:H\|$	子群的指数	index of a subgroup	子群H在群G中左(或右)陪集的个数.例如,$H=\{(1),(12)\}\subset S_3$,$(S_3:H)=3$	$(G:H)$可能有限,也可能无限
$\Phi(G)$	弗拉蒂尼子群	Frattini subgroup	群G的所有极大子群的交	
$S(M)$,S_M	对称群	symmetric group	集合M的全体双射变换对变换乘法所组成的群,M可以是无限集	亦可表成sym(M)
S_n	n次对称群	symmetric group of degree n	设$\|M\|=n$,则M上的对称群即M的全体双射变换对变换乘法组成的群,称为n次对称群	一般取$M=\{1,2,\cdots,n\}$
A_n	交错群	alternating group	n次对称群S_n中全体偶置换组成的群,称为n次交错群,简称交错群	亦称交代群
p^{∞}	p^{∞}型群	group of p^{∞}-type	$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$,其中$G_n$为所有$p^n$($p$是素数)次单位根对乘法组成的群.凡与$G$同构的群均称为$p^{\infty}$型群	亦称半循环群
$C(p^{\infty})$	普吕费尔加群	prùfer additive group	设p是一固定素数,则所有形如a/p^n(n为任意正整数,a为任意整数)的有理数组成加群,它对于其子群Z(整数加群)的商群(或称差群)称为普吕费尔加群	
$\|a\|$	元素的阶	order of the element	设a是群的元素.使$a^n=e$的最小正整数n,称为a的阶或周期.若这样的n不存在,则称a的阶是∞或0	亦可用$\circ(a)$表示
$\|G\|$	群的阶	order of a group	群G中所包含的元素的个数.例如,$\|S_3\|=6$;整数加群Z的阶为∞,即$\|\mathrm{Z}\|=\infty$	群G的阶也可记为Ord(G),而有限群G的阶也记为$[G:1]$
$\langle S\rangle$	由S生成的子群	generated subgroup by S	$\langle S\rangle$是群G中包含子集S的最小的子群,亦即G中包含S的所有子群的交.亦用(S)表示	当$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$时,常记为$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
Tor$G$	扭子群	torsion subgroup	群G的所有有限阶元素组成的子群,称为G的扭子群	亦称周期子群或挠子群
$\langle a\rangle$	循环群	cyclic group	由一个元素生成的群称为循环群.即$\langle a\rangle=\{\cdots a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,\cdots\}$	亦可用(a)表示循环群
C_n	n阶循环群	cyclic group of order n	由一个阶为n的元素生成的循环群	
C_{∞}	无限循环群	infinite cyclic group	由一个阶为无限的元素生成的循环群记为C_{∞}	
$\rightarrowtail$	单同态	monomorphism	若φ是模A到B同态映射,而且又是单射时,记为$A\overset{\varphi}{\rightarrowtail}B$或$\varphi:A\rightarrowtail B$	多用在同调代数中模的同态上
$\twoheadrightarrow$	满同态	surjective homomorphism	若φ是模A到B的同态映射,而且又是满射时,记为$A\overset{\varphi}{\twoheadrightarrow}B$或$\varphi:A\twoheadrightarrow B$	多用在同调代数中模的同态上
$\leftrightarrow$,$\rightleftharpoons$	双射	bijection	表示集合M与$\overline{M}$间一个双射.例如,设$M=\{1,2,3,\cdots\}$,$\overline{M}=\{2,4,6,\cdots\}$,则$\varphi:n\leftrightarrow 2n$是双射	
$\simeq$	同态	homomorphism	$G\overset{\varphi}{\simeq}\overline{G}$表示$\varphi$是群$G$到群$\overline{G}$的一个同态.有时也简记为$G\simeq\overline{G}$	在环或其他代数系也有类似说法

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\cong$	同构	isomorphism	$G\cong\overline{G}$，表示群G与群$\overline{G}$同构，即群G到群$\overline{G}$存在一个保持运算的双射	对环、域、模等代数系的同构，亦用符号$\cong$，$\backsimeq$或$\simeq$表示同构
a^{φ}	元素的像	image of an element	φ是集合A到B的一个映射，$a\in A$. 元素a在映射φ之下的像，一般用$\varphi(a)$表示. 亦用a^{φ}或$a\varphi$表示	
G_a	稳定子群	stable subgroup	设G是n元集$\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$上的置换群，$\alpha\in\Omega$，则$G_\alpha=\{g\mid g\in G,\alpha^g=\alpha\}$，即$G$中一切使$\alpha$不动的置换组成的集合	G_α是群G的一个子群
α^G	像的集合	set of image	设G是n元集$\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$上的置换群，$\alpha\in\Omega$，则$\alpha^G=\{\alpha^g\mid g\in G\}$	α^G是Ω的一个子集，且$\lvert G\rvert=\lvert G_\alpha\rvert\cdot\lvert\alpha^G\rvert$
End G	自同态半群	endomorphism semi-group	群G的全体自同态对变换的乘法组成的半群	亦可记为$E(G)$
Aut G	自同构群	automorphism group	群G的全体自同构对变换乘法组成的群	亦可简记为$A(G)$
Inn$G$	内自同构群	inner automorphism group	G是群，$a\in G$，$\tau_a:x\to axa^{-1}$是G的一个内自同构. G的全体内自同构组成一个群，称为G的内自同构群	亦可简记为$I(G)$. 也把axa^{-1}写成$a^{-1}xa$
Out(G)	外自同构群	group of outer automorphisms	群G的自同构群Aut(G)对于G的内自同构群Inn(G)的商群，称为G的外自同构群	
$R(G)$	右正则表示	right regular representation	G为群，G上一切置换$\tau_g=\begin{pmatrix}x\\xg\end{pmatrix}(g\in G)$组成的集合，称为群$G$的右正则表示	$R(G)$是G上对称群的子群
Hol$G$	全形	holomorph	$S(G)$为群G上的对称群，$R(G)$为G的右正则表示，$R(G)$在$S(G)$中的正规化子称为群G的全形	
$\mathrm{GL}_n(F)$，$\mathrm{GL}(n,F)$	一般线性群	general linear group	域F上全体n阶可逆方阵对乘法组成的群，称为域F上的一般线性群，它与域F上的n维空间V的全体可逆线性变换组成的乘群$\mathrm{GL}(V)$同构，故$\mathrm{GL}(V)$亦称一般线性群	
$\mathrm{PGL}_n(F)$	射影一般线性群	projective general linear group	域F上n次一般线性群$\mathrm{GL}_n(F)$关于其中心所得的商群，称为F上射影一般线性群	
$\mathrm{SL}_n(F)$，$\mathrm{SL}(n,F)$	特殊线性群	special linear group	表示域F上行列式等于1的全体n阶方阵对乘法组成的群	$\mathrm{SL}_n(F)$是$\mathrm{GL}_n(F)$的正规子群
$\mathrm{PSL}_n(F)$	射影特殊线性群	projective special linear group	特殊线性群$\mathrm{SL}_n(F)$关于其中心所得的商群，称为域F上的射影特殊线性群	
$O_n(F,S)$	正交群	orthogonal group	F是特征不为2的域，S是F上任意一个固定的n阶可逆对称矩阵，$O_n(F,S)=\{A\mid A\in F_{n\times n}$且$A'SA=S\}$是一个群，称为$F$上(由$S$定义的)$n$次正交群	
$O(n)$，O_n	实正交群	real orthogonal	由实数域上所有n阶正交方阵$(A'=A^{-1})$对乘法组成的群，称为n次实正交群	
$\mathrm{SO}(n)$	旋转群	rotation group	由实数域上所有行列式等于1的n阶正交方阵对乘法组成的群，称为n次旋转群	
$\mathrm{PO}_n(F,S)$	射影正交群	projective orthogonal group	正交群$O_n(F,S)$关于其中心的商群	
$\mathrm{SP}_{2n}(F,J)$	辛群	symplectic group	J是域F上$2n$阶可逆交错矩阵$F_{2n\times 2n}$中满足$A'JA=J$的一切A组成的群，称为F上的$2n$次辛群	
$\mathrm{PSP}_{2n}(F,J)$	射影辛群	projective symplectic group	辛群$\mathrm{SP}_{2n}(F,J)$关于其中心的商群	
$U_n(F,K)$	酉群	unitary group	元素为复数的n阶酉矩阵的全体关于矩阵的乘法组成群，称为n维酉群	
SU	特殊酉群	special unitary group	$U(u)$中行列式等于1的所有矩阵形成$U(u)$的正规子群，称为特殊酉群	
Spin	旋量群	spinor group	与$\mathrm{SO}(n)$局部同构的单连通李群称为旋量群	
$\langle R,+,\cdot\rangle$	环	ring	非空集合R关于运算"+"与"·"组成的环记为$\langle R,+\cdot\rangle$，也常简记为R	
$\leqslant$	子环	subring	$S\leqslant R$表示S是环R的子环	亦可用$<$表示子环或真子环
Char R	特征(数)	character	R为任意环. 使$na=0(\forall\ a\in R)$的最小正整数n，称为R的特征. 若这样的n不存在，称R的特征为∞或0，例如，$\mathrm{Char}Z_n=n$， $\mathrm{Char}Z=\infty$	亦称特征数，环R的特征亦用ch$R$表示

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$U(R)$,R^*	单位群	unit group	R是有单位元的环,R的全体单位(即可逆元)对R的乘法组成群,称为R的单位群.例如,整数环$\mathbf{Z}$的单位群为$U(\mathbf{Z})=\{1,-1\}$	R的单位群亦称R的乘群
R^0	逆环	inverse ring	R为环.如果保持R的加法不变,而乘法改为$a\circ b=ba$,则R对于原加法和新乘法$\circ$也组成环,称为R的逆环	亦称反环,并记为R^{op}
$\mathbf{Z}[i]$	高斯整环	Gaussian integral domain	由一切复数$a+bi$ $(a,b\in\mathbf{Z})$所组成的数环	
$R[G]$	群环	group ring	设R是有单位元的环,G为群,一切有限和$\sum a_ix_i(a_i\in R,x_i\in G)$关于其(类似于多项式的)加法与乘法组成的环	亦可记为$R(G)$,RG或GR
$F(G)$	群代数	group algebra	域F和群G构成的群环$F[G]$,再加上F中元素与有限和$\sum a_ix_i(a_i\in F,x_i\in G)$的乘法而得到的$F$上的代数	
$J(R)$	雅各布森根	Jacobson radical	环R的所有本原理想的交,称为R的雅各布森根.当R无本原理想时,规定:$J(R)=R$	亦简称J根,有多种定义方法
$\trianglelefteq$	理想	ideal	$I\trianglelefteq R$表示I是环R的理想	亦可用$\triangleleft$表示理想或真理想
$\langle a\rangle$	主理想	principal ideal	环中包含元素a的最小理想	亦可用(a)表示
$\oplus$或$\dotplus$	环的直和	direct sum of rings	$R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_n$或$R=R_1\dotplus R_2\dotplus\cdots\dotplus R_n$,即环$R$是$R_1,R_2,\cdots,R_n$的直和	对于加群的直积也常称为直和;又子空间的直积,都常用$\oplus$或$\dotplus$表示
$\sqrt{A}$	理想的根	radical of an ideal	A为交换环R的理想.$\sqrt{A}=\{a\mid a\in R,\exists\ n$使$a^n\in A\}$($n$与$a$有关),称为理想$A$的根	亦称理想A的根基
$\langle S\rangle$	由S生成的理想	generated ideal by S	S是环R的一个子集,$\langle S\rangle$是R中包含S的最小理想,亦即R中包含S的所有理想的交	当$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$时,常记为$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
AB	理想的积	product of ideals	A,B是环R的理想,则一切有限和$\sum a_ib_i(a_i\in A,b_i\in B)$组成$R$的一个理想,称为理想$A$与$B$的积	AB是由一切元素$ab(a\in A,b\in B)$生成的理想
$A:B$	理想的商	quotient of ideals	设A,B是交换环R的理想,则R中满足$xB\subseteq A$的一切元素x组成R的理想,称为A与B的商	
$O:B$	零化理想	annihilating ideal	设B是交换环R的理想,则R中满足$xB=0$的一切元素x组成的理想,称为B的零化理想	当R为非交换时,$O:B$是R的左理想
$l(S)$,ann S_l	左零化子	left annihilator	环R中使$rS=0$的一切r组成的集合	$l(S)$是R的左理想
$r(S)$,ann S_r	右零化子	right annihilator	环R中使$Sr=0$的一切r组成的集合	$r(S)$是R的右理想
N_K	克德根	Köthe radical	环R的最大幂零元理想,称为R的克德根,简称K根	
N_Q	近似诣零根	quasi-nil radical	环R的全部近似诣零单边理想之和,称为R的近似诣零根	
N_L	林文茨基根	Livitzki radical	环R的惟一最大局部幂零理想称为R的林文茨基根	
N_{BM}	布朗-麦柯根	Brown-Mccoy radical	环R的最大g正则理想,称为R的布朗-麦柯根	
$F(\alpha)$	单扩张	simple extension	包含域F和元素α的最小扩域	亦称单扩域
$F(S)$	域的扩张	extension of a field	E是域F的扩域,S是E的一个子集,E中包含F和S的最小域记为$F(S)$,它是域F的扩张	当$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$时,则$F(S)$记为$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$
$(E:F)$,$[E:F]$	扩域次数	degree of an extended field	E是域F的扩域,则E是域F上的向量空间.E在F上的维数称为扩域的次数或扩张次数	$(E:F)$可能有限,也可能无限
$A(E\mid F)$	E在F上的伽罗瓦群	Galois group of E over F	F是域E的子域,$A(E\mid F)$是E的使F的每个元素不动的全体自同构组成的群	
$E(G_1)$	子群G_1所属的域	field belong to subgroup	E是域F的扩域,又$G=A(E\mid F)\geqslant G_1$,$E$中所有对于$G_1$中任一元都不动的元是$E$的子域,称为子群$G_1$所属的域	$F\subseteq E(G_1)\leqslant E$
$G(E_1)$	子域E_1所属的群	group belong to subfield	假设同上,又E_1是E的子域且$F\subseteq E_1\subseteq E$.则$G$中所有不使$E_1$中任意元变动的元素之集是$G$的子群,称为子域$E_1$所属的群	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
F_q, GF(q)	有限域	finite field	F_q 或 GF(q)表示元素个数为 q 的有限域	元素个数相同的有限域都同构
$\mathbf{Q}_p$	p 进数域	p-adic number field	表示有理数域在 p 进赋值下的完备化域	p 为素数
$\mathbf{Z}_p$	p 进整数环	ring of p-adic integers	全体 p 进整数组成的环，称为 p 进整数环	p 为素数
$K[[\ \ ]]$	形式幂级数环	formal power series ring	$K[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$表示系数在域 K 中的形式幂级数环	亦可表示成 $R\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
$G_r U(A)$	分次单位群	graded unit group	G 为群，$U(A)$ 是 G 分次代数 $A=\bigoplus_{g\in G} A_g$ 的单位群. A 的一切分次单位组成 $U(A)$ 的一个子群	
GS(V)	半线性变换群	semilinear transformation group	V 是域 F 上的向量空间，V 的一切非奇异半线性变换组成群，称为半线性变换群	
$J_G(M)$	雅各布森分次根	Jacobson graded radical	R 为 G 分次环，M 为分次 R 模. M 的一切分次极大模的交，称为 M 的雅各布森分次根	
δ	导子	derivation	环 R 的导子，即 R 的满足 $\delta(a+b)=\delta a+\delta b$ 与 $\delta(ab)=(\delta a)b+a(\delta b)$ 的变换 δ	
$D(A)$	A 上微分算子环	ring of differential operators over A	称 $\bigcup_{i=0}^{\infty} D^i(A)$ 为 A 上线性微分算子环	
deg A	代数 A 的次数	degree of algebra A	设 A 是域 F 上中心单代数，且$(A:F)=m^2$，则称 m 为 A 的次数	
Ind$A$	舒尔指数	Schur index	A 是域 F 上有限维中心单代数，且 $A\cong M_n(D)$，其中 D 是 F 上可除代数，称 deg$D$ 为 A 的舒尔指数	
Bsi$A$	次理想	subideal	设 B 是代数 A 的一个子代数，若有 $B=B_0\subseteq\cdots\subseteq B_n=A$，其中 B_i 是 B_{i+1} 的理想，则称 B 是 A 的次理想	
$\triangle_T$	T 理想	T-ideal	设 I 是代数 A 的一个理想. 如果对 A 的每个自同态 φ 均有 $\varphi(I)\subseteq I$，则称 I 为 A 的 T 理想	
$S^{-1}R$	分式环	ring of fractions	设 R 是有单位元的交换环，S 是 R 的乘闭子集. 则一切 $a/s(\forall\ a\in R, s\in S)$关于分式的加法和乘法组成环，称为 R 关于 S 的分式环	
$P^{(n)}$	符号幂	symbolic power	设 P 是有单位元的交换环 R 的素理想，$S_P=R\backslash P$. 称 $S_P^{-1}P^n$ 在 R 中的收缩理想为 P 的 n 次符号幂	
(x,y,z)	结合子	associator	称 $(xy)z-x(yz)$ 为非结合代数中三个元素 x,y,z 的结合子	
Der(R)	导子李环	Lie ring of derivations	结合环 R 的导子在加法与乘法$[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1$之下组成的李环，称为导子李环	
Corad(C)	余代数的余根	coradical of coalgebra	余代数 C 的所有单子余代数的和，称为 C 的余根	
$l(K\|F)$	F 共轭映射数	number of F-conjugate mapping	设 Ω 是域 F 的扩域 K 的代数闭包，则 K 到 Ω 的一切 F 共轭映射的个数记为 $l(K\|F)$	
tr. deg$_F K$	超越次数	transcendence degree	域 F 的扩域 K 的超越基的基数称为 K 在 F 上的超越次数	
$N_F^K(\alpha)$	α 的范	norm of α	K 是域 F 的有限次扩域，Ω 是 F 的含 K 的代数闭包；又 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射，则 $N_F^K(\alpha)=(\prod_{j=1}^{m}\sigma_j(\alpha))^{[K:F]_i}$ 称为 K 中元 α 的范	
$T_F^K(\alpha)$	α 的迹	trace of α	K 是域 F 的有限次扩域，Ω 是 F 的含 K 的代数闭包；又 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射，则 $T_F^K(\alpha)=[K:F]_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\sigma_j(\alpha)$ 称为 K 中元 α 的迹	
X_F	正锥集	set of positive cone	X_F 表示实域 F 的全部正锥组成的集合	
$X_F(T)$	序空间	space of orderings	T 是实域 F 的一个亚正锥，$X_F(T)$ 表示 F 上所有包含 T 的正锥所组成的集合，称为亚序域(F,T)的序空间	
$H(F)$	实全纯环	real holomorphic ring	实域 F 的所有实赋值环的交是 F 的一个子环，称为 F 的实全纯环	
(F,φ)	赋值域	valued field	带有赋值 φ 的域 F，称为赋值域	带有赋值环 B 的域 F 记为(F,B)
M_R	右 R 模	right R-module	R 是有单位元的环，M_R 是右 R 模，即作用乘法为 $ar(a\in M, r\in R)$	类似地有左 R 模 $_RM$

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\hookrightarrow$	子模	submodule	$A \hookrightarrow M$ 表示 A 是模 M 的一个子模	
$\hookrightarrow$	小子模	small submodule	设 A 是模 M 的一个子模. 如果对 M 的任意子模 Z 有 $A+Z=M$ 必有 $Z=M$,则称 A 为 M 的小子模,记为 $A \hookrightarrow M$	即只有 M 才使 $A+M=M$ 的子模 A 称为小子模
$\overset{*}{\hookrightarrow}$	大子模	large submodule	设 A 为模 M 的子模,若对 M 的任意子模 Z 有 $A\cap Z=0$ 必有 $Z=0$,则称 A 为 M 的大子模,记为 $A \overset{*}{\hookrightarrow} M$	即只有 $\{0\}$ 使 $A\cap\{0\}=0$ 的子模 A 称为大子模
$\mathrm{Si}(M)$	奇异子模	singular submodule	设 M 为右 R 模,M 中所有使 $r_r(m) \overset{*}{\hookrightarrow} R_R$ 的 m 组成的集是 M 的子模,称为奇异子模,其中 $r_R(m)=\{r \mid r\in R, mr=0\}$	
$\mathrm{ann}_R\, x$	阶理想	order ideal	设 R 是有 1 环,M 是左 R 模,$x\in M$,记 $\mathrm{ann}_R x=\{a\in R \mid ax=0\}$,称为 x 在 R 中的阶理想	亦称为 x 在 R 中的零化子. 记为 $(0:x)$
M^+	特征模	character module	M 是左 R 模,$M^+=\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$ 对于 $(f\circ r)(x)=f(rx)(f\in M^+, r\in R, x\in M)$ 组成右 R 模,称为 M 的特征模	
$\mathrm{G.dim}(M)$	戈迪维数	Goldie dimension	若 R 模 M 有子模 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 使 $\sum_{i=1}^{n} U_i$ 为直和且为 M 的本质子模,则称 n 为 M 的戈迪维数	
R-Mod	R 模范畴	category of R-modules	所有左 R 模构成的范畴,称为左 R 模范畴	
$H^n(X)$	上同调模	cohomology modules	令 $X: \cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$ 是环 R 上的复形,$H^n(X)=\ker d^n/\mathrm{Im} d^{n-1}$,称为 X 的上同调模	
$\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$	函子 Ext	functor Ext	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 表示 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 的右导出函子	
$\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$	函子 Tor	functor Tor	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$ 表示 $M\otimes_R-$ 的左导出函子	
$\mathrm{l\cdot Pd}_R M$	左投射维数	left projective dimension	表示 M 为左 R 模,M 的左投射维数	亦称左同调维数,记为 $\mathrm{l\cdot dh}_R N$
$\mathrm{r\cdot pd}_R N$	右投射维数	right projective dimension	表示 N 为右 R 模,N 的右投射维数	亦称右同调维数,记为 $\mathrm{r.dh}_R N$
$\mathrm{l.gl.dim}\, R$	左整体维数	left global dimension	环 R 的左整体维数 $\mathrm{l.gl.dim}\, R=\sup\{\mathrm{l.pd}_R M \mid M\in \mu_R\}$	
$\mathrm{r.gl.dim}\, R$	右整体维数	right global dimension	环 R 的右整体维数 $\mathrm{r.gl.dim}\, R=\sup\{\mathrm{r.pd}_R M \mid M\in \mu_R\}$	
$\mathrm{l.Id}_R M$	左内射维数	left injective dimension	表示左 R 模 M 的左内射维数	
$\mathrm{r.Id}_R N$	右内射维数	right injective dimension	表示右 R 模 N 的右内射维数	
$\mathrm{l.Fd}_R M$	左平坦维数	left flat dimension	表示左 R 模 $M\neq 0$ 的左平坦维数	亦称弱左同调维数,记为 $\mathrm{w.l.dh}_R M$
$\mathrm{r.Fd}_r N$	右平坦维数	right flat dimension	表示右 R 模 $N\neq 0$ 的右平坦维数	亦称弱右同调维数记为 $\mathrm{w.r.dh}_R N$
$M_1 * M_2 * \cdots * M_n$	双积	biproduct	设 M 及 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 为 R 模. 若有模同态 $\sigma_i: M_i \to M$ 与 $\pi_j: M\to M_j$ 满足 $\pi_j\sigma_i=\delta_{ji}$ 与 $\sum\sigma_i\pi_i=1_M$,则称 $\pi_j M$ 是模 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的双积	
$\mathrm{Obj}(K)$	对象类	class of objects	K 是一个范畴,K 的所有对象构成的类称为 K 的对象类	
$\mathrm{Mor}_K(A,B)$	(态)射集	set of morphisms	A, B 是范畴 K 的两个对象. 由 A 与 B 所决定的一个集合称为 A 与 B 的(态)射集	亦称为由 A 到 B 的射或态射
$\mathrm{Dom}(\alpha)$	(态)射的域	domain of a morphism	表示在范畴中,设 $\alpha\in \mathrm{Mor}_K(A,B)$,则称 A 为(态)射 α 的域	
$\mathrm{Cod}(\alpha)$	(态)射的上域	codomain of a morphism	在范畴中,当 $\alpha\in\mathrm{Mor}_K(A,B)$ 时,称 B 为(态)射 α 的上域	
$\mathrm{rad}(M)$	模的根	radical of a module	表示模 M 的所有极大子模的交	亦即 M 的所有小子模的和
$Soc(M)$	模的基座	socle of module	表示模 M 的所有极小子模的和	亦即 M 的所有大子模的交
$\ker\varphi$	核	kernel	φ 是环 R 模 A 到 B 的一个同态映射,称 B 中零元素的全体逆象 $\varphi^{-1}(0)$ 为 φ 的核	对群、环等代数系也有类似概念

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Coker φ	上核	cokernel	φ是环R模A到B的一个同态映射,商模$B/\mathrm{Im}\varphi$称为φ的上核	亦称余核
Coim φ	上象	coimage	φ是环R模A到B的一个同态映射,商模$A/\mathrm{Ker}\varphi$称为φ的上像	亦称余像
M/N	商空间	quotient space	表示两代数系M,N的商空间	
dim V	维数	dimension	表示线性空间V的维数	
V^*	对偶空间	dual space	域F上线性空间V的所有线性函数组成F上的线性空间,称为V的对偶空间	V^* 即 $\mathrm{Hom}_F(V,F)$
$W(A)$	矩阵的数值域	numerical range of a matrix	$A \in C^{n\times n}$,称$W(A)=\{x^*Ax \mid x\in C^n, x^*x=1\}$为$A$的数值域	
$r(A)$	矩阵的数值半径	numerical radius of a matrix	$A \in C^{n\times n}$,称$\max\limits_{Z\in W(A)}\lvert Z\rvert$为$A$的数值半径	
V_{λ_0}	特征子空间	characteristic subspace	设σ是线性空间V的一个线性变换,λ_0是σ的一个特征值,则对应于λ_0的全体特征向量和零向量组成的子空间称为特征子空间	
$T(G,x)$	对称化算子	symmetrization operator	张量空间$T_0^p(E)$或$T_p^0(E)$的线性变换$S_p=\sum\limits_{\sigma\in G_p}\sigma$称为对称化算子,其中$G_p$为置换群	
$V_x(G)$	张量对称类	symmetric class of tensors	设$\overset{m}{\otimes}V$是张量空间,x是群G的不可约特征标,$T(G,x)$是对称化算子,则称$\mathrm{Im}T(G,x)$为关于G和x的张量对称类	
Inex $V_\chi(G)$	张量对称类的指标	index of symmetric class of tensor	表示张量对 称类$V_\chi(G)$的指标	
$d_G^f(A)$	广义矩阵函数	generalized matrix function	设$A=(a_{ij})$为m阶复方阵,G为S_m的子群,f是G到$\boldsymbol{C}$的任一函数,则称$d_G^f(A)=\sum\limits_{\sigma\in G}f(\sigma)\prod\limits_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}$为广义矩阵函数	
$E(V)$	外代数	exterior algebra	设V为域$K(\mathrm{char}K\neq 2)$上向量空间,$\overset{m}{\wedge}V$为K上的格拉斯曼空间,则直和$\overset{0}{\wedge}V\oplus\overset{1}{\wedge}V\oplus\cdots\oplus\overset{n}{\wedge}V$可组成$K$上代数,称为$V$上的外代数	亦称格拉斯曼代数
$\vee E$	对称代数	symmetric algebra	设E是域$K(\mathrm{char}k=0)$上的向量空间,$\vee^pE$是E的p次对称幂,则$\vee E=\bigoplus\limits_{p=0}^{\infty}\vee^pE$可组成$K$上交换代数,称为$E$上的对称代数	
S_V	对合S_V	involution S_V	设V是域K上向量空间,则包含映射$j:V\to C_V^{op}$在$C_V\to C_V^{op}$的代数开拓是一个对合,其中C_V^{op}是V的克利福德代数C_V的反代数	
$\hat{\oplus}$	正交直和	orthogonal direct sum	设$U_1,U_2,\cdots,U_m$是V的向量子空间,若它们两两正交且V为其直和,则记为$V=U_1\hat{\oplus}\cdots\hat{\oplus}U_m$,称$V$为$U_i$的正交直和	
$\uplus$	格-并	lattice-union	$A\uplus B$表示两个理想A,B的格-并	
$\boldsymbol{C}^0$	对偶范畴	dual category	由范畴$\boldsymbol{C}$作出的新范畴$\boldsymbol{C}^0$:$\boldsymbol{C}^0$的对象类即$\boldsymbol{C}$的对象类,定义$\mathrm{Hom}_{C^0}(A^0B^0)=\mathrm{Hom}_C(B,A)$,并规定$f^0g^0=(gf)^0$,称$\boldsymbol{C}^0$为$\boldsymbol{C}$之对偶范畴	
Set	集范畴	category of sets	以一切集合为对象,以集合映射为态射的范畴	
Top	拓扑空间范畴	category of topological spaces	以一切拓扑空间为对象,以连续映射为态射的范畴	亦可表示成$\mathscr{T}$
Group	群范畴	category of groups	以一切群作对象,以群同态作态射的范畴	亦可表示成$\mathscr{G}$
AG	阿贝尔群范畴	category of Abelian groups	以一切阿贝尔群作对象,以阿贝尔群同态作态射的范畴	
Ring	环范畴	category of rings	以一切环作对象,以环同态作态射的范畴	亦可表示成μ_R
$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda$	积范畴	product category	$\{C_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$为一个范畴集合.由它们所作出的新范畴$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda$为$\{C_\lambda\}$的积范畴	
$\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$	上积	coproduct	$\{A_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$为范畴$\boldsymbol{C}$的一个对象集.若对象$B\in\boldsymbol{C}$与一态射集具有泛性质,则称$B$为$\{A_\lambda\}$的上积	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
IBN	IBN 环	IBN ring	R 为环. 如果每个有限生成的 R 模的任二基中元素个数必相等,则称 R 为 IBN 环	
$(\mathscr{C},\perp)$	带积范畴	category with product	规定映射 $\perp:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 的范畴 $\mathscr{C}$ 称为带积范畴	
ΦF	纤维范畴	fibre category	$(\mathscr{C},\perp)$ 与 $(\mathscr{D},T)$ 为带积范畴,$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为保积函子. 由此定义的新范畴 ΦF(对象类为 $\{(M,N,\alpha)\mid M,N\in\mathscr{C},\alpha:F(M)\cong F(N)\}$ 称为 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 的纤维范畴)	
$\mathrm{gl}(V)$	一般线性李代数	general linear lie algebra	$\mathrm{gl}(V)$ 表示域上 n 维空间 V 的所有线性变换在运算 $[A,B]=AB-BA$ 下组成的 n^2 维李代数,称为一般线性李代数	
$n(P)$	偏序集的阶	order of poset	偏序集 P 的基数称为 P 的阶	
$l(P)$	偏序集的长	length of poset	偏序集 P 中链的长的最小上界称为 P 的长	
$\mathrm{Sup}\ X$	上确界	supremum	偏序集的子集 X 的上确界	亦称最小上界. 记为 $\vee X$ 或 l. u. b. X
$\inf X$	下确界	infimum	偏序集的子集 X 的下确界	亦称最大下界. 记为 $\wedge X$ 或 g. l. b. X
$(L;\leqslant)$	格	lattice	若偏序集 L 的任二元素均有上确界和下确界,则称 L 为格	
$\Phi(L)$	弗拉梯尼子格	Frattini sublattice	表示格 L 的弗拉梯尼子格	
a^+	a 的正部	positive part of a	a 是格群的一个元素,$a^+=a\vee 0$ 称为 a 的正部	
a^-	a 的负部	negative part of a	a 是格群的一个元素,$a^-=(-a)\vee 0$ 称为 a 的负部	
$X^\perp$	极	polar	X 是格群 G 的子集,$X^\perp=\{y\in G\mid \lvert y\rvert\wedge\lvert x\rvert=0,\forall x\in X\}$,称为 X 的极	
$J\perp K$	独立 l 理想	independent l-ideal	格序群的 l 理想 J,K 若有 $J\wedge K=0$,则称 J 和 K 是独立的	
$R(G)$	康莱德根	Conrad radical	格序群 G 的一切本质性值的交是一个 l 理想,称为 G 的康莱德根	
R^+	偏序环的序	order of po-ring	R 是偏序环,$R^+=\{r\in R\mid r\geqslant 0\}$,称为 R 的序	亦称 R 的正锥
BCK	BCK 代数	BCK-algebra	一种有序代数系统	
BCI	BCI 代数	BCI-algebra	一种较 BCK 代数广泛的代数结构	
$\langle X;*,0\rangle$	双 B 代数	two B-algebra	表示 BCK 代数或 BCI 代数,二者合称双 B 代数	
A^*	稳定子	stabilizer	A 是 BCK 代数 X 的子集,$A^*=\{x\in X\mid x*a=x$ 且 $a*x=a,\forall a\in A\}$,称为 A 的稳定子	
(X,O_X)	环式空间	ringed space	带有一个环层 O_X 的拓扑空间 X,称为环式空间	
$\chi(O_X)$	欧拉-庞加莱特征标	Euler-Poincaré characteristic	n 维完备簇 X 的欧拉-庞加莱的特征标定义为 $$\chi(O_X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim_k H^i(X,O_Z)$$	
$K(X)$	小平维数	Kodaira dimension	X 是 n 维完备代数簇. 在 X 利用归纳法定义的维数 $K(X)$ 称为小平维数	
$R(X)$	典范环	canonical ring	X 为光滑射影簇,ω_E 为其典范层,X 的典范环为 $R(X)=\bigoplus_{n\geqslant 0}H^0(X,\omega_X^{\otimes n})$	
$\mathrm{Pic}(X)$	皮卡群	Picard group	环式空间 (X,O_X) 的可逆层的同构类组成的群(运算由可逆层的张量积所诱导),称为 X 的皮卡群	
$\mathrm{Pic}^0(X)$	皮卡簇	Picard variety	X 是代数闭域 K 上的射影光滑代数簇,$\mathrm{Pic}(X)$ 中包含 O 的分支是一个射影概形,它的既约结构是一个阿贝尔簇,称为 X 的皮卡簇	
$\mathrm{Alb}(Z)$	阿尔班尼斯簇	Albanese variety	X 是射影光滑代数簇. X 的皮卡簇的对偶阿贝尔簇称为 X 的阿尔班尼斯簇	
$G_{n,m}$	格拉斯曼簇	Grassmannian variety	一个 n 维线性空间的所有 m 维线性子空间的集合称为一个格拉斯曼簇	亦称格拉斯曼流形或格拉斯曼空间
$\mathrm{Flag}(n_1,n_2,\cdots,n_r)$	旗簇	flag variety	V 是 n 维向量空间,$n=n_1>n_2>\cdots>n_r>0$. 则 V 的所有由子空间组成的指标为 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的旗的集合,称为一个旗簇	
$\times$	叉积	cross product	a,b 的叉积等于 a,b 的对称差的补运算,即 $a\times b=(a\triangle b)'$	这里 $a,b\in B$,B 称为布尔集

符 号	中文名称	英文名称	意义或举例	备 注
c	胞腔度	cellularity	cA=sup{|x||x是其中的一个两两不相交的族}. 称为布尔代数 A 的胞腔度	
sat A	浸润度	saturation	sat$A$=min{u|u是基数且对 A 的每个两两不相交的族 x 有|x|<u}表示 A 的浸润度，它是一个正则基数，式中|x|表示 x 的基数	
π	稠密度	density	πB=min{|x||$x\subseteq B$ 在 B 中稠密}表示 X 在布尔代数 B 中的稠密度	
Id	理想	ideal	Id(B)表示布尔代数 B 中的全体理想	布尔代数 B 中的每个理想记为 I，有限集的理想记为 fin
Sub	子代数	subalgebra	Sub$A$ 表示无限布尔代数 A 的一切子代数所构成的集合	sub(B)表示布尔代数 B 的子代数所构成的格
Ult	超滤子	ultrafilter	Ult$A$ 表示无限布尔代数 A 的超滤子的全体	
Filt	滤子	filter	Filt$A$ 表示无限布尔代数 A 的一切滤子所构成的集合	
$\sum$	最小上界	least upper bound	$\sum^B M$ 表示 M 在布尔代数 B 中的最小上界，其中 M 是 B 的子集	
clop	闭开代数	clopen algebra	拓扑空间 X 的所有闭开集，用 clop$X$ 表示，构成 X 上的集合代数称为 X 的闭开代数	
RO( )	正则开代数	regular open algebra	RO(x)={u|$u\subseteq X$ 且 $r(u)=u$}，其中 $r(u)$=int(cl(u))是 u 的正则化	
Bai	贝尔代数	Baire algebra	Bai$X$={$a\subseteq X$|a 有贝尔性质}，其中 a 是拓扑空间 X 的子集，存在 X 的一个开集 u，使对称差 $a\triangle u$ 是贫集	
$A\upharpoonright$a	相对代数	relative algebra	$A\upharpoonright a$={x|$x\in A$ 且 $x\leqslant a$}表示 A 关于 a 的相对代数. 式中 A 是布尔代数，且 $a\in A$	亦称因子代数
pred(t)	前趋集合	predecessor set	偏序集(T, $\leqslant_T$)是一棵树，且所有的 $t\in T$，集合 pred(t)是由 $<_T$ 决定的一个良序集合	
Tor	挠积	torsion product	Tor$_n$(M,N)是 M 和 N 的挠积	
Ext	扩张	extension	Ext^n(M,N)是 M,N 的扩张	

分析学(analysis)

符 号	中文名称	英文名称	意义或举例	备 注
(a,b)	开区间	open interval	表示 a 与 b 之间(不包括端点 a 与端点 b)的一切实数组成的集合	亦可用]a,b[表示
$[a,b]$	闭区间	closed interval	表示 a 与 b 之间(包括端点 a 与端点 b)的一切实数组成的集合	
$(a,b]$	左半开区间	left half open interval	表示 a 与 b 之间(不包括端点 a 但包括端点 b)的一切实数组成的集合	亦可用]a,b]表示
$[a,b)$	右半开区间	right half open interval	表示 a 与 b 之间(包括端点 a 但不包括端点 b)的一切实数组成的集合	亦可用[a,b[表示
e^x 或 exp x	指数函数	exponential function	表示以 e 为底，以 x 为指数的函数，可写成 $y=\mathrm{e}^x$ 或 $y=\exp x$	在同一场合中，只用其中一种符号
e	超越数	transcendental number	$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\ 281\ 828\ 459\cdots$	通常作为自然对数的底
$\log_a x$	对数函数	logarithmic function	表示以 a 为底，自变量为 x 的对数函数，可写成 $y=\log_a x$	
ln x	自然对数	natural logarithm	表示 以 e 为底，自变量为 x 的对数函数	
lg x	常用对数	common logarithm	表示 以 10 为底，自变量为 x 的对数函数	
lb x	2 为底的对数	logarithm to the base 2	表示以 2 为底，自变量为 x 的对数函数	亦可记为 $\log_2 x$
sh x 或 sinh x	双曲正弦	hyperbolic sine	$\mathrm{sh}\ x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
ch x 或 cosh x	双曲余弦	hyperbolic cosine	$\text{ch}\, x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	
th x 或 tanh x	双曲正切	hyperbolic tangent	$\text{th}\, x=\frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	
coth x	双曲余切	hyperbolic cotangent	$\text{coth}\, x=\frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	
sech x	双曲正割	hyperbolic secant	$\text{sech}\, x=\frac{1}{\text{ch}\, x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$	
csch x 或 cosech x	双曲余割	hyperbolic cosecant	$\text{csch}\, x=\frac{1}{\text{sh}\, x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$	
arsh x	反双曲正弦	inverse hyperbolic sine	$\text{arsh}\, x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-\infty<x<+\infty)$	亦可用 arsinh$x$ 表示
arch x	反双曲余弦	inverse hyperbolic cosine	$\text{arch}\, x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$	亦可用 arcosh x 表示
arth x	反双曲正切	inverse hyperbolic tangent	$\text{arth}\, x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$	亦可用 artanh x 表示
arcoth x	反双曲余切	inverse hyperbolic cotangent	$\text{arcoth}\, x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ (\lvert x\rvert>1)$	
arsech x	反双曲正割	inverse hyperbolic secant	$\text{arsech}\, x=\ln(1\pm\sqrt{1-x^2})-\ln x(0<x\leqslant 1)$	
arcsch x	反双曲余割	inverse hyperbolic cosecant	$\text{arcsch}\, x=\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\ln x$	亦可用 arcosech x 表示
$f(x)$	函数	function	如 $y=f(x)$ 表示以 x 为自变量的一元函数	
$f(x_1,\cdots,x_n)$	n 元函数	n-ary function	表示以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量的 n 元函数	
Grf	图像	graph	表示函数 f 的图像	
$f(x)\vert_{x=a}$	函数值	function value	表示函数 $f(x)$ 在点 a 处的函数值，即 $f(x)\vert_{x=a}=f(a)$	
$f(x)\vert_a^b$ 或 $[f(x)]_a^b$	函数值的差	difference of the function value	表示函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$端点处函数值的差，即 $f(x)\vert_a^b=f(b)-f(a)$ 或$[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$	这种表示法常用于定积分的计算
const	常值函数	constant function	若 $f(x)=c$，则称 $f(x)$是常值函数，记为 const$f$	亦简记为 $f(x)=c$
$I(x)$	恒等函数	identity function	表示对 D 中一切 x 都有 $I(x)=x$	
$g\circ f$	复合函数	composite function	表示由函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 复合而成的函数，即 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$	亦称合成函数
$\to$	趋于或收敛于	converges to	$x\to a$ 表示 x 无限接近 a；$x_n\to a$ 表示序列$\{x_n\}$收敛于 a	$x\not\to a$ 表示 x 不趋于 a，$x_n\not\to a$ 表示序列$\{x_n\}$不收敛于 a
$\rightrightarrows$	一致收敛	uniformly convergent	$f_n\rightrightarrows f$ 表示 f_n 在 D 内一致收敛于 f，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}\lvert f_n(x)-f(x)\rvert=0$	
$\downarrow$，$\searrow$	单调递减	monotone decreasing	随自变量 x 的增加，函数值 $f(x)$ 逐渐减少	
$\uparrow$，$\nearrow$	单调增加	monotone increasing	随自变量 x 的增加，函数值 $f(x)$ 逐渐增加	
$\simeq$	渐近等于	asymptotically equal to	在某极限过程中，值可以无限接近的两个函数. 如当 $x\to a$ 时，$\frac{1}{\text{sim}(x-a)}\simeq\frac{1}{x-a}$	在无穷小量比较时，表示等价无穷小，记为 $\sim$
$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	极限	limit	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 表示当 x 趋于 a 时，$f(x)$无限接近于 b. 右极限和左极限分别记为：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$	亦可记为：当 $x\to a$ 时，$f(x)\to b$
$O(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=O(g(x))$意为$\lvert f(x)/g(x)\rvert$在行文所述的极限中有上界	比较无穷小量时，表示同阶无穷小
$o(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=o(g(x))$表示在行文所述的极限中 $f(x)/g(x)\to 0$	比较无穷小量时，表示高阶无穷小
Δx	增量	increment	$\Delta x=x-x_0$ 表示自变量 x 的增量	亦称 x 的改变量

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\frac{df}{dx}$	导函数或微商	derived function	函数f的改变量与自变量x的改变量之比,当自变量改变量Δx趋于零时的极限表示为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{df}{dx}$或$\frac{df}{dx}$	亦可用f'或Df来表示.简称导数
$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$	导函数值	value of derived function	函数$f(x)$在某点a的导数值.记为 $\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=a}$或$\left(\frac{df'}{dx}\right)_{x=a}$	亦可用$f'(a)$或$Df(a)$来表示
$\frac{d^nf}{dx^n}$	n阶导数	derivative of n-order	对$f(x)$连续求n次一阶导数.记为$\frac{d^nf}{dx^n}$或$f^{(n)}$.当$n=2,3$时,常用f'',f'''来代替,称为2阶、3阶导数.如自变量是时间t,常用$f''(t)$来代替$\frac{d^2f}{dt^2}$	亦可用$f^{(n)}$或D^nf来表示
$\frac{\partial f}{\partial x}$或$\partial_x f$	偏导数或偏微商	partial derivative	对多元函数的其中一个自变量x求导数,其他变量暂视为常数所得的结果	亦可用$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\cdots}$或$f_x$表示
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$或$f_{xy}$	混合偏导数	mixed partial derivative	先对x求导,再对y求导,即$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$,	
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$或$f_{xx}$	二阶偏导数	partial derivative of 2-order	对x连续求二阶导数,其他变量视为常数	
$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n\partial y^m}$	$m+n$阶偏微商	partial derivative of $(m+n)$-order	函数f先对x求n次偏微商,再对y求m次偏微商	
$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$	函数行列式	functional determinant	表示u,v,w对x,y,z的函数行列式,其中$u(x,y,z)$,$v(x,y,z)$,$w(x,y,z)$都是多元函数	亦称雅可比行列式(Jacobian行列式)
df	全微分	total differential	$df(x_2,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$	
$^*\mathbf{R}$或$\mathbf{R}^*$	扩张的实数系	extended real number system	把$+\infty$与$-\infty$加到实数系所得的数系	亦可记为 $[-\infty,+\infty]$
$\{a_n\}$	数列	sequence of number	表示数列$a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$	
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$	无穷级数	infinite series	无穷数列的各项用加号连结而成的表达式	
$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$	叠级数	iterated series	各项均为级数的级数,其中$\{a_{mn}\}$称为二重序列	亦称累级数
$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}$	二重级数	double series	把二重序列的项a_{mn}按任意次序排列并用加号连结得到的表达式	
$\prod\limits_{n=1}^{\infty}u_n$	无穷乘积	infinite product	把无穷序列$u_1,u_2,\cdots,u_n\cdots$的各项连乘	
$f(a-0)$	左极限	left limit	$f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$	
$f(a+0)$	右极限	right limit	$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$	
$f'_-(x)$	左导数	left derivative	$f'_-(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$f'_+(x)$	右导数	right derivative	$f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$\overline{\int_a^b}f(x)dx$	黎曼上积分	Riemann upper integral	$\overline{\int_a^b}f(x)dx=\sup\limits_{P\in\mathscr{P}}S_P(f)$	
$\underline{\int_a^b}f(x)dx$	黎曼下积分	Riemann lower integral	$\underline{\int_a^b}f(x)dx=\inf\limits_{P\in\mathscr{P}}S_P(f)$	
$\int\limits_{D\subset\mathbf{R}^n}f(x)dx$	n重积分	n-fold integral	$\int\limits_{D\subset\mathbf{R}^n}f(x)dx=\iiint\limits_D\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$	
Vf	变分	variation	$Vf=f_1(x)-f(x)$	
V或Var	变差	variation	V_a^bf或$\mathrm{Var}_{[a,b]}f$表示函数f在$[a,b]$上的全变差,当$a=b$时,定义$V_a^af=0$;当$V_a^bf<\infty$时,称f为$[a,b]$上的有界变差函数	
δJ	泛函J的变分	variation of the functional J	泛函$J[Y]$的一阶变分$\delta J=\left(\frac{\partial J[Y]}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon$	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Lip 或 lip	李普希茨条件	Lipschitz condition	$f\in \mathrm{lip}\alpha$ 或 $f\in \mathrm{Lip}\alpha$ 表示函数 f 满足 α 阶李普希茨条件	
Δf	一阶向前差分	forward difference of first-order	$\Delta f(x_i)=f(x_i+h)-f(x_i)$	
$\Delta^2 f$	二阶向前差分	forward difference of second-order	$\Delta^2 f(x_i)=\Delta f(x_i+h)-\Delta f(x_i)$	
$\Delta^n f$	n 阶向前差分	forward difference of n-order	$\Delta^n f(x_i)=\Delta^{n-1}f(x_i+h)-\Delta^{n-1}f(x_i)$	
∇f	一阶向后差分	backward difference of first-order	$\nabla f(x_i)=f(x_i)-f(x_i-h)$	
$\nabla^2 f$	二阶向后差分	backward difference of second-order	$\nabla^2 f(x_i)=\nabla f(x_i)-\nabla f(x_i-h)$	
$\nabla^n f$	n 阶向后差分	backward difference of n-order	$\nabla^n f(x_i)=\nabla^{n-1}f(x_i)-\nabla^{n-1}f(x_i-h)$	
δf	一阶中心差分	centered difference of first-order	$\delta f(x_i)=f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\delta^2 f$	二阶中心差分	centered difference of second-order	$\delta^2 f(x_i)=\delta f(x_i+\frac{h}{2})-\delta f(x_i-\frac{h}{2})$	
$\delta^n f$	n 阶中心差分	centered difference of n-order	$\delta^n f(x_i)=\delta^{n-1}f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\delta^{n-1}f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\int f(x)\mathrm{d}x$	不定积分	indefinite integral	$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，C 是任意常数	
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	定积分	definite integral	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中 $\lambda=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$	
$\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	柯西主值	Cauchy principal value	$P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right)$ 或 $P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}f(x)\mathrm{d}x$	
$\int_C,\int_S,\int_V,\oint$	积分号	sign of integration	$\int_C,\int_S,\int_V,\oint$ 分别表示沿曲线 C，沿曲面 S，沿体积 V 以及沿闭曲线或闭曲面的积分	
$C(z),S(z)$	菲涅耳积分	Fresnel integral	$C(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，$S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$	
$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	二重积分	double integral	二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上的积分	
$\mathrm{Li}(x)$ 或 $\mathrm{li}(x)$	对数积分	logarithmic integral	$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$，高斯用函数 $\frac{1}{\log t}$ 表示在大整数 t 附近的素数分布的平均密度	
$\mathrm{Ei}(x)$	指数积分	exponential integral	$\mathrm{Ei}(x)=\int_x^\infty\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$，当 $x<0$ 时，在 $t=0$ 处取积分主值	在量子力学中有重要应用
$\mathrm{Si}(x)$	正弦积分	sine integral	$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{Ci}(x)$	余弦积分	cosine integral	$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{sgn}\,x$	符号函数	sign function	当 $x\in\mathrm{R}$ 时，$\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x<0);\end{cases}$ 当 $x\in\mathrm{C}$ 时，$\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}\frac{x}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$	亦称克罗内克函数
ε_{ijk}	列维-齐维塔符号	Levi-Civita symbol	$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的偶排列}),\\ -1 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的奇排列}),\\ 0 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的真重复排列})\end{cases}$	
$\varepsilon(x)$	单位阶跃函数或称赫维赛德函数	unit step function or Heaviside function	$\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ 视作广义函数时的定义为 $\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	亦可用 $\mathrm{H}(x)$ 表示

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$f*g$	f 与 g 的卷积	convolution of f and g	$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$，式中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 内的绝对可积函数	
sn x cn x dn x	雅可比椭圆函数	Jacobi elliptic function	$\mathrm{sn}\,x=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$；$\mathrm{cn}\,x=\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}$；$\mathrm{dn}\,x=\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$，其中 $x=u\sqrt{e_1-e_3}$	
$\wp(x)$	外尔斯特拉斯椭圆函数	Weierstrass's elliptic function	$\wp(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(x-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)$	
B_n 或 b_n	伯努利数	Bernoulli's numbers	解析函数 $(e^z-1)^{-1}$ 在 $z=0$ 附近的罗朗级数展开式 $\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n-1}$，则称式中系数 B_n 为伯努利数	
supp f 或 spt f	函数的支集	support of function	若 Ω 是局部紧空间，则 Ω 上函数 f 的支集是 Ω 中的集合 $\{x\mid f(x)\neq 0\}$ 的闭包，表示成 supp$f$	
$\delta(x)$	狄拉克函数	Dirac δ-function	质量分布在区域 Ω 的总量为 $\iiint_{\Omega}\delta_{M_0}(M)\mathrm{d}M=\begin{cases}1 & (M_0\in\Omega),\\ 0 & (M_0\overline{\in}\Omega),\end{cases}$ 称这样的函数为 $\delta(x)$ 函数，它在每一点的值 $\delta_{M_0}(M)=\begin{cases}0 & (M_0\neq M),\\ \infty & (M_0=M)\end{cases}$	亦称 δ 函数
am x	振幅函数	amplitude function	在形如 $I_\varphi(au)=\iint e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$ 的振荡积分中，$a(x,\theta)$ 称为振幅函数	
$\Gamma(x)$	伽马函数	gamma function	$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\ (x>0)$，$\Gamma(n+1)=n!\ (n=0,1,2,\cdots)$	亦称 Γ 函数
$\gamma(x)$	不完全伽马函数	incomplete gamma function	$\gamma(x)=\int_0^{\lambda}e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$；$\gamma(x)=\int_{\lambda}^{\infty}e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$，其中 x>0	在统计学和分子结构论中常用
$B(x,y)$	贝塔函数	beta function	$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$，$(x,y\in\mathrm{R};x>0,y>0)$；$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$	亦称 β 函数
$\Psi(x)$	普西函数	psi function	$\Psi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln\Gamma(x))$ 是函数方程 $\Psi(x+1)-\Psi(x)=\frac{1}{x}$，$\Psi(1)=-c$，$\lim_{n\to\infty}(\Psi(x+n)-\Psi(1+n))=0$ 的解	亦称 Ψ 函数
$F(k,\varphi)$	第一类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the first kind	$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k,\varphi)$	第二类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the second kind	$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\varphi)$	第三类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the third kind	$\Pi(n,k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$K(k)$	第一类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the first kind	$K(k)=F(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k)$	第二类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the second kind	$E(k)=E(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\pi/2)$	第三类完全椭圆积分	complete elliptic inlegral of the third kind	$\Pi(n,k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$P_l(x)$	勒让德多项式	Legendre polynomial	方程 $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$ 的特解，$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$P_l^m(x)$	关联勒让德函数	associated Legendre function	方程 $(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$ 的特解， $P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$ $(l,m=0,1,2,\cdots;m\leqslant l)$	
$T_n(x)$	第一类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 1st kind	方程 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 的特解， $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
$U_n(x)$	第二类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 2nd kind	方程 $(1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0$ 的特解， $U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
$L_n(x)$	拉盖尔多项式	Laguerre polynomial	方程 $xy''+(1-x)y'+ny=0$ 的特解， $L_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
$H_n(x)$	埃尔米特多项式	Hermite polynomial	方程 $y''-2xy'+2ny=0$ 的特解， $H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
H_c	超平面	hyperplane	$H_c=\{x\in\mathrm{R}^n:\langle a,x\rangle=c\}$，式中 c 为实数，a 为 R^n 中的非零元	
$F(a;b;c;x)$	超几何函数	hypergeometric function	方程 $x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$ 的特解， $F(a;b;c;x)=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称超比函数
$F(a;c;x)$	合流超几何函数	hypergeometric function of confluent type	方程 $xy''+(c-x)y'-ay=0$ 的特解， $F(a;c;x)=1+\frac{a}{c}x+\frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称汇合型超几何函数或库默尔函数
$J_l(x)$	第一类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+xy'+(x^2-l^2)y=0$ 的特解， $J_l(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{l+2k}}{k!\Gamma(l+k+1)}$	
$N_l(x)$	第二类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 2nd kind	$N_l(x)=\lim_{k\to l}\frac{J_k(x)\cos k\pi-J_{-k}(x)}{\sin k\pi}$. 它是贝塞尔方程的第二解，可由第一类柱贝塞尔函数定义	亦称柱汉克尔函数
$H_l^{(1)}(x)$ $H_l^{(2)}(x)$	第三类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 3rd kind or cylindrical Hankel function	$H_l^{(1)}(x)=J_l(x)+\mathrm{i}N_l(x)$，$H_l^{(2)}(x)=J_l(x)-\mathrm{i}N_l(x)$. 它们是第一类和第二类柱贝塞尔的线性组合，是贝塞尔方程的两个线性无关解	亦称柱汉克尔函数
$I_l(x)$ $K_l(x)$	修正的柱贝塞尔函数	modified cylindrical Bessel function	方程 $x^2y''+xy'-(x^2+l^2)y=0$ 的特解， $I_l(x)=\mathrm{i}^{-l}J_l(\mathrm{i}x)$， $K_l(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}^{l+1}[J_l(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}N_l(\mathrm{i}x)]$	亦称变形的柱贝塞尔函数
$j_l(x)$	第一类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0$ 的特解， $j_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$	
$n_l(x)$	第二类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 2nd kind	$n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(x)$	亦称球诺伊曼函数，也记为 $y_l(x)$
$h_l^{(1)}(x)$ $h_l^{(2)}(x)$	第三类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 3rd kind	$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+\mathrm{i}n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$， $h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-\mathrm{i}n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$	修正的球贝塞尔函数，分别记为 $i_l(x)$ 与 $k_l(x)$
∇	矢量微分算子	operator of vector differentiation	$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$	亦称哈密顿算子
grad，∇	梯度	gradient	若 $f:D(\subseteq\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}$，则 f 在 $\boldsymbol{a}\in D$ 的梯度为 $\mathrm{grad}f(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$	
div，$\nabla\cdot$	散度	divergence	若向量函数 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(P,Q,R)$ 连续可微，则向量场的散度为 $\mathrm{div}\boldsymbol{f}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$	
rot，$\nabla\times$	旋度	rotation	$\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$ 是三维向量函数，$\boldsymbol{f}$ 的旋度为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Δ,∇^2	拉普拉斯算子	Laplacian operator	$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	亦称调和算子
$\square$	达朗贝尔算子	d'Alembertain operator	$\square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	c 为电磁波在真空中的传播速度
D	微分算子	differential operator	即$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=Df(t)$，$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}=D^2f(t)$，…，$\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}=D^nf(t)$	
Λ	拓扑双曲不变集	topological hyperbolic set	$f:M\to M$ 是微分同胚. f 的不变闭子集 $\Lambda\subset M$ 称为拓扑双曲不变集	
Diff′	微分同胚空间	differential homeomorphic space	Diff′(M)表示 M 全体微分同胚构成的空间	
Homeo	同胚空间	homeomorphic space	Homeo(M)表示 M 的全体同胚构成的空间	
Proj	射影基向量	base vector of projective	Proj$k$ 表示 P—标架的第 k 个基向量	
Ob	阻碍集	obstruction sets	Ob(S)表示向量场 S 的阻碍集	
Log$z$	对数函数	logarithmic function	$w=\mathrm{Log}z=\log\|z\|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，z 为复数	
$\sin z$	复变正弦函数	sine function of a complex variable	$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，式中 z 为复变数. 当 z 为实数时与数学分析中的正弦函数的定义一致	
$\cos z$	复变余弦函数	cosine function of a complex variable	$\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，式中 z 为复变数. 当 z 为实数时与数学分析中的余弦函数的定义一致	
$\tan z$	复变正切函数	tangent function of a complex variable	$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$	
Arc $\sin z$	复变反正弦函数	inverse sine function of a complex variable	Arc $\sin z=-\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$，式中 z 为复变数，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}$	
Arc $\cos z$	复变反余弦函数	inverse cosine function of a complex variable	Arc $\cos z=-\mathrm{i}\log(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2})$，式中 z 为复变数	
Arc $\tan z$	复变反正切函数	inverse tangent function of a complex variable	Arc $\tan z=\frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}$，式中 z 为复变数	
L(z)	分式线性变换	fractional linear transformation	$\mathrm{L}(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，式中 a,b,c,d 都是复常数，且 $ad-bc\neq0$	若 a,b,c,d 都是实数，且 $ad-bc>0$ 称此为富克斯变换
(a,b,c,d)	交比	cross ratio	$(a,b,c,d)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$，式中 a,b,c,d 是任意四个互异的复数	亦称非调和比
$n(\gamma;a)$	环绕数	winding number	点 a 关于 γ 的环绕数，$n(\gamma;a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}$，式中 γ 是一条可求长的闭路径，a 点不在 γ 上	亦称指示数或卷绕数
Res$f(z)$	留数	residue	在 $f(z)$ 的孤立奇点 a 的去心邻域内的罗朗级数展开式中，$1/(z-a)$ 项的系数为 c_{-1}，即 $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=a}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\substack{\|z-a\|=\rho\\(0<\rho<R)}}f(z)\mathrm{d}z$	亦称残数
$L(s)$	拉普拉斯变换	Laplace transform	$f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $L(s)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$	
$F(\xi)$	傅里叶变换	Fourier transform	$f(x)$ 的傅里叶变换为 $F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x$	
$F_c(\xi)$	傅里叶余弦变换	Fourier cosine transform	$f(x)$ 的傅里叶余弦变换为 $F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\xi x\mathrm{d}x$	
$F_s(\xi)$	傅里叶正弦变换	Fourier sine transform	$f(x)$ 的傅里叶正弦变换为 $F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\xi x\mathrm{d}x$	
$M(z)$	梅林变换	Mellin transform	$f(x)$ 的梅林变换为 $M(z)=\int_0^\infty f(x)x^{z-1}\mathrm{d}x$	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H(\xi)$	汉克尔变换	Hankel transform	$f(x)$ 的 v 阶汉克尔变换为 $H(\xi)=\int_0^\infty xf(x)J_v(\xi x)\mathrm{d}x$	
$G(n)$	勒让德变换	Legendre transform	$f(x)$ 的勒让德变换为 $G(n)=\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)\mathrm{d}x$	
$\mathrm{erf}(z)$	概率积分	probability integral	$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\mathrm{erfc}(z)$	余概率积分	complement probability in- tegral	$\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\Phi c(z)$	正态概率积分	normal probability inte-gral	$\Phi_c(z)=\int_{-\infty}^z \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{u}}\mathrm{d}u$	
${}_pF_q$	超几何级数	hypergeometric series	超几何级数的一般形式是 ${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q;z)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n z^n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n n!}$	
E_n 或 γ	欧拉常数	Euler constant	$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ $\approx 0.5772156649015328606065 1209\cdots$	
$\{f,D\}$	解析函数元素	holomorphic function el-ement	复平面上的区域 D 连同在其内全纯的一个函数 $f(z)$，合成为解析函数元素	简称函数元素
$k(z)$	克贝函数	Koebe function	$k(z)=z(1-z)^{-2}$，$k_\theta(z)=\mathrm{e}^{i\theta}k(\mathrm{e}^{i\theta}z)$，$\beta=\lim_{n\to\infty}\lvert a_n\rvert/n\leqslant 1$. 其中 $k(z)$ 是 S 类上许多泛函极值问题的极值函数，称 $k_\theta(z)$ 为克贝函数的旋转	
$I_p(r)$	哈代凸性函数	Hardy's convexity func-tion	$I_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lvert f(re^{i\theta})\rvert^p\mathrm{d}\theta \quad (0<r<R)$	
B	布洛赫常数	Bloch's constant	$B=\inf\{\beta(f)\mid f\in\mathscr{F}\}$，式中 $\beta(f)=\sup\{r\mid r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含的单叶圆的半径$\}$	已经证明 $\sqrt{3}/4\leqslant B\leqslant 0.47$
L	兰道常数	Landau's constant	$L=\inf\{\lambda(f),f\in\mathscr{F}\}$，式中 $\lambda(f)=\sup\{r\mid r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含圆的半径，$f\in\mathscr{F}\}$	已经证明 $0.5\leqslant L\leqslant 0.54326$
$M(\Gamma)$	曲线族 Γ 的模	module of a family of curves Γ	$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in p(\Gamma)}\int_D \rho^2\lvert\mathrm{d}z\rvert$，其中 Γ 是平面区域 D 上的若尔当曲线族，ρ 是定义在 D 上的非负波莱尔函数	
$\mathrm{M}(f(\Gamma))$	拟共形映射	quasiconformal mapping	f 满足 Beltrami 微分方程 $f_{\bar z}=\mu f_z$，称 f 为 μ 共形映射，如 $\lVert\mu\rVert_\infty<1$，则称 f 为拟共形映射	亦称拟保角映射
$w(z,a,D)$	调和测度	harmonic measure	a 关于区域 D 的调和测度 $w(z,a,D)$ 是 z 对 (a,b) 的视角. $w(z,a,D)=\frac{1}{\pi}\arg\frac{b-z}{a-z}$	$0\leqslant w(z,x,d)\leqslant 1$
$g(z,a)$ 或 $\mathrm{G}(z,a)$	格林函数	Green's function	函数 $g(z,a)$ 在 D 内奇点 a 的格林函数 $g(z,a)=\log\left\lvert\frac{z-\bar a}{z-a}\right\rvert$	
$\mathrm{E}(z,p)$	外尔斯特拉斯基本因式	Weierstrass basis factor	$E(z,p)=(1-z)\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\}$	
$T(r,f)$	奈望林纳特征函数	Nevanlinna's character-istic function	满足 $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=\infty$ 的 $T(r,f)$ 是 $f(z)$ 的奈望林纳特征函数	亦称奈望林纳记号，可记为 $T(r)$
$n(r,a)$	a 点个数	number of a-point	$n(r,a)$ 是方程 $f(x)=a$ 在 $\lvert z\rvert\leqslant r$ 内解的个数(包括计算重数)	
$\delta(a)$	亏量	defect	$w(z)$ 关于 a 的亏量 $\delta(a)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,a)}{T(r,w)}$	亦称亏值
$\mathring{\mathrm{T}}(r,w)$	球面特征函数	spherical characteristic function	$\mathring{T}(r,w)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{A(t,w)}{t}\mathrm{d}t$，式中 $w(z)$ 为代数体函数	
$M(r,f)$	整函数的最大模	maximum modulus of entire function	$f(z)$ 的最大模 $M(r,f)=\max_{\lvert z\rvert\leqslant r}\lvert f(z)\rvert$；$f(z)$ 的 p 次整函数的模 $M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lvert f(re^{i\theta})\rvert\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}(0<p<+\infty)$；超越整函数 $f(z)$ 的最大模 $M_\infty(r,f)=\max_{\lvert z\rvert=r}\lvert f(z)\rvert_{p=+\infty}$	

符 号	中文名称	英文名称	意义或举例	备 注
$B(z)$	布拉施克乘积	Blaschke product	$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lvert a_n\rvert}{a_n}\left(\frac{a_n-a}{1-\bar{a}_n z}\right)$，式中 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 是复数序列，$0<a_n<1$	
H^p	哈代空间	Hardy space	所有哈代函数构成的空间，即 $H^p(D)=\{f\mid f(z)$ 在 D 内解析，$\sup_{0\leqslant r<1}\left(\int_0^{2\pi}\lvert f(re^{i\theta})\rvert^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}<+\infty\}$，其中 $D=\{z\mid \lvert z\rvert<1\}$	H^p 是由哈代于 1915 年提出的
$S(z)$	奇异内函数	singular inner function	$S(z)=\exp\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{d}\mu(t)\}$，式中 $\mu(t)$是非减的有界变差函数，其导数几乎处处等于零	
$F(z)$	外函数	outer function	$F(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\lvert f(e^{it})\rvert\mathrm{d}t\right\}$	
BMOA	有界平均振荡解析函数类	analysis function class of the bounded mean oscillating	$\mathrm{BMOA}(D)=\{f\mid f(z)$ 是单位圆周 T 上的可积函数，$u(e^{i\theta})$ 的积分$\sup_{T\subset I}\frac{1}{\lvert I\rvert}\int_I f(u-u_I)\mathrm{d}\theta<+\infty\}$，式中 u 为单圆周 T 上的可积函数，I 是 T 的子弧，$\lvert I\rvert$ 是 I 的长度	
B_n	C^n 中单位球	unit ball in a C^n	$B_n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid \lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+\cdots+\lvert z_n\rvert^2<1\}$	
$\mathrm{Aut}(D)$	域的全纯自同构群	holomorphic automorphism group of a domain	表示域 D 的全纯自同构的全体组成的群. 它是 D 上的拓扑变换群	
∂D	域的边界	boundary of a domain	域 D 和它的闭包 $\bar{D}$ 的差集，即 $\partial D=\bar{D}\backslash \dot{D}$	
$\mathrm{Hol}(D)$	全纯复线性空间	holomorphic complex linear space	表示 D 上所有全纯函数构成的复线性空间	
$\bar{\partial}$	$\bar{\partial}$算子	$\bar{\partial}$-operator	$\bar{\partial}:C^1(D)\to L_D^n,u\mapsto\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ 称为 $\bar{\partial}$算子	
$H(z,\bar{z})$	正定埃尔米特方阵	positive definite Hermitian matrix	$H(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}h_{11}(z,\bar{z}) & \cdots & h_{1n}(z,\bar{z})\\ \vdots & & \vdots\\ h_{n1}(z,\bar{z}) & \cdots & h_{nn}(z,\bar{z})\end{pmatrix}$，式中 $h_{jk}(z,\bar{z})$ 在拓扑积 $\varphi_a(U_x)\times\overline{\varphi_a(U_a)}$ 上全纯	互逆正定埃尔米特方阵记为 $\tilde{H}(z,\bar{z})$
$B_\mu^2(M)$	可测复线性空间	measurable complex linear space	$B_\mu^2(M)=\mathrm{Hol}(M)\cap L_\mu^2(M)$，其中 M 为 n 维复流形，$\mu$ 为 M 上任给的测度	
$N(\Omega)$	奈望林纳函数类	Nevanlinna function class	Ω 是 C^n 中的对称域，b 是特征边界，若 $\Omega\to\mathrm{C}f$ 在 Ω 中全纯，且满足 $\sup_{0<r<1}\int_b\log^+\lvert f(r,\zeta)\rvert\mathrm{d}\sigma(\zeta)<+\infty$，则 f 属于奈望林纳函数类	
$\beta(\Omega)$	布洛赫空间	Bloch space	Ω 上全体布洛赫函数的集合，称为布洛赫空间. Ω 是 C^n 中齐线性有界域	
$\rho(\ ,\ )$	点集的距离	distance between two point sets	$\rho(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\{\rho(x,y)\}$	
F_σ	F_σ 型集	set of type F_σ	表示可数个闭集的并集	F_σ 是波莱尔集
G_δ	G_δ 型集	set of type G_δ	表示可数个开集的交集	G_δ 是波莱尔集
mE; $\lvert E\rvert$	勒贝格测度	Lebesgue measure	若 $E\subset\mathrm{R}^n$ 为勒贝格可测集，则 E 的勒贝格外测度称为勒贝格测度	
$m^*(E)$; $\lvert E\rvert_e$	勒贝格外测度	Lebesgue outer measure	$m^*(E)=\inf\{\sum_{i\in\mathrm{N}}\lvert I_i\rvert\mid\{I_i\}$ 为覆盖 E 的可数个开集$\}$	
$m_*(E)$; $\lvert E\rvert_i$	勒贝格内测度	Lebesgue inner measure	$m_*(E)=\sup\{m(F)\mid F$ 为闭集，且 $F\subset E\}$	
$\aleph_0$	可列集的势	cardinal number of countable set	每一个无穷集的势都是某个阿列夫，自然数集的势是$\aleph_0$	
$\aleph$或 C	连续集的势	cardinal number of continuous set	与区间$[0,1]$对等的集的势记为 N 或 C. 连续集的势 $C=2^{\aleph_0}$	亦称基数
CH	连续统假设	continuum hypothesis	康托尔猜测：实数集的一切无穷子集或者与自然数集等势或者与连续统等势	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
GCH	广义连续统假设	generalized continuum hypothesis	假设:1. 对任一序数 α, $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$; 2. 对任二无穷势 κ,λ, 若 $\kappa\leqslant\lambda\leqslant 2^{\aleph}$, 则 $\lambda=\kappa$ 或者 $\lambda=2^{\aleph}$	
$H_\alpha(E)$	豪斯多夫测度	Hausdorff measure	$H_\alpha(E)=\lim\limits_{E\to 0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\sup\limits_{\varepsilon>0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)$, 其中, $H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\inf\sum\limits_k\delta(E_k)^\alpha$, 且 $\delta(E_k)$ 为 R^n 的子集 E_k 的直径	
$\psi(x)$	狄利克雷函数	Dirichlet function	$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理点},\\ 0, & x\text{为无理点}\end{cases}$	亦可用 $D(x)$ 表示
$\chi(n)$或 $\chi_q(n)$或 $\chi(n)\bmod q$	狄利克雷特征	Dirichlet character	整数集上的函数 $\chi(n)=\begin{cases}\exp\left[2\pi\left(\frac{mr}{c}+\frac{m_0r_0}{c_0}+\frac{m_1r_1}{c_1}+\cdots+\frac{m_sr_s}{c_s}\right)\right] & ((n,q)=1)\\ 0 & ((n,p)>1)\end{cases}$	亦称 q 的特征
$\{A,B\}$	泊松符号	Poisson symbol	$\{A,B\}=\sum\limits_{j=1}^n\left(\frac{\partial A}{\partial\xi_j}\frac{\partial B}{\partial x_j}-\frac{\partial B}{\partial\xi_j}\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)$	亦称泊松括号
$\vert I\vert$	I 区间的体积	volume of I-interval	E 为 R^n 中的有界点集, I 为包含 E 的任何有界区间, 则以 $\vert I\vert$ 表示区间 I 的体积	
a. e. p. p.	几乎处处	almost everywhere	若命题 $P(x)$ 与集合 $E\subset\mathrm{R}^n$ 有关, 且零集 $E_0\subset E$, 对于任意 $x\in E\backslash E_0$, $P(x)$ 均成立, 则称 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立, 记为 $P(x)$a. e. 或 $P(x)$p. p.	a. c. 是英文 almost everywhere 的首字母; *p. p.* 是法文 presque partout 的首字母
$M(x)$	上极限函数	upper limit function	$M(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}M(x,\delta)$, 其中 $M(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的上确界	
$m(x)$	下极限函数	lower limit function	$m(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}m(x,\delta)$, 其中 $m(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的下确界	
$\chi_A(x)$	集合的特征函数	characteristic function of a set	$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$	
ap $\overline{\lim}$	近似上极限	approximate upper limit	ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\inf\limits_E\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x)$	
ap $\underline{\lim}$	近似下极限	approximate lower limit	ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=(\sup\limits_E\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x))$	
ap lim	近似极限	approximate limit	ap $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 表示 ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=$ ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$	
$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$	勒贝格积分	Lebesgue integral	若 $f(x)$ 是可测集 $E\subset\mathrm{R}^n$ 上的 (L) 可测函数, 则称 $(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 为勒贝格积分	简称 L 积分
$D^-f(x_0)$	左上导数	left upper derivative	$D^-f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_-f(x_0)$	左下导数	left lower derivative	$D_-f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D^+f(x_0)$	右上导数	right upper derivative	$D^+f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_+f(x_0)$	右下导数	right lower derivative	$D_+f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$\ll$	绝对连续	absolute continuity	$\gamma\ll\mu$ 表示广义测度 γ 关于 μ 是绝对连续的. 即当 $\vert\mu\vert(A)=0$ 时有 $\gamma(A)=0$, 其中 $\vert\mu\vert$ 是 μ 的全变差	
$\perp$	相互奇异	mutually singular	$\gamma\perp\mu$ 表示 γ 与 μ 是相互奇异的, 即存在两个不相交的可测集 A 与 B 使得 $\Omega=A\cup B$, 且对任意可测集 E, 有 $\vert\mu\vert(A\cup E)=\vert\gamma\vert(B\cap E)=0$, 其中 $\vert\gamma\vert$, $\vert\mu\vert$ 分别是 γ 和 μ 的全变差	
$(\Gamma)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	盖尔范德积分	Gelfand integral	设 $x(t)$ 为 Ω 到巴拿赫空间 X 的向量函数, 若对 $\forall f\in X^*$, 当 $f(x(t))$ 在 Ω 上可积时必存在 $x^{**}\in X$ 使 $x^{**}=\int_\Omega f(x(t))\mathrm{d}\mu$, 则称 x^{**} 为盖尔范德积分	亦称盖尔范德意义下的弱*积分

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu$	佩蒂斯积分	Pettis integral	若$\int_A f(x(t))\mathrm{d}\mu = f(x_A)$，则$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu = x_A$	亦称弱积分
$(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	博赫纳积分	Borchner integral	1. 若 $x(t)$ 是 Ω 上可测函数，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\mu(A_K)$； 2. 对于一般的强可测函数 $x(t)$，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}(B)\int_\Omega x_n(t)\mathrm{d}\mu$.	
$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	伯克霍夫积分	Birkhoff integral	$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \bigcap_\Delta J(x,\Delta)$，其中 $J(x,\Delta)$ 是 $\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)x(t_i) \mid t_i \in A_i\}$ 的凸闭包	
$\mathscr{U}_g^*(E)$	(L-S)外测度	$(L-S)$outer measure	$\mathscr{U}_g^*(E) = \inf\{\sum_{K\geqslant 1}\mathscr{U}_g(I_k) \mid \{I_k\}$ 为可数个覆盖 E 的左开右闭区间$\}$	
$\mathscr{U}_g(E)$	(L-S)测度	$(L-S)$measure	当任意点集 T 能分解成 E 内部分 $T\cap E^c$ 和 E 外部分 $T\cap E^c$ 时，相应的(L-S)外测度具有可加性，则 E 称为 $g(x)$的(L-S)可测集，此时外测度 $\mathscr{U}_g^*(E)$就称为 E 的由分布函数$g(x)$引出的(L-S)测度	
$(L\text{-}S)\int_E$	(L-S)积分	(L-S)integral	$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_E f^+(x)\mathrm{d}g(x) - \int_E f^-(x)\mathrm{d}g(x)$，其中 $f^+(x), f^-(x)$分别为 $f(x)$正部和负部，且至少有一个有极限	(L-S)积分是勒贝格-斯蒂尔切斯积分的简称
$D(*)\int_a^b$	狭义当茹瓦积分	Denjoy integral in the restricted sense	$(D(*))\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，其中 $F(x)$ 是狭义一般绝对连续函数，且在$[a,b]$上 $F'(x) = f(x)$ $a.e.$	狭义当茹瓦积分是勒贝格积分和黎曼积分的一种推广
$D_{\text{ap}}f(x_0)$	近似导数	approximate derivative	$D_{\text{ap}}f(x_0) = \text{ap}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\underline{D}_{\text{ap}}f(x_0)$	近似下导数	approximate lower derivative	$\underline{D}_{\text{ap}}f(x_0) = \text{ap}\varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\overline{D}_{\text{ap}}f(x_0)$	近似上导数	approximate upper derivative	$\overline{D}_{\text{ap}}f(x_0) = \text{ap}\varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
Π_K	庞特里亚金空间	Pontrjagin space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = k < +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为具有正(负)指标的庞特里亚金空间	
π	克莱因空间	Klein space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为克莱因空间	
$\rho(T)$	正则集	Regular set	设 T 是空间 X 的线性算子，如果 $\lambda I - T$ 是正则算子，那么称 λ 为 T 的正则点. 复平面上正则点全体称为正则集	亦称豫解集
$\sigma(T)$或$\text{sp}(T)$	谱集	spectrum	$\rho(T)$ 的余集 $C\backslash\rho(T)$. $\sigma_P(T), \sigma_a(T), \sigma_r(T), \sigma_c(T)$ 分别表示点谱、近似点谱、剩余谱、连续谱	
$\deg(T,\Omega,P)$	拓扑度	topological degree	映射T在区域Ω上关于P点的拓扑度是一个整数，它是方程 $T(x) = P$ 在 Ω 中解的"代数个数"的某种稳定的度量	
$F((x))$	形式幂级数域	domain of formal power series	由 F 上关于 X 的形式幂级数 $\alpha(x) = q_r x^r + q_{r+1}x^{r+1} + \cdots$ $(q_r \neq 0, r \in Z)$ 按照通常加、乘运算组成一个域	
$\delta(x)$	狄拉克 δ 函数	Dirac δ-function	$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & (x=0), \\ 0 & (x\neq 0). \end{cases}$	
$e\subset(A)$	平衡包	equilibrium hull	包含 A 的最小平衡集称为 A 的平衡包	
$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	佩龙积分	Perron integral	$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \inf\{U(b)\} = \sup\{V(b)\}$，其中$U(x)$和 $V(x)$ 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的上函数和下函数	$f(x)$ 在$[a,b]$上的佩龙积分值和勒贝格积分值相等
$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	瓦尔德积分	Wald integral	$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_G(G(b)) - (G(a)) = \inf(H(b) - H(a))$，其中 $H(x), G(x)$ 各为 $f(x)$ 的瓦尔德上、下函数	瓦尔德积分与佩龙积分等价

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	亨斯托克积分	Henstock integral	一种定积分，亨斯托克积分包括(R)积分，也包括(L)积分	
$(M)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	马克仙积分	Mcshane integral	一种定积分，马克仙积分与勒贝格积分等价	
$f_n \xrightarrow{L^p} f$	L^p 的强收敛	strong convergence in L^p	若 $f_n(x), f(x) \in L^p(E), (1 \leqslant p < +\infty, n = 1,2,\cdots,)$，且存在 $\|f_n - f\|_p \to 0 (n \to \infty)$，则称$\{f_n(x)\}$强收敛于 $f(x)$	亦称按 L^p 范数收敛于 $f(x)$
$f_n \xrightarrow{W} f$	L^p 的弱收敛	weak convergence in L^p	若 $f_n(x), f(x) \in L^p(E), g(x) \in L^q(E), (1 < p, q < +\infty, n = 1,2,\cdots,)$ 且 $1/p + 1/q = 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$ 成立，则称$\{f_n(x)\}$弱收敛于 $f(x)$	
l^p	l^p 空间	l^p space	所有满足 $\|x\|_p = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p)^{1/p} < +\infty$ 的数列 x 组成之集	
l^∞	l^∞空间	l^∞ space	满足 $\|x_n\| \leqslant M < +\infty (n = 1,2,\cdots,)$ 的所有数列之集．x 的范数由 $\|x\|_\infty = \sup\limits_n\{\|x_n\|\}$ 定义	
$\Lambda(\psi)$	洛伦茨空间	Lorentz space	$\Lambda(\psi) = \{f \in S[0,1] \mid \|f\| < +\infty\}$ 称为洛伦茨空间	
L_{Φ}	奥尔里奇空间	Orlicz space	所有使得 $\|f\| = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \int_{R^n} \Phi(\lambda^{-1}\|f(t)\|)\mathrm{d}t \leqslant 1\right\} < +\infty$ 成立的 R 上的可测函数 f 之集	
ent	拓扑熵	toplogical entropy	这是用于拓扑动力学中的一个概念	
$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	雅可比多项式	Jacobi polynomials	$[-1,1]$上关于权 $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ 的正交多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n!2^n\omega(x)\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n\omega(x)]$ $(n = 1,2,\cdots)$	
$r_n(x)$	拉德马赫尔函数	Rademacher functions	$r_n(x) = \text{sig}\ n\sin 2^{n+1}x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, n = 1,2,\cdots)$	
$W_n(x)$	沃尔什函数	Walsh functions	$W_n = r_{k_1}(x)r_{k_2}(x)\cdots r_{k_p}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$	
$B_n(f,x)$	伯恩施坦多项式	Bernstein polynomial	$B_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^x(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$	亦称伯恩施坦算子
$H_\varepsilon(A)$	度量熵	metric entropy	设 A 是巴拿赫空间 X 的紧子集，A 的 ε 覆盖$\{U_k\}_{k=1}^n$，令 $N_\varepsilon(A) = \min n$，则 $H_\varepsilon(A) = \log N_\varepsilon(A)$	
$H_\varepsilon^X(A)$	A 关于 X 的熵	entropy of A with respect to X	设 A 是巴拿赫空间 X 的紧子集，A 的 ε 网$\{x_k\}_{k=1}^p$，令 $P_\varepsilon(A) = \min P$，则 $H_\varepsilon^X(A) = \log P_\varepsilon(A)$	
$C_\varepsilon(A)$	容量	capacity	设 A 是巴拿赫空间 X 的紧子集，A 的 $\varepsilon\gamma$ 分离$\{y_k\}_{k=1}^m$，令 $M_\varepsilon(A) = \max m$，则 $H_\varepsilon(A) = \log M_\varepsilon(A)$	
L_n	勒贝格常数	Lebesgue constant	$L_n = \frac{4}{\pi^2}\log(n+1) + o(1)$	
$\deg(\pi)$	分歧阶	ramification order	使 π 在 A_k 恒为 1 的最小整数 k	
PX	X 的子集簇	subsets of X	集合 X 的一切子集组成的集合	亦称幂集合
Δ	对称差	symmetric difference	$A\Delta B$ 的对称差指属于 A 但不属于 B，或属于 B 但不属于 A 的一切元素组成的集合	
$P \cdot P \cdot P$	近乎处处	approximately everywhere	设 $P = P(x)$ 是一个与 x 无关的性质，如果使 P 不成立的点全体所成之集 A 为零内容集，则称 P 是近乎处处成立的	
$q \cdot P \cdot$	拟乎处处	quasi-everywhere	设 $P=P(x)$是一个与 x 无关的性质，如果 A 为零外容集，则称 P 是拟乎处处成立的	
$\mathrm{cap}(G)$	χ 容量	χ-capacity	对于相对紧的开集G，记$\mathrm{cap}(G) = \int \mathrm{d}\sigma_G$，其中 σ_G 是由 $R_{\omega x}^G = \chi^* \sigma_G$ 所确定的惟一测度	
U_K^μ	位势	potential	测度 μ 的 K 位势为 $U_K^\mu = \int_\Theta K(x,y)d\mu(y) \quad (x \in \Omega)$	
U_α^μ	里斯位势	Riesz potential	对于位势 U_K^μ，当 $\Omega = R^n (n \geqslant 3), 0 < \alpha < n, \kappa(x,y) = \|x-y\|^{\alpha-n}$ 时，称为里斯位势	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
U_ξ^g	牛顿位势	Newtonian potential	对于里斯位势 $\alpha = 2$ 时，称为牛顿位势	
(f,g)	内积	inter product	$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}u(x)$	
σ	舒伯特符号	Schubert symbol	$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 表示 n 个整数组成的一个序列，其中 $1 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n \leqslant m$	
Lin E	线性包	linear hull	$\mathrm{Lin}E = \{x \mid x = \sum_{y\in E} \lambda_y y, \lambda_y \in R$，有限个不为零$\}$	Lin$E$ 亦表示凸集 E 的支撑子空间
affE	仿射包	affine hull	$\mathrm{aff}E = \{x \mid x = \sum_{y\in E} \lambda_y y, \lambda_y \in R$，有限个不为零，$\sum_{y\in E} \lambda_y = 1\}$	
coneE	锥包	cone hull	$\mathrm{cone}E = \{x \mid x = \lambda y, y \in E, \lambda > 0\} = \bigcup_{\lambda>0} \lambda E$	
coE	凸包(凸集)	covex hull	$\mathrm{co}E = \{x \mid x = \sum_{y\in E} \lambda_y y, \lambda_y \in [0,1]$，有限个不为零，$\sum_{y\in E} \lambda_y = 1\}$	
clcoE	闭凸包	closed convex hull	以 C 为内集的全体闭包凸集的交	
epif	上图	epigraph	$\mathrm{epi}f = \{(x,a) \in X \times R \mid f(x) \leqslant a\}$	
K	核	kernel	$C \subset R^n, \forall\ y \in C, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，满足 $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ 的全体 $x \in C$ 的集合称为 C 的核	
exp C	暴露点集	exposing point set	C 的全体暴露点的集合	
ext C	极点集	extreme point set	C 的全体极点的集合	
$f'(x:y)$	单边方向导数	one-side directional derivative	$f'(x:y) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}$	
$\partial f(x)$	次微分	subdifferential	$f(x)$ 在 X 的次梯度的全体	
$I_V(M)$	奇点的指标	index of critical points	V 的孤立奇点 M 沿曲线 C_r 的旋转数	
u. a. p.	一致概周期函数	uniformly almost periodic functions	设 $f(t,x) \in C(\mathrm{R} \times D, E^n)$，$S$ 是 D 的紧集，若对任给序列 $\{a'_n\}$，存在子序列 $\{a_n\} \subset \{a'_n\}$，使 $T_a f(t,x) = \lim_{n\to\infty} f(t+a_n, x)$ 在 $R \times S$ 上一致地成立，则称 $f(t,x)$ 是一致概周期函数，$x \in D$	
a. a. p.	渐进概周期函数	asymptotically almost periodic functions	如果 $\varphi(t)$ 有分解式 $\varphi(t) = p(t) + q(t)$，其中 $p(t)$ 是 R 上的概周期函数，$q(t)$ 是定义在 R^+（或 R^-）上的连续函数，当 $t \to +\infty$ 或 $(t \to -\infty)$ 时有 $q(t) \to 0$，则称 $\varphi(t)$ 是 R^+（或 R^-）上的渐进概周期函数	
RFDE(f)	滞后型泛函微分方程	retarded function differential equation	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x(t), x(t-h_1), \cdots, x(t-h_m))$. $(h_1, h_2, \cdots, h_m$ 是正定数，$h_1 < h_2 < \cdots < h_m)$	RFDE 是英文名中四个单词的第一个字母
H. S.	哈密顿系统	Hamilton's system	指形如 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}, H = H(p,q,t)$ 的一阶偏微分方程	亦称典型系统或正则系统
$\int^x a(s)\mathrm{d}s$	反导数	antiderivative	表示 $a(x)$ 的反导数	

概率统计(Probability & Statistics)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
P, P_r	概率	probability	$P(E)$表示事件 E 的概率，$P_r(\xi)$表示事件 ξ 的概率	$P_{n,m}$ 表示在 n 次独立实验中出现 m 次事件的概率
$P(\mid)$	条件概率	conditional probability	$P(A \mid B)$表示发生了事件 B 的条件下，事件 A 的概率	
E, M	期望（或均值）	expectation (or mean)	$E\xi, M\xi$ 表示随机变量 ξ 的期望(或均值)	亦可记为 $E(\xi)$，$M(\xi)$
D, σ^2	方差	variance	$D\xi$，$\sigma^2\xi$ 表示随机变量 ξ 的方差	亦可记为 $D(\xi)$，$\sigma^2(\xi)$，$\mathrm{Var}\xi$

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
cov	协方差	covariance	$\mathrm{cov}(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的协方差	或记为$\sigma_{\xi,\eta}$
$E(\mid)$，$M(\mid)$	条件期望（或条件均值）	conditional expectation or conditional mean	$E(\xi\mid y)$，$M(\xi\mid y)$表示随机变量ξ关于条件y的条件期望（或均值）	
ρ，r	相关系数	correlation coefficient	$\rho(\xi,\eta)$，$\rho_{\xi,\eta}$，$r(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的相关系数	在不致误会时，亦可记为ρ或r
Ω	基本事件空间	elementary event space	Ω是由n个基本事件$\omega_i(i\in\mathrm{N})$构成的基本事件空间，即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$	
$F_n(\ )$	频率	frequency	频率$F_n(A)$等于频数$f_n(A)$与试验总次数n之比，即 $F_n(A)=\dfrac{f_n(A)}{n}$	
$F(\mid)$	条件分布函数	conditional distribution function	ξ和η为随机变量，则称$F(y\mid x)$为在$\xi=x$条件下η的条件分布函数	
ν_k	k阶原点矩	origin moment of the k-th order	ξ的k阶原点矩$\nu_k=E(\xi^k)$	
μ_k	k阶中心矩	central moment of the k-th order	ξ的k阶中心矩$\mu_k=E(\xi-E\xi)^k$	
α_k	k阶原点绝对矩	origin absolute moment of the$k$-th order	ξ的k阶原点绝对矩$\alpha_k=E\lvert\xi\rvert^k$	
β_k	k阶中心绝对矩	central absolute moment of the k-th order	ξ的k阶中心绝对矩$\beta_k=E\lvert\xi-E\xi\rvert^k$	
$E(\ )$	混合矩	mixed moment	若$E\lvert\xi^k\eta^l\rvert<\infty$，$k,l\in\mathrm{N}$，则称$E(\xi^k\eta^l)$为$\xi$和$\eta$的$k+l$阶混合矩	
$E[\ ]$	中心混合矩	central mixed moment	若$E(\lvert\xi-E\xi\rvert^k\lvert\eta-E\eta\rvert^l)<\infty$，且$k,l\in\mathrm{N}$，则称$E[(\xi-E\xi)^k(\eta-E\eta)^l]$为$\xi$和$\eta$的$k+l$阶中心混合矩	
$B(n,p)$	二项分布	binomial distribution	分布列为$b(k;n,p)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}p^kq^{n-k}$ $(0<p<1,q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n)$	
$NB(m,p)$	负二项分布	negative binomial distribution	密度函数为$p_x=\Gamma(m+x)[\Gamma(m)x!]^{-1}p^mq^x$（$m$为整数，$0<p<1$，$q=1-p$，$x=0,1,2,\cdots$）	
$G(p)$ 或 $g(k;p)$	几何分布	geometric distribution	密度函数为 $p_x=pq^x(0<p<1,q=1-p,x=0,1,2,\cdots)$	
$H(N,n,p)$	超几何分布	hypergeometric distribution	密度函数为$p_x=\begin{pmatrix}Np\\x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Nq\\n-x\end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix}N\\n\end{pmatrix}$（$x$为整数，$N,Np,n$为正整数，$N\geqslant n$，$0\leqslant x\leqslant Np$，$0\leqslant n-x\leqslant Nq$，$0<p<1$，$q=1-p$）	
$M(n;p_1,\cdots,p_{k+1})$	多维超几何分布	multiple hypergeometric distribution	密度函数为$p_{x_i}=\begin{pmatrix}Np_1\\x_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}Np_{k+1}\\x_{k+1}\end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix}N\\n\end{pmatrix}$ （$i=1,2,\cdots,k+1$），$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$是整数，$N,Np_1,\cdots,Np_{k+1},n$是正整数，$x_{k+1}=n-(x_1+\cdots+x_k)$，$p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}>0$）	
$P(\lambda)$ 或 $P(k;\lambda)$	泊松分布	Poisson distribution	分布列为$p(k;\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$	
$U(a,b)$ 或 $U[a,b]$	均匀分布	uniform distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}1/(b-a) & (a\leqslant x\leqslant b),\\0 & （其他），\end{cases}$ 其中$a<b$为常数	
$N(\mu,\sigma^2)$	正态分布	normal distribution	密度函数为$p(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$，$(-\infty<x<+\infty,\sigma>0,\mu$为常数)	亦称高斯分布
$C(\lambda,\mu)$	柯西分布	Cauchy distribution	密度函数为$p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$，其中$x$为实数，$\lambda>0$，$\mu$为常数	
$\Gamma(\lambda,r)$	伽马分布	gamma distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x>0),\\0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中$r>0$，$\lambda>0$为常数	亦可记为$G(\lambda,r)$

符 号	中 文 名 称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
$e(\lambda)$	指数分布	exponential distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0),\end{cases}$ 其中 λ 为常数	亦可记为 $e(\mu,\sigma)$
$W(\lambda,\alpha)$	韦布尔分布	Weibull's distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha}) & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，$\alpha>0$ 为常数	
$\chi^2(n)$	χ^2 分布	Chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{(n-2)/2}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为正整数	
$\mathrm{Ln}(\mu,\sigma^2)$	对数正态分布	logarithmic normal distribution	密度函数为 $P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-a)^2/2\sigma^2} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $a,\sigma>0$ 为常数	
$t(n)$	学生分布	Student's distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$， 其中 n 为正整数	亦称 t 分布
$F(n_1,n_2)$	F 分布	F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\dfrac{n_1}{2},\dfrac{n_2}{2}\right)}n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}(n_2+n_1x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n_1,n_2 为正整数	
$E(\alpha,\beta)$	极值分布	extremal distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left\{\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right\}$， 其中 x,α 均为实数，β 为常数	
$\chi^2(n,\lambda)$	非中心 χ^2 分布	non-central chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left\{-\left(\dfrac{x+\lambda}{2}\right)\right\}}{2^{n/2}}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{x^{\frac{n}{2}+j-1}\lambda^j}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+j\right)2^{2j}j!} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为自由度；$\lambda>0$ 为非中心参数	
$t(n,\delta)$	非中心 t 分布	non-central t-distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{n^{n/2}\exp(-\delta^2/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)(n+x^2)^{(n+1)/2}}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\Gamma\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)\left(\dfrac{\delta^m}{m!}\right)\left(\dfrac{2x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{n}{2}}$， 其中 n 为自由度，δ 为实数，且是非中心参数	
$F(m,n;\lambda)$	非中心 F 分布	non-central F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{\lambda}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda mx}{2}\right)^k\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+k\right)k!(mx+n)^{\frac{m+n}{2}+k}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 m,n 为二自由度，λ 为非中心参数	
$X_1^{(n)}$	最小顺序统计量	smallest order statistics	$X_1^{(n)}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最小者	
$X_n^{(n)}$	最大顺序统计量	largest order statistics	$X_n^{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最大者	
$\bar{x}$	样本均值	sample mean	$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_n(x)$	
s^2	样本方差	sample variance	$s^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2\mathrm{d}F_n(x)$	
a_k	样本 k 阶原点矩	sample origin moment of the k-th order	$a_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F_n(x)\quad(k=2,3,\cdots)$	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
b_k	样本 k 阶中心矩	sample central moment of the k-th order	$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^k\mathrm{d}F_n(x)$ $(k=2,3,\cdots)$	
μ	总体均值	population mean	$\mu=E(X)$	
σ^2	总体方差	population variance	$\sigma^2=D(X)=E(X-\mu)^2$	
α_k	总体 k 阶原点矩	population origin moment of the k-th order	$\alpha_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F(x)$	
μ_k	总体 k 阶中心矩	population central moment of the k-th order	$\mu_k=E(X-\mu)^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k\mathrm{d}F(x)$	
Md	样本中位数	sample median	$\mathrm{Md}X=\begin{cases}X_{k+1}, & 若\ n=2k+1,\\ (X_k+X_{k+1})/2, & 若\ n=2k\end{cases}$	亦可用 $\tilde{X}$ 表示
Sk	样本偏度	sample skewness	样本三阶中心矩除以样本二阶中心矩的3/2次幂的商，即 $\mathrm{Sk}=\frac{b_3}{(b_2)^{3/2}}$	亦称样本偏态或偏态系数
Kur	样本峰度	sample kurtosis	样本四阶中心矩除以样本二阶中心矩的平方再减去3，即 $\mathrm{Kur}=\frac{b_4}{(b_2)^2}-3$	亦称样本峭度
df，f	自由度	degree of freedom	df_A，f_A 表示因素 A 的自由度	
$E_x(s)$	特征函数	characteristic	函数 e^{isX} 的数学期望，即 $E_x(s)=M[\mathrm{e}^{isX}]$	
$H[x]$	熵	entorpy	离散型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log_a P_i$；连续型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\log_a f(x)\mathrm{d}x$	
$f(k;r,p)$	帕斯卡分布式	Pascal distribution	分布函数为 $f(k;r,p)=\mathrm{C}_{k-1}^{r-1}p^r q^{r-1}\quad(k=r,r+1,\cdots)$	
$P_{i.}$ 或 $P_{.j}$	边缘概率	boundary probability	离散型随机变量的边缘概率分布 式为 $P_{i.}=\sum_j P_{ij}$，$P_{.j}=\sum_i P_{ij}$	
$N(\mu,\Sigma)$ 或 $N_n(\mu,\Sigma)$	多维正态分布	normal distribution	N 维正态分布的密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\lvert\Sigma\rvert}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)\}(x\in\mathrm{R}^n)$	
S_n^*	S_n 的标准化	standardization of S	$S_n^*=\sum_{k=1}^{n}(X_k-a_k)/S_n$	
ω	样本点	sample point	随机试验的每一个可能的结果	亦称基本事件
ϕ	不可能事件	non-probability event	随机试验不可能发生的结果	
E^n	伯努利试验	Bernoulli trials	随机试验 E 只有两个可能的结果，并且其概率为 p，q，其中 $q=1-p$，把 E 独立地重复 n 次试验构成了一个试验	亦称伯努利概型
$\sigma\xi$	标准差	root-mean square deviation	方差的平方根	亦称根方差
CL	中线	middle line	表示控制图中中线	
UCL	上控制线	upper control linear	表示控制图中上控制线	
LCL	下控制线	lower control linear	表示控制图中下控制线	
$(n\|C)$	抽检方案	sampling inspection plan	表示子样的容量为 n 和允许的不合格数为 C	
T	寿命	longevity	对任一特定个体(产品或生命体)，从某个标准时间起在规定时间 t 内失效(或死亡)	
$R(t)$	可靠度	reliability	产品在规定的条件下，规定的时间内，完成规定功能的概率	
ρ_r	可靠寿命	reliability life	使可靠度等于给定值 r 的时间	$\rho_{0.5}$称为中位寿命
$\lambda(t)$	失效率	failure rate	产品工作到 t 时刻后单位时间内发生失效的概率	
MTBF	平均无故障工作时间	mean time between failures	平均寿命对可修复产品	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
MTTF	失效前的平均工作时间	worked mean time before failure	平均寿命对不可修复产品	
PDF	概率分布函数	probability distribution function	$F(x)=P(\xi(\omega)<x), x\in(-\infty,+\infty)$	简称分布函数
MLE	极大似然估计	maximum likelihood estimate	使似然函数 $L(p)$ 达到极大值的参数 P	
$\hat{\theta}$	估计量	estimator	当区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 以某一指定的概率包含 θ 时，称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为函数 θ 的区间估计	
R	样本极差	sample range	$R=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}-\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示取样本中最大值与最小值之差	亦称样本范围，又称样本全距
H_0	原假设	null hypothesis	假设检验中，对有关总体需要作出判断的待检验的命题的假设	亦称零假设
H_1,H_a	备择假设	alternative hypothesis	假设检验中，异于原假设的另一假设	亦称择一假设
u,λ,t	临界值	critical value	u_α，λ_α，t_α 表示置信度为 α 的临界值	
Q	离差平方和	sum of squares of deviations	总离差平方和 $Q=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2$； 组内离差平方和 $Q_1=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$； 组间离差平方和 $Q_2=n\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-\bar{x})^2$； 因素 A 的离差平方和 $Q_A=n\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2$； 误差平方和 $Q_E=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$	
*	显著性标记	significance marked	* 表示作用显著．* * 表示作用高度显著	
×	交互作用	interaction	$A\times B$ 表示因素 A,B 的交互作用	
$L(\ )$	正交表示标记	orthogonal layout marked	$L_4(2^3)$ 表示二水平三因素，需作四次试验的正交表示	
vec	列拉直算子	operator of according to columns draw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按列依次拉直排序，即 $\mathrm{vec}(A)=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{nm})$	
ran	行拉直算子	operator of according to rowsdraw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按行依次拉直排序，即 $\mathrm{ran}(A)=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1m},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2m},\cdots,a_{nm})$	

应用数学（Applied mathematics）

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\underset{\sim}{A}$	模糊子集	fuzzy subset	$\underset{\sim}{A}=\{x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mid x\in X\}$，其中集 X 为论域，$\forall\ x\in X$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]$ 是模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数	亦称模糊集、弗晰集、不分明集、乏晰集等
$\vee$	模糊子集的上确界	supremum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigvee_{t\in T}a_t=\sup\{a_t\mid t\in T\}$	
$\wedge$	模糊子集的下确界	infimum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigwedge_{t\in T}a_t=\inf\{a_t\mid t\in T\}$	
$\overset{\wedge}{+}$	代数和	algebraic sum	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\overset{\wedge}{+}\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ $=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
•	代数积	algebraic product	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
$\oplus$	有界和	bounded sum	$a\oplus b=\min(a+b,1)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0,p>0$
$\otimes$	有界积	bounded product	$a\otimes b=\max(a+b-1,0)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0,p>0$
$\overset{+}{\varepsilon}$	爱因斯坦和	Einstein's sum	$a\overset{+}{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+ab}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$
$\dot{\varepsilon}$	爱因斯坦积	Einstein's product	$a\dot{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$

数 学 符 号 表

符 号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备 注
$\overset{+}{\gamma}$	伽玛和	gamma sum	$a\overset{+}{\gamma}b=\dfrac{a\overset{\wedge}{+}b-(1-\gamma)ab}{\gamma-(1-\gamma)(1-ab)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\dot{\gamma}$	伽玛积	gamma product	$a\dot{\gamma}b=\dfrac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a\overset{\wedge}{+}b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\overset{\vee}{P}$	雅格和	Yager sum	$a\overset{\vee}{P}b=\min(1,(a^p+b^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\hat{P}$	雅格积	Yager product	$a\hat{P}b=1-\min(1,((1-a)^p+(1-b)^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\sqcup$	取大运算	operation of fetch large	$\underset{\sim}{m}\sqcup\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\vee y$，$\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{n}$ 分别表示模糊数，即 $\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/x$，$\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{n}}(x)/y$	
$\sqcap$	取小运算	operation of fetch small	$\underset{\sim}{m}\sqcap\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\wedge y$	
$\neg$	减法运算	operation of subtraction	$\neg\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/(1-x)$	
$\rightsquigarrow$	模糊映射	fuzzy mapping	$f:X\rightsquigarrow Y$ 表示从 X 到 Y 的模糊函数	不同的场合中，模糊函数常有不同的定义
$\ominus$	有界差	bounded difference	$(A\ominus B)(x)=\max\{0,A(x)-B(x)\}$	
$\underset{\sim}{\leqslant}$	小于等于的放宽	relax restrictions of less or equal	$Ax\underset{\sim}{\leqslant}b\ (x\geqslant 0)$ 表示约束条件 $Ax\leqslant b,x\geqslant 0$ 的软化	
D_{fix}	不动度	fixed degree	$D_{\mathrm{fix}}(x,F)=\alpha$，表示 x 关于模糊映射 F:X$\mathscr{F}\rightsquigarrow$(X) 的不动度为 α，$\mathscr{F}(X)$ 表示 X 上所有模糊集组成的集	
e^*	绝对误差	absolute error	$e^*=x^*-x$，式中 x 表示精确值，x^* 为 x 的近似值	常简称误差
ε^*	误差限	limit of approximate value	$\lvert x^*\rvert<\varepsilon^*$，式中 x^* 为 x 的近似值，ε^* 为近似值 x^* 的误差限	
e_r^*	相对误差	relative error	$e_r^*=\dfrac{e^*}{x^*}$，式中 x 表示精确值，e^* 表示 x 的绝对误差，e_r^* 表示相对误差，它表示误差 e^* 关于近似值 x^* 的近似程度	
ε_r^*	相对误差限	limit of relative error	$\lvert e_r^*\rvert<\varepsilon_r^*$，式中 e_r^* 表示相对误差	
δ	最大相对误差	maximal relation error	$\lvert e_r^*\rvert=\dfrac{\lvert e^*\rvert}{\lvert x^*\rvert}\leqslant\delta$，式中 x^* 表示近似值，e^* 和 e_r^* 分别表示绝对误差和相对误差，取不等式成立的最小数 δ 为最大相对误差	
σ	标准误差	standard error	$\sigma=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n}}$，式中 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x)^2$ 为误差平方和	
η	平均误差	mean error	$\eta=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i-\bar{x}\rvert}{n}$，式中 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 是算术平均值	
v_i	离差	dispersion	$v_i=x_i-\bar{x}\quad(i=1,2,\cdots,n)$	
ν	概率误差	probabilistic error	$P(\lvert\alpha\rvert\leqslant\nu)=1/2$ 表示数 α 的绝对值大于它的误差和小于它的误差出现的可能性一样大	
PS	多项式组	polynomial set	PS 表示由有限个非零多项式构成的集合	
Zero(・)	多项式的公共零点集	zero points set of polynomials	Zero (PS)表示多项式组 PS 中的多项式的公共零点集	
Res	结式	resultant	$\mathrm{Res}(p,q,x)=a_n^k b_k^n\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{k}(\alpha_i-\beta_j)$．式中 α_i,β_j 分别是多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的根，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 分别为 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\bar{\cup}$	合一运算	unification	$a\bar{\cup}b=a$,式中 a,b 均为原子,当且仅当 $a=b$ 时成立,否则 $a\bar{\cup}b$ 为空,集合论中的并运算是合一运算的特殊情况.	当原子不可分解时,合一的结果等于并集
R	羡余度	redundancy	$R=1-\frac{H_\infty}{H_0}$,式中 R 表示语言的羡余度,H_∞是极限熵,H_0 是语言成分等概率不相关时的熵	亦称冗余度
$E_t^{(p)}$	p 次指数平滑值	exponential smoothing value of pth	$E_t^{(1)}=\alpha\sum(1-\alpha)^iE_{t-i}^{p-1}$ $(p=2,3,\cdots)$,其中 $\alpha(1-\alpha)^i$ $(i=0,1,2,\cdots)$为当期序列值的影响权数,α 的一般范围在区间[0.1,0.5]内,适当选取 α 的值是保证预测的关键	当 $p=1$ 时即为一次指数平滑值 $E_t^{(1)}$
$\omega_t^{(p)}$	p 次加权平滑值	weight smoothing value of pth	$w_t^{(p)}=\alpha_0\sum_{i=1}^{\infty}d_iw_{t-i}^{p-1}$ $(t=\cdots,-1,0,1,\cdots,T)$,其中 $\alpha_i(i=0,1,2,\cdots)$为当期序列值的影响权数,$\alpha\in[0.1,0.5]$	当 $p=1$ 时为一次加权平滑值
VIF	协方差扩大因子	amplification factor of covariance	$\mathrm{VIF}(\beta_i)=\frac{1}{1-R^2}$,式中 β_i 为线性回归模型 $y=X\beta+\varepsilon$ 中 X 的第 i 个消费者预算参数 β_i 的估计值,R 为 X 的多重相关系数	
$r_u(x)$	风险厌恶度量	risk aversion measure	$r_u(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}$,式中 u 为消费者的效用函数,自变量 x 可理解为收入	亦称 Arrow-Pratt 风险厌恶度量
S	价格单纯形	price simplex	$S=\{\boldsymbol{p}\in\mathrm{R}^l\mid p_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^{l}p_k=1\}$,式中 R^l 是商品空间,$\boldsymbol{p}$ 表示价格向量	
β_i	预算映射	budget mapping	$\beta_i(p)=\{x\in X_i\mid p\cdot x\leqslant p\cdot e_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)\}$,式中 $\beta_i(p)$和 X_i 分别表示第 i 个消费者的预算映射和消费集,π_j 是第 j 个生产者的利润函数	
a_{ij}	直接消耗系数	direct consumption coefficient	$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,x_{ij}表示第 i,j 两个部门的流量,x_j 表示第 j 个部门的总产品量	
b_{ij}	完全消耗系数	total consumption coefficient	$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{is}a_{sk}a_{kj}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{it}a_{ts}a_{sk}a_{kj}+\cdots(i,j=1,2,\cdots,n)$,式中 a_{ij}是直接消耗系数,b_{ij}表示第 j 个产品部门对第 i 种产品的完全消耗系数	
c_{ij}	完全需求系数	total demand coefficient	$c_{ii}=1+b_{ij}c_{ij}-b_{ij}(i\neq j)$,表示产品部门提供单位最终产品对所有产品部门产品的需求量,b_{ij}表示第 i,j 两个产品部门之间的完全消耗系数,c_{ij}表示第 j 个产品部门产出单位最终产品对第 i 个产品部门的需求量	
d_{ij}	投资系数	investment coefficient	动态投入产出模型中常用的统计指标,$d_{ij}=\frac{k_{ij}^t}{x_j^{t+1}-x_j^t}$,表示在 $t+1$ 时第 $j(j=1,2,\cdots,n)$部门增加单位产品需要第 i 投资部门在时间 t 供给第 j 部门产品的数量.k_{ij}^t表示 t 时 i 投资部门供给 j 部门产品总量,x_j^t 表示 j 部门 t 时的产品总量	
$L_{项}$	时滞	time lag	$L_{项}=[\alpha_1(n-0.5)+\alpha_2(n-1.5)+\cdots+\alpha_n 0.5]/100$ 为项目投资时滞,其中 α_i 为第 i 年投资占总投资的比重,n 为建设周期	
$L_{年}$	时滞	time lag	$L_{年}=\sum_{i=1}^{n}I_in_i\Big/\sum_{i=1}^{n}I_i$ 为全年总投资时滞,式中 I_i 分配到 i 部门的投资.n_i 为 i 部门以外为单位的时滞	
ε	应变张量	strain tensor	$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $(i,j=1,2,3)$,x_i,x_j 表示应变张量分量,u_i,u_j 表示位移分量	
k	高斯常数	Gauss constant	$\mathrm{k}\approx 0.017\ 202\ 098\ 95$	
$\triangleq$	专用等号	symbol for special use	$a\oplus b\triangleq\max\{a,b\}$;$a\otimes b\triangleq a+b$ 表示极大代数中加法和乘法的定义	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Tayl	尾部	tail	$f=J^kf+\text{Tayl}\, f$,式中 J^kf 是 f 在原点的泰勒展开式中保留 k 阶以下的多项式部分,截去的部分称为 f 的尾部,记为 Tayl f	
#()	袋	bag	$\#(x,B)$表示元素 x 在袋 B 中出现的次数. $\forall x\in B$, $0\leqslant\#(x,B)\leqslant 1$ 时,袋 B 就蜕化为普通集合 B	
$W(s)$	传递函数	transfer function	$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Q(s)}{P(s)}$,式中 $Y(s)$,$U(s)$分别为输出量和输入量的拉普拉斯变换式,$Q(s)$,$P(s)$分别为$W(s)$的分子、分母多项式	
cond	条件数	condition number	称 cond $G=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\geqslant 1$ 为矩阵 G 的条件数,cond G越大,矩阵 G 越趋于欠秩	
diag	对角元	diagonal element	设 $S=\text{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p)$,则称 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,p)$为对角矩阵 S 的对角元	
blockdiag	块对角元	block diagonal element	设 X = block diag $(\Delta_1,\cdots,\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_2,\cdots,\Delta_r,\cdots,\Delta_r)$,其中 Δ_i 为 k_i 阶方阵,则称 Δ_i 为块对角矩阵的块对角元	
arg(·)	相角	phase angle	$\arg(g(\text{j}\omega))$称为相角,其中$g(\text{j}\omega)$为 $m\times n$ 阶复阵函数,j 为虚数单位	
conv(·)	凸包	convex hull	conv $f(\text{j}\omega,\Gamma)=$conv $f(\text{j}\omega,\Gamma_0)$,式中 conv(·)表示 $\mathbb{R}^2$ 上的凸包,$\omega\in\mathbb{R}$,j 为虚数单位,$\Gamma_0\triangleq\{\nu\mid\nu_i=0,1;\ i=1,2,\cdots,m\}$为 $\nu_i(i=1,2,\cdots,m)$中的多仿射函数	
$\asymp$	等序关系	equals order relation	若 z_1,z_2 为两个非零复数,且$\frac{z_2}{z_1}\neq 0$,则记为 $z_1\asymp z_2$	
ess sup	本质上确界	essential supremum	$\text{ess}\sup\limits_{\omega}\sigma(G(\text{j}\omega))$表示 $m\times n$ 阶复矩阵值函数$G(\text{j}\omega)$的本质上确界,即除去 ω 的一个零测子集后的上确界	
s.t	约束条件	constraint condition	$\max f=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$, $\text{s.t}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n),\end{cases}\quad(*)$. 目标函数 max f 必须满足(*)中的条件	
$\overset{L}{>}$	字典序	lexicographicall order	$V\overset{L}{>}0$ 表示字典式为正的;$V\overset{L}{<}0$ 表示字典式为负的;Lex min 表示字典式最小	$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$是 n 维向量空间的向量
$\underline{\delta}_B$	下特征数	low characteristic number	$\underline{\delta}_B=\begin{cases}\max\left\{-\frac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\,\middle\vert\,\lambda_j^*<0\right\} & (\exists\ \lambda_j^*<0),\\ -\infty & (\overline{\exists}\ \lambda_j^*<0),\end{cases}$ $\underline{\delta}_B$ 称为基 B 的下特征数 λ_j,λ_j^* 为检验数	
$\bar{\delta}_B$	上特征数	above characteristic number	$\bar{\delta}_B=\begin{cases}\min\left\{-\frac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\mid\lambda_j^*>0\right\}, & \exists\ \lambda_j^*>0,\\ +\infty, & \overline{\exists}\ \lambda_j^*>0,\end{cases}$ $\bar{\delta}_B$ 称为基 B 的上特征数,λ_i,λ_j^* 为检验数	
$\ggg$	等级标志关系	relation of order mark	$p_i\ggg p_j$ 表示在一个单目标函数 min $f=p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_lf_l$ 中,$p_1,p_2,\cdots,p_l$ 为等级标志关系	
$P(\cdot)$	策略	policy	P 表示最优策略. $P_{k,n}^*(x_k)$表示最优子策略,是初始状态为 x_k 的后部子过程所有子策略中最优者	
opt	最优值	optimum value	opt$v_{k,n}[x_k,P_{k,n}(x_k)]$表示指标函数 $v_{k,n}$的最优值,$P_{k,n}$表示子策略是从第 k 段开始到终点过程的策略	
pos	正线性组合集	set of positive linear combination	pos$A=\{\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}^m,\ \alpha=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_jA_j,\ \beta_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n\}$ 表示由矩阵 A 的各列的正线性组合组成的集合	
epi	上图	epigraph	epi $f=\{(x,\alpha)\mid\alpha\geqslant f(x)\}$表示函数 $f(x)(x\in\mathbb{R}^n)$的上图,若给定 epi f,则 $f(x)=\min\{x\mid(x,\alpha)\in\text{epi}\ f\}$	
/	排队记法	queueing notation	$X/Y/Z/C$ 为排队记法,其中 X,Y,Z,C 的意义依次为:1. 相继到达间隔时间的分布;2. 服务时间的分布;3. 服务台的数目;4. 允许的顾客容量	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Ls	队长期望值	team length expected value	$Ls=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的队长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Lq	队列长期望值	queueing length expected value	$Lq=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=Ls-P=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的队列长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Ws	逗留时间期望值	expected value of staying time	$Ws=E[W]=\frac{1}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的逗留时间期望值	
Wq	等待时间期望值	expected value of waiting time	$Wq=Ws-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的等待时间期望值	
G	对策	games	对策 $G=(S_1,S_2,A)$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 表示局中人 I 的纯策略集合，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 表示局中人 Ⅱ 的纯策略集合. $A=(a_{ij})_{m\times n}$表示支付(赢得)矩阵	
V_G	对策值	games value	$V_G=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}$ 称为对策 $G=\{S_1,S_2,A\}$ 的值	
Te	噪声温度	noise temperature	$Te=\frac{N}{kB}(k)$，其中 N 为噪声功率，k 为玻耳兹曼常数，B 为频带宽度(Hz)	
γ	传播常数	propagation constant	$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{Z_1r_1}$，其中 α 表示衰减常数(Np/m, dB/M)，β 表示相移常数(rad/m)	
Lt	传输损耗	loss of transmission	$Lt=32.45+20\lg f+20\lg d+A-G_t-G_r$，式中 f 为工作频率(MHz)，d 为传输距离(km)，A 为电路衰减(dB)，G_t，G_r 分别为发射天线与接收天线的增益(dB)	
C	信道容量	channel capacity	$C=\max_{P(x)}I(x;y)$，其中 $P(x)$ 为输入符号概率(或概率密度)，$I(x;y)$ 为互信息量	
$R(D^*)$	信源率失真函数	source rate distortional function	$R(D^*)=\min\{I(u;v)\}$，$P(v_j\|u_j)\in B_D$，其中 D^* 为信源的允许平均失真度，$I(u;v)$ 为平均互信息量	
I_A	自信息量	self-information	$I_A=\log\frac{1}{P(A)}=-\log P(A)$，式中 $P(A)$ 为随机事件 A 发生的概率，I_A 表示 A 的自信息量	
$I(x;y)$	互信息量	mutual information	$I(x;y)=\log\frac{P(x\|y)}{P(y)}$，式中 y 表示收到的消息，x 表示收到消息的某事件的信息量	
$I(X;Y)$	平均互信息量	average mutual information	$I(X;Y)=H(X)-H(X\|Y)$，其中 $H(X)$ 代表接收到输出符号集 Y 以前关于输入符号集 X 的平均不确定性；$H(X\|Y)$ 代表接收到输出符号集 Y 后关于输入符号集 X 的平均不确定性	
$\oplus$	逻辑导式运算符号	operational symbol of logical derived rule	$D(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\oplus\beta_i)$，式中 α_i，β_j 表示长度为 n 的二进制序列码元，$\alpha_i\oplus\beta_i$ 是二进制码元相加. $D(\alpha,\beta)$ 表示 α，β 对应位置上码元取值不同的个数	
$\otimes$	周期卷积	periodic convolution	$\tilde{x}_1(n)\otimes\tilde{x}_2(n)$，式中 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 表示周期长度	
Ⓝ	循环卷积	circular convolution	$\tilde{x}_1(n)$Ⓝ$\tilde{x}_2(n)$	

撰　稿　王怀安　刘宝康　杨子胥　杨德平
　　　　段　方　郝拉娣　阎崇正
审　定　李志深　陈惠津　阎崇正

条目笔画索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉字笔画方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按一（横）、丨（竖）、丿（撇）、丶（点）、乛（折）五种笔形顺序排列，其中，㇀（提）归为一（横），亅（竖钩）归为丨（竖），㇏（捺）归为丶（点），各种笔形带钩或曲折的笔画（除竖钩“亅”外）归为乛（折）。第一个字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画顺序排列。

一　画

二　画

三　画

四　画

五 画

六　画

七　画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十 八 画

其 他

条目音序索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉语拼音方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一个字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的拼音字母顺序排列。

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其　他

条目西文索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出西文标题的全部条目，提供读者按西文检索使用.

2. 条目标题按起首西文字母的顺序排列（同一字母先大写，后小写）；条目标题的西文缩写，按一个词排列。其他文种亦按此原则编排。

3. 凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。

4. 若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

one-to-one mapping ······ 60
one-to-one mapping ······ 60

one-way classification model ······ 403

operating variables of a quantifier ······ 50

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

其　他

中外人名译名对照表

A

阿贝尔(Abel,N. H.)
阿波拉松(Abramson,F. G.)
阿茨诺(Artzner,P.)
阿达马(Hadamard,J. (-S.))
阿亨瓦尔(Achenwall,G.)
阿基米德(Archimedes)
阿克曼(Ackermann,W.)
阿莱(Allais,M.)
阿勒芒(Almon,S.)
阿历克山德罗夫(Alexanderof,P. S.)
阿龙扎扬(Aronszajn,N.)
阿罗(Arrow,K,J.)
阿姆斯丹(Amsden,A. A.)
阿佩尔(Appel,K. I.)
阿谢尔逊(Acherson,I. P.)
埃顿(Elton,C.)
埃尔(Ehle,B. L.)
埃尔布朗(Herbrand,J.)
埃夫斯(Eaves,B. C.)
埃克道斯(Ecdos,J. C.)
埃奇沃思(Edgeworth,F. Y.)
埃森(Essen,C. G.)
艾宾浩斯(Ebbinghaus,H.)
艾伯(Eber,J-M)
艾迪生(Addison,J. W.)
艾伦(Allen,R. G. D.)
艾姆伯斯-思皮斯(Ambos-Spies,K.)
艾萨克桑(Issacson,E.)
爱德蒙茨(Edmonds,J.)
爱尔特希(Erdös,P.)
爱伦弗斯特(Ehrenfest P. T.)
爱因斯坦(Einstein,A.)
安东尼(Authony,J. M.)
安鸿志(An Hongzhi)
奥曼(Auncann,R. J.)
奥萨克(Ozaki,T.)
奥斯道尔-高桥(Osdos-Takahashi)
奥斯特(Oersted,H. C.)
奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,A. M.)

B

巴布什卡(Babuška,I.)
巴尔姆(Palm,C.)
巴格里诺夫斯基(Bagrinovskii,K. A.)
巴坎(Barcan,R. C.)
巴拿赫(Banach,S.)
巴施里叶(Bachelier,L.)
巴特赫尔(Butcher,J. C.)
巴特利特(Bartlett,A. C.)
巴特利特(Bartlett,M. S.)
巴歇利埃(Bachelier,L.)
柏拉图(Plato)
班赛尔(Bansal,V. K.)
鲍里斯(Boris,J. P.)
鲍姆嘎特纳(Baumgartner,J.)
鲍威尔(Powell,M. J. D.)
贝尔(Baire,R. L.)
贝尔(Bell,J. L.)
贝尔曼(Bellman,R.)
贝尔奈斯(Bernays,P.)
贝济埃(Bézier,P. E.)
贝克(Baker,T.)
贝克莱(Berkley,G.)
贝克隆(Backlund,B.)
贝叶斯(Bayes,T.)
本迪克松(Bendixson,I. O.)
比内(Binet,A.)
比特纳(Bittner,L.)
彼得(Peter,R.)
边沁(Bentham,J.)
别洛柴可夫斯基(Белоцерковский,O. M.)
波茨娃尔(Бочевар,B.)
波尔查诺(Bolzano,B.)
波尔约(Bolyai,J)
波莱尔(Borel,(F. -É. -J. -)É.)
波利亚(Polya,G.)
波斯纳(Posner,D.)
波斯特(Post,E. L.)
玻恩(Born,M.)
玻耳兹曼(Boltzmann,L. E.)
伯恩斯坦(Бернштейн,C. H.)
伯尔曼(Berman,L.)
伯斯坦(Burstein,S. Z.)
博戈留博夫(Bogaliubov)
博赫瓦(Bochvar,D. A.)
博克斯(Box,G. E. P.)
布恩(Boone,W. W.)
布尔(Boole,G.)
布尔巴基(Bourbaki,N.)
布丰(Buffon,G. -L. L. de)

布克(Book,D. L.)
布拉利・福尔蒂(Burali-Forti,C.)
布拉斯(Brass)
布莱克(Black,F.)
布莱克-肖尔斯(Balck-Scholes)
布莱克韦尔(Blackwell,D.)
布赖恩(Brian,P. L. T.)
布朗(Brown,D. J.)
布朗(Brown,E.)
布朗(Brown,K.)
布朗(Brown, F. G.)
布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)
布雷齐(Brezzi,F.)
布里尤安(Brillouin,M. L.)
布鲁姆(Bloom,B. S.)
布鲁姆(Blum,M.)
布伦特(Brent,R. P.)
布罗丁(Borodin,A. B.)
布罗索夫(Belousov,B. P.)
布罗依丹(Broyden,C. G.)
布契(Buchi,J. R.)
布森内斯克(Boussinesq,J. V.)
布西(Bucy,R. S.)

C

策梅洛(Zermelo,E. F. F.)
查普曼(Chapman,R. N.)
察鲍金斯基(Zhabotinskii,A. M.)
柴田(Chai Tian)
彻诺夫(Che Nuofu)
陈兆国(Chen Zhaoguo)
赤池弘次(Akaike)
褚一飞(Chu Yifei)

D

达尔文(Darwin,C. R.)
达菲(Duffie,D.)
达赫奎斯特(Dahlquist,G.)
达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)
达维多夫(Довыдов,Ю. М.)
大禹(Da Yu)
戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)
戴尔邦(Delbaen,F.)
戴夫林(Devlin,K.)
戴利(Daly,B. J.)
戴维登(Davidon,W. D.)
戴维登戈(Davidenko,D.)
戴维斯(Davis,M. D.)
丹尼尔(Daniell,P. J.)
丹尼尔第一・伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)
道弗尔(Dovle)
道格拉斯(Douglas,J.)
道奇(Dodge,H. F.)
德・摩根(De Morgan,A.)
德布罗(Debreu,G.)
德布鲁因(de Bruijn,N. G.)
德布罗意(de Broglie,L. V.)
德克尔(Dekker,J.)
德威特(Dewit,L.)
邓肯(Dynkin,E. B.)
狄喇克(Dirac,P. A. M.)
迪帕齐斯(de Pazzis,O.)
笛卡儿(Descartes,R.)
棣莫弗(De Moivre,A.)
刁格太夫(Degtev,A. N.)
丁伯根(Tinbergen,J.)
杜布(Doob,J. L.)
杜福特(Du Fort,E. C.)
多罗德尼岑(Дородницын,A. A.)

E

厄润(Oehrn)
恩格斯(Engels,F.)

F

法拉第(Faraday,M.)
范霍甫(Fan Huofu)
范利尔(Van leer,B.)
范因(Fine,H. B.)
方锦暄(Fang Jinxuan)
菲德里希斯(Friedrichs,K. O.)
费德(Field,R. J.)
费弗曼(Fefferman,C.)
费根堡(Feigenbaum,A. V.)
费沪尔斯特(Verhulst,P. F.)
费勒(Feller,W. F.)
费马(Fermat,P. de)
费纳尔迪(Finnerty,J. D.)
费希尔(Fisher,J. J.)
费希尔(Fisher,R. A.)
费耶尔(Fejer,P. A.)
费因曼(Feynman,R. P.)
芬斯特(Fensted)
冯・米泽斯(von Mises,R.)
冯・诺伊曼(von Neumann,J.)
冯康(Feng Kang)
冯特(Wundt,W.)
弗莱彻(Fletcher,R.)
弗兰克尔(Frankel,S. P.)
弗雷格(Frege,(F. L.)G.)
弗里德贝格(Friedberg,R. M.)
弗里德里希斯(Friedrichs,K. O.)
弗里德曼(Freedman,H. L.)
弗里施(Frisch,U.)
弗利希(Frisch,R. A. K.)
弗伦克尔(Fraenkel,A. A.)
弗曼(Feynman,R. P.)
弗培斯(Forbas,S. A.)
福克尔(Fokker,A. D.)
福平卡(Vopěnka,P.)

福斯特(Foster,D. H.)
傅莱克(Flesaker)

G

伽德纳(Gardner,C. S)
伽甘蒂尼(Gargantini,I.)
伽利略(Galilei,G.)
盖勒(Gale,D.)
盖斯克(Geske)
冈珀茨(Gompertz,B.)
冈田(Gang Tian)
高尔顿(Galton,F.)
高斯(Gauss,C. F.)
高斯(Gauss,G. F.)
高云(Goguen,J. A.)
戈德福布(Goldforb,D.)
戈杜诺夫(Годунов,С. К.)
戈根(Goguen)
戈塞特(Gossett,W. S.)
哥德尔(Gödel,K.)
格才高尔契克(Grzegorczyk,A.)
格拉肖(Glashow,S. L.)
格兰特(Graunt,J)
格勒(Gray,H. L.)
格雷巴赫(Greibach,S. A.)
格雷果里(Gregory,J.)
格利姆(Glimm,J.)
格林(Green,G.)
格涅坚科(Гнеденко,Б. В.)
根岑(Gentzen,G.)
古德曼(Goodman,J. B.)
古诺(Cournot,A. A.)
郭(Kuo)
郭永怀(Guo Yonghuai)

H

哈代(Hardy,G. H.)
哈代(Hardy,J.)
哈尔莫斯(Halmos,P. R.)
哈根(Haggan,V.)
哈京斯(Hakins,D.)
哈里斯(Harris,T. E.)
哈里逊(Harrison,J. M.)
哈林顿(Harrington,L.)
哈洛(Harlow,F. H.)
哈密顿(Hamilton,W. R.)
哈瑞松(Harrison,G. W.)
哈塞(Hassell,M. P.)
哈斯拉克尔(Hasslacher,B.)
哈斯厅斯(Hastings,S. P.)
哈坦(Harten,A.)
哈特(Hart,O.)
哈特曼尼斯(Hartmanis,J.)
哈维尔莫(Haavelmo,T.)
海丁(Heyting,A.)
海曼(Hyman,J. M.)
海纳尔(Hajnal,A.)
海森伯(Heisenberg,W. K.)
海施(Heath,D.)
海什-迦罗-莫顿(Heath-Jarrow-Morton)
汉恩(Hannan,E. J.)
汉弗(Hanf,W. P.)
豪林(Holling,T. G.)
豪普特曼(Hauptman,H. A.)
豪森(Howson,J. T.)
豪斯多夫(Hausdorff,F.)
赫尔曼(Herrmann,E.)
赫奎斯特(Dahlquist,G.)
赫胥黎(Huxley,A. F.)
赫兹(Hertz,H. R.)
黑里奇(Heinrich,H.)
黑利(Helly,E.)
亨里西(Henrici,P.)
亨特(Hunt,G. A.)
胡斯顿(Hughston)
怀特海(Whitehead,A. N.)
黄(Wong,C. K.)
惠更斯(Huygens,C.)
霍夫丁(Hoeffding,W.)
霍金(Hodgkin,A. L.)
霍利(Holley,J.)
霍纳(Horner,W. G.)
霍普菲尔德(Hopfield,J. J.)
霍特林(Hotelling,H.)

J

基斯勒(Keisler,H. J.)
吉布斯(Gibbs,J. W.)
吉尔(Gear,C. W.)
吉尔(Gill,J.)
吉洪诺夫(Тихонов,А. Н.)
吉帖克(Gitik,M.)
嘉当(Cartan,H.)
贾宪(Jia Xian)
菅野道夫(Sugeno,M.)
蒋星耀(Jiang Xingyao)
角谷静夫(Kakrtani,S.)
杰克什(Jockusch,C. G.)
杰文斯(Jevons,W. S.)
杰希(Jech,T. J.)
捷林斯基(Jelinski)
金特里(Gentry,R. A.)
近藤(Kondo)

K

卡尔勒(Karle,J.)
卡尔马(Kalmár,L.)
卡尔曼(Kalman,R. E.)
卡鲁查(Carocha,T. F. E.)
卡伦(Carlven,C.)

卡门(Kármán,T. von)
卡纳普(Carnap,R.)
卡彭(Capon,J.)
卡普(Karp,R. M.)
卡普兰(Kaplan,E. L.)
卡特尔(Gattell,J. Mok)
开尔文(Kelvin,L.)
开斯勒(Keisler,H. J.)
凯勒尔(Keller,H. B.)
凯兹拉斯(Katsaras,A. K.)
坎托罗维奇(Канторович,Л. В.)
康德(Kant,I.)
康托尔(Cantor,G. (F. P.))
康托洛维奇(Kantorovich,L. V.)
考克斯(Cox,J.)
柯比(Kirby,L.)
柯尔莫哥洛夫(Колмгоров,А. Н.)
柯克(Cook,D. R.)
柯克斯(Cox,D. R.)
柯勒(Coale,D. R.)
柯里(Curry,H.)
柯尼希(König,J.)
柯斯特勒(Koestler,A.)
柯西(Cauchy,A. -L.)
科恩(Cohen,P. J.)
科尔拉(Colella,P.)
科克斯(Cox)
克拉默(Cramer,H.)
克拉默-米泽斯(Cramer,H.)
克拉默斯(Kramers,H. A.)
克拉丘克(Krawczyk,R.)
克莱普斯(Kreps,D. M.)
克莱瑟(Kreisel,G.)
克莱斯勒(Kreisel,G.)
克莱因(Klein,A.)
克莱因(Klein,L. R.)
克莱因(Kline,M.)
克赖斯(Kreiss,H. O.)
克兰克(Crank,J.)
克劳休斯(Clausius,R.)
克雷塞尔(Kreisel,G.)
克里普克(Kripke,S. A.)
克林(Kleene,S. C.)
克罗克特(Crockett,J. B.)
克罗姆(Crome,A. F. W.)
克朴索讷(Kempthorne,O.)
克瑞尔(Cryer,C. W.)
孔斯(Coons,S. A.)
库恩(Kuhn,H. W.)
库尔诺(Cournot,A. A)
库汉姆(Cobham,A.)
库克(Cook,S. A.)
库克(Cook,J. L.)
库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)
库赖(Curry)
库朗(Courant,R.)
库勒(Kutler,P.)
库雷巴(Kurepa,D.)
库利(Cooley,J. W.)
库仑(Coulomb,A. de C.)
库仑(Kunen,K.)
库珀(Cooper,S. B.)
库普曼斯(Koopmans,T. C.)
奎特莱特(Quételet,L. A. J.)
奎因(Quine,W. V. O.)

L

拉奥(Rao,C. R.)
拉宾(Rabin,M. O.)
拉德那(Ladner,R. E.)
拉德纳(Radner,R.)
拉德仁斯卡娅(Ладыжкенская,О. А.)
拉多(Rado,R.)
拉格朗日(Lagrange,J. -L.)
拉克伦(Lachlan,A. H.)
拉克斯(Lax,P. D.)
拉莱斯库(Ralescu)
拉姆齐(Ramsey,F. P.)
拉普拉斯(Laplace,P. -S.)
拉丘克(Krawczyk,R.)
拉什福德(Rachford,H. H.)
拉斯特(Last,J. M.)
莱布尼茨(Leibinz,G. W.)
莱海(Lahaye,E.)
莱克西斯(Lexis,W.)
莱姆克(Lemke,C. E.)
莱普(Lempp,S.)
莱斯利(Leslie,P. H.)
莱特希尔(Lighthill,M. J.)
莱维(Lévy,A.)
莱维(Lévy,M.)
莱维(Lévy,P.)
赖特(Wright,S.)
兰福德(Langford,C. H.)
兰格(Lange,O.)
兰姆赛(Ramsey,F. P.)
朗伯(Lambert,J. H.)
朗之万(Langevin,P.)
劳切利(Läuchli,H.)
劳思(Routh,E. J.)
勒贝格(Lebesgue,H. L.)
勒曼(Lerman,M.)
勒让德(Legendre,A. -M.)
雷尔(Reel,L. J.)
雷斯彻(Rescher,N.)
黎曼(Riemann,(G. F.)B.)
李嘉图(Ricardo,D.)
李未(Li Wei)
李政道(Li Zhengdao)

里茨(Ritz,W.)
里奇(Rich,M.)
里奇(Ritchie,R.W.)
里斯(Rees,M.)
里维斯(Reeves,C.)
里希克(Lischke,G.)
里希特迈耶(Richtmyer,R.D.)
理查森(Richardson,L.F.)
利伯斯坦(Liebarstein,H.)
利维奎(Leveque,R.J.)
列昂节夫(Leontief,W.)
林德伯格(Lindeberg,Y.W.)
林德曼(Lindeman,R.L.)
林士谔(Lin Shie)
林斯泰特(Lindstidt,A.)
林特纳(Lintner,J.)
刘(Liu,D.B.)
刘焯(Liu Zhuo)
刘易斯(Lewis,P.A.W.)
刘易斯(Léwis,C.I.)
刘易斯(Léwis,F.D.)
刘益(Liu Yi)
刘应明(Liu Yingming)
龙格(Runge,C.D.T.)
卢宾斯坦(Rubinstein,M.)
卢津(Лузин,H.H.)
卢伊(Lewy,H.)
鲁宾孙(Robinson,A.)
鲁宾孙(Robinson,J.B.)
鲁宾孙(Robinson,R.M.)
鲁宾孙(Robinson,R.W.)
鲁沙诺夫(Rusanov,V.V.)
路卡-特米(Luca-Termini)
律庭(Rödding,D.)
罗(Roe,P.L.)
罗巴切夫斯基(Лобачевский,H.И.)
罗伯托姆(Rowbottom,F.)
罗杰斯(Rogers,H.)
罗杰斯(Rogers,C.R.)
罗明(Roming)
罗塞(Rosser,J.B.)
罗森菲尔德(Rosenfeld,A.)
罗森卢思(Rosenbluth,M.)
罗斯(Ross,S.A.)
罗素(Russell,B.A.W.)
罗伊(Roy,S.N.)
洛伦兹(Lorenz,E.N.)
洛马克士(Lomax,H.)
洛特卡(Lotka,A.J.)

M

马保梯(Maupertuis,P.L.de)
马蒂雅塞维奇(Matijasevich,A.)
马叠(Marray,J.D.)
马丁(Martin,R.E.)
马丁(Martin,D.A.)
马尔可夫(Марков,A.A.)
马尔萨斯(Malthus,T.R.)
马赫罗(Mahlo,P.)
马季亚谢维奇(Matijacevic,Y)
马科维茨(Markowitz,H.M.)
马克劳林(Mclaughlin,T.G.)
马勒柯特(Malecot,G.)
马钦泰尔(Macintyre,A.)
马琴科夫(Marchenkov,S.S.)
马斯(Maass,W.)
马歇尔(Marshall,J.F.)
马祖尔(Mazur,B.)
迈切尔斯基(Mycielski,J.)
迈希尔(Myhill,J.)
迈耶(Meyer,A.)
麦科尔(MacColl,H.)
麦科马克(MacCormack,R.W.)
麦克德模特(McDermott)
麦克弗(Machover,M.)
麦克莱特(Mccreight,E.M.)
麦克斯韦(Maxwell,J.C.)
曼纳(Manna)
曼斯费尔德(Mansfield,R.)
曼特(Mantel,N.)
曼希尔(Myhill,J.)
梅(May,R.M.)
梅尔(Meier,P.)
梅克海姆(Makeham,W.M.)
梅雷(Méré,A.G.C.de)
梅里尔(Merrill,O.H.)
梅利曼诺夫(Mirimanoff)
梅内斯(Manes)
门格尔(Menger,C.)
门杰(Menger,C.)
门杰(Menger,K.)
蒙德尔(Mendel,T.R.)
蒙莫尔(Montmort,P.R.de)
蒙太古(Montagne,R.)
米尔斯(Mills,R.L.)
米勒(Miller,D.)
米勒(Miller,G.A.)
米勒(Miller,L.H.)
米勒(Miller,M.)
米勒(Miller,C.W.)
米勒(Miller,E.)
米林(Mirin,A.A.)
米雪尔(Mitchell,W.)
密尔(Mill,J.S.)
闵科夫斯基(Minkowski,H.)
闵斯基(Minsky,M.L.)
模卡斯(MeCarth,J.)
莫迪利亚尼(Modigliani,F.)
莫尔斯(Morse,A.P.)
莫根施特恩(Morgensten,O.)

莫兰达(Moranda)
莫利(Morley,M.)
莫绍揆(Mo Shaokui)
莫斯却瓦基斯(Moschovakis,Y. S.)
莫斯托夫斯基(Mostowski,A.)
默顿(Merton,R.)
穆迪(Mood,A. M.)
穆尔(Moore,E. H.)
穆尔(Moore,R. E.)
穆勒(Mill,J. S.)
穆切尼克(Mučnik,A. A.)

N

纳什(Nash,J. F.)
纳维(Navier,C. (-L. -M. -H.))
奈曼(Neyman,J.)
耐各依达(Negoită)
内罗德(Nerode,A.)
能斯脱(Nenstor,W.)
尼科德(Nicod,J.)
尼科尔森(Nicholson,P.)
尼克(Nickel,K.)
牛顿(Newton,I)
努叶斯(Noyes,R. M.)
诺特(Noether,(A.)E.)
诺维科夫(Novikoff,P. S.)

O

欧布里德(Eubulides)
欧得姆(Odum,H. T.)
欧几里得(Euclid)
欧拉(Euler,L.)
欧文(Owen)

P

帕莱特(Parlett,B. N.)
帕雷托(Pareto,V.)
帕里斯(Paris,J.)
帕施(Pasch)
帕斯卡(Pascal,B.)
庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)
庞梅奥(Pomeau,Y. P.)
泡利(Pauli,W.)
培根(Bacon,R.)
培斯(Forbas,S. A.)
佩亚诺(Peano,G.)
彭罗斯(Penrose,R.)
皮尔(Pearl,R.)
皮尔斯(Peirce,C. S.)
皮尔逊(Pearson,E. S.)
皮尔逊(Pearson,K.)
皮斯曼(Peaceman,D. W.)
皮特曼(Pitman,E. J.)
蒲保明(Pu Baoming)
普莱费尔(Playfair,J.)
普朗克(Planck,M.)
普朗特(Prandt,L.)
普朗托(Prandtl,R. L.)
普利高金(Prigogine,I. G.)
普罗克洛斯(Proclus)
普特南(Putnam,H.)

Q

奇木拉(Qi Mula)
恰宾(Chapin)
恰克坦勃罗特(Trakhtenbrot,B. A.)
钱学森(Qian Xuesen)
乔里恩(Chorin,A. J.)
乔姆斯基(Chomsky,N.)
乔治丘-罗伊根(Georgesu-Roegen,N.)
乔治斯库-罗根(Geogescu-Roegen,N.)
切比雪夫(Чебышев,П. Л.)
切诺夫(Chernoff,H.)
秦九韶(Qin Jiushao)
琴狄霍姆(Gentilhomme)
丘奇(Church,A.)

R

瑞利(Rayleigh,J. W.)
瑞利(Rayleigh,L.)
瑞斯(Rice,H. G.)
若尔当(Jordan,E. P.)

S

萨凯里(Saccheri,G.)
萨克斯(Sacks,G. E.)
萨拉姆(Salam,A.)
萨曼斯基(Шаманский,B.)
萨缪尔森(Samuelson,P. A.)
塞尔(Theil,H.)
塞斯特内夫(Serstnev,A. N.)
桑戴克(Thorndike,E. L.)
桑切斯(Sanchez,E.)
舍伍德(Sherwood,J. M.)
沈有鼎(Shen Youding)
施灏(Girard)
施罗德(Schröder,K. W. K. E.)
施太伦(Stern,L. W.)
施瓦兹(Schwarz,H. A.)
史蒂文斯(Stevens,S. S.)
史密斯(Smith,A.)
舒斯特尔(Schuster,A.)
斯蒂格(Steger,J. L.)
斯卡夫(Scarf,H.)
斯卡夫(Scarf,H. E.)
斯科朗(Skolem,A. T.)
斯科特(Scott,D. S.)
斯科特(Scott,E. L.)
斯勒曼(Slaman,T. A.)
斯米尔诺夫(Смирнов,В. И.)

斯密(Smith,A.)
斯缪杨(Smullyan,R. M.)
斯尼德柯(Snedecor,G. W.)
斯派克特(Spector,C.)
斯佩纳(Sperner,E.)
斯皮尔曼(Spearman,C.)
斯坦因(Stein,C. M.)
斯特拉托诺维奇(Стратонович,Р. Л.)
斯特瓦特(Stewart,I.)
斯梯尔(Steel,J.)
斯通(Stone,J. R. N.)
斯图尔特(Stewart,F. M.)
斯图吉思(Sturgis,H. E.)
斯托克梅耶(Stokmeyer,L.)
斯维尔兹柯夫斯基(Swierczkowski,S.)
苏罗维夫(Soloviev,V. D.)
苏斯林(Суслин,М. Я.)
索尔(Soare,R. I.)
索洛韦(Solovay,R. M.)

T

塔尔斯基(Tarski,A.)
泰特(Tait,W. W.)
坦普尔(Temple,G.)
坦斯利(Tansley,A. G.)
汤家豪(Tong,H.)
汤普森(Thompson,K.)
特劳勃(Traub,J.)
特纳鲍姆(Tennenbaum,S.)
田口玄一(Tian Kouxuanyi)
图埃(Thue,A.)
图基(Tukey,J. W.)
图灵(Turing,A. M.)
托宾(Tobin,J.)
托马逊(Thomason,S. K.)
托平(Tobin,J.)

W

瓦尔德(Wald,A.)
瓦尔拉(Walras,L.)
外尔(Weyl,(C. H.) H.)
外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))
汪培庄(Wang Peizhuang)
王浩(Wang Hao)
威布尔(Weibull,W.)
威德隆(Widlund,O. B.)
威尔柯克松(Wilcoxon,F.)
威斯(Weiss,M. D.)
威斯博格(Wajsberg,M.)
威斯科特(Westcott,M.)
韦伯(Weber,H.)
韦德纳(Weidner)
韦尔奇(Welch,J. E.)
韦克斯勒(Wechsier,D.)
韦吕勒(Verhulst,P. F.)
韦特(Watt,K,E. F.)
维尔-琼斯(Vere-Jones,D.)
维纳(Wiener,N.)
维夏特(Wishart,J.)
温伯格(Weinberg,S.)
温策尔(Wentzel,G.)
温德洛夫(Wendroff,B.)
沃尔德(Wold,H. O. A.)
沃尔夫(Wolfe,P.)
沃尔弗威茨(Wolfowitz,J.)
沃尔泰拉(Volterra,V.)
沃利斯(Wallis,J.)
沃明(Warming,R. F.)
沃朋卡(Vopěnка,P.)
沃森(Watson,H. W.)
沃特(Vaught,R. L.)
沃特曼(Waltman,P.)
乌拉姆(Ulam,S. M.)
邬丁(Woodin,W. H.)
吴从炘(Wu Congxin)
吴天敏(Wu Tianmin)
吴文俊(Wu Wen-Chun)
武卡谢维奇(Łukaszewicz,J.)

X

西尔维(Silver,J.)
西曼吉克(Seamanjick,K.)
西蒙斯(Sims,C.)
西肖尔(Seashore,C. E.)
希尔(Hill,B.)
希尔伯特(Hilbert,D.)
希尔特(Hirt,C. W.)
希帕索斯(Hippasus,(M))
夏佛(Shafer,W.)
夏普(Sharpe,W. F.)
香诺(Shanno,D. F.)
肖尔(Shore,R. A.)
肖尔斯(Scholes,M. S.)
肖凯(Chcquet,G.)
萧奚安(Xiao Xian)
谢尔品斯基(Sierpiński,W.)
谢菲尔(Scheffé,H.)
谢佛(Sheffer,H. M.)
谢拉赫(Shelah,S.)
谢泼德森(Shepherdson,J. C.)
辛普森(Simpson,S. G.)
辛钦(Хинчин,А. Я.)
休恩菲尔德(Shoenfield,J. R.)
徐光启(Xu Guangqi)
徐利治(Xu Lizhi)
许宝騄(Xu Baolu)
薛定谔(Schrödinger,E.)

Y

雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)

雅可比(Jacobi,C. G. J.)
亚当·斯密(Adam Smith)
亚里士多德(Aristotle)
亚历克塞得罗夫(Aleksandrov,P. S.)
亚年科(Yanenko,N. N.)
亚希科夫斯基(Jaskowski)
延森(Jensen,R.)
杨(Young,W. H.)
杨振宁(Yang Zhenning)
耶茨(Yates,C. E. M.)
伊壁门尼德斯(Epimenides)
伊斯顿(Easton,W.)
伊藤清(Kiyosi,I.)
依萨姆(Isham,V.)
英格拉希亚(Ingrassia,M. A.)
英格索尔(Ingersoll,J.)
英屈利加托尔(Intriligator,M. D.)
尤尔(Yule,G. U.)

Z

扎德(Zadeh,L. A.)
寨卡德(Jaccard)
张辰中(Chang,C. C.)
张文修(Zhang Wenxiu)
赵访熊(Zhao Fangxiong)
芝诺(Zeno,(E.))
冢本宪甫(Tsukamoto,Y.)
周礼全(Zhou Liquan)
周毓麟(Zhou Yulin)
朱兰(Juran,J. M.)
朱世杰(Zhu Shijie)
朱梧槚(Zhu Wujia)
竹内外史(Zhu Neiwaishi)
邹至庄(Zou Zhizhuang)
佐恩(Zorn,M.)

后　　记

十八载坎坷跋涉，千余人魂牵梦萦，这部涵盖现代数学科学体系的大型工具书——《数学辞海》终于杀青付梓了，释负之余感慨良多。

上世纪80年代中期，随着国家改革开放的深入，华夏盛世初显，我们这些数学工作者深感教学与科研急需，且人过中年应有所建树以无愧人生，于是决意编纂一部大型数学工具书，以振兴祖国数学事业，为中华民族争光。当《数学辞海》的选题一经提出，便在国内外数学界赢得热烈反响，特别是得到了前辈名家的亲切关怀和积极支持。又经广泛调研、民主磋商和反复论证，一部集古今中外数学成就于一体的《数学辞海》总体设计方案被确定下来，我们从此踏上了始料不及的艰难历程。

立意之初，我们考虑到国家百业待兴，财力紧缺，准备不靠国家拨款，自筹资金完成这项系统工程，闯一条民间编纂大型工具书的新路。为搞好编纂工作，特地组成了民间机构——数学辞海编辑委员会及其常设联络办事机构：数学辞海编辑部，并得到国家教育部、山西省教育厅、山西省新闻出版局和山西省教育学院（现与山西大学师范学院、太原师专合并为太原师范学院）等有关部门的认可。撰稿初期，由于有200余所院校及科研单位几代数学工作者的热情支持和积极参与，进展尚属顺利，但随着工程的进展，要在全国范围内(包括港、台地区)的1500多名专家、教授之间联系落实撰稿、统稿、审稿、改稿、编辑、校对等工作，再加上绝大多数的专家、教授是利用业余时间完成以上工作的，缺乏资金来源和专业的工作人员等困难，使之民间组织的数学辞海编辑部实在不堪重负。为解决编辑活动经费，编辑部的一些人几度成为当代“武训”，四处奔走，多方求助。就这样，编辑部仍经常处在邮资、通讯和差旅费难以支付的境地。

在经历了“九九八十一难”之后，在《数学辞海》终于诞生的今天，我们深深感谢社会各界及国内外有识之士给予的慷慨捐助，特别是山西省人民政府的资助；深深感谢山西教育出版社、东南大学出版社、中国科学技术出版社和北京大学出版社给予的关键性支持。我们也不能忘记那些给我们送来100元、500元、1000元……的捐助者，当然更要告诉读者的是：如果您感到此书对您稍有帮助的话，请不要忘记这1000多名数学工作者是不计报酬、不讲条件地编纂这部工具书的，他们当中还有很多人把自己的工资捐献给编辑部，以确保数学辞海编辑部的工作不致中断。还有一些专家、教授，历经数年，甚至十几年苦心修典，往往一天伏案十五六个小时，终于积劳成疾，竟然没有亲眼看到《数学辞海》面世，就不无遗憾地离开了我们。听着他们临终遗言：“一定要尽快出版中国的《数学辞海》”，更增添了我们的一份紧迫感和责任感。

具有悠久历史的中华民族，对世界数学发展的杰出贡献，长期为世人瞩目，虽经中落，但中国当代数学科学又有了重大的进步。我们相信：在国家“科教兴国”方针指引下，中国必将再度成为数学大国，深望《数学辞海》能为实现这一宏伟目标略尽微薄之力。

《数学辞海》第一版即将面世之时，一种不名的恐惧萦绕心头，它的质量能获得读者的认可吗？能达到立意之初衷吗？希望广大读者在发现此书的种种问题时，不吝赐教。待我们稍稍喘息之后，将再邀请一批专家、教授对其进行修订，使之进一步充实提高，以期终臻完善。

数学辞海编辑部

2002年7月8日

《数学辞海》编辑部

图书在版编目(CIP)数据

数学辞海.第4卷/《数学辞海》编辑委员会编.
太原:山西教育出版社,2002.8

ISBN 7-5440-2400-8

Ⅰ.数… Ⅱ.数… Ⅲ.数学—词典

Ⅳ.O1-61

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 040691 号

书　　名:数学辞海(第四卷)

著作责任者:《数学辞海》编辑部

责 任 编 辑:徐亚东　李少霖　孙旭秋

书 名 题 字:启　功

装 帧 设 计:林胜利　王春声

标 准 书 号:ISBN 7-5440-2400-8/O.85

出　版　者:山 西 教 育 出 版 社
东 南 大 学 出 版 社
中国科学技术出版社

印　装　者:山西新华印业有限公司新华印刷分公司

发　行　者:山西教育出版社　东南大学出版社　中国科学技术出版社

经　销　者:新华书店

规　　格:880mm×1230mm　1/16　54.5 印张　2005 千字

出 版 日 期:2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷

本 卷 定 价:280.00 元　(全套定价:1800.00 元)